

最佳經濟批量排程問題之延伸研究

計畫類別：個別型計畫      整合型計畫

計畫編號：NSC 97-2221-E-029 -016 -MY2

執行期間：97年08月01日至99年07月31日

計畫主持人：姚銘忠

共同主持人：

執行單位：國立交通大學 運輸科技與管理系

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 最佳經濟批量排程問題之延伸研究

### On the Extensions of the Economic Lot Scheduling Problems

計畫編號：NSC 97-2221-E-029 -016 -MY2

執行期限：97年08月01日至99年07月31日

主持人：姚銘忠 國立交通大學 運輸科技與管理系

#### 一、中文摘要

經濟批量排程問題是針對單一生產設備的數種產品，探討其批量大小，並調整其週期生產的排程，使其生產計劃為可行，又能滿足顧客的需求，且平均總成本達到最小的存貨控制問題。在本計畫中，希望配合產品與製造性系統的特性，將經濟批量排程問題進行延伸研究。在許多產業，決策者正面對產品具有損耗特性下之經濟批量排程問題，例如：(1)蔬菜、水果、生鮮食品等易腐敗之食物；(2)汽油、酒精等揮發性之液體；(3)電子元件之功能退化、輻射性物質蛻變、底片的變質、藥物過期所導致的失效等。本計畫第一年計畫名稱為：「在產品具損耗特性下之最佳經濟批量排程問題與三種排程策略比較之研究」，探討下列兩個研究主題：

**研究主題一：在求解產品具損耗特性下之經濟批量排程問題之最佳解搜尋演算法**

因為主持人已經發表論文的研究方法，無法應用於「一般整數策略」下的求解，而且對於求解大型問題時，收斂速度通常較慢。故在求解方法的設計上，本研究計畫希望可以直接針對產品具有損耗特性下之經濟批量排程問題的數學模式，進行比較深入的理論分析，並透過最佳解結構的探討，設計搜尋演算法。

**研究主題二：在經濟批量排程問題中，常用的三種排程策略之比較**

文獻中未見有學者提出研究論文，對於經

濟批量排程問題常用的三種排程策略，在不同的參數組合下，進行求解品質之比較。因為此關乎決策者面對問題時，應該選擇何種排程策略，直接影響其求解品質，故為一個非常重要的議題。

本計畫的研究成果，將可以提供生產管理經理人，擬行最佳的生產計畫、批量與排程決策之參考。

**關鍵詞：**經濟批量排程問題、排程策略、損耗、搜尋演算法。

#### Abstract

The objective of the Economic Lot Scheduling Problem (ELSP) is to determine the lot size and the schedule of production of each item so as to minimize the total cost incurred per unit time. We would like to extend the conventional ELSP to incorporate with the characteristics of products and manufacturing systems in the real world in this proposal. In many industries, the production managers face the ELSP with deteriorating products, *e.g.*, (1) direct-spoilage products, vegetable, fruit and fresh food etc.; (2) physical-depletion products, *e.g.*, gasoline and alcohol etc.; (3) deterioration-products, such as radiation change, negative spoiling and loss of efficacy in inventory, *e.g.*, electronic components and medicine.

The topic of the project in the first year is “*On the Optimal Strategies of the Economic Lot Scheduling for Deteriorating Products and Comparison Analysis among Three Scheduling Strategies*”.

We would like to investigate the following two research topics.

**Sub-topic 1:** *Solving the Economic Lot Scheduling Problem with Deteriorating Products Using an Optimal Search Algorithm*

We note that the solution approach presented in the author’s past study is *not* applicable to the problem using the general-integer policy. On the other hand, the convergence rate of the proposed genetic algorithm may turn to be unattractive when the problem size becomes large. We would like to investigate the optimality structure of the problem and design an optimal search algorithm based on our theoretical results.

**Sub-topic 2:** *Comparison Analysis among Three Scheduling Strategies for the Economic Lot Scheduling Problem*

We did not find any research article that compares the three commonly-employed scheduling strategies for the ELSP in the literature. We would like to test the three scheduling strategies using different parameter combinations, and provide suggestions for the decision makers before they solve the ELSP.

We strongly believe that the deliveries of our project shall serve an important foundation for establishing a Decision-Support System (DSS) or an Advanced Planning and Scheduling (APS) for production managers in industries.

**Keywords:** Economic Lot Scheduling Problem, Scheduling Strategies, Deterioration, Search algorithm

## 二、緣由與目的

基於現實生活中更合理的假設，本研究將損耗性因素納入ELSP模式中探討。由於ELSP已被確認是一個難解的非多項式演算法（NP-hard）可解的存貨問題，原本就不易確保所求的解為合理可行，而在加入損耗性的考量後，會使得問題更趨複雜。本研究擬先對ELSP文獻中常見的幾種模式中加以探討，同時嘗試探討損耗 ELSP 在多種不同狀況下的適用求解模式。最後，本研究發展一套快速的運算與演算法(搜尋演算法結合合理解測試演算法)來改進當起始排程不符合限制式條件時，最佳解排程的尋找。

總括來說，本研究旨在探討帶有損耗之經濟批量排程的生產模式且有資源限制的條件下，使用不同的數學模式與結合啟發式演算法來獲得一個確實可行、成本更低的生產計劃排程。

## 三、研究報告應含的內容

因為本期中報告僅涵蓋第一年執行進度之第一研究主題的內容，而第二研究主題因仍在執行中，故暫不在期中報告呈現。以下彙整第一研究主題的研究成果：

### 1. 考慮損耗品存貨的經濟批量排程問題之數學模式

本章將介紹考慮損耗品存貨的經濟批量排程問題 (economic lot scheduling problem-ELSP)之數學模式。本問題運用到的假設與符號說明將在第 3.1 節介紹，第 3.2 節說明目標函數、決策變數與數學模式。

#### 1.1 假設與符號說明

考慮帶有損耗之經濟批量排程的生產模式中，所運用之假設如下：

1. 所有的產品由一個生產設備完成生產。
2. 任何時間點內，所有產品的需求率 (demand rate)、生產率 (production rate)、整備時間 (setup time)、整備成本 (setup costs) 和存貨持有成本 (inventory holding costs) 都是已知，不隨時間改變。

3. 在任何一個時間點上，在單一的生產設備中只能生產一個產品。
4. 產品需求是連續的，而生產設備的生產速率大於各產品需求速率的總和。
5. 整備成本與整備時間只與被生產出來的產品有關，與生產的順序與批量大小無關。該生產設備不具規模經濟(economy of scale)之特性；即單位產品的生產成本與批量大小無關。

6. 週期性生產排程中，每種產品的批量與其循環時間(cycle time)的長度都相同。

在損耗品的 ELSP 模式中所考慮的成本項目則包括：

1. 整備成本(setup costs)：為生產不同產品時，調整機器、換模換線的相關成本。
2. 存貨持有成本(inventory holding costs)：實體儲存的成本、或原可用於別處的資金被凍結於存貨的機會成本。
3. 生產成本(production costs)：包括物料成本、勞動成本和經常性管理開支的成本(overhead costs)。
4. 產品的損耗成本。

由於假設生產成本與批量大小無關，在最佳化的程序中生產成本可視為常數，因此在 ELSP 的模式中常被忽略。

考慮帶有損耗之經濟批量排程的生產模式中，所運用的符號定義如下：

- $n$ ：產品數
- $d_i$ ：產品  $i$  每單位時間的需求率(units/period)
- $p_i$ ：產品  $i$  每單位時間的生產率 ( $p_i > d_i$ ) (units/period)
- $a_i$ ：產品  $i$  每生產批量的整備成本
- $h_i$ ：每單位時間單位產品  $i$  的存貨持有成本(cost/unit/period)
- $TC_i$ ：產品  $i$  的平均總成本
- $\theta_i$ ：產品  $i$  的損耗係數，假設為一個常數
- $s_i$ ：產品  $i$  每生產批量的整備時間
- $T_i$ ：產品  $i$  的周期循環時間
- $B$ ：基本週期
- $k_i$ ：產品  $i$  的時間乘數
- $\rho_i$ ： $\rho_i = d_i / p_i$
- $\beta_i$ ：產品  $i$  每批量的機器操作時間
- $\theta I_i(t)$ ：時間點為  $t$  時產品  $i$  的損耗率

除了上列所介紹的符號定義外，我們額外定義一個方便的參數  $H_i$ ，即令  $H_i = d_i(\theta_i \xi_i + h_i)$ ，以求下列討論的計算式能夠比

較簡潔。另外  $\sum_{i=1}^n \rho_i \leq 1$  必須滿足，主要是用來說明機器設備有足夠的能力，可以滿足所有產品的需求。

## 1.2 數學模式

$$\text{Minimize } TC(k_1, \dots, k_n, B) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right\} \quad (3.1)$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^n w_{i\varphi(i,t)} [(s_i + \beta_i(k_i, B))] \leq B, \quad t = 1, 2, \dots, K \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{k_i} w_{it} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} w_{it} = 1, & \text{機器 } i \text{ 在第 } t \text{ 基期有進行維修} \\ w_{it} = 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$K = lcm(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (3.4)$$

$$\varphi(i, t) = \begin{cases} t \bmod k_i, & \text{if } t \neq \gamma k_i, \gamma \in N \\ k_i, & \text{if } t = \gamma k_i, \gamma \in N \end{cases}$$

(3.5)

其中， $H_i = d_i(\theta_i \xi_i + h_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$

首先討論目標函數的推導，Minimize  $TC(k_1, \dots, k_n, B)$  表示平均總成本， $\frac{a_i}{k_i B}$  表示單位時間的整備成本， $\frac{1}{2} H_i k_i B$  為週期存貨成本與耗損成本之和，其推導過程如下所示：

$$\text{週期的存貨成本：} \frac{h_i (P_i \beta_i - d_i T_i)}{T_i \theta_i} \quad (3.6)$$

$$\text{耗損成本：} \frac{\xi_i (P_i \beta_i - d_i T_i)}{T_i} \quad (3.7)$$

式 (3.6) 與式 (3.7) 加總後得，再將  $\beta_i = \frac{d_i}{p_i} (1 + \frac{\theta_i T_i}{2}) T_i$  帶入化簡後，令  $H_i = d_i(\theta_i \xi_i + h_i)$

得到週期存貨成本與耗損成本之和  $\frac{1}{2} H_i k_i B$ 。

有關產能限制式之說明如下：式(3.2)表示在每一基期進行生產的機器之整個生產花費時間的加總必須符合產能限制。式(3.3)表示產品  $i$  每  $k_i$  個基期只會生產一次，若有生產則  $w_{it}$  值為 1，沒有生產則  $w_{it}$  值為 0。全部生產排程之總基期數 ( $K$ ) 為  $n$  個產品乘數的最小公倍數，如式(3.4)所示。式(3.5)表示當第一次生產排定後，其餘基期如何依照乘數進行生產的安排。

## 2. 理論分析

第 2.1 節中介紹最佳總成本函數之片段凸性性質，並說明平均總成本曲線是由多個具有片段凸性的曲線所組成。第 2.2 節介紹最佳總成本函數之接合點，說明如何透過相鄰的成本

函數曲線之交點去搜尋最佳乘數。第 2.3 節介紹最佳總成本曲線之結構。第 2.4 節小結。

## 2.1 最佳總成本函數之片段凸性

總成本函數可以表達成式(4.1)。

$$TC(k_1, \dots, k_n, B) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right\} \quad (4.1)$$

其中  $H_i = d_i(\theta_i \zeta_i + h_i)$ 。

定義個別產品  $i$  之成本曲線為  $\Phi_i(k_i, B)$ ，如下所示：

$$\Phi_i(k_i, B) \equiv \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B$$

從圖1我們可以清楚的知道，對任何的  $B$ ，皆可找到使個別產品  $i$  之成本函數  $\Phi_i(k_i, B)$

為最小的  $k_i$ 。令  $\Gamma_i(B) = \min_{k_i \in \mathbb{N}^+, i=1, \dots, n} \left( \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \right)$  表

示個別產品  $i$  之成本函數  $\Phi_i(k_i, B)$  在各個  $B$  值之最低值所構成的片段凸性曲線。我們把所有總成本函數  $TC(k_1, \dots, k_n, B)$  的最低部份命名為  $\Gamma(B)$ ，即

$$\Gamma(B) = \inf_{B>0} \left\{ \sum_{i=1}^n \Gamma_i(B) \right\}$$

其曲線型式為許多具有片段凸性的曲線連續組合而成。我們將此性質以下列 Proposition 1 敘述之。但是為了證明 Proposition 1，我們必須先探討 Lemma 1，

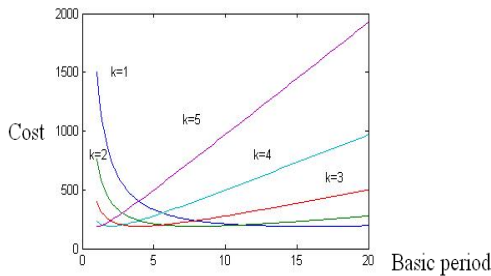


圖 1 產品  $i$  之成本曲線  $\Phi_i(k_i, B)$

**Lemma 1:**  $\Gamma_i(B)$  對  $B$  是一個片段凸性的函數。  
[Proof] :

在總成本函數裡，

$$TC(k_1, \dots, k_n, B) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \quad , \quad \text{其中}$$

$$\Phi_i(k_i, B) \equiv \frac{a_i}{k_i B} + \frac{1}{2} H_i k_i B \quad , \quad k_i \in \mathbb{N}^+ \quad , \quad i=1, \dots, n \quad .$$

我們先針對函數  $\Phi_i(k_i, B)$  分別進行一階導數和二階導數，得到：

$$\frac{d \Phi(k_i, B)}{dB} = \frac{1}{2} H_i k_i - \frac{a_i}{k_i B^2}$$

$$\frac{d^2 \Phi(k_i, B)}{dB^2} = \frac{2a_i}{k_i B^3} > 0$$

表示當  $B > 0$  時，對一特定之  $k_i$  值，函數  $\Phi_i(k_i, B)$

具有凸性的性質，有極小值在  $B = \frac{x_i^*}{k_i}$  位置產

生，其中

$$x_i^* = \sqrt{2a_i / H_i}$$

所以  $\Phi_i(k_i, B)$  對  $B$  而言是一個連續可微分的函數。

由式(4.2)可知，對任何的  $B$ ，皆可找到一個  $k_i$ ，使個別產品  $i$  之成本函數為最小，亦即  $\Gamma_i(B) = \min_{k_i} (\Phi_i(k_i, B))$ ，所以  $\Gamma_i(B)$  為一個對  $B$  具有片段凸性的函數。

**Proposition 1:**  $\Gamma(B)$  對  $B$  為一凸性的函數  
[Proof] :

透過 Lemma 1 我們可以知道  $\Gamma_i(B)$  具有片段凸性的特性，而片段凸性函數加上片段凸性函數還是為具有片段凸性的函數。因為  $\Gamma(B)$  是  $\Gamma_i(B)$  之和，所以  $\Gamma(B)$  同樣也是對  $B$  為一凸性的函數。

$$(4.3)$$

## 2.2 最佳總成本函數之接合點

在前一節中我們已經證明  $\Gamma(B)$  是具有片段凸性的函數。而在本節中我們將介紹在  $\Gamma(B)$  函數曲線上的接合點(Junction Point)。首先定義接合點是在片段凸性函數中，於特定時間  $T$  上之兩個連續曲線之交點。根據第 4.1 節可知  $\Gamma_i(B)$  是一具有片段凸性的函數，所以我們將先透過  $\Gamma_i(B)$  函數上接合點位置的推導，再證明  $\Gamma(B)$  函數曲線將會繼承  $\Gamma_i(B)$  函數曲線上所有接合點的特性。

### 2.2.1 接合點位置的推導

在個別產品  $i$  中， $\Gamma_i(B)$  函數上接合點的位置之推導可以透過鄰近的  $\Phi_i(k_i, B)$  與  $\Phi_i(k_i+1, B)$  二個函數求得。首先令兩鄰近函數  $\Phi_i(k_i, B)$  之差為  $\Delta_i(k_i, B)$ ：

$$\Delta_i(k_i, B) = \Phi_i(k_i+1, B) - \Phi_i(k_i, B)$$

$$= -\frac{a_i}{B(k_i+1)k_i} + \frac{1}{2} H_i B$$

我們注意到  $\Delta_i(k_i, B)$  為乘數  $k_i$  與  $k_i+1$  的成本差，且  $\Delta_i(k_i, B)$  是隨著時間  $B$  增加而遞增的函數。假設有一搜尋演算法從上界往時間  $B$  遞減的方向開始進行搜尋，所計算出  $\Delta_i(k_i, B)$  的值會由正值轉變成零，再由零轉變成負值。我們

令  $w$  為  $\Delta_i(k_i, B)$  之值為零的時間點，假設  $k_i$  為在  $B > w$  時的最佳乘數，這表示在時間  $B$  到達  $w$  之前， $k_i$  都是最佳的乘數，而當時間  $B \leq w$  時，則是以  $k_i + 1$  為其最佳的乘數。

其中值得注意的是： $w$  是兩個鄰近的片段凸性函數  $\Phi_i(k_i, B)$  與  $\Phi_i(k_i + 1, B)$  之交點，也就是接合點。而更重要的是接合點提供了在那個時間點上，所應該要選擇的最佳乘數之資訊。透過  $\Delta_i(k_i, B) = 0$ ，可以得到接合點位置之公式，如下所示：

$$\delta_i(k_i) = \sqrt{2a_i / H_i(k_i + 1)k_i}$$

綜合上述， $\delta_i(k_i)$  代表第  $k_i$  個接合點，其中  $k_i \in \mathbb{N}^+$ ， $i = 1, \dots, n$ 。當時間  $B > \delta_i(k_i)$  時，我們應選擇的最佳乘數為  $k_i^* = k_i$ ，否則選擇  $k_i^* = k_i + 1$  來促使  $\Gamma_i(B)$  函數的值為最小例如：對應於產品  $i$  成本曲線之  $\delta_i(1)$  代表  $k_i = 1$  與  $k_i = 2$  的交點。

### 2.2.2 接合點的理論性質探討

本節之理論性質在探討  $\Gamma(B)$  曲線上接合點的特性，由於  $\Gamma(B)$  與  $\Gamma_i(B)$  有個密不可分的關係 ( $\Gamma(B)$  是  $\Gamma_i(B)$  之和)，在此我們先加以證明  $\Gamma(B)$  函數曲線將會繼承  $\Gamma_i(B)$  函數曲線上所有接合點的特性。

**Proposition 2:**  $\Gamma(B)$  曲線繼承  $\Gamma_i(B)$  曲線所有接合點的特性。

[Proof]:

假設  $w$  是產品  $i$  之接合點，但不是其他  $n-1$  個產品的接合點，並假設存在一誤差值  $\varepsilon$ ，其中  $\varepsilon > 0$ ，並符合下列：

1. 假如針對每個  $\Phi_i(k_i, B)$  在區間  $[w - \varepsilon, w + \varepsilon]$  為凸性函數，則曲線  $\sum_{j \neq i} \Phi_j(k_j, B)$  在區間  $[w - \varepsilon, w + \varepsilon]$  是一凸性函數，其中  $j \neq i$ 。
2.  $\Phi_i(k_i, B)$  在區間  $[w - \varepsilon, w]$  和  $[w, w + \varepsilon]$  是一凸性函數。

所以  $\Gamma(B) = \Phi_i(k_i, B) + \sum_{j \neq i} \Phi_j(k_j, B)$  在區間  $[w - \varepsilon, w]$  和  $[w, w + \varepsilon]$  仍然是一凸性函數，因此  $w$  為  $\Gamma(B)$  曲線上的接合點。

以下將再介紹接合點的另一特性，以作為搜尋演算法的基礎。

**Lemma 2:** 假設  $k_L^*$  和  $k_R^*$  分別是在  $\Phi_i(k_i, B)$  凸性函數上接合點 ( $w$ ) 兩邊的最佳乘數，則  $k_L^* = k_R^* + 1$ 。

[Proof]:

透過式(4.8)的接合點位置之公式可以得到：

$$\delta_i(v) < \dots < \delta_i(k_i + 1) < \delta_i(k_i) < \dots < \delta_i(2) < \delta_i(1)$$

其中  $v$  為  $k_i$  值的上界。

我們以  $k_i^*(B)$  代表在給定時間  $B$  值的  $\Phi_i(k_i, B)$  函數中，所得到的最佳乘數。由式(4.8)與  $\Phi_i(k_i, B)$  具有片段凸性的函數，可以知道當  $B \in [\delta_i(1), \infty)$  時， $k_i^*(B) = 1$ ；當  $B \in [\delta_i(k_i + 1), \delta_i(k_i))$  時， $k_i^*(B) = k_i + 1$ ，所以我們可以清楚地得到  $k_L^* = k_R^* + 1$ 。

延伸 Lemma 2 的觀念，我們可以得到 Corollary 1，如下所示： (4.8)

**Corollary 1:** 在一給定的時間點  $B$ ， $\Phi_i(k_i, B)$  函數的最佳乘數，如下所示：

$$k_i^*(B) = \begin{cases} 1, & B > \delta(1) \\ m, & \delta(m) \leq B < \delta(m-1) \end{cases}$$

### 2.3 最佳總成本曲線之結構

在第二節中所提到接合點的特性給了我們以下的提示。為使符號簡單化，我們定義乘數向量  $\mathbf{k} \equiv (k_1, \dots, k_n)$ 。

**Theorem 1:** 假設  $\mathbf{k}^{(L)}$  和  $\mathbf{k}^{(R)}$  分別是在  $\Gamma(B)$  函數上接合點左右兩邊的最佳乘數向量，則  $\mathbf{k}^{(L)}$  可藉由  $k_i^{(L)} = k_i^{(R)} + 1$  從  $\mathbf{k}^{(R)}$  中獲得。

[Proof]:

透過之前 Proposition 1 與 Lemma 2 即可以得到得證。

我們先定義  $\bar{B}$  是  $\Gamma(k_1, \dots, k_n, B)$  函數曲線中，對應於最佳乘數  $k_i$  的局部最小值之時間位置。根據第 2.1 節和第 2.2 節的敘述，我們知道  $TC(k_1, \dots, k_n, B)$  函數最佳解的位置會落在接合點 ( $w$ ) 以及  $\Gamma(k_1, \dots, k_n, B)$  曲線的局部最低端點上。因此，我們首先要找出接合點的時間位置，再判斷  $\Gamma(k_1, \dots, k_n, \bar{B})$  的局部最低端點之時間位置  $\bar{B}$  是否位於接合點  $\delta_i(k_i - 1)$  與  $\delta_i(k_i)$  之間。若是  $\bar{B} \in [\delta_i(k_i), \delta_i(k_i - 1)]$ ，則  $\bar{B}$  為局部最小值，將目標函數(4.1)做一階導數並令其為 0，可得

$$-\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k_i B^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} H_i k_i = 0$$

故  $\bar{B}$  的封閉解(close form)可由式(4.11)求解得

$$\bar{B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k_i}}{\sum_{i=1}^n H_i k_i}}$$

### 2.4 小結

本章節針對數學模式的理論性質提出一套完整的理論分析，說明在求解的過程中可以

利用總成本曲線的接合點去搜尋最佳乘數，進而找到問題的最佳解。

### 3. 可行解測試演算法

Proc. FT演算法主要的輸出是一組合理的生產排程解，而目標函數最佳化所求之解 $(\{k_i\}, B)$ 是其主要的輸入。由於目標函數的最佳化並未考慮產能資源的限制，因此我們仍必須決定產品開始生產的基期，以避免過多的產品在同一時間生產而造成產能超過負載。當產能充裕時，也許我們可以輕易的得到許多的合理生產排程解，但若產能利用率極高時，Proc. FT演算法則可有效率的幫助我們產生一組初始的生產排程並藉由不斷的調整產品開始生產基期來改善產能負載的情形，最終的輸出提供使用者一個合理的生產排程解或送出確認無法找到合理排程解的訊息。

在執行Proc. FT演算程序中，本研究使用了一些新的參數，其定義如下所示：

$\tau$ ：在單一生產週期中，總生產時間最大者。

$W$ ：一種可能的排程結果。

$W^m$ ：在每次個別執行Proc. FT程序及區域搜尋或重複改善 $L$ 的過程，所得到的最小化總生產時間的生產排程。

$L(W^m)$ ： $W^m$ 生產排程中，最大的總生產時間。

$W^*$ ：第一次使用Proc. IS所得到的初始生產排程設為最佳生產排程。

$L(W^*)$ ： $W^*$ 生產排程中，最大的總生產時間。

$L(W)$ ：使用 $W$ 排程後，在所有生產基期中，最大的總生產時間。

$\Gamma(W^m(\tau))$ ：在排程 $W^m$ 中，第 $\tau$ 期進行生產且 $k_i$ 乘數大於1的產品集合。

$\Lambda(W^m(\tau))$ ：在排程 $W^m$ 中，不在第 $\tau$ 期進行生產且 $k_i$ 乘數大於1的產品集合。

$\lambda$ ：假如 $L(W^m)$ 已被改善，則 $\lambda=1$ ；否則 $\lambda=0$ 。

$\chi$ ：連續使用Proc. FT程序且無法改善 $L$ 的次數。

Proc. FT演算過程為先使用6.2節所定義的Proc. IS程序來產生一組初始的生產排程 $W$ 和計算 $L(W)$ 。由Proc. FT啟發式解法的定義，我們將第一次使用Proc. IS程序所得到的初始生產排程 $W$ 設為最佳生產排成 $W^*$ ，而 $L^*$ 則為最佳生產排程中機台的最大工作負載量，意即 $W^*=W$ 和 $L^*=L$ 。很顯然的如果 $L^*\leq B$ ，也就是對所有 $lcm\{k_i\}$ 個基期中，機台的工作負載都不會超過基本週期 $B$ 的長度，亦即 $W$ 是一個

合理的生產排程。我們定義 $\phi$ 指標來代表經由Proc. FT演算是否可以得到一組合理的生產排程解。如果可以，我們便令 $\phi=1$ ，否則 $\phi=0$ 。當 $\phi=0$ 時，我們使用排程撫平程序(Proc. SS，定義於6.3節)來改善 $L^*$ ，直到 $\phi=1$ 或者 $L^*$ 已無法改善。此時我們稱初始的生產排程 $W$ 經過一次的Proc. FT程序而無法改善得到一組合理解。當 $L^*$ 連續 $\Upsilon$ 次經Proc. FT程序而無法改善時，則停止Proc. FT演算。我們定義 $L$ 連續無法改善的次數為 $\chi$ ，當 $\chi\leq\Upsilon$ 時，則隨機選取上次Proc. FT演算最終的生產排程之一半子集合將之固定，利用Proc. IS供再改善 $L$ 的初始排程，重新另一次的區域搜尋與排程改善。最後決定是否終止Proc. FT演算法的臨界值 $\Upsilon$ ，則是決策分析者的決策參數。

#### 3.1 設定初始條件

1. 設定門檻值( $\Upsilon$ )：作為運算結束的標準值， $\Upsilon$ 值愈大，找到可行解的機率就愈大，但運算所花費的時間相對地會愈多。
2. 設定計次器 $\chi=0$ ：表連續使用Proc. FT程序且無法改善 $L^*$ 的次數，若 $\chi>\Upsilon$ ，則停止運算。
3. 設定可行解 $\phi=0$ ：表示排程為不可行，但若經Proc. FT方法調整其排程，並且使得每個基期所有產品的總生產時間皆小於或等於 $B$ ，則表示其排程是可行的，此時 $\phi=1$ ，並停止運算。

#### 3.2 初始排程(Proc. IS)與產品排程(Proc. PS)

Proc. IS用來快速的產生一組初始生產排程，它主要被使在下列兩種情形中：

1. 產生一組開始區域搜尋的初始生產排程 $W$
2. 產生一組供重複再改善 $L$ 的種子生產排程

我們定義 $N$ 表示所有 $n$ 種產品的集合， $\mathcal{g}$ 表示產品的子集合，因此 $|\mathcal{g}|\leq n$ 。而 $W(\mathcal{g})$ 則表示產品子集合 $\mathcal{g}$ 的部分生產排程。每種產品是依其 $k$ 值及第一個開始生產基期，來決定所有基期中，那個基期要進行生產，那個基期不生產（即該產品在該基期的生產時間為0）。在進行生產排程時，一個產品接一個產品加入生產排程，每次之生產排程皆以該次所有基期負荷最小的值為主，且其總基期數為參與生產排程的產品 $k_i$ 之最小公倍數。若所有產品排完後，每個基期的總生產時間皆小於或等於 $B$ ，則表示其生產排程是可行的，則停止運算，否

則進入下列調整週期的方式。Proc. IS演算步驟程序說明如下。

Step 1：檢驗 $\gamma$ 的值。

1.1 判斷 $\gamma=0$ ，是則令 $\mathcal{G}=\emptyset$ 和 $W(\mathcal{G})=\emptyset$ ，並進入Step 2。

1.2 判斷 $\gamma>0$ ，是則令 $\mathcal{G}=F$ 和

$W(\mathcal{G})\equiv W(F)=W_0(F)$ ，即將原先 $W_0$ 排程中之 $F$ 產品集合排程維持不變，並進入Step 2。

Step 2：優先指派 $k_i$ 乘數為1的產品進入排程。

2.1 對所有未指派到排程的產品 $\bar{F}$ ，若其 $k_i$ 乘數為1，則優先指派 $X_i$ 到 $W(\mathcal{G})$ 排程中，並更新 $\mathcal{G}=\mathcal{G}\cup\{j\mid j\in\bar{F}\text{ and }k_j=1\}$ 。假使所有 $\bar{F}$ 中的 $k_j$ 均大於1，則略過Step 2。

Step 3：將 $i\in(N-\mathcal{G})$ 的 $X_i$ 由大到小進行降冪排列，並設 $\Xi$ 代表排序 $X_i$ 後的產品集合之識別子。

Step 4：檢驗在 $\Xi$ 集合中的值：

4.1 判斷 $\Xi\neq\emptyset$ ，是則進入Step 4.1.1。

4.1.1 從 $\Xi$ 集合中得到產品 $\hat{i}$ ，且 $\hat{i}=\operatorname{argmax}_{j\in\Xi}\{\sigma_j\}$ 。

4.1.2 使用Proc. PS 程序將 $X_{\hat{i}}$ 指派到 $W(\mathcal{G})$ 排程中。

4.1.3 將 $\mathcal{G}$ 和 $\Xi$ 集合更新為 $\mathcal{G}=\mathcal{G}\cup\{\hat{i}\}$ 和 $\Xi=\Xi-\{\hat{i}\}$ ，並回到Step 4。

4.2 判斷 $\Xi=\emptyset$ ，是令 $W=W(N)$ ，並停止Proc. IS 演算程序。

Proc. PS演算步驟程序說明如下。

Step 1：計算所有 $k_i$ 的最小公倍數，

$$K=lcm\{k_1, k_2, \dots, k_N\}。$$

Step 2：計算 $R_t$ 值。

2.1  $R_t$ 為在初始部分生產排程 $W(\mathcal{G})$ 中的第 $t$ 個生產基期之目前總生產時間， $t=1, \dots, K$ 。

$$R_t = \sum_{i\in\mathcal{G}} w_{i\varphi(k_i, t)} (\tau_i + \pi_i)$$

$$l = \varphi(k_i, t) = \begin{cases} t \bmod k_i, & \text{if } t \neq \gamma k_i, \gamma \in N \\ k_i, & \text{if } t = \gamma k_i, \gamma \in N \end{cases}$$

and  $w_{ii} = \{0, 1\}$  for all  $i$  and  $l$

Step 3：選擇 $w_{ii}^*$ 。

Step 4：由Step 4所得的 $w_{ii}^*$ 更新 $W(\mathcal{G}\cup\{\hat{i}\})$ 。

### 3.3 調整週期的方式

Proc. FT共有移出、1對1互換及2對1互換三種調整週期的方式，分別說明如下。

#### 3.3.1 移出(The Smooth-Out Routine)

從總生產時間最大的基期中，選1個 $k_i$ 大於1且生產時間最大的產品，移至其他總生產時間較小的基期中。若移出後，每個基期的總生產時間皆小於或等於基本週期，則為可行解，即可停止運算，否則要進入下列1對1互換的方式。

#### 3.3.2 1對1互換(The Pair-Exchange Routine)

從總生產時間最大的基期中，選1個 $k_i$ 大於1且生產時間最大的產品，和其他基期中生產時間較小且 $k_i$ 大於1之產品互換。若1對1互換後，每個基期的總生產時間皆小於或等於基本週期 $B$ ，則為可行解，即可停止運算，否則要進入下列2對1互換的方式。

#### 3.3.3 2對1互換(The Two-to-One Exchange Routine)

從總生產時間最大的基期中，選1個 $k_i$ 大於1且生產時間最大的產品，和其他基期中產品時間較小且 $k_i$ 大於1之2種產品互換。若2對1互換後，每個基期的總生產時間皆小於或等於基本週期，則為可行解，即可停止運算，否則要進入下列隨機選取 $[n/2]$ 台產品重新排程的方式。

#### 3.3.4 隨機選取 $[n/2]$ 產品重新排程

如果經過移出、1對1互換及2對1互換後還找不到可行解，則從 $n$ 個產品中，隨機選取 $[n/2]$ 個產品重新排程，其餘產品的排程固定，再重覆上述6.2~6.3的步驟，直到 $X>Y$ 為止。即找 $[n/2]$ 個產品來作局部的最佳化排程，以使得生產排程的最大總生產時間 $L(W)$ 能減少至可行解。

### 3.4 輸出

1. 找到可行解：在整個Proc. FT可行解的判斷過程中，只要找到可行解，即可停止程式的運算，並輸出可行解的資料，如：可行解的排程、總成本、 $(\{k_i\}, B)$ 及運算時間等資料。
2. 找不到可行解：若可行解的判斷次數超



過 $\Upsilon$ ，則停止程式的運算，並輸出找不到可行解的訊息。

### 3.5 Proc. FT演算步驟程序

Proc. FT 演算步驟程序說明如下。

Step 1：設定初始條件。

1.1 令 $\gamma=0, \chi=0$ 且 $\varphi=0$ 。讀入 $\Upsilon$ 參數。

Step 2：藉由Proc. IS 與 Proc. PS程序得到一組初始生產排程 $W$ 並開始區域搜尋。

2.1 令 $W^m = W$ 和 $L(W^m) = L(W)$ 。

2.2 判斷 $\gamma=0$ ，是則令 $L^*(W^*) = L(W^m)$ 和 $W^* = W^m$ 。

2.3 判斷 $L(W^m) \leq B$ ，是則令 $L(W^F) = L(W^m), W^F = W^m$ 與 $\varphi=1$ ，並進入Step 4。否則進入Step 3。

Step 3：應用調整週期的方式改善 $W^m$ 的 $L(W^m)$ 。

3.1 使用移出程序來改善。

3.1.1 判斷 $L(W^m) \leq B$ ，是則令 $\varphi=1, L(W^F) = L(W^m)$ 和 $W^F = W^m$ ，並進入Step 4。否則進入Step 3.1.2。

3.1.2 判斷 $L(W^m) > B$ 和 $L(W^m)$ 是否已被改善，是則回到Step 3。否則進入Step 3.2。

3.2 使用1對1互換程序來改善。

3.2.1 判斷 $L(W^m) \leq B$ ，是則令 $\varphi=1, L(W^F) = L(W^m)$ 和 $W^F = W^m$ ，並進入Step 4。否則進入Step 3.2.2。

3.2.2 判斷 $L(W^m) > B$ 和 $L(W^m)$ 是否已被改善，是則回到Step 3。否則進入Step 3.3。

3.3 使用2對1互換程序來改善。

3.3.1 判斷 $L(W^m) \leq B$ ，是則令 $\varphi=1, L(W^F) = L(W^m)$ 和 $W^F = W^m$ ，並進入Step 4。否則進入Step 3.3.2。

3.3.2 判斷 $L(W^m) > B$ 和 $L(W^m)$ 是否已被改善，是則回到Step 3。否則進入Step 3.4。

3.4 判斷 $L^*(W^*)$ 是否已經改善。

3.4.1 判斷 $L(W^m) < L^*(W^*)$ ，是則令 $\chi=0, L^*(W^*) = L(W^m)$ 和 $W^* = W^m$ ，並進入Step 4。否則進入Step 3.4.2。

3.4.2 判斷 $L(W^m) \geq L^*(W^*)$ ，是則令

$\chi = \chi + 1$ ，並進入Step 4。

Step 4：判斷Proc. FT 程序是否已經達到終止

條件。

4.1 判斷 $\chi > \Upsilon$ 且 $\varphi=0$ ，是則停止Proc. FT 演算，並輸出“無可行解排程”。

4.2 判斷 $\chi \leq \Upsilon$ 且 $\varphi=0$ 是則隨機選取 $\lfloor n/2 \rfloor$ 個產品重新排程並標記為 $\bar{F}$ ，令 $\gamma=1$ ，並進入Step 2 再次改善。

### 4. 數據實驗

本研究利用 Elmaghraby (1997) 和 Fujita (1978) 文獻的六個數值範例進行實驗，並定義失誤測量指標(Error Measure Index ; EMI)如下：

$$EMI = (TC_{POT}^*(K^* * B^*) - TC^{IS}) / TC^{IS} * 100\%$$

對每一個實驗數據皆進行 30 次實驗，結果如表 1 所示；其中 Avg EMI 表示平均失誤測量指標，Avg RT 表示平均實驗時間。

### 5. 結論

本研究指出在產品具有損耗性可能發生的前提假設下，使用延伸週期法找出損耗性 ELSP 模式下的最佳解。在探討損耗品 ELSP 模式，經由前面章節推導出在若干現實生活中可能發生的特定條件下，運用延伸週期法的封閉解(closed-form solution)即為該模式之最佳解。在捨棄了前提條件的情形下，本研究則利

用以搜尋法得到一組 $(K, B)$ 結合Proc FT演算法求解損耗性ELSP(EBP)模式幫助決策者得到一組較佳的合理可行的排程解。

### 四、參考文獻

- [1] Abad, P.L., "Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale," *Computers and Industrial Engineering*, 38, 457-465 (2000).
- [2] Axsäter, S., "Alternative dynamic programming approaches to obtain upper bounds for the economic lot scheduling problem," *Eng Costs and prod Econ* 6, 179-189, 1982.
- [3] Boctor, F. F., "The G-group Heuristic for single machine lot scheduling," *International Journal of Production Research*, 25, 3, 363-379, 1987.
- [4] Bomberger, E. E., "A dynamic programming approach to a lot size scheduling problem," *Management Science* 12, 778-784, 1966.
- [5] Davis, S.G., "Scheduling economic lot scheduling problem runs," *Management Science* 36, 985-998, 1990.
- [6] Doll C.L. and Whybark DC. Thomas, "An interactive procedure for the single-machine multi-product lot scheduling problem," *Management Science*, 20, 50-55,

- 1973.
- [7] Elmaghraby, S.E., "The economic lot scheduling problem: review and extensions," *Report 112*, pp.587-598, 1976.
- [8] Elmaghraby, S.E., "The economic lot scheduling problem: review and extensions," *Management Science*, 24, 587-598, 1978.
- [9] Elsayed, E.A., & Teresi, C. " Analysis of inventory system with deteriorating items," *International Journal of Production Research*, 21, 449-460, 1983.
- [10] Fujita, S., "The Application of Marginal Analysis to the Economic Lot Scheduling Problem," *AIIE Transactions* 10, 4, 1978.
- [11] Gallego, G., "An Extension to the class of easy Economic lot scheduling problems," *IIE Transactions*, 22, 189-190, 1990. 71
- [12] Gallego, G. and I. Moon, "The effect of externalizing setups in the economic lot scheduling problem," *Operations Research*, 40, 614-619, 1992.
- [13] Gallego, G., "Reduced production rates in the economic lot scheduling problem," *International Journal of Production Research*, 31, 1035-1046, 1993.
- [14] Gallego, G. and I. Moon, "Strategic investment to reduce setups times in the economic lot scheduling problem," *Naval research logistics*, 42, 773-790, 1995.
- [15] Geng, P.C. & Vickson, R.G., "Two Heuristics for the economic lot scheduling problem: an experimental study," *Noval Res Logist* 35, 605-617, 1988.
- [16] Glass, C.A., "Feasibility of scheduling lot sizes of three products on one machine," *Management Science*, 38, 1482-1494, 1992.
- [17] Ghare, P.M., and G.F. Schrader, "A model for an exponentially decaying inventory," *Journal of Industrial Engineering*, 14, 238-243, 1963.
- [18] Goldberg, D. E., "Genetic and evolutionary algorithm come of age," *Communications of the ACM*, 37, 113 – 119, 1994.
- [19] Goyal, S.K., "Scheduling a multi-product single-machine system," *Operations Research*, 24, 261-266, 1973.
- [20] Graham, R.L., "Bounds on Multiprocessing Timing Anomalies," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, 416-429, 1969.
- [21] Haessler, R. and Hogue., "A Note on the Single Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem," *Management Science* 22, 8, 909-912, 1976.
- [22] Ham, I.; Hitomi, K. & Yoshida, T., *Group Technology: Applications to Production Management*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston, 2,1985.72
- [23] Hanssmann, F., *Operation Research in Production and Inventory*, New York City 158-160, 1962.
- [24] Harris, F. W., "How many parts to make at once," *Operational Research* 38, 947-950, 1990.
- [25] Heng, K.J. , Labban, J., & Linn, R.J. "An order-level lot-size inventory model for deteriorating items with finite replenishment rate," *Computers and Industrial Engineering*, 20, 187-197, 1991.
- [26] Hsu, W. L., "On the general feasibility test of scheduling lot sizes for several products on one machine," *Management Science* 29, 93-105, 1983.
- [27] Khouja, M., "The economic lot scheduling problem under volume flexibility, forthcoming," *The International Journal of Production Economics*, 48, 73-86, 1997.
- [28] Khouja, M., Z. Michalewicz, and M. Wilmot, "The Use of Genetic Algorithms to Solve the Economic Lot Size Scheduling Problem," *European Journal of Operation Research*, 110, 509-524, 1998.
- [29] Kim, S. L., J. C. Hayya, and J. Hong, "Setup reduction and machine availability," *Production and Operations Management*, 4, 76-90, 1995.
- [30] Lopez, M.A. and B.G. Kingsman, "The Economic Lot Scheduling Problem: Theory and Practice," *International Journal of Production Economics*, 23, 147-164, 1991.
- [31] Madigan, J.C., "Scheduling a multi-product single machine system for an infinite planning period," *Management Science*, 14, 713-719, 1968.
- [32] Misra, R.B. "Optimal production lot size model for a system with deteriorating items," *International Journal of Production Research*, 13, 495-505, 1975.
- [33] Nahmias, S., "Perishable inventory theory: a Review," *Operations Research*, 30, 680-708, 1978
- [34] Park, K. and D. Yun, "A Stepwise Partial Enumeration Algorithm for the Economic Lot Scheduling Problem", *IIE Transactions*, 16, 363-370, 1984.
- [35] Philip, C. and Robert R., "When is the economic lot scheduling problem easy," *European Journal of Operational Research*, 110, 509-524, 1998.
- [36] Pinedo, M., *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall), 1993.
- [37] Raafat, F. "Survey of literature on continuously deteriorating inventory models," *Journal of Operational Research Society*, 42, 27-37, 1991.
- [38] Rogers, J., "A computational approach to the economic lot scheduling problem," *Management Science* 4, 264-291, 1958.
- [39] Silver, E., "Deliberately slowing down output in a family production context," *International Journal of Production Research*, 29, 17-27.1990.
- [40] Yao, M. J., "The economic lot scheduling problem with extension to multiple resource constraints," Unpublished Ph.D. Dissertation, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina USA, 1999.
- [41] Yao, M.J., "On the Feasibility Testing Problem for the Economic Lot Scheduling Problem," Proceedings of the 8th Bellman Continuum Conference, Hsinchu, Taiwan, 307-315 2000.
- [42] Yao, M.J., "The Peak Load Minimization Problem in Cyclic Production," *Computers and Operations Research*, 28, 1441-1460, (2001).

表 1 六個範例的實驗數據

Data set	$\sum_{i=1}^n \rho_i$	$TC_{opt}^*$ ( $K^*, B^*$ )	$B$ (days)	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	Best EMI(%)	Avg EMI(%)	Avg RT(s)
1	0.8823	45302	0.018	8	2	2	1	4	8	16	1	4	2	0.396	0.396	0.449
2	0.6652	83845	0.014	8	8	2	16	2	8	4	8	1	1	0.99	0.99	0.580
3	0.7104	1258400	0.012	64	64	64	32	64	32	64	64	64	64	24.9	24.9	2.332
4	0.5845	280250	0.018	4	2	4	1	2	2	8	2	1	4	0.2301	0.512	0.343
5	0.4125	52689	0.013	4	4	4	4	1	2	1	4	8	4	0.052	0.102	0.522
6	0.5960	112750	0.014	2	4	4	8	4	4	1	2	1	2	0.0697	0.07	0.03