管　理　與　系　統
第十八卷 第二期　民國一〇〇年四月
295-316 頁

Journal of Management & Systems
Vol. 18, No. 2, April 2011
pp. 295-316

聯合利率模式在跨國債券 投資風險管理之應用

A Joint Interest Rate Model on the Application of International Bond Portfolio Risk Management

李志偉 [1]　Chih-Wei Lee
國立臺北商業技術學院財務金融研究所

張銘仁 [2]　Ming-Jen Chang
國立東華大學經濟學系

[1]Graduate Institute of Finance, National Taipei College of Business and [2]Department of Economics, National Dong Hwa University

(Received March 27, 2009; Final Version August 18, 2009)

摘要：本文推導一聯合利率模式，以主成份分析法萃取利率因子，再以最大概似估計法來估計參數，最後介紹如何以參數估計值衡量金融機構跨國債券投資之風險值。傳統的利率模式應用在跨國債券投資時，只考慮兩國利率的均衡、卻容易忽略匯率也必須反映兩國的利率平價。傳統利率模式只能單純考量利率風險，而匯率風險則另外衡量，無法在同一架構下考慮匯率及利率風險，因而對於利率與匯率風險因子的相關性估計會有偏差。但若以聯合利率模式評估風險時，則可以解決此一問題。本文發展的聯合利率模式，除了考慮利率動態的假設外，並可改進現有方法忽略利率與匯率相關性的缺點。在實證估計上，我們應用主成份分析及最大概似估計法，推估聯合利率模式的相關參數。此外，本研究也說明如何將此模式，應用在跨國債券投資的風險值計算上。

關鍵詞：跨國債券投資、聯合利率模式、主成份分析

Abstract: In this paper, we derive a joint interest rate model used for international bond portfolio risk management in a market integration environment.　Unlike existing models which considering interest rate and foreign exchange rate separately, our model includes both rates in an integrated framework. We propose a joint interest rate model to address problems of neglecting interest rate and foreign

---

本文之通訊作者為張銘仁，e-mail: mjchang@mail.ndhu.edu.tw。

exchange rate correlation, and failing to consider dynamic interest rates which often appear in previous studies. We use principal component analysis (PCA) to extract interest rate components. Maximum likelihood estimation (MLE) is used to estimate parameters in a multi-factor, two countries term structure model. Besides, numerical analysis regarding to foreign currency bond portfolio is performed. In addition, our parameter estimation supports that bond markets between Taiwan and the U.S. become more integrated when variance of common factor increases. However, bond markets get less correlated while variances of country-specific factors increase.

Keywords: International bond portfolio, Joint interest rate model, Principal component analysis

1. 緒論

近年來由於國內利率持續處於低檔，加上國外主要股市漲幅大都較國內股市高，機構投資人為了賺取較高的海外投資收益或外幣升值的匯差，因此陸續將海外投資標的納入投資組合之中。國際投資活動日益頻繁，對跨國投資需求亦逐漸增加。本文在考慮全球債券市場整合的架構下，建立一聯合三因子利率模式，並藉由主成份分析法估計模型參數。最後，將此模式實際驗證在金融機構跨國債券投資之風險值估算上。

茲以台灣的投資信託與保險產業為例。首先是以投信公司的投資組合來看，由於國內投資人購買海外有價證券的意願愈來愈高，投信公司為滿足投資人的需求，也開始募集海外基金。由於投信公司投資海外基金可能面臨外幣貶值的風險，以美金投資為例，央行會要求投信以賣出美元遠匯，或承作美元/台幣之換匯換率交易 (cross currency swap; CCS) 來避險。保險公司的情況類似，由於台灣債券利率過低，使得保單契約頻頻出現利差損失，轉而必須購買收益較高的海外債券，也因此面臨和投信公司相同的匯率風險。但因為主管機關對壽險公司的避險規定比較有彈性，因此有些壽險公司會選擇成本較低的一籃通貨來避險。由以上說明可知，國內金融機構對海外債券的風險管理需求已相當迫切。本研究希望能發展一套適合之利率模式，以增進國內金融機構之利率風險管理能力。

若僅就單一幣別而言，目前已有多種利率模式被應用在債券組合的風險管理。但當投資組合涉及到外國債券的投資時，則因為影響風險的因子多了兩種：外國利率與兩國貨幣間之匯率，這使得風險管理變得複雜許多。若未能妥善處理，則可能錯估投資組合的風險，影響金融機構之收益評估或避險比例及風險資本之計算。一般的外國債券風險管理，都會先對各風險因子的變動過程做假設，這些風險因子包括本國利率、外國利率與匯率。而整個風險管理的核心，就在於如何建構一個跨國的聯合 (joint) 利率模式。

在有關跨國聯合利率模式的文獻裡，討論利率與市場整合的理論主要以利率平價說 (interest rate parity; IRP) 最爲常見。例如，Backus *et al*. (2001)、Han and Hammond (2003) 及 Inci and Lu (2004) 等曾提出兩國 IRP 模式，試圖解釋或解決遠期溢酬困惑 (forward premium puzzle)。然而，IRP 並未考慮利率動態的模型設計，因此有 Egorov *et al*. (2011) 改採多因子聯合利率模式的分析方法；Dai and Singleton (2000) 用次族群 (subfamily) 的分類方法等，引進利率動態的觀念。

在利率動態模型中有關利率與匯率整合模式的文獻，首推 Lucas (1982) 的兩國連續時間均衡模式，後有 Bakshi and Chen (1997)、Bansal (1997) 與 Saá-Requejo (1993) 發展以跨國爲基礎 (international-based) 的聯合利率模式。晚近，Ahn (2004) 繼續推展此聯合利率模式。但以上傳統利率期限模式的缺點是將利率與匯率分開考慮，然後合併兩種幣別之利率模式，而非將匯率因素考慮至模型當中，如此還是忽略了兩國間利率的相關性。在一個整合程度高的債券市場，這種缺點會更加嚴重。

市場整合的研究在國際金融相關領域，一直都是相當熱門的重要議題。八〇年代後期以來，由於各國政府逐漸解除資本市場管制，金融市場全球化與整合成爲重要趨勢。市場整合產生的效果主要有二：一是可以減少本國偏誤困惑 (home bias puzzle)，另一則是會增加跨市場間相關性 (cross-market correlations) (見 Baele, 2005; Bekaert *et al*., 2009)。其他效果尙有，市場整合可減少國內、外投資人間的訊息不對稱 (Baele *et al*., 2007) 等。此外，學者們也發現市場整合趨勢，使得全球不均衡 (global imbalance)的現象開始出現，亦即經常帳的持續不均衡(Fratzscher and Hartmann, 2007)。

新興地區資本市場整合的優點很多，例如顯著降低企業的資金成本、藉由高成長及更有效率的風險分擔來增進社會福祉、增加國際投資人的資產訂價影響及改善跨國的法規談判 (Hunter 2006)等。有關資本市場整合的文獻近幾年發展相當快速，Lothian (2006) 曾以美國經濟大蕭條以及二次世界大戰前、後的實例，說明市場整合的程度會因國家及期間而不同，且整合的過程並非連續。

由於市場整合會增加各國利率間的相關性，因此更加突顯現有跨國利率模式的缺點，必要思考建立一個跨國利率理論模型加以改善。先前的文獻都著重在聯合利率模式的遠期溢酬，或是跨國債券投資組合的匯率避險上。本文希望在同時考慮國內、外利率與匯率的架構下，推導出一適合之聯合利率模式，並說明其如何應用在風險管理上。亦即彌補傳統利率期限模式只考慮利率、卻忽略匯率的缺點，使得整個利率模式能更加完整。本文使用 Constantinides (1992) 的隨機折現因子法，建立利率與匯率整合模式，並參考 Perignon *et al*. (2007) 之主成份分析 (principal component analysis; PCA)，來找出解釋變數。

本文其他內容的架構如下：第貳節建立聯合利率模式。主成份分析以及利率參數統計量的

推導置於第參節。第肆節將說明參數統計量之估計結果。以跨國債券投資組合爲例，並介紹如何應用此聯合利率模式在風險值的計算上則於第伍節中討論。最後爲結論。

2. 三因子聯合利率模式

本節將介紹聯合利率模式的推導，首先建立一跨國三因子利率模式，其次分析折現因子與參數間的關係。

2.1 跨國三因子利率模式

爲建立一個跨國三因子的利率模式，假設利率由三個因子所決定，其中一個爲共同因子(common factor)，另兩個爲個別因子 (local factors)。此模式是利用條件預期下的隨機折現因子計算出來，在無套利的情況下匯率的變動會成爲內生條件。這模式的優點在於可以交叉分析不同期限下，兩國的利率期限結構。根據 Ahn (2004) 與 Constantinides (1992) 的隨機折現因子(stochastic discount factor; SDF) 法，先假設 SDF 的擴散過程，即漂浮項受到共同因子與個別因子影響。隨機項則受到所有共同及個別因子的影響。綜上所述，此模式共有三個因子，一爲共同因子，以及分屬每個地區之個別因子。因此，每個國家的利率期限結構由這些 SDF 的條件期望值所決定，且在無風險套利假設下，匯率的貶值幅度由兩國隨機折現因子的比例所決定。

當一國資金有寬鬆或緊俏的情況時，會反應在利率上。長天期利率反應未來的資金供需情況，可能與景氣及通膨預期有關；短天期利率則反應金融機構的資金流動性。在聯合利率模式架構下，我們需建立一代表性利率，因此必須將各天期利率縮減爲一個代表性利率，並假設此利率由兩種成份組成，一是共同因子，另一爲當地因子。所謂共同因子在本文中表示同時會衝擊本國與他國代表性利率水準的因素，這種共同因子通常是一個影響全球金融市場的事件。例如 2001 年 911 事件後，全球金融市場動盪不安，美國聯準會爲支撐投資信心，於 10/3 意外宣佈降息 2 碼，台灣中央銀行也於 10/3 日傍晚公佈調降貼放利率各一碼，平均存款準備率自 6.23% 降至 5%，同時調降貼放及擔保融通放款利率，降幅與規模之大史上少見。因此 911 事件造成共同因子變動，此變動同時影響本國與外國利率水準。

接著，假設本國的資產個數爲 N_d，定義本國 SDF 爲 $m_d^{d*} = M_d^d(T)/M_d^d(t)$ ，其中 $M_d^d(t)$ 爲在時間 t 時之 Arrow-Debreu 價格機率密度函數。定義 x_d^d 爲總報酬率向量，維度 (dimension) 爲資產數 N_d。根據單一價格法則 (law of one price)，可得 $\ell_{N_d} = E(m_d^{d*} x_d^d)$ ，其中 ℓ_{N_d} 爲維度 N_d 的向量，$E(.)$爲期望值。此外，本國證券價格 $P_d^d(t) = E^P\left[\frac{M_d^d(T)}{M_d^d(t)} P_d^d(T) \middle| F_t\right]$，其中 $E^P(.)$爲測度 P 之期望值。假設全球是完全市場 (complete market)，且 SDF 屬擴散經濟 (diffusion economies)，因此會存在一個全球 SDF，此全球 SDF 若以本國幣表示則爲 $M_d(t)$，可假設以下關係：

$$\frac{dM_d(t)}{M_d(t)} = \frac{dM_d^d(t)}{M_d^d(t)} + \sigma_d^f(\cdot)dB^f(t) \tag{1}$$

其中 $\sigma_d^f(.)$是外國個別衝擊 (local shock) 因子，$B^f(t)$是一組外國標準 Brownian 運動之向量，其維度爲外國個別衝擊因子的個數。

接著要建立外國 SDF 模式。如同本國 SDF 一樣，假設 $M_f(t)$是時間 t 以外幣計價的全球 SDF，即是一個以外幣表示的 Arrow-Debreu 機率密度函數，$M_f^f(t)$定義同 $M_d^d(t)$，只是本國改外國。則

$$\frac{dM_f(t)}{M_f(t)} = \frac{dM_f^f(t)}{M_f^f(t)} + \sigma_f^d(\cdot)dB^d(t) \tag{2}$$

其中 $\sigma_f^d(.)$是本國個別衝擊因子，$B^d(t)$是一組本國標準 Brownian 運動之向量，其維度爲本國個別衝擊因子的個數。至此，已假設完成 $M_d(t)$與 $M_f(t)$這兩個以本國幣及外國幣表示的全球 SDF 折現因子。

爲進一步推導跨國利率模式，如同 Ahn (2004) 的線性轉換 (affine) 模式含三種均方根因子。我們假設兩國 SDF 隨機折現因子的時間序列過程如下：

$$\frac{dM_d^d(t)}{M_d^d(t)} = -\left[x(t) + y(t)\right]dt + \sigma_{x_d}\sqrt{x(t)}dw_1(t) + \sigma_{y_d}\sqrt{y(t)}dw_2(t) \tag{3}$$

$$\frac{dM_f^f(t)}{M_f^f(t)} = -\left[\alpha x(t) + z(t)\right]dt + \sigma_{x_f}\sqrt{x(t)}dw_1(t) + \sigma_{z_f}\sqrt{z(t)}dw_3(t) \tag{4}$$

其中 $x(t)$爲共同因子，$y(t)$爲本國個別因子，$z(t)$爲外國個別因子，α 是共同因子對外國利率的衝擊乘數。由於 $M_d^d(t)$ 與 $M_f^f(t)$分別是本國及外國的 SDF，故從式(3)及(4)可知，兩國名目利率可假設爲 $r_d(t) = x(t) + y(t)$，以及 $r_f(t) = \alpha x(t) + z(t)$，亦即兩國名目利率都是狀態變數(state variable)的線性轉換函數。當 $\alpha > 1$，表示共同因子對外國利率的影響較對本國利率爲高。此外，假設這三個因子的隨機過程爲 $dx(t) = k_x\left[\theta_x - x(t)\right]dt + s_x\sqrt{x(t)}dw_x$、$dy(t) = k_y\left[\theta_y - y(t)\right]dt + s_y\sqrt{y(t)}dw_y$ 與 $dz(t) = k_z\left[\theta_z - z(t)\right]dt + s_z\sqrt{z(t)}dw_z$。此架構表示之本國及外國利率，即是我們要利用的聯合利率模式。

2.2 折現因子參數關係之推導

接著我們進一步推導折現因子之參數關係。由前小節的推論可知，$\sigma_{z_d}\sqrt{z(t)}dw_3(t)$ 是外國個別衝擊因子的擴散項，$\sigma_{y_f}\sqrt{y(t)}dw_2(t)$ 是本國個別衝擊因子的擴散項，因此可推導出：

$$\frac{dM_d(t)}{M_d(t)}=\frac{dM_d^d(t)}{M_d^d(t)}+\sigma_{zd}\sqrt{z(t)}dw_3(t)$$

$$=-\left[x(t)+y(t)\right]dt+\sigma_{xd}\sqrt{x(t)}dw_1(t)+\sigma_{yd}\sqrt{y(t)}dw_2(t)+\sigma_{zd}\sqrt{z(t)}dw_3(t) \tag{5}$$

$$\frac{dM_f(t)}{M_f(t)}=\frac{dM_f^f(t)}{M_f^f(t)}+\sigma_{y_f}\sqrt{y(t)}dw_2(t)$$

$$=-\left[\alpha x(t)+z(t)\right]dt+\sigma_{x_f}\sqrt{x(t)}dw_1(t)+\sigma_{y_f}\sqrt{y(t)}dw_2(t)+\sigma_{z_f}\sqrt{z(t)}dw_3(t) \tag{6}$$

其中各利率因子之相關係數矩陣爲：

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \rho_x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rho_y & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho_z\\ \rho_x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \rho_y & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{7}$$

至此，我們完成聯合利率模式及折現因子參數相關係數矩陣的模型假設。接著，我們要探討在此三因子的聯合利率模式架構下，匯率的隨機過程是如何內生決定。

由以上說明可知，$M_d(t)$是以本國貨幣計價的全球折現因子，$M_f(t)$是外國貨幣計價的全球折現因子，因此根據單一價格法則，匯率 S 必須滿足 $M_f(t)=SM_d(t)$，因此，$S=\frac{M_f(t)}{M_d(t)}$。根據 Ito-Doeblin 公式可知：

$$dS=\frac{\partial S}{\partial t}dt+\frac{\partial S}{\partial M_f(t)}dM_f(t)+\frac{\partial S}{\partial M_d(t)}dM_d(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial M_f^2(t)}\left[dM_f(t)\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial M_d^2(t)}\left[dM_d(t)\right]^2+\frac{\partial^2 S}{\partial M_d(t)\partial M_f(t)}\left[dM_d(t)\right]\left[dM_f(t)\right]$$

$$=\frac{M_f(t)}{M_d(t)}\Big\{\Big[r_d(t)-r_f(t)+\sigma_{xd}(\sigma_{xd}-\sigma_{xf})x(t)+\sigma_{yd}(\sigma_{yd}-\sigma_{yf})y(t)+\sigma_{zd}(\sigma_{zd}-\sigma_{zf})z(t)\Big]dt$$
$$+(\sigma_{xd}-\sigma_{xf})\sqrt{x(t)}dw_1+(\sigma_{yd}-\sigma_{yf})\sqrt{y(t)}dw_2+(\sigma_{zd}-\sigma_{zf})\sqrt{z(t)}dw_3\Big\} \tag{8}$$

將單一價格法則帶入，並整理可得：

$$\frac{dS}{S} = \left[r_d(t) - r_f(t) + \sigma_{xd}(\sigma_{xd} - \sigma_{xf})x(t) + \sigma_{yd}(\sigma_{yd} - \sigma_{yf})y(t) + \sigma_{zd}(\sigma_{zd} - \sigma_{zf})z(t)\right]dt$$
$$+ (\sigma_{xd} - \sigma_{xf})\sqrt{x(t)}dw_1 + (\sigma_{yd} - \sigma_{yf})\sqrt{y(t)}dw_2 + (\sigma_{zd} - \sigma_{zf})\sqrt{z(t)}dw_3 \tag{9}$$

至此，我們導出了均衡的內生匯率隨機過程。

3. 參數估計方法

為將多種利率變數簡化，我們首先以主成份分析法，將變數簡化成共同因子及國家個別因子。然後再以這些因子的時間序列資料，估計聯合利率模式的參數值。晚近，主成份分析法亦被廣泛應用於利率因子的分析。例如 Litterman and Sheinkman (1991) 利用主成份分析法研究美國債券市場的影響因子。Wadhwa (1999) 則研究利率交換市場的隱含波動率。Heidari and Wu (2003) 曾將其應用在利率選擇權，且證明在三因子的線性轉換模式下，主成份分析法所萃取之三因子幾乎可解釋全部的利率變動。

3.1 以主成份分析萃取利率因子

主成份分析萃取，主要是先把十個變數 (台灣及美國的三個月、六個月、一年、五年及十年期債券利率) 濃縮成三個主要變數 x、y、z，即共同與個別利率因子。在利用主成份萃取時，針對這十個變數，利用聯合分配的概念，將它們視為一組變數 $W = [W_1\ W_2\ ...W_{10}\ ]^T$，此為一 10 維隨機向量，且其共變異數矩陣 $Cov(W)$ 為：

$$Cov(W) = C_{10\times10} = \begin{bmatrix} C_{1,1}\ldots\ldots C_{1,10} \\ \vdots \qquad \vdots \\ C_{10,1}\ldots\ldots C_{10,10} \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，共變數矩陣之元素 $C_{i,j} = E\{[W_i - E(W_i)][W_j - E(W_j)]\}$。主成份萃取是運用在變數間有相關性的多變量分析。若矩陣 $C_{10\times10}$ 是一個 K 階的對稱矩陣，則我們可以先算出 $C_{10\times10}$ 的十個實數特徵根，假設由大到小排列為 λ_1、λ_2、λ_3、 ...、λ_{10}。這十個實數特徵根且長度為 1 的相互正交特徵向量為 $[b_1\, b_2\, b_3 ...\, b_{10}]$，因此 $C_{10\times10}$ 的特徵向量矩陣為：

$$[b_1\, b_2\ \ b_3 \ldots b_{10}] \;=\; \begin{bmatrix} b_{1,1} \ldots\ldots b_{1,10} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mathrm{b}_{10,1} \ldots\ldots b_{10,10} \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中，$b_j = \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{10,j} \end{bmatrix}$ 及 $\| b_j \| = 1$，亦即 $B^T B = BB^T = I_{10\times 10}$。

經過主成份分析後，我們便可得出聯合利率模式所需之共同及兩個個別因子。以下我們將介紹有了此三種因子之時間數列資料後，如何進行利率模式之參數估計。[1]

3.2 參數估計方法

在聯合利率模式估算方面，我們先估計共同及個別因子本身的參數，再利用共變異數計算因子之間相關的參數。由於 $dx(t) = k_x[\theta_x - x(t)]dt + s_x\sqrt{x(t)}dw_x$ 爲一 CIR (Cox *et al.*, 1985) 模式，我們可以利用估計 CIR 模式的係數方法估計其參數。雖然三因子利率模式的參數不少，例如各因子本身參數即須 $3\times 4 = 12$ 個參數，但這些參數間部分存在相關，因此利用這些相關性，可增加參數的穩定度和可靠性。例如，在現有估計方法中，Ahn (2004) 採 Hansen (1982) 與 Longstaff and Schwartz (1992) 的 GMM 方法，需假設若干限制式才能求解。若從一致性與不對稱效率 (asymmetric efficiency) 的方向考量，MLE 是線性轉換期限結構模式中最好的方法，其中又以準

---

1 在利率因子的萃取方面，除了用主成份分析法外，也可用 Stock and Watson (2008) 的動態因子模型 (dynamic factor model; DFM) 來萃取共同及個別因子。利用 DFM，我們可假設各天期的利率模式如下：

$$r_i(t) = \lambda_i^X x(t) + \lambda_i^Y y(t) 1_{\{i\in Y\}} + \lambda_i^Z z(t) 1_{\{i\in Z\}} + \varepsilon_{it}\,,\ i = 1,\ldots,10;\ t = 1,\ldots,T.$$

其中 X, Y 與 Z 分別代表共同、本國與外國地區。i 代表各天期的利率指標，λ_i^X 爲因子係數 (factor loading)，$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$分別代表共同、本國當地與外國當地因子。若 $r_{\mathrm{i}}(t)$爲本國的利率指標則$1_{\{i\in Y\}} = 1$，否則爲 0。同樣地，若 $r_{\mathrm{i}}(t)$爲外國的利率指標，則$1_{\{i\in Z\}} = 1$，否則爲 0。此種模式與本文的主成份方法相同點在於，都須先將各天期的利率作主成份分析。相異點爲在 DFM 模式中，個別因子尚未被萃取出來之前，仍是無法觀察 (un-observable) 變數因子。因此，若要估計這些在 DFM 模式中的因子係數，必須用 Engle and Watson (1983) 所採用的預期與極大化 (expectation and maximization; EM) 演算法，與 Carter and Kohn (1994) 所用的 Gibbs 抽樣演算法。該模式的優點在於，不僅只求出本國個別因子的衝擊乘數，且可算出本國及外國個別因子對各天期利率的衝擊乘數。而本模式和 Ahn (2004) 一樣，以標準化本國個別因子的方式，使得本國個別因子的衝擊乘數可假設爲 1，以簡化估計過程。然而，該模式亦有缺點如：1) 只用主成份分析萃取出共同因子，個別因子及其係數必須配合 EM 與 Gibbs 抽樣演算法取得，因此計算較複雜。2) 該模式所萃取出的共同和本國個別因子，無法直接相加成聯合利率模式中的 SDF 所需之代表性利率，即 $r_d(t) = \lambda_d^X x(t) + \lambda_d^Y y(t)$。其中因子係數 λ_d^X、λ_d^Y 不一定爲 1，不符合聯合利率模式對於 $r_d(t)$ 的因子係數都需爲 1 的要求。有關此一部分的討論，作者感謝審查人之一提供的寶貴建議。

MLE (quasi-MLE) (例如，Brennan and Xia, 2006) 與動差模擬效率法 (simulated-based efficient method of moments)，如 Gallant and Tauchen (1996) 及 Dai and Singleton (2000)。本文基於簡化模型考量，亦使用準 MLE 方法，這是在估計聯合線性轉換利率模式中最普遍的方法 (Egorov *et al*., 2011)。

以數列 $y(t)$爲例，將 $y(t)$視爲一狀態變數，假設每一狀態變數的分配爲非中央 (non-central) 的 χ^2 分配，則：

$$f[y(t)|y(t-1)] = ce^{-cy(t)-ce^{-k_y \Delta t}y(t-1)}\left[\frac{y(t)}{e^{-k_y \Delta t}y(t-1)}\right]^{0.5q} \times I_q\left[2c\sqrt{y(t)e^{-k_y \Delta t}y(t-1)}\right] \tag{12}$$

其中 $c=\dfrac{2k_y}{s_y^2\left(1-e^{-k_y \Delta t}\right)}$，$q=\dfrac{2k_y\theta_y}{s_y^2}-1$，$\triangle t$爲時間 t 到 T 的期間，$I_q[.]$爲第一序度爲 q 修正後的 Bessel 函數。則序列 t 到 T 的對數概似函數 $\ln L(.)$爲:

$$\ln L\left[y(t),...,y(T)\right] = \ln g\left[y(1)\right] + \sum_{t=2}^{T}\ln f\left[y(t)\mid y(t-1)\right] \tag{13}$$

$$\ln g\left[y(1)\right] = \frac{2k_y\theta_y}{s_y^2}\ln\left(\frac{2k_y}{s_y^2}\right) - \ln\Gamma\left(\frac{2k_y\theta_y}{\theta_y^2}\right) + q\ln y(1) - \frac{2k_y}{s_y^2}y(1) \tag{14}$$

其中 $\Gamma(.)$函數 $g(y_1)$ 爲 y_1 的機率密度函數，$\Gamma(.)$爲 Gamma 函數。

在導出 MLE 函數後，我們還需要債券價格才可估計出多因子 CIR 模式的參數。從 Chen and Scott (1993) 或 Longstaff and Schwartz (1992) 可知，若本國短期利率 $r_d(t)=x(t)+y(t)$，則本國債券價格 $P_d(t)$爲:

$$P_d(t) = A_{xd}^{(2k_x\theta_x/s_x^2)}(\tau)A_{yd}^{(2k_y\theta_y/s_y^2)}(\tau)\exp\left[\Gamma_d\tau - B_{xd}(\tau)x(t) - B_{yd}(\tau)y(t)\right] \tag{15}$$

其中

$$\tau = T-t\,,\quad A_{xd} = \frac{2\gamma_{xd}}{2\gamma_{xd}+(k_x+\lambda_{xd}+\gamma_{xd})\left[\exp(\gamma_{xd}\tau)-1\right]},$$

$$A_{yd} = \frac{2\gamma_{yd}}{2\gamma_{yd}+(k_y+\lambda_{yd}+\gamma_{yd})\left[\exp(\gamma_{yd}\tau)-1\right]},$$

$$\Gamma_d = \frac{k_x\theta_x}{s_x^2}(k_x+\lambda_{xd}+\gamma_{xd}) + \frac{k_y\theta_y}{s_y^2}(k_y+\lambda_{yd}+\gamma_{yd})\,,$$

$B_{xd}=\dfrac{(e^{\gamma_{xd}\tau}-1)A_{xd}}{\gamma_{xd}}$，$B_{yd}=\dfrac{(e^{\gamma_{yd}\tau}-1)A_{yd}}{\gamma_{yd}}$，$\lambda_{xd}=-\rho_x\sigma_{xd}s_x$，$\lambda_{yd}=-\rho_y\sigma_{yd}s_y$，

$\gamma_{xd}=\sqrt{(k_x+\lambda_{xd})^2+2s_x^2}$，$\gamma_{yd}=\sqrt{(k_y+\lambda_{yd})^2+2s_y^2}$.

因此，針對不同到期日的債券價格，我們可列出一組系統方程式：

$$\begin{aligned}\ln P_d(t)&=2k_x\theta_x/s_x^2\ln A_{xd}(\tau)+2k_y\theta_y/s_y^2\ln A_{yd}(\tau)\\&+\left[\Gamma_d\tau-B_{xd}(\tau)x(t)-B_{yd}(\tau)y(t)\right]+u(\tau)\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $u(\tau)$爲估計誤差。

同樣地，針對外國短期利率 $r_f(t)=\alpha x(t)+z(t)$，我們亦可得到外國債券價格 $P_f(t)$爲:

$$P_f(t)=A_{xf}^{(2k_x\theta_x/s_x^2)}(\tau)A_{zd}^{(2k_z\theta_z/s_z^2)}(\tau)\exp[\Gamma_f\tau-B_{xf}(\tau)x(t)-B_{zf}(\tau)z(t)]\tag{17}$$

其中

$A_{xf}=\dfrac{2\gamma_{xf}}{2\gamma_{xf}+(k_x+\lambda_{xf}+\gamma_{xf})\left[\exp(\gamma_{xf}\tau)-1\right]}$,

$A_{zf}=\dfrac{2\gamma_{zf}}{2\gamma_{zf}+(k_z+\lambda_{zf}+\gamma_{zf})\left[\exp(\gamma_{zf}\tau)-1\right]}$

$\Gamma_f=\dfrac{k_x\theta_x}{s_x^2}(k_x+\lambda_{xf}+\gamma_{xf})+\dfrac{k_z\theta_z}{s_z^2}(k_z+\lambda_{zf}+\gamma_{zf})$,

$B_{xf}=\dfrac{\alpha(e^{\gamma_{xf}\tau}-1)A_{xf}}{\gamma_{xf}}$，$B_{zf}=\dfrac{(e^{\gamma_{zf}\tau}-1)A_{zf}}{\gamma_{zf}}$，$\lambda_{xf}=-\rho_x\sigma_{xf}s_x$，$\lambda_{zf}=-\rho_z\sigma_{zf}s_z$，

$\gamma_{xf}=\sqrt{(k_x+\lambda_{xf})^2+2s_x^2}$，$\gamma_{zf}=\sqrt{(k_z+\lambda_{zf})^2+2s_z^2}$.

至此，我們已可從本國與外國債券價格估計出各因子的模型參數。爲方便後續的推導，我們先根據以上所推估之 $P_d(t)$的各項偏微分 $\partial P_d(t)/\partial t$，$\partial P_d(t)/\partial r$ 及 $\partial^2 P_d(t)/\partial r^2$ 代入 Ito Lemma，可以得到：

$$\frac{dP_d(t)}{P_d(t)}=\left[r_d(t)-\lambda_{xd}B_{xd}x(t)-\lambda_{yd}B_{yd}y(t)\right]dt-B_{xd}S_x\sqrt{x}dw_x-B_{yd}S_y\sqrt{y}dw_y\tag{18}$$

$$\frac{dP_f(t)}{P_f(t)}=\left[r_f(t)-\lambda_{xf}B_{xf}x(t)-\lambda_{zf}B_{zf}z(t)\right]dt-B_{xf}S_x\sqrt{x}dw_x-B_{zf}S_z\sqrt{z}dw_z\tag{19}$$

在本國及外國折現因子 $M_d(t)$、$M_f(t)$ 的參數估計方面，對於本國因子的變異數 σ_{xd}、σ_{yd}、σ_{zd} 的估計，我們可以利用 $Var\left(\dfrac{dM_d(t)}{M_d(t)}\right)=\sigma_{xd}^2x(t)+\sigma_{yd}^2y(t)+\sigma_{zd}^2z(t)$ 的關係式估計。對於外國因子變異

數 σ_{xf} 、 σ_{yf} 、 σ_{zf} 的估計，則利用 $Var\left(\frac{dM_f(t)}{M_f(t)}\right) = \sigma_{xf}^2 x(t) + \sigma_{yf}^2 y(t) + \sigma_{zf}^2 z(t)$ 的關係式估計。在本國及外國折現因子的相關係數估計方面，我們可以利用 $Cov\left[\frac{dM_d(t)}{M_d(t)}, dx(t)\right] = \sigma_{xd} S_x x Cov(dw_1, dw_x)$ 的關係估計 ρ_x ，同理可得 ρ_y 及 ρ_z 。

4. 參數估計

上節推導出參數估計方法後，接著我們要以此方法估計模型參數，並對結果進行討論，最後將此模式應用在風險值計算。首先，我們對主成份之萃取結果進行分析。

4.1 主要變數之萃取

本小節我們以主成份分析法探究影響台灣與美國債券市場的主要因子。經由主成份分析法的演算，我們得到本研究數據所產生的特徵值 (見表 1)。資料期間爲 2001 年 1 月至 2008 年 12 月的週資料，來源爲 Bloomberg 金融資訊系統。本研究的利率模式有十個因變數，從主成份分析法結果發現十個主成份變數的特徵值大於一僅有二個。而從特徵值可知，第一主成份變數的特徵值爲 6.050，遠超過其他主成份變數的特徵值，可是到第三主成份變數的特徵值就已經大幅下降至一以下。至於，第五到第十主成份變數的特徵值更是已經非常趨近於零。第一主成份變數其變異程度達總變異程度的 60.497%，第二主成份變數及第三主成份變數的變異程度也分別爲總變異程度的 28.864%及 9.017%。因爲，前三個主成份變數的累積變異程度也高達原本所有數據總變異程度的 98.378%，所以本文只採用前三個主成份變數，來代表原本的十種利率。

表 1　總變異的解釋

主成份變數	特徵值	個別變異程度(%)	累積變異程度(%)
1	6.050	60.497	60.497
2	2.886	28.864	89.361
3	.902	9.017	98.378
4	.122	1.218	99.596
5	.017	.171	99.767
6	.012	.120	99.887
7	.006	.061	99.948
8	.004	.039	99.986
9	.001	.011	99.997
10	.000	.003	100.000

註：本文所使用 10 個變數分別爲台灣 90 天商業本票利率、台灣 180 天商業本票利率、台灣一年期債券利率、台灣五年期債券利率、台灣十年期債券利率、美國三個月國庫券利率、美國六個月國庫券利率、美國一年期債券利率、美國五年期債券利率、美國十年期債券利率。

第一主成份變數的前三種主要組成爲臺灣 90 天商業本票、台灣一年期債券利率、與美國五年期債券利率，因此設定第一主成份變數爲本國個別因子。第二主成份變數的前三種主要組成爲美國 90 天國庫券利率、美國 180 天國庫券利率、與美國一年期債券利率，因此設定第二主成份變數爲外國個別因子。第三主成份變數的前三種主要組成爲台灣十年期債券利率、美國五年期債券利率、與美國十年期債券利率，因此設定第三主成份變數爲共同因子。

從此初步結果可以發現，本國個別因子與共同因子的前三種主要變數都有美國五年期債券利率，不符合式(7)各因子間互相獨立的假設。且美國五年期債券利率出現在本國共同因子，亦不符其經濟意義。因此，我們採用 Egorov *et al*. (2011) 的三階段主成份分析法，以避免主成份所萃取出的三因子會有彼此相關的問題。以下說明三階段的步驟:

(1) 首先，對本國與外國利率進行主成份分析，以萃取出共同因子，並辨別 (identify) 哪些因子需要用來建構本國與外國的期限結構。

(2) 其次，我們以共同因子對本國與外國因子做迴歸。此迴歸可衡量出共同因子對本國與外國因子的相關程度。在我們模型假設下，共同因子對本國與外國個別因子的相關應爲零。在此迴歸後，我們可得到本國與外國因子的殘差。

(3) 以上步驟所得之本國與外國因子的殘差已與共同因子無相關性。因此，我們再加入本國與外國因子殘差做主成份分析，得出互相獨立的三利率因子。如此，我們完成三階段的主成份分析。此三階段的結果如表 2。

表 2　主成份變數負荷矩陣

變數	主成份變數負荷		
	1	2	3
CP90	.838*	-.422	-.331
CP180	.822	-.425	-.362
NTG01	.874*	-.411	-.247
NTG05	.755	-.601	.224
NTG10	.687	-.623	.321*
3moUSB	.721	.664*	-.162
6moUSB	.702	.689*	-.157
USG1	.710	.692*	-.098
USG5	.832*	.438	.323*
USG10	.810	.155	.531*

註：* 表示前三大變數負荷值。CP90、CP180、NTG01、NTG05、NTG10、3moUSB、6moUSB、USG1、USG5、USG10，各代表台灣 90 天商業本票利率、台灣 180 天商業本票利率、台灣一年期債券利率、台灣五年期債券利率、台灣十年期債券利率、美國三個月國庫券利率、美國六個月國庫券利率、美國一年期債券利率、美國五年期債券利率、美國十年期債券利率。

從三階段的主成份分析結果可發現，美國五年期債券利率在本國個別因子的的負荷數已從 0.832 降至 0.260，被台灣 180 天期商業本票利率取代，其負荷數從 0.822 升至 0.870。而本國個別因子的主要組成，則由本國利率取代外國利率，增加其經濟意涵上的解釋能力。

修正後的第一、第二及第三主成份變數值可從圖 1 明顯地看出，共同因子還是主要影響本國、外國利率的主要力量，無論是平均值或是標準差，第一主成份變數值大部分時期都是其他兩個主成份變數值的 2 倍左右。且在長期趨勢中，共同因子，即第三主成份值都未曾低於其他兩個個別成份值。從本國及外國利率的組成來看，即 $r_d(t)=x(t)\ +y(t)+\varepsilon_d$ 與 $r_f(t)=\alpha x(t)+z(t)+\varepsilon_f$，外國利率估計式的共同因子需再乘上 $\alpha=3.259$，因此使得共同因子的影響力大幅增加。[2]其經濟意涵爲，由於全球金融市場整合日益緊密，各國財政政策或貨幣政策都受到其他國家影響。特別是美國、日本及中國經濟狀況的變動，都會對世界經濟造成影響。利率是貨幣政策的主要工具，各國在決定利率走勢時除了以自身經濟條件爲依據外，主要貿易對手國的利率走勢也是重要的參考指標。特別是，類似台灣天然資源匱乏、需大量進口外國物資，但是卻又要靠出口創匯發展經濟的國家尤其明顯。因此，我國央行在制定利率政策時，都必須要參考主要貿易對手國的總體環境。台灣此種高度依賴美國經濟的情況，可在台灣及美國的聯合利率模式中，從共同因子對兩國利率的變異解釋結果看出。

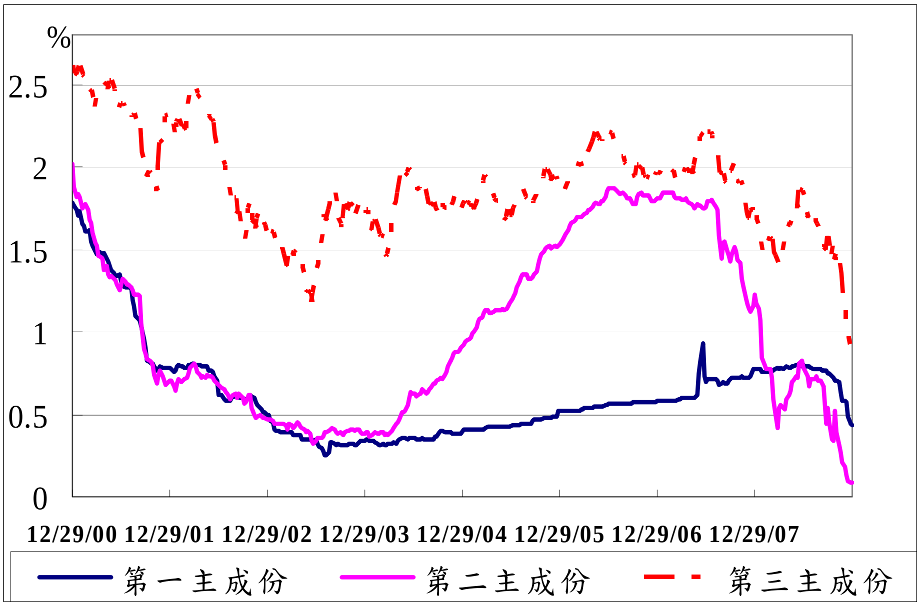

圖 1　第一、第二及第三主成份變數趨勢

2　在有關 α 衝擊反應乘數的計算方面，我們採用最小平方的方式估計求得，亦即使得 $\sum_{t=1}^{N}[r_d(t)-\alpha x(t)-z(t)]^2$ 極小化。

表 **3** 總變異的解釋

主成份變數	特徵值	個別變異程度(%)	累積變異程度(%)
1	5.474	54.737	54.737
2	2.965	29.650	84.387
3	.878	8.781	93.168
4	.547	5.466	98.634
5	.107	1.068	99.702
6	.014	.143	99.846
7	.008	.082	99.928
8	.006	.057	99.984
9	.001	.011	99.996
10	.000	.004	100.000

註：本文所使用 10 個變數分別為台灣 90 天商業本票利率、台灣 180 天商業本票利率、台灣一年期債券利率、台灣五年期債券利率、台灣十年期債券利率、美國三個月國庫券利率、美國六個月國庫券利率、美國一年期債券利率、美國五年期債券利率、美國十年期債券利率。

表 **4** 主成份變數負荷矩陣

變數	主成份變數負荷		
	1	2	3
CP90	.884*	-.338	-.245
CP180	.870*	-.341	-.272
NTG01	.916*	-.330	-.180
NTG05	.791	-.545	.230
NTG10	.721	-.576	.313*
3moUSB	.669	.709*	-.172
6moUSB	.648	.732*	-.170
USG1	.652	.734*	-.115
USG5	.260	.616	.489*
USG10	.768	.202	.499*

註：* 表示前三大變數負荷值。CP90、CP180、NTG01、NTG05、NTG10、3moUSB、6moUSB、USG1、USG5、USG10，各代表台灣 90 天商業本票利率、台灣 180 天商業本票利率、台灣一年期債券利率、台灣五年期債券利率、台灣十年期債券利率、美國三個月國庫券利率、美國六個月國庫券利率、美國一年期債券利率、美國五年期債券利率、美國十年期債券利率。

4.2 聯合利率模式參數估計

在以主成份分析法萃取出三種共同及個別因子後，接著我們利用 MLE 方法，來估計聯合利率模型之參數，估計結果如表 5、6。

表 **5**　聯合利率模式之參數估計：因子本身參數

參數	估計值	參數	估計值	參數	估計值
k_X	0.00008799%**	k_Y	0.00000819%**	k_Z	0.00001248%**
	(0.00002411%)		(0.00000142%)		(0.00000482%)
θ_X	1.8808%**	θ_Y	0.6304%**	θ_Z	1.0196%**
	(0.0512%)		(0.0440%)		(0.2956%)
s_X	0.0030%**	s_Y	0.0016%**	s_Z	0.0026%**
	(0.0004%)		(0.0001%)		(0.0006%)
ρ_x	-0.106**	ρ_y	-0.526**	ρ_z	-0.174
	(0.013)		(0.009)		(0.145)

註：小括號內爲標準差。**、*分別表示在 1%、5%水準下顯著。

表 **6**　聯合利率模式之參數估計：因子相關參數

參數	估計值	參數	估計值
K_{xf}	0.00009053%**	K_{xd}	0.00009132%**
	(0.00002444%)		(0.00002454%)
A_{xf}	0.99996135**	A_{xd}	0.99997838**
	(0.00000504)		(0.00000285)
B_{xf}	3.25899852**	B_{xd}	0.99999954**
	(0.00000040)		(0.00000012)
σ_{xf}	0.802%**	σ_{xd}	1.050%**
	(0.147%)		(0.242%)
λ_{xf}	0.00000524%**	λ_{xd}	0.00000333%**
	(0.00000033%)		(0.00000043%)
γ_f	0.00149795**	γ_d	0.00084673**
	(0.00019965)		(0.00012861)
γ_{xf}	0.00007639**	γ_{xd}	0.00004232**
	(0.00000983)		(0.00000545)
K_{yd}	0.00002001%**	K_{Zf}	0.00003274%**
	(0.00000249%)		(0.00000921%)
A_{yd}	0.99998893**	A_{Zf}	0.99998123**
	(0.00000101)		(0.00000408)
B_{yd}	0.99999990**	B_{Zf}	0.99999984**
	(0.00000001)		(0.00000005)
σ_{yd}	1.450%	σ_{Zf}	4.429%**
	(0.810%)		(1.105%)
λ_{yd}	0.00001182%**	λ_{Zf}	0.00002026%**
	(0.00000107%)		(0.00000439%)
γ_{yd}	0.00002195**	γ_{Zf}	0.00003721**
	(0.00000199)		(0.00000806)

註：小括號內爲標準差。**、*分別表示在 1%、5%水準下顯著。

5. 風險管理之應用

在本節中，我們將介紹此模式在跨國投資風險分析與國際投資組合風險值計算之應用。

5.1 跨國投資風險分析

針對以上模式參數的估計結果，我們參考 Lothian (2006) 的分析架構，將兩國利率差的波動視爲跨國投資之利率風險，做敏感度分析。例如，若個別利率與全球指標利率差的標準差大，表示當地債市與全球債市的整合情況較差，故跨國投資的利率風險較大。亦即利率差的變異數與跨國投資利率風險爲正向關係，故我們以設定跨國債券投資的風險衡量指數 I_{Risk} 爲:

$$I_{Risk} = \sqrt{Var(r_d(t) - r_f(t))} / \sqrt{Var(r_f(t))} \tag{20}$$

此指數愈高，表示跨國債券投資的風險愈高。我們以美國債市做爲指標市場，計算兩國利率差的變異數，在 Ahn (2004) 的聯合利率模式架構下，可知兩國利率差的變異數爲：

$$Var\big(r_d(t) - r_f(t)\big) = Var\big(x(t) + y(t) - \alpha x(t) - z(t)\big) = (1-\alpha)^2 Var(x) + Var(y) + Var(z) \tag{21}$$

其中 $Var(x) = (s_x^2\theta_x)/(2\kappa_x)$ ，$Var(y) = (s_y^2\theta_y)/(2\kappa_y)$ ，$Var(z) = (s_z^2\theta_z)/(2\kappa_z)$ 。因此，我們發現利率的個別因子或共同因子的波動平方，與兩國利率差的變異數呈現線性關係。利用此線性關係，我們可從以上公式，對跨國投資利率風險，得出以下的因子變化分析。

表 7　參數增加 10%後之風險衡量指數

參數	風險衡量指數	參數	風險衡量指數	參數	風險衡量指數
k_X	82.54%	k_Y	81.24%	k_Z	81.26%
θ_X	80.83%	θ_Y	82.13%	θ_Z	82.09%
s_X	80.03%	s_Y	82.64%	s_Z	82.53%

註：變動前的風險衡量指數爲 81.67%。

表 8　參數增加 10%之風險衡量指數變動率

參數	變動率	參數	變動率	參數	變動率
k_X	1.07%	k_Y	-0.52%	k_Z	-0.49%
θ_X	-1.03%	θ_Y	0.57%	θ_Z	0.52%
s_X	-2.00%	s_Y	1.19%	s_Z	1.06%

註：以變動前的債市整合指數做爲基準值。

在式(20)、(21)中，影響利率風險的參數有 α，共同及個別因子的變異數 s_x^2 、 s_y^2 與 s_z^2 ，長期平均值 θ_x 、 θ_y 與 θ_z 及均數回歸率 k_x 、 k_y 及 k_z 。根據表 3-4 的參數估計值及式(20)，我們可得到以下的參數變動分析結果。

(1) 當 k_X 減少、θ_X 增加或 s_X 增加，使得共同因子的變異數增加時，會使得利率差的變異數和外國利率的變異數都增加，但因爲外國利率的變異數增加速度較快，使得跨國投資的風險較低。

(2) 當 k_Y 減少、θ_Y 增加或 s_Y 增加，使得本國個別因子的變異數增加，會使得利率差的變異數增加，促使跨國投資的風險較高。

(3) 當 k_Z 減少、θ_Z 增加或 s_Z 增加，使得外國個別因子的變異數增加時，會使得利率差的變異數和外國利率的變異數都同步增加，但因爲變異數相除小於 1，故同步增加的結果使變異數相除更接近 1，而債市的跨國投資風險也因此較高。

(4) 除了以聯合利率模式參數爲變數做敏感度分析外，本研究也以共同因子對外國利率的衝擊乘數 α 爲變數做敏感度分析。當衝擊乘數 α 增加 10%，債市的投資風險增加 0.43%。原因是雖然利率差的變異數和外國利率的變異數都同步增加，但同上述的外國個別因子變異數增加的情形一樣，因爲變異數相除小於 1，故同步增加的結果使變異數相除更接近 1，而債市的跨國投資風險亦提高。

5.2 投資組合風險值計算

爲介紹如何將此聯合利率模式應用在了解整個跨國投資債券組合，本文將針對一模擬之投資組合計算其風險值。假設本國資產管理機構有新台幣兩百萬，投資 50%、即一百萬元台幣等值之美金，配置在美國 10 年期公債。爲控制此投資之風險，必須計算其風險值 (Value at Risk; VaR)，以進行適當之避險策略。此資產管理機構面臨的風險因子有兩種，匯率風險及美國公債價格風險。本節所指之 VaR 風險值爲在 99%的信賴水準下，投資組合在一週內的最大可能損失金額。其計算式爲：

$$\mathrm{VaR} = z_\alpha \sqrt{W^T \Sigma W} \tag{22}$$

其中，常態分配分位點 (quantiles)，z_α=2.326，$W^T = [w_T \quad w_U \quad w_F]$, w_T, w_U, w_F 分別爲台灣債券 T、美國債券 U、美元匯率 F 等風險因子的曝險金額， $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_T^2 & \sigma_{TU} & \sigma_{TF} \\ \sigma_{UT} & \sigma_U^2 & \sigma_{UF} \\ \sigma_{FT} & \sigma_{FU} & \sigma_F^2 \end{bmatrix}$, σ_{ij} 爲風險因子 i 與 j 報酬率的共變異數。

一般的風險值計算在估計共變異數矩陣時，是將匯率視爲外生變數。而使用聯合利率模式在估計共變異數矩陣時，會將匯率視爲內生變數。因此，我們可利用不同的共變異數矩陣估計

方法，比較使用聯合利率模式的差異。若聯合利率模式的共變異數矩陣中 σ_{TF}、σ_{UF}、σ_{TU}的估計式爲：

$$\sigma_{TF}=Cov\left(\frac{dS}{S},\frac{dP_d(t)}{P_d(t)}\right)=-(\sigma_{xd}-\sigma_{xf})B_{xd}s_x x(t)\rho_x-(\sigma_{yd}-\sigma_{yf})B_{yd}s_y y(t)\rho_y+(\sigma_{zd}-\sigma_{zf})B_{zd}s_z z(t)\rho_z \quad (23)$$

$$\sigma_{UF}=Cov\left(\frac{dS}{S},\frac{dP_f(t)}{P_f(t)}\right)=-(\sigma_{xd}-\sigma_{xf})B_{xf}s_x x(t)\rho_x-(\sigma_{yd}-\sigma_{yf})B_{yf}s_y y(t)\rho_y+(\sigma_{zd}-\sigma_{zf})B_{zf}s_z z(t)\rho_z \quad (24)$$

$$\sigma_{TU}=Cov\left(\frac{dP_d(t)}{P_d(t)},\frac{dP_f(t)}{P_f(t)}\right)=B_{xd}B_{xf}s_x^2 x(t) \quad (25)$$

其推導過程是利用式(9)、式(18)的 $dP_d(t)/P_d(t)$ 與式(19)的 $dP_f(t)/P_f(t)$ 結果。

利用以上三種風險因子在 2001 年 1 月至 2008 年 12 月的資料，我們估計出一般估計方法所產生之共變數矩陣 (見表 9)，以及利用聯合利率模式所產生的新共變數矩陣 (見表 10)。

在估計出共變異數矩陣值後，則可代入式(22)得出風險值，不同估計方法的 VaR 比較如表 11。從此表可發現整合風險值的高估情形較一般風險值爲佳，顯示整合利率模式在估計共變異數矩陣時較爲精確。例如，一般方法估計 10 年期台灣債券利率與美元匯率的共變異數爲 4.466 × 10^{-6}，整合利率模式則估計爲 1.858 × 10^{-6}。

爲進一步分析各風險因子在風險值的影響，我們可以利用成份風險值 (Component VaR; CVaR)，協助衡量每一風險因子對既有投資組合的貢獻程度。將邊際風險值 (Marginal VaR; MVaR) 與風險因子 i 的曝險部位相乘，得到風險因子 i 的成份風險值 CVaR_i 爲：

$$\mathrm{CVaR}_i = \triangle\mathrm{VaR}_i \times w_i W \quad (26)$$

其中風險因子 i 的成份風險值 $\triangle\mathrm{VaR}_i = \dfrac{\partial VaR}{\partial w_i W}$，$w_i$ 爲風險因子 i 在投資組合的權重，W 爲投資組合價值。估計結果如表 12、表 13。比較兩表可發現由於一般方法高估美元匯率與其他風險因子的共變異數。因此，美元匯率的成份風險值貢獻度百分比由表 12 的 9.7%降至表 13 的 8.4%。

表 9　匯率報酬率與公債報酬率共變異數矩陣 (單位：10^{-6})

	10 年台債	10 年美債	美元匯率
10 年台債	96.724	39.595	4.466
10 年美債		111.607	4.529
美元匯率			32.133

表 10　新匯率報酬率與公債報酬率共變異數矩陣 (單位：10^{-6})

	10 年台債	10 年美債	美元匯率
10 年台債	96.724	39.595	1.858
10 年美債		111.607	0.690
美元匯率			32.133

表 11　各種風險值比較

風險值種類	風險值 (新台幣元)	誤差比例
一般風險值	39,546	2.06%
整合風險值	39,102	0.92%
實際風險值	38,747	

註：「一般風險值」表示用一般方法，「新風險值」表示用利率整合模式，「實際風險值」表示以歷史模擬法所計算之實際損失。

表 12　各風險因子之成份風險值：以一般方法估計

風險因子	邊際風險值	成份風險值(元)	貢獻度百分比
10 年期台灣債券	0.0159	15,901	54.4%
10 年期美國債券	0.0105	10,481	35.9%
美元匯率	0.0028	2,828	9.7%
成份風險值加總		29,210	100.0%

表 13　各風險因子之成份風險值：以整合利率模式估計

風險因子	邊際風險值	成份風險值 (元)	貢獻度百分比
10 年期台灣債券	0.0159	15,908	55.0%
10 年期美國債券	0.0106	10,604	36.7%
美元匯率	0.0024	2,417	8.4%
成份風險值加總		28,929	100.0%

6. 結論

本研究提出聯合利率模式，以衡量債券市場整合的情形。有關利率模式的參數估計方法，我們以主成份分析組合三種因子：共同因子、本國及外國個別因子，再以此三個因子的時間序列，配合 MLE 方法，估計聯合利率模式之參數。最後，我們參考 Lothian (2006)，對債券市場整合之探討，以聯合利率模式之參數爲變數，對跨國投資組合之風險指標做變動分析。本研究

以美國及台灣債市利率爲資料，探討台灣與美國債市之整合變化，結果大致可分爲兩種情形：當參數變動使共同因子變異數增加，則台灣與美國的債市跨國投資風險變低；當參數變動使台灣或美國個別因子變異數增加，則台灣與美國的債市跨國投資風險變高。但共同因子對外國利率的衝擊乘數對債市跨國投資風險的影響，都比這兩種情形來得大。

參考文獻

Ahn, D. -H., "Common Factors and Local Factors: Implication for Term Structures and Exchange Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 39, No. 1, 2004, pp. 69-102.

Backus, D. K., Foresi, S., and Telmer, C. I., "Affine Term Structure Models and the Forward Premium Anomaly," *Journal of Finance*, Vol. 56, No. 1, 2001, pp. 279-304.

Baele, L., "Volatility Spillover Effects in European Equity Markets," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 40, No. 2, 2005, pp. 373-401.

Baele, L., Pungulescu, C., and Ter Horst, J., "Model Uncertainty, Financial Market Integration and the Home Bias Puzzle," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 26, No. 4, 2007, pp. 606-630.

Bakshi, G. S. and Chen, Z., "Equilibrium Valuation of Foreign Exchange Claims," *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 2, 1997, pp. 799-826.

Bansal, R., "An Exploration of the Forward Premium Puzzle in Currency Markets," *Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, 1997, pp. 369-404.

Bekaert, G., Hodrick, R. J., and Zhang, X., "International Stock Return Comovements," *Journal of Finance*, Vol. 64, No. 6, 2009, pp. 2591-2626.

Brennan, M. J. and Xia, Y., "International Capital Markets and Foreign Exchange Risk," *Review of Financial Studies*, Vol. 19, No. 3, 2006, pp. 753-795.

Carter, C. K., and Kohn, R., "On Gibbs Sampling for State Space Models," *Biometrika*, Vol. 81, No. 3, 1994, pp. 541-553.

Chen, R. -R. and Scott, L., "Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest", *Journal of Fixed-Income*, Vol. 3, No.3, 1993, pp. 14-32.

Constantinides, G. M., "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates," *Review of Financial Studies*, Vol. 5, No. 4, 1992, pp. 531-552.

Cox, J. C., Ingersoll Jr., J. E., and Ross, S. A., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, 1985, pp. 385-407.

Dai, Q. and Singleton, K., "Specification Analysis of Affine Term Structure Model," *Journal of*

Finance, Vol. 55, No. 5, 2000, pp. 1943-1978.

Egorov, A. V., Li, H., and Ng, D., "A Tale of Two Yield Curves: Modeling the Joint Term Structure of Dollar and Euro Interest Rates," *Journal of Econometrics*, 2011, forthcoming.

Engle, R. F. and Watson, M. W., "Alternative Algorithms for Estimation of Dynamic MIMIC, Factor, and Time Varying Coefficient Regression Models," *Journal of Econometrics*, Vol. 23, No. 3, 1983, pp. 385-400.

Fratzscher, M. and Hartmann, P., "Financial Globalization and Integration," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 26, No. 4, 2007, pp. 495-499.

Gallant, A. R. and Tauchen, G., "Which Moments to Match?" *Econometric Theory*, Vol. 12, No. 4, 1996, pp. 657-681.

Han, B. and Hammond, P. J., "Affine Model of Joint Dynamics of Exchange Rate and Interest Rate," *Working paper*, 2003.

Hansen, L. P., "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimation," *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 1982, pp. 1029-1054.

Heidari, M. and Wu, L., "Are Interest Rate Derivatives Spanned by the Term Structure of Interest Rates?," *Journal of Fixed-Income*, Vol. 13, No. 1, 2003, pp. 75-84.

Hunter, D. M., "The Evolution of Stock Market Integration in the Post-Liberalization Period: A Look at Latin America," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 25, No. 5, 2006, pp. 795-826.

Inci, A. C. and Lu, B., "Exchange Rate and Interest Rate: Can Term Structure Model Explain Currency Movements?" *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 8, 2004, pp. 1595-1624.

Litterman, R. and Sheinkman, J., "Common Factors Affecting Bond Returns," *Journal of Fixed-Income*, Vol. 1, No. 1, 1991, pp. 54-61.

Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S., "Interest Rate Volatility and Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 4, 1992, pp. 1259-1282.

Lothian, J. R., "Institutions, Capital Flows and Financial Integration," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 25, No. 3, 2006, pp. 358-369.

Lucas Jr., R. E., "Interest Rates and Currency Prices in a Two-country World," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, No. 3, 1982, pp. 335-359.

Perignon, C., Smith, D. R., and Villa, C., "Why Common Factors in International Bond Returns Are Not So Common?" *Journal of International Money and Finance*, Vol. 26, No. 2, 2007, pp. 284-304.

Saá-Requejo, J., "The Dynamics and the Term Structure of Risk Premia in Foreign Exchange Markets," *Working Paper*, University of Chicago, 1993.

Stock, J. H. and Watson, M. W., “The Evolution of National and Regional Factors in U.S. Housing Construction,” Harvard University working paper, 2008.

Wadhwa, P., “An Empirical Analysis of the Common Factors Governing U.S. Dollar-LIBOR Implied Volatility Movements”, *Journal of Fixed-Income*, Vol. 9, No. 3, 1999, pp. 61-68.