# 數學在基礎物理中的有效性

## 威格納之後三十年

作者：徐一鴻 Anthony Zee　譯者：周樹靜

**作者簡介：**徐一鴻是華裔美國物理學家，美國藝術與科學院院士，出生於昆明，成長於上海、香港和巴西，畢業於哈佛大學。目前任教於加州大學聖塔芭芭拉分校的凱維里國家理論物理研究所。徐一鴻亦為知名作家，著作中包括暢銷科普書《可畏的對稱》、《愛因斯坦的宇宙》，皆翻譯至多國語言。

**重點摘要：**

▶威格納論文發表之後 30 年，數學和物理都有很大的進展，作者重新審視當時數學和物理之間的關係，省思數學有效性的意義。

▶作者區分數學和算術，將數學一詞保留給更宏觀、更結構性的數學，認為更深刻的數學和更深刻的物理緊密相關，這也是數學有效性的根源。

▶基礎物理的前沿進展已經走入實驗難以驗證、直覺闕如的處境，唯有數學堪為引路明燈，數學和基礎物理的互動將更為活躍。

當我還算是小朋友時，恰巧有機會讀到威格納的文章〈數學在自然科學中不合理的有效性〉[1]，我印象很深刻。因此當明肯思（Ron Mickens）這麼多年後，邀我寫篇類似的文章時，心中自然十分樂意。

最近重讀威格納的文章，更能領略到他當時已經傾囊相授，而且理應如此。關於他文章標題所引發的問題，我實在很難想像還有誰能更深入一談。我的同事可能覺得實際做研究的理論物理學家，根本想都不該想這個問題。不過，做一名理論物理學家的樂趣，當然就是可以沈思這類的問題。

更何況，打從威格納的文章發表至今已經約莫 30 年。這段期間，物理和數學的發展，至少在重點上，都已經有所改變，很值得再次檢視這個問題。我要事先聲明，這篇文章既缺乏一以貫之的主題，也沒有驚人的洞識。我所能提供的只是片段的觀察、軼事與反思。反正底下說的，在我們大學時代算是閒聊八卦（shooting the breeze）。

### 威格納的大哉問

當然，威格納的首要貢獻是提出這個問題。關於他擅於詢問基本問題的能力，我也許可以講個小故事。大概第一次讀到威格納的文章時，我還是個大學生。某個冬天晚上，我必須回系上處理一些事情。但晚餐時，外頭已經開始下大雪。我一路踉蹌走到物理館，途中還滑了好幾跤，到達時已經渾身是雪。當我蹣跚走進系館時，威格納身著厚重大衣、頭帶帽子，正好要走出來。他很仔細的打量我，然後以他奇怪的嚴肅態度問我說：「堆不起，請聞外棉在瞎雪嗎？」（譯註：對不起，請問外面在下雪嗎；威格納有很重的匈牙利口音）

老實說，這還真是我聽過最深刻的問題，這是目光檢視在理解外在世界時不合理的有效性嗎？不過正當我認真與這個深刻思想搏鬥時，威格納已經走了出去，消失在咆哮的暴風雪中。

一位物理同事有次告訴我，數學在自然科學中的有效性到底合不合理的問題有個妙處，要嘛，這是一個無比深刻的問題；要不，就是極為顯然的無聊問題。我自己的立場傾向於深刻的這一邊，但這些姑且不論，讓我們先來理解並定義威格納問題中的用語。

有效性是什麼？這場有效性的競賽裡，數學的對手是誰？麻煩的是，我們能舉出的任何替代方案，相比下來都十分沒效率。但我們怎麼知道世上真的沒有比數學更有效的方法呢？史前時代的威格納可能會認為，當要理解現實世界時，魔法咒語也具備不可思議的有效性。到底是否有某種人們尚無從感知、甚至定義的東西，卻比數學更有效呢？而且不管找到的答案是什麼，威格納所謂的不合理的有效性，就等同於最有效的意思嗎？

事實上我懷疑威格納認定的數學也許只是整個計量概念的世界。如果真是如此，那他提出的問題可能還真的是深刻的無聊（或者是無聊的深刻），因為一缸子定量概念，當然比一缸子定性概念更有效率。定量概念本來就比較明確與簡潔。

我們又要如何測量不合理或不可思議的程度呢？是根據某個社群公認的標準嗎？很顯然，由於物理學家假設空間和時間是連續的，也因為這個假設的基礎是仔細驗證過的觀察，所以理當得出底下的結論：連續可微函數的數學是有效的。根據這種觀點，因為基本的數學概念如幾何學，是人類從現實世界的經驗抽象萃取出來的，因此數學理當有效。這個論點的擁護者指出一個明顯的事實，現代數學中和「日常」經驗絕少淵源的數學領域，也跟物理學較不相干。

這種說法最戲劇性的反例，是量子物理學中出現的複數。為什麼我們描述微觀世界時，必須真的用到複數？這實在很不可思議。

回頭再談談描述連續時空很有效的可微函數。我可以想像，如果在某種距離尺度之下，發現時空其實是離散的，那麼（就威格納理解的）數學可能就完全失效。說真的，數學在如晶格規範理論（lattice gauge theory）的領域裡並不特別有效，事實上除了去跑電腦，別的方法都不太管用。

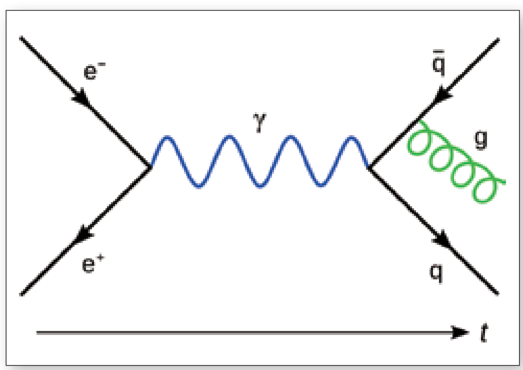
### 數學和算術

接下來，我想以較多篇幅定義「數學」。威格納用了兩節討論「數學是什麼」與「物理是什麼」。為了不重複他的論點，我希望能區分數學與「算術」（arithmetic），用這個詞是因為我找不出更好的用語。這樣的區分非常直白，還故意帶著一點勢利眼（「你所謂的數學，在我看來只是算術罷了。」）威格納的文章發表 20 年後，漢明（R. W. Hamming）曾經寫了一篇文章，名為〈數學不合理的有效性〉[2]。停！我並不怎麼在意他的文章，就我而言，基於漢明出身的工程背景，他所談的內容大概都不出我所謂的算術範圍。

好，那麼數學和算術的差別到底是什麼？我認

為，一位夠聰明的物理學家（暫時定義成顯然比我更聰明的某人）在有限時間內，遵循大致上直截了當的邏輯，卻無法完成的那種研究就是數學（至於有限時間是多長，就讓各位去煩惱）；其他的都是算術。舉例來說，我可能可以掌握勒讓德方程（Legendre's equation）解的性質，因此所有這些勒讓德方程的性質絕對都是算術。另一方面，從高維球面有意義的映射到低維球面的所有可能性只有三種，亦即 $S^3 \to S^2$、$S^7 \to S^4$、$S^{15} \to S^8$，這是我所謂的數學。

費曼（維基百科）




費曼圖一例（維基百科）

至於稱某項理論是數學還是算術，某種程度上依賴於我們看待的觀點。如果能認識到勒讓德多項式和旋轉群的表現（representation）有關，就表示我們對旋轉群的結構性質有一些理解。簡而言之，我將數學連繫到結構的或整體的理解，而算術則和計算有關。

## 費曼數學觀的影響

讓我重述一段廣為人知、關於物理學家如何傲慢的軼事，費曼（Richard Feynman）有次曾說，如果上帝沒有創造數學，那物理學家大概晚一週就能創造出來（1920 年代，如果複數還沒發明出來，量子力學發展的延宕會遠遠超過七天嗎？）根據費曼的看法，物理學家可以發明任何他們需要的東西，至於剩下的那些數學，依照費曼關心的目標，根本打一開始就只是莫須有的煩惱。當然，費曼的態度展現了物理學長久以來的傳統，在 1970 年代中期之前，我可能也會同意費曼的看法。不過當弦論出現，還有在那之前大約十年，真正深刻的數學開始大量進入物理（主要是量子物理用到了群論）時，我的看法才開始轉變。不過在這些發展之前，物理學家似乎還真的可以信從費曼的說法，與「純粹」的數學家絲毫搭不上關係。

就某種角度，費曼並沒有錯。1970 年代，物理學家用了極少的數學就達成大統一理論（grand unified theory），其中只用了一些基本群論，大概就是這樣。拜託！這可是大統一理論！是統一了三種基本作用力的理論！我們解開了大自然最核心的一大部分祕密，理解這個世界是如何構成的，而且沒有用到數學家稱之為數學的東西。事實上，大統一理論的創造者，以及大部分 1970 年代的粒子物理學家，都十分費曼，很蔑視數學。有次費曼和我一起看秀，他告訴我數學物理那些華而不實的東西，應用到物理時根本連杯馬尿都不如。

我喜歡把量子物理學在 1970 年代中期的發展，看成是從費曼圖（Feynman diagram）的鐐銬中脫身。我認為費曼圖技巧雖然具備聰明的簡潔，卻影響太久，最後對粒子物理學造成不健康的影響。在我研究生的一門量子場論課，教授告訴學生場論的

定義就是費曼圖全體。整組費曼圖構成的集合定義了一個酉群的（unitary）、解析的（analytic），以及勞侖茲不變性的理論。所有量子力學標準正則發展中的操作譬如場算子的對易，它所附帶的精緻內蘊，必須做為工具導出費曼法則。一旦這些規則確立，量子場就可以扔到一邊去。

在這種氛圍裡，的確沒有什麼學習數學的必要。但是孤立子（soliton）與瞬子（instanton）理論的出現，摧毀了這種觀點。粒子物理學家必須開始學習這種華而不實的數學，像是拓樸學。

自發對稱破缺（spontaneous symmetry breaking）與孤立子這兩門理論之間的十年鴻溝，依我的看法，乃是出自費曼圖束縛思考的影響力。即使到了1970年代，仍然有很多人偏好運用消失到真空的圖線來描述自發對稱破缺。把場當做實在的對象，當做某種可以把玩捏塑的東西，這種想法在當時是相當革命性的觀點。

狄拉克（維基百科）

薛丁格（維基百科）

諷刺的是，當時脫穎而出、名為路徑積分法（path integral）的理論也出自費曼，這個方法展現了費曼真正的貢獻。

一旦費曼圖的枷鎖鬆開，費曼的數學觀點也就跟著開始黯淡。年輕一代的粒子物理學家與現代數學的相處越來越融洽，大家對數學的觀點有了根本的轉變。到了1983年超弦理論出現後，這個潮流更是加速前進。在今天，許多超弦理論的研究其實都是數學結構的研究，這是威格納做夢都想像不到的情況。

## 基礎物理與數學

以上是我對過去三十年來，理論物理學家的態度如何改變的簡短回顧。接下來，我想提供一些觀察，談談數學在基礎物理學的角色。你可能注意到，我將文章題目限制在「基礎物理」（fundamental physics）。這是我幾年前發明的字眼，藉以取代過時的「粒子物理」（甚至更糟的「高能物理」）。這聽起來也許像是狗追著尾巴跑，因為我把基礎物理學家定義成想在物理世界中發現某種基礎理論的人。基礎物理和粒子物理有大量的重疊，但也各有相異之處。這個基礎物理的定義廣到足以包括一些凝態物理，他們對理解強量子多體系統（strongly quantum many-body system）的「大域」性質感興趣。如果繼續採用我區分數學和算術的勢利看法，基礎物理學家可以定義成傾向於運用數學而不是算術的物理學家。但不管怎樣，讓我們繼續再看下去。

我相信下面的敘述是真的但卻是不可思議的：更深刻的數學描述更深刻的物理學。例如比較薛丁格

算子（Schrödinger operator）與狄拉克算子（Dirac operator），狄拉克算子所含藏的數學結構就比薛丁格算子更豐富深刻，而我們也期待如此，畢竟薛丁格方程只是狄拉克方程的逼近。和狄拉克算子相連繫的才是真正的數學。

前一陣子，這個看法就讓我瞠目結舌的給撞上了。當時我和同事正研究一個凝態物理的問題，討論在量子化的磁通量影響下，非相對論性電子如何在二維格上躍遷 (hopping)。這個問題和相對論以及狄拉克方程都毫無關係。為了決定電子能量$E$做為動量$p$的函數，我們得到的是一個很標準又直接的$n$階方陣特徵值的問題。一般來說，除了最簡單的情況，都需要跑電腦才能弄出一些數值，這裡頭沒有值得一談或者有數學意義的東西。然而，如果感興趣的不是函數$E(p)$的確切形式，而是函數的零根，也就是代到$E(p)$會等於 0 的$p$值。在這些零點$p^*$附近，可以對$E$做展開，通常$E$會線性依賴於$p-p^*$：也就是$E \approx a(p-p^*)$。結果在對$p$做恰當的平移與尺度變換後，我們發現電子在動量$p^*$附近的行為，可以用狄拉克方程做有效的描述。令人讚嘆的是，這樣我們就可以將指標定理（index theorem）與繞數（winding number）這一整套數學結構搬過來用，找出所有零點的數目。

重點是，決定$E(p)$甚至決定零點$p^*$的位置都是算術性的工作。這些量依賴漢米爾頓函數（Hamiltonian）的細節，稍微改變漢米爾頓函數，$p^*$的值原則上就會跟著變動。相較之下，數學告訴我們，只要漢米爾頓函數整體結構不變，零點的數目就不變。換句話說，這裡我們面對的是一個拓樸不變量。數學在掌握大域與結構性的理解時是有效的，而不是解計算問題。

楊振寧（左），米爾斯（右）。（維基百科）

我曾經在一個對物理感興趣的哲學家會議中指出，相較於薛丁格算子，狄拉克算子所連結的數學更豐富。有聽眾大聲反對說：「你只要數一下與薛丁格算子相關的數學論文數目不就明白了！」這其實是混淆了實用性與美感。對更大一群物理學家來說，薛丁格方程的確比狄拉克方程更有用，所以他們才會投入許多精力，想要釐清薛丁格方程的性質。

但就算針對薛丁格方程，也不是所有薛丁格問題都生而平等，例如考慮與史塔克效應（Stark effect）有關的薛丁格問題，或者粒子在環繞磁單極（magnetic monopole）的球面上運動的薛丁格問題，後者牽涉到深刻的數學，但前者則否。各位或許有人認為，前者至少還有用，但後者卻沒什麼用，因為磁單極可能根本不存在。但是事實上，就是因為磁單極問題所牽涉的數學夠深，所以在最近的理論物理學的發展中佔有核心的重要性，相關討論如雨後春筍一樣到處蔓延。我只舉幾個例子：貝瑞相位（Berry's phase）；波里亞可夫（Alexander M. Polyakov）2+1 維緊緻規範理論（compact gauge theory）的瞬子（這個理論可能和高溫超導有關）；赫爾丹（Duncan Haldane）關於反鐵磁自旋鍊（antiferromagnetic spin chain）的理論；鐵磁背景中洞移動的理論。就其本身而言，以上沒有任何一個問題和磁單極有關，但是卻都分享了相同的基本數學結構。

我上一段尋找零點的故事，也闡述了物理學家做研究時都知道的要點，也就是問對問題的重要性。當然「對」有好幾種可能的意思。顯然我們想問的是與物理相關的問題，但我們也想問那些可以有效運用數學的問題。

說來有點傷感，問對問題的重要性在某些物理領域裡已經逐漸降低，這得溯及電腦的使用。於是，前面談過的問題都可以單純用數值計算來處理。從某種程度來說，算術的確可以取代數學。但無疑的，算術無法提供數學帶來的理解。

威格納的文章發表三十年後，電腦已經成為理論物理的主要工具。就某種意義而言，電腦的確擴展了理論物理的範疇，像混沌（chaos）和非微擾量子色動力學（nonperturbative quantum chromodynamics），如果沒有電腦，根本寸步難行。同時，電腦也呼應了威格納文章的主題：「如果把物理定義成物理社群所考慮的問題與情境，數學在物理中並不特別有效。」

## 數學的洞識

數學所扮演的重要角色之一，是對物理學家需要考察的可能性做出限制。一個例子是李代數（Lie algebra）的完全分類，這對大統一理論的發展顯然極為重要。費曼所謂的物理學家可以自己發明需要的數學，我認為在這點是錯了。物理學家或許可以弄出一個特定的群如$SU(5)$，但是想要說出「大夥兒，這裡就是所有可能的李代數與李群了。」背後的那種推理卻是全然數學的。雖然，這個理論其中所牽涉的推理一旦被發明後，其實並不難理解，但其中卻蘊藏著某種稱為數學洞識的特質。

當然，有些物理學家如年輕的弦論學家，或許也做得出李代數的完全分類，但這樣的話，這些人其實也很容易就可以成為數學家。費曼的攻擊要有道理，必須假設存在完全殊異的人類特質，比如有兩個人，依照某種測量方式知道他們智力相當，但其中一個人只能當物理學家，另一個人只能當數學家。就我自己的觀察，我認為這個講法還頗講得通，很多偉大的物理學家想成為數學家根本連門兒都沒有。

說真的，有許多例子顯示物理學家曾經獨力發展出高等的數學。莫里哀（Molière）有個很知名的故事，提到一位有天分但從小失學的作家，當朋友恭維他寫的散文時，作家先是很迷惑，後來才領悟到原來自己寫的東西被稱為散文。我有一位物理同事，就很喜歡用嘲諷的語氣問更懂數學的朋友說：「告訴我，我寫的是散文嗎？」

其實物理的發現經常牽連到很豐富的數學結構，在發現當時是很難想像的（這就是我先前談到磁單極問題的要點）。狄拉克當然不可能已經領略到所有連繫到狄拉克方程的數學。粒子物理學裡有一個絕佳的例子——手徵性異徵（chiral anomaly），它首先出現於 1960 年代，被當成一件怪事，因為明確的費曼圖計算顯示，天真操作量子場所導出的某個定理是錯誤的。（事實上，在 1950 年代初期，就已經有人因手徵性異徵受到各式各樣的挫敗，只是沒能辨認出來而已。）過去 20 幾年，非常令人意外的，手徵性異徵習慣性的在任何主要的理論發展中冒出個頭來。這些進展包括規範理論的重整化、路徑積分的測度、瞬子、量子數的分數化、誘發質子衰變、繞數與相交數（intersection number）、合適超弦理論的選擇，以上還只是一些例子。這個令人矚目的普遍現象，背後原因是手徵性異徵和根源自拓樸與幾何的一項深刻數學結構有關。

當然，這不表示物理學家感興趣的對象就一定與深刻的數學結構有關。以量子場論為例，從現代觀點，量子場論是用某種泛函積分來定義的，其中的被積項是以虛數單位$i$乘以作用量（action）為冪的指數函數。顯然這只是諸多可能的泛函積分中的少數幾種。至少到目前為止，物理學家並沒有從這個積分發現什麼特別深刻的數學。相較之下，積分項中的作用量倒是經常有些好玩的數學性質（例如純粹的楊 / 米爾斯作用量，Yang-Mills action。）不過在所有重要的情況裡，光是理解被積項的性質，對理解整個積分的性質並沒有特別的幫助。像是在

統計物理的領域裡，這是盡人皆知的事。

有時候，數學在物理情境中會不請自來。一個例子是考慮在均勻磁場下，電子在平面上的運動。最低的能量量子波函數具有$f(z)e^{-z}$的形式，其中$f(z)$是任意的全純函數（holomorphic function），而$z=x+yi$是平面的複數坐標。勞夫林（Robert Laughlin）藉著運用這些波函數所構造的變分多體波函數（variational many-body wavefunction），能夠發展出近乎完備的分數霍爾效應（fractional Hall effect）理論，這個理論的結構性質是不斷訴諸數學解析性定理而獲得的，勞夫林不斷重複這樣的論證：「因為解析性，所以某某必然具備這樣的形式。」先驗來說，分數霍爾效應所挑戰的是多體動力學裡令人望而生畏的艱難問題，勞夫林這麼完備的理論初看起來根本絕無可能出現。

令人驚訝的是，只有在某種規範場之下（從無窮多種可能性中挑出來），其波函數才有上述的全純形式。事實上，人們不見得有遠見將波函數寫成$z$的函數，通常只寫成$x$和$y$的函數。可想而知，我們還是有可能這樣發展出整個理論，畢竟在每一步，只要將方程式重新做規範變換，將$x$和$y$重寫也可以做到。但是這麼一來，整個理論的結構性就會整個模糊掉了。

上述的例子也闡明了大家早已知道的事情：使用正確的表示法乃是兵家必爭之地。

## 符號的有效性

這帶領我們走到實際做研究的物理學家所熟知的另一個事實：研究物理時運用符號的有效性。（我們可以談合理還是不合理嗎？）在最簡單卻深刻的層次上，代數是在某人引入文字代表數量的「想法」時誕生的。我們所有人研究物理時，都有個人偏好的符號，以致於無法忍受不熟悉的符號。人類是習慣的動物，我們習慣用$m$表示質量，用$T$表示溫度，而且就是要這樣。好幾年前，有位卓越的粒子物理學家使用$\pi$來表示標數（index，像是動量的第$\pi$個分量）。他的論文本來就夠難讀了，這樣寫，讀起來更是雪上加霜。

別人告訴我，馬克士威（James C. Maxwell）習慣寫出電場與磁場的各個分量，用$E$表示電場的第一個分量，再依序使用$F$、$G$、$H$、$I$、$J$（這就是磁場用$H$表示的原因！）我不曉得這個故事是不是別人瞎編的，但你大可想像用這種符號去研究電磁理論的問題！標數的選擇真的是門很細緻的學問。怪不得有人說，利用重複標數取和的約定是愛因斯坦對物理學最偉大的貢獻之一。

從會計師的觀點，在上述這些例子裡更好的符號表示更高的效率。不過更好的符號經常也表示對整個主題更深入的理解。例如狄拉克的符號系統（bra and ket notation）體現了在希爾伯特空間中並不需要取特定表現（representation）去呈現態向量（state vector）的事實。

在數學裡也有基本上相當於尋求更完善符號的完整主題。以微分形式（differential form）為例。當我剛進大一時，惠勒（John Wheeler）決定做個教學實驗，他想用「從上到下」的方式教那一年的普通物理學（所以學生先討論相對論和量子力學，然後再將古典物理當做「無聊」的逼近。附帶一句，這個實驗隔年沒有重複再做。）我們學電磁學時用的就是微分形式，也就是所謂「無標數的標數」。其中一部分討論用到的「雞蛋格」圖象，後來還出現在惠勒與他人合著的知名教科書上[1]。不消說，學生都很困惑。更糟的是，我（也許別人也一樣）變得十分厭惡微分形式。這種符號看起來完全沒有用，因為當碰到特定的問題時，終究還是得寫出微分形式的各個分量才能進行計算。於是有很多年，我一直抗拒微分形式，即使有幾位好心的同事試著要「教」我。但是七年前我研究高維的異徵時，我突然意識到，如果沒有微分形式我根本活不下去。如果你懷疑的話，不妨試試把所有東西的標數都寫

出來，然後從$\mathrm{tr}F^n = d\omega$這樣的方程式去解出$\omega$。你將會被海洋般的標數給淹沒。（這裡$F$是楊 / 米爾斯規範場的二維形式。）

微分形式的真正長處並不是為了避免書寫無止無盡的標數串，而是釐清各種物理量的幾何特性。譬如在磁單極的問題裡，規範場的二維形式讓我們能將規範場$F$視為單一的幾何物。相較之下，如果將$F$以分量寫出，則需要先選擇一個特定的坐標，結果就是將簡單的幾何概念（像是面積），拆散成一堆無法辨認的混亂符號。另一個例子是上一段提到的問題，物理學家用算術計算，早就在$n = 2$的情況解出$\omega$。但是只有能夠認識到，$\mathrm{tr}F^n$做為微分形式是閉的（closed），而不是正合的（exact），才真正透露出更深刻的理解。

麻煩的是，當惠勒嘗試說服我微分形式之美時，我正在嘗試掌握計算帶電圓盤電場之類的問題，換句話說，就是那種像股票定價分析的問題，幾乎沒有什麼內在的幾何結構可言。微分形式在只用到算術的問題裡絕無可能展現威力。

（這提示我另一個算術 vs. 數學的定義：電荷周遭的電磁勢＝算術；而磁荷周遭的電磁勢＝數學。）

最近幾年，好幾個像是環扭數（linking number）、相交數的拓樸概念開始進入物理學。再一次，這些概念都可以用具有幾何特性的微分形式寫成既簡潔又自然的樣式。

這些故事顯示，對物理學來說數學常常是威力過大了。用微分形式研究電磁學是太過頭了，但是等到你要處理高維的非交換規範理論時，微分形式就變得不可或缺。

我早期對微分形式的態度是物理學家研究的典型心態：除非我能用它做點什麼，不然我就不要去學。譬如我現在對纖維叢（fiber bundle）的態度，就還停留在這種階段。我還在等待真正需要纖維叢理論協助的問題，無疑我終究還是會碰到的。纖維叢所展示的數學概念，既普遍又自然，讓我十分驚艷，在某個時刻，它一定會開始誘惑我。

纖維叢提供了一個範例：有時候，光是知道這個字眼就夠有用。說起來，它就像可以懸掛物理概念的掛鉤，用起來常常像是增強記憶的技巧。譬如說，處理帶電粒子在環繞磁單極的單位球面上運動的基本問題時，纖維叢理論提供的專有名詞「截痕」（section），雖然在解題時沒有太大的幫助，卻能提醒我們波函數是在個別區域中各自解出來的，需要用規範變換將它們拼合起來。近年，物理學家大體上也是像這樣運用同倫群（homotopy group）的概念，把它當做一種增強記憶的手法。

回到薛丁格算子和狄拉克算子的比較，從狄拉克算子到薛丁格算子損失的當然就是對稱性，破壞勞侖茲對稱成為旋轉對稱。比起相對論性方程（relativistic equation），最近我又見識到非相對論性方程的麻煩。我所受的訓練是相對論性的物理學家，但是過去這一年半，我研究的是凝態物理。剛開始，我的合作者要不斷的提醒我錯將方程寫成相對論性的形式。我只能嘆口大氣，繼續和非相對論性的方程牛步纏鬥，因為處理這類方程總是冗長乏味的過程。

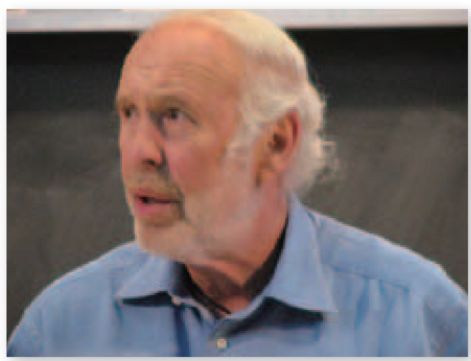
越深刻的數學牽涉到越對稱的結構。當威格納 1960 年撰寫他的文章時，微觀世界的物理規律看起來十分不對稱。現在我們已經知道這些規律只是更深層物理定律的現象學上的逼近，而這些物理定律都是對稱性的。對稱性已經被證明是大自然設計的核心組織原理。事實上，從過去這 25 年基礎物理學的歷史，我們已經深刻的發現，每當更深入一層去研究大自然時，大自然就會展示出更宏大的對稱性。

我已經在別處相當仔細的講過這段故事 [3]。這裡我只想強調，大自然的法則並不必然在探索的層

❶ 指知名教科書 Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A.，*Gravitation*（重力）(1973) W. H. Freeman。

次越深時，就一定會越對稱。舉例來說，弱作用力就另有一個完美可行的理論，其中現象學上的費米理論是源於一雙純量粒子的交換。在大自然的設計裡，也有可能弱作用和電磁作用彼此之間根本毫不相干。

陳省身（維基百科）



西蒙斯（Gleuschk 攝）

## 對稱不合理的有效性

事實上，我認為我們可以提出一個問題：「對稱性在理解大自然時不合理的有效性」。為什麼大自然在基本層次是由對稱性來宰制的？大自然變得愈來愈對稱的事實，意味著它是設計出來的嗎？愛因斯坦曾經說過，關於世界最令人不可理解的就是它是可理解的。先驗來說，我們大可生在一個混沌的宇宙中，其運作的機制遠遠超出人們的理解。關於這些問題所引發的哲學主題，我也在最近一篇文章討論過了 [4]，所以這裡我將集中討論對稱和數學的關係。

對稱與數學有著千絲萬縷的牽連。具有許多對稱性的結構其數學性質自然也比較豐富。所以，如果大自然的構造真的隨著我們探究的越深入，就擁有越大的對稱性，那麼數學當然就更有效率。

讓我回頭來討論算術和數學的區分。大致來說，這個分野也反映在動力學（dynamics）與運動學（kinematics）的不同。將華麗的數學應用在物理時，通常相當於提出一個運動學的架構，然後再在其中處理動力學的問題，在後面這個階段，數學就不再那麼有效，必須由算術來接手。

讓我舉一個明確的例子，最近有許多關於姑且稱之為陳 - 賽蒙斯理論（Chern-Simons Theory）的討論，它有非常多可能的應用，範圍從與弦論和量子重力有關係的拓樸場論，到高溫超導性都可以見到。其中的討論可以是美妙的數學，包括霍普夫項（Hopf term）這種奇妙的結構，或者是大家都在談的辮群（braid group）。但一旦碰到實際的高溫超導性，我們就得面對「真實生活」的物理問題，真正去研究粒子液體具有分數統計的統計力學，像是這個液體的自由能是什麼？它的基本激發態（elementary excitation）是什麼？它有超流體（superfluid）的行為嗎？華麗的數學什麼也不能告訴我們，只有物理的洞識以及算術辦得到。

在物理社群裡，大家都很喜歡價值判斷的話題，像是解出的某某問題是容易還是困難？在決定自己是否要佩服同事的研究時，大家傾向於被華麗的數學所震懾。矛盾的是，華麗數學最有效的問題通常是運動學的問題，因此也比較簡單。讓我引用一個在物理學上比較沒那麼重要的例子，我記得當我和同事在構築膜（membrane）的陳 - 賽蒙斯理論時，步步都被其背後霍普夫映射的數學給牽著走，我們知道事情一定會以注定的方式來完成（例如四元數一定會出現）。任何人如果研究過數學味道比算術濃厚的物理問題，一定有種數學自有其生命的感覺，會一路拖著我們往前走。

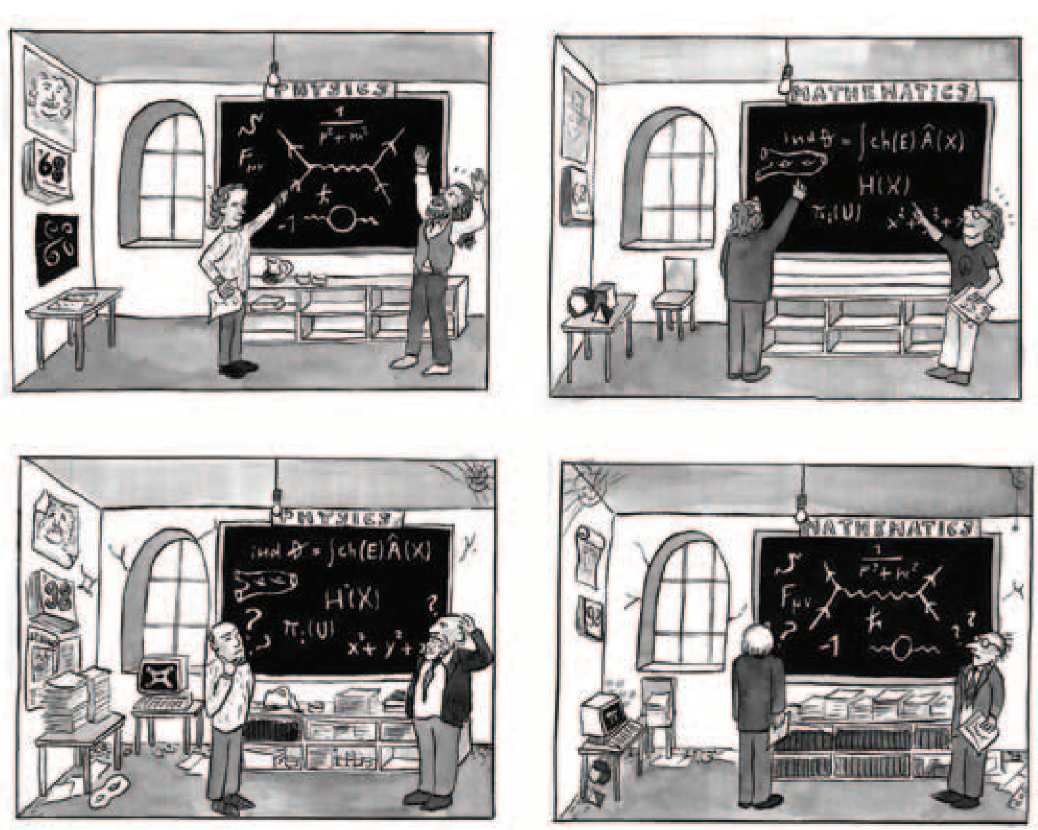
我是從自己的經驗來談算術和數學的區別，畢竟這兩類問題我都研究過。而且多少有點怪的是，無論是算術還是數學都很吸引我。

## 數學愈豐富的理論愈正確

接下來，我想提一下理論物理學家的普遍感受，這個情懷可以高尚的敘述成「如果我做的物理問題呈現意料外的豐富數學結構，那麼這個物理理論一定是正確的。」我們都知道這個假說曾經被驚人的驗證過，例如愛因斯坦的重力理論與狄拉克的電子理論。

現在這項論證經常被弦論學家掛在嘴上。當然，某些用來描述弦的那種顯然不起眼的作用量，其中隱藏的數學內涵卻真的非常不得了。弦論或許很可能是對的，但是這樣我們就必須接受這種論證嗎？有種挑剔的意見認為，這一切並非巧合，因為基礎物理學家想研究的結構，正好是數學家感興趣的結構。弦論的世界面（worldsheet）是二維的，因此自然可以在上面應用複數，進而使用解析函數的理論，它的作用可以被視為保角場論（conformal field theory），於是各式各樣的美好數學性質接踵而來。從天真的物理學家觀點，如果真要擴展研究的架構時，該研究的應該是團狀物（blob），而不是弦。可惜，團狀物的世界團塊是個惡厲之地，那些很自重的解析函數或保角場根本不敢涉足其中，我們看不出上面長得出什麼像樣的數學結構。但是，這就表示弦論是正確的嗎？

當然思考這種事情也許是浪費時間，如果我有力氣，應該用到弦論的研究上才是。不過上述的討論，可以帶大家看到我所謂的理論物理鏢靶理論。1970 年代中期，電弱交互作用的模型激增。當時一位傑出的實驗物理學家，曾經向我們一群理論物理學家說，理論學家只是在亂射飛鏢，其中有支飛



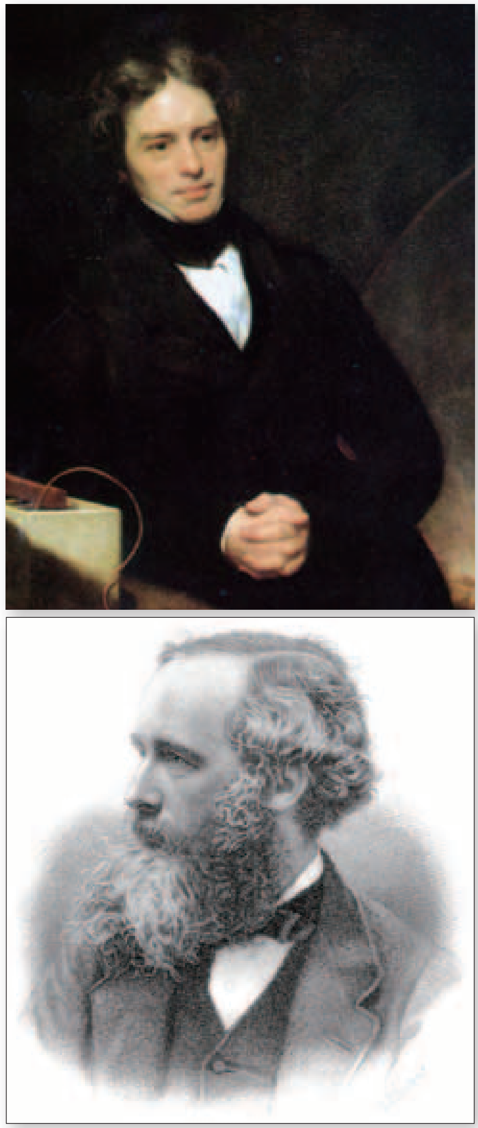

Robbert Dijkgraff 提供。他現在是普林斯頓高等研究院院長。

鏢一定會射中目標，其他錯誤的理論則被遺忘。

聽到這種說法的理論學家當然給激怒了，我也覺得他們氣得有道理。教科書上經常把物理學的進展描述成理論之間的競爭，這種說法大都無法用在基礎物理上，因為在任何時間，通常都不是選擇理論 A 或理論 B 的問題；反而是在某個優勢理論與沒有理論之間做選擇。我們沒有那麼奢侈，可以在弦論或別的理論中挑三撿四。在 1970 年代，也沒有理論可以和規範理論競爭。

那麼，數學家是朝著物理亂射飛鏢嗎？數學家研究的眾多結構中，總有一些一定可以有效的用來理解物理世界，不是嗎？

過去幾年，向粒子物理湧入的數學只能用海嘯來形容。如果你不清楚弦論的發展，讓我給你一個梗概：在 1984 年，如果理論物理學家能夠自在的遊走於陪集空間（coset space）、同倫群、同調系列（homology sequence）、異殊代數（exceptional algebra）這些概念之間，同事會認為他精通數學。但是四年之後，同一個人卻會被弦論學者所鄙視，認為他在數學上是無可救藥、失學又淺薄無知的人。



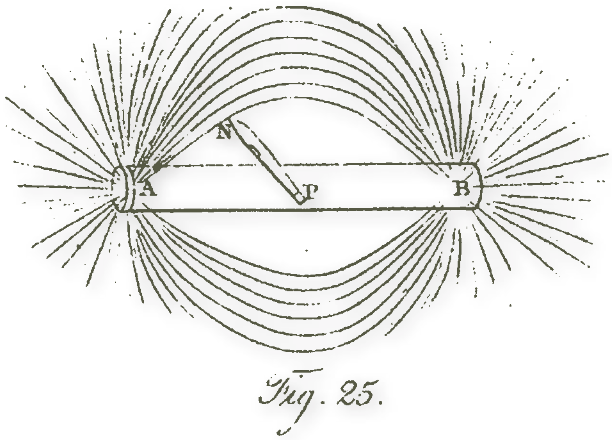
法拉第和馬克士威

## 物理和數學

物理使用這麼多數學是好事嗎？我沒有想法。因為想要證明這點，得先嚥下去後才知道，看看弦論是否能解釋世界。在此同時，如浪潮般湧入的數學卻是完全合理的。為了探究普朗克尺度（Planck scale）的物理學，物理學家離實驗支撐的距離還遠得很，只剩下數學能指引我們。數學的這種影響方式，連威格納也無從想像。

討論數學在物理學中的角色時，我很喜歡講法拉第（Michael Faraday）和馬克士威的故事 [3]。法拉第出身貧乏，他自承數學是他的盲點，無法將他直覺的觀念轉化成精確的數學描述。相反的，馬克士威家世顯赫，不論是數學還是其他方面，都受到當代最好的教育。不過在馬克士威開始做研究之前，他曾說：「我在（電學）領域中看不到數學，直到我讀到法拉第的《電學的實驗研究》。」事實上，馬克士威認為法拉第的數學缺陷反而是種好處，他寫道：「於是法拉第 ...... 被隔絕於導致法國哲學家成就的思想路徑之外，他必須使用他懂的符號自行解釋現象，而不是採用當時知識份子的唯一語言。」

馬克士威所謂的「符號」，指的是法拉第的「力線」（lines of force）。在稍早之前，馬克士威就曾說過：「[ 法國哲學家 ] 布阿松（Siméon Poisson）與安培（André-Marie Ampère）[ 關於電學 ] 的著作內容形式充斥著專業的技術，想要推導出任何結果，學生必須受過嚴格的數學訓練，對於具備年紀成熟這項好處的人，能不能接受這種訓練



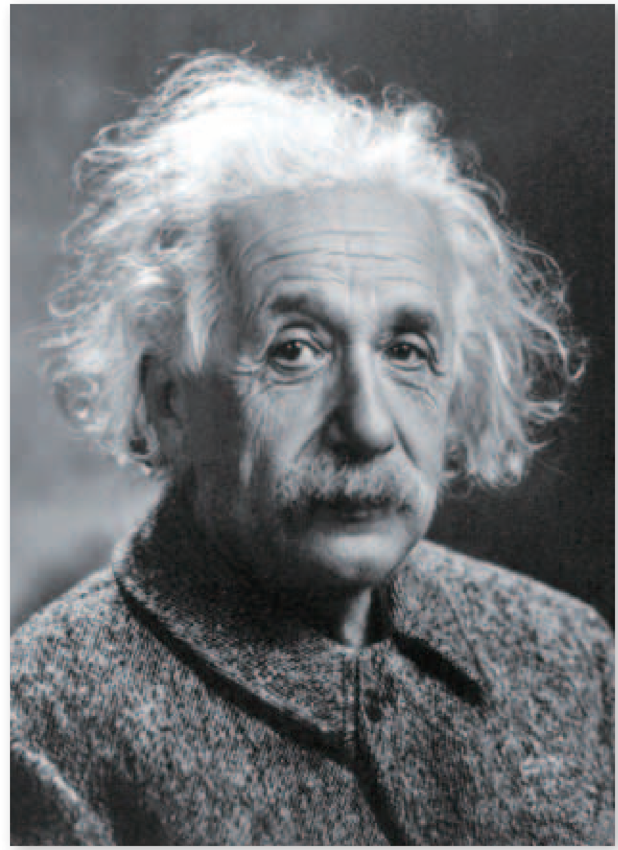

法拉第手繪的力線

實在很可疑。」是啊，我很確定現代處於「成熟年紀」的物理學家會覺得馬克士威的話一針見血。

法拉第和馬克士威的故事之所以有趣，是因為我們不清楚這個故事的寓意何在。我想大家會同意，屬於法拉第宏大傳統中的直覺，在物理學的發展中具有最高的重要性。但另一方面，當我們徘徊在普朗克尺度的土地上，還能夠有什麼直覺？別忘記，如果馬克士威缺少法國哲學家的方法——也就是微分方程——的話（對馬克士威來說是數學，對我是算術），他可能根本導不出光傳播的理論。

我以另一段軼事 [5][6]，結束這段數學有效性的思辯之旅，姑且不論有效性是合理還是不可思議。有位年輕時認識愛因斯坦的女士告訴我，在一個美麗的春日，她和愛因斯坦走進一座繁花似錦的庭園，他們站著，默默注視著眼前的景色。最後，愛因斯坦說：「我們不值得享有這種美。」

物理很美，藉由數學的有效性使它更美。我們值不值得享有這種美，這樣想合理嗎？∞



愛因斯坦（維基百科）

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

### 原文出處

Mickens, R.S. (ed.) *Mathematics and Science* (1990) World Scientific.

### 譯者簡介

周樹靜為臺灣數學科普譯者。

### 延伸閱讀

▶徐一鴻，《可畏的對稱：現代物理美的探索》（2012）五南。

▶徐一鴻，Symmetry (Public Lecture)（2004）YouTube。2004 年非洲夏季理論研究班在南非舉行，為期三週，這是徐先生當時給的大眾演講。https://www.youtube.com/watch?v=MOTevbZNLYQ

▶ Lisi, A. & Weatherall, J.O.，〈幾何萬有理論〉《科學人》 108 期（2012）。