

馬航MH370 失蹤之謎

計算數學的飛機迫降全攻略

作者：陳鞏

顧聰

摩里斯 Philip J. Morris

佩特遜 Eric G. Paterson

舍捷夫 Alexey Sergeev

王怡菁

威爾畢茨基 Tomasz Wierzbicki

譯者：畢馨云

作者簡介：陳鞏畢業於清華大學，威斯康辛大學麥迪遜分校博士，現為德州農工大學及德州農工大學卡達分校數學教授，也是德州農工大學量子科學與工程研究所一員。主要研究領域有控制論、計算力學、偏微分方程、混沌動力學、邊界元素法數值解、量子計算。

顧聰畢業於上海交通大學，現為德州農工大學數學系博士生。

摩里斯是英國南安普敦大學博士，現為賓州州立大學航太工程 Boeing/AD Welliver 教授。主要研究領域有空氣動力噪聲學、計算氣動聲學、流體動力學穩定性、紊流建模、熱聲學。

佩特遜是愛荷華大學博士，現為維吉尼亞理工學院航太及海洋工程 Rolls Royce Commonwealth 教授與系主任。主要研究領域有空氣動力學、流體力學、海洋工程學。

舍捷夫是卡達環境與能源研究中心的博士後研究員。

王怡菁畢業於東海大學，交通大學碩士，現在是德州農工大學數學系博士生。

威爾畢茨基是波蘭基礎科技研究院的應用力學博士，現為麻省理工學院機械系撞擊與耐摔性實驗室主任，應用力學教授。

2014年3月8日，馬來西亞航空飛往北京的班機MH370，從吉隆坡起飛後不到一小時就失聯。這架波音777-200ER型客機上，有12名機組人員及227位乘客。馬來西亞總理於3月24日發言說：「因此我心情沉痛，深感痛惜，不得不告訴各位……MH370班機在南印度洋墜海。」雖然MH370班機仍下落不明，不過現有的證據都指向墜海。

然而，儘管令人心驚膽顫，但並不是所有的水上緊急降落都以悲劇收場——情況在控制之中的緊急降落，稱為水上迫降（ditching）。2009年1月15日，全美航空編號1549班機從紐約拉瓜迪亞機場起飛後遭遇鳥擊，引擎失去動力，結果機長薩倫伯格（Chelsey Sullenberger）和他的組員讓這架

A320-200型空中巴士，成功迫降在哈德遜河上，機上全員生還，稱為「哈德遜河上的奇蹟」。

圖1和本文後面提到的電腦動態模擬，是我們模擬波音777型客機墜入海中的「示意圖」。（請見下頁BOX 1的解說。）這種模擬有助於了解其中的物理機制，同時提升乘客安全，但難度極高，所以需要工程師、數學家、電腦科學家之間的合作。

撇開謀殺和陰謀這類人為因素不談，針對事故所做的任何科學調查，都必須考量工程方面的因素，譬如機件儀器故障、空中爆炸、天氣、導航系統等。不過，在數學家的好奇心以及我們從小對飛機的著迷的驅使下，這阻擋不了我們加入調查與重建工作，希望有所貢獻。事實上，數學與工程密不可分。

分，並不像有些人所想的那般與「現實世界」脫節。

馬來西亞總理在發言中說到 MH370 班機在南印度洋「墜海」，是根據英國通訊衛星公司 Inmarsat 的推斷。有一篇發表在美國《工業與應用數學學會會訊》(SIAM News) 上的文章，清楚寫出 Inmarsat 公司是如何做出雷達通訊追蹤的 [Zwe14]，文章作者是德州大學達拉斯分校數學系教授齊維克 (John Zweck)，他利用都卜勒

頻移、聲脈波的時間與位置、三角學等數學方法，以及 MATLAB 軟體，來證明 Inmarsat 的推斷。儘管如此，Inmarsat 的雷達追蹤法與數據分析仍未說服所有的人，相信這是鐵一般的事實；譬如芬克曼 (David Finkleman) 就提出了幾個反論點 [Fin14]。(芬克曼博士是北美航太防禦司令部與美國太空司令部的研究分析中心主任暨資深科學家。)

我們要從數學和跨學門的觀點，來討論這件航空事故。我們會呈現，計算數學 (computational mathematics) 與力學要怎麼幫助我們了解飛機水上緊急降落的物理本質、如何模擬與計算，以及該如何運用這些知識讓民航和其他航太相關事務更加

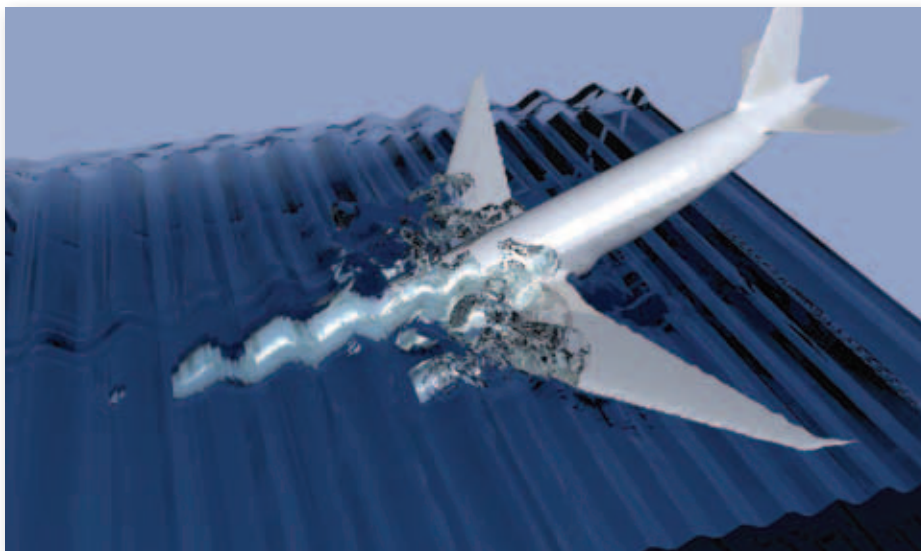


圖 1 波音 777 型飛機以每秒 70 公尺的速率、俯仰角 -20 度、在時間 0.36 秒時衝入海中。在 OpenFOAM ([ope]) 軟體中使用流體體積法 (volume-of-fluid method, 縮寫為 VOF) 模型，來模擬流體與機身之間相互作用的二相流。也請點選連結 <https://www.dropbox.com/s/pbjhrovlqrqizm/smooth-cin40.avi>，看一下這個動力學運動的動態模擬。

安全。這類型的問題，已經成為工業界或政府機關實驗室跨學門團隊裡的數學家的典型工作。

我們考慮的問題是動態的，有電腦動態模擬的輔助是最好不過了。建議各位由本文提供的各個網址，上網看這些動態模擬。(讀者請參見文末延伸閱讀所提供的連結網頁來瀏覽。)

入水問題簡述

入水問題 (water entry problem) 是應用數學及流體力學當中的經典問題，它是探討物體進入水中時的動力學運動。這個問題是由幾個應用問題激發出來的：水上飛機的著陸、火箭或阿波羅號太空艙返回地球後的降落，以及飛機的水上迫降或墜毀。

BOX

1. 圖 1 飛機入水及其電腦動態模擬之補充說明

我們利用 VOF 模擬與計算飛機潛沒部分周圍水波的飛濺和堆積，得到的結果很接近實際情況。我們也採用過水平集法 (level-set method, 等高集法)，結果類似。不過，我們並沒有考慮到以下幾種物理因素及現象：

- (1) 飛機減速的問題，機速保持每秒 70 公尺。除此之外，接觸到水之後飛行路徑通常會偏轉。
- (2) 飛機在每秒 70 公尺的速率下，很可能會發生結構破裂和解體。
- (3) 流體動力、流體浮力及阻力並沒有納入模型中。

對此領域做出重大貢獻的，是著名的應用數學家與流體力學家馮卡門（Theodore von Kármán, 1881–1963）。為了研究入水問題，他發展出「附加質量」的



圖 2 馮卡門針對入水問題所提出的附加質量概念，這是個簡化的理想狀態。圖中的紅色區塊代表「附加質量」，這是隨著楔形拋體的運動而運動的流體質量。位於靜止水面上方的（紅色）附加質量，稱為堆積（pile up）。

概念，在潛沒物體周圍、會隨著物體運動而運動的部分流體的質量 [vK29]（見圖 2）。馮卡門推論，物體受

到的撞擊力，會跟總動量的瞬時變化有關，而與總動量有關的質量除了物體本身的質量，還要包括物體潛沒部分周圍的流體額外造成的「附加質量」。亦即（參見 [Abr11, eq. (2.3)]）

$$\mathbf{I} \frac{d}{dt} \left[(M + m(t)) \dot{\zeta}(t) \right] = M_g - F_B - F_C - F_D$$

其中 M = 拋體的質量， $m(t)$ = 「附加質量」， F_B = 浮力， F_C = 毛細管力， F_D = 靜態阻力， $\zeta(t)$ = 浸入流體的深度。

有件事要注意，附加質量 $m(t)$ 的精確值是未知數。馮卡門估計，在物體潛沒入水中的時間很短或深度很淺的情形下，附加質量是與物體瞬時靜止水線面等面積的平板質量的一半。華格納（Herbert Wagner）進一步修改馮卡門的結果 [Wag31]，把水體堆積的效應也考量進去，同時找出附加質量與浸水線面之間的關聯。更進一步的研究工作（譬如 [Fab57]），則考慮到潛沒部分的幾何形狀。我們發現，從這些簡單研究方法得到的分析與結果，要比由楔形、圓錐體這類簡單幾何形狀所做出的實驗結果來得好，甚至還有助於反潛飛彈的設計。

在數學方面，研究二維楔形入水問題的論文，則包括了像是席夫曼（M. Shiffman）和史賓塞（D. C. Spencer）所寫的正向入射問題研究 [SS51]，以

及蓋拉貝迪恩（P. R. Garabedian）所探討的斜向入射研究 [Gar53]。這些論文用到複變和位勢論，來處理二維情況的不可壓縮流體、無旋流、無黏滯流，提出了嚴謹的分析。

艾布拉（Serge Abrate）的論文 [Abr11] 對入水問題做了詳盡的概述，列出了 476 條參考資料，同時還可找到十多篇數學（面向的）論文。

馮卡門、華格納等人做出的貢獻非常了不起，而且到今天仍繼續採用。不過，入水問題的物理模型，模擬起來要比單純的「附加質量」概念複雜許多。實際上，從實驗中可觀察到幾個入水階段 [Mac79]：（1）空氣腔（cavity）打開與噴柱飛濺；（2）空氣腔閉合，形成氣囊；以及（3）空氣腔分離，出現氣泡生滅的氣蝕效應（cavitation）

（見圖 3）。要想描繪出其中豐富的物理學，最好的辦法是透過先進的計算流體力學（CFD）。靠著計算流體力學方法，我們就可以把 \mathbf{I} 式很自然地納入二相流體結構交互作用模型（two-phase fluid-structure interaction model），模擬更複雜與一般的幾何形體入水的情況，而不限於早期處理的簡化形體如錐體、柱體、楔形體。

模擬飛機水上迫降或墜毀

對於任何一次的緊急降落，飛機耐摔性（crashworthiness）和人員存活率都是首要考量。地球表面有 71% 的面積被水覆蓋，許多主要機場又都位於海邊，因此美國聯邦航空管理局（FAA）要求所有飛機必須配備救生衣，同時要提供機師水上降落準則和手冊。

假設一架像 MH370 這樣的飛機並沒有在空中爆炸，那麼所有可取得的跡象都顯示它墜毀在印度洋。這是個飛機入水問題。在這一節，我們要用計算流體力學，針對幾種假設情況做數值模擬。

我們採用表 1 所列的參數值，來模擬一架典型的波音 777 飛機。



圖 3 根據 Mackey[Mac79]，拋體入水各階段如下：(a) 空氣腔打開；(b) 拋體完全潛沒，被氣囊空腔包住；(c) 空氣腔與拋體分離，拋體完全被水包圍。空氣腔內可能殘留一些水蒸氣，而且常會產生氣蝕效應。(改編自 [Abr11, p.060803-2])

總重	$1.8 \times 10^5 \text{ kg}$
翼展	60.9 m
機身橫截面積	29.6 m^2
長度	63.7 m
滾轉轉動慣量	$1.06 \times 10^7 \text{ kg m}^2$
俯仰轉動慣量	$2.37 \times 10^7 \text{ kg m}^2$
偏航轉動慣量	$3.34 \times 10^7 \text{ kg m}^2$

表 1 CFD 計算所使用的波音 777 參數值

這項研究的根本主題是連續體力學 (continuum mechanics)，包括入水問題，先是含自由液 / 氣界面的流體固體交互作用，再來

是隨後的撞擊與結構失效分析。在此，我們把水和空氣視為可壓縮流，用納維爾 / 史托克斯方程 (Navier-Stokes equation) 來模擬 (見 BOX2)。我們使用的數學模型，與郭保東等人所用的模型類似 [GLQW13]。

我們採用的 CFD 軟體是 OpenFOAM，這是開源軟體，現在也廣泛用於工業界和研究機構。可參考我們其中幾位所寫的介紹文章 [CXM+14]。特別是，我們會使用 compressibleInterDyMFoam 來處理二相流體，而用 RANS $\kappa - \epsilon$ 來模擬紊流。(可參考 $\kappa - \epsilon$ 紊流模擬的相關數學研究，譬如 [RL14, MP93]。) 所有的計算，都是在美國德州農工大學的 EOS 超級電腦以及德州農工大學卡達分校的 RAAD 超級電腦上進行的。這一節所舉的

例子，每次執行運算都會在校內超級電腦上跑個一天到好幾天。

我們假設飛機是剛體。除了圖 1 所示的範例，我們並沒有把波音 777 機翼下方的引擎包含在內，因為就我們所知，在發生入水情形時，吊掛式的發動機短艙可能會是最先被扯掉的東西。(但在計算上，把引擎納進計算流體力學的研究是很容易的事，正如圖 1 所示。)

這個問題有兩項截然不同的計算流體力學功能特點：

(a) 由於飛機與水面之間有相對運動，因此研究者必須使用動態網格 (dynamic mesh) 或是非慣性參考坐標。為此，我們合併使用了 OpenFOAM 軟體當中的 dynamicRefineFvMesh 和 dynamicMotionSolverFvMesh。

(b) 自由液面 (free water surface) 可以使用 VOF (流體體積法) [HN81]、水平集法 [OS88, SSO94]、這兩種方法的結合 [Son03]、或是三次內插擬粒子法 (cubic interpolated pseudoparticle method) [TNY85] 來處理。由於 OpenFOAM 當中有 VOF，因此我們就採用 VOF。

BOX

2. 模型選擇：可壓縮流或不可壓縮流？

我們是在處理兩種流體：空氣和水。根據作業情況 (速率及飛行高度)，我們既可把空氣視為可壓縮流 (compressible fluid)，也可以看成不可壓縮流。至於液態的水，通常視為不可壓縮流。不過在這個問題，倘若選擇水的模型為不可壓縮，CFD 計算值將難有收斂的結果。可能的原因是，在水上降落的情形下，局部接觸界面壓有可能變得非常大 (大約是 10^6 帕)，使水呈壓縮狀態。因此，我們把空氣和水都視為可壓縮流 [GLQW13]。

二相問題的流體體積方程式如下：

各相的質量守恆

$$2 \quad \frac{\partial(\rho_i \alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \alpha_i \mathbf{u}) = 0$$

其中 $\alpha_i, i = 1, 2$ 是各相的體積比率，而且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 。

動量守恆

$$3 \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathcal{T} + \rho \mathbf{g} + \gamma \kappa \nabla \alpha_1$$

其中的 \mathcal{T} 是總應力張量 (total stress tensor) 的軸差 (deviatoric) 部分的應力張量。

$$4 \quad \mathcal{T} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) - \frac{2}{3} \mu \mathcal{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

其中的 \mathcal{I} 是單位張量， ρ 和 μ 分別為混合物的有效密度及黏度場， γ 則是表面張力， κ 是相界面曲率。

$$5 \quad \kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \alpha_1}{|\nabla \alpha_1|} \right)$$

需要注意的是，氣 / 水界面條件就隱含在 3 中的 $\nabla \alpha$ 項裡。

狀態方程式

$$6 \quad \rho_1 = \rho_0 + \psi_1 p \quad (\text{水})$$

$$7 \quad \rho_2 = \psi_2 p \quad (\text{空氣})$$

這兩個方程式提供空氣與水等溫過程的模型。此處 $\psi_j (j = 1, 2)$ 的物理意義是 $1/c_j^2$ ，其中 c_j 是介質中的聲速。

運動的六自由度

$$8 \quad \sigma = -p \mathcal{I} + \mathcal{T}$$

$$9 \quad \mathbf{F}(t) = \text{作用力} = \int_{\partial \Omega(t)} \sigma \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\tau(t) = \text{扭矩} = \int_{\partial \Omega(t)} \mathbf{r} \times \sigma \hat{\mathbf{n}} dS$$

飛機所占的區域外部記為 $\Omega(t)$ (隨著

飛機運動的時間 t 而變)，而 $\partial \Omega(t)$ 是它的邊界。邊界速度 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial \Omega(t)$ 稍後可從剛體動力學中的 9 計算出來。

飛機蒙皮上的變動邊界條件

$$10 \quad \mathbf{u}|_{\partial \Omega(t)} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

要注意的是，在時間 $t = 0$ 時，飛機質心沿著各進場角的速度為 V_0 (見表 2)。連同 2 至 9，這就構成了完整的初始邊界值數值計算問題。表 2 列出了各種物理和計算上的參數值。

備註 1：每個 CFD 的處理都需要驗證。為什麼？計算流體力學方法源自理論、實驗與計算，可以藉由驗證來判定計算結果是否符合實際情形——也就是實驗數據。CFD 程式碼必須產生精確度合乎預期的數值結果，這樣才能很有把握地使用。在此我們採用了 [WSH04] 當中的實驗數據來做為簡化版本，也就是受約束的自由落下「楔塊」入水。楔塊只有垂直平移的自由度。楔塊的加(減)速，會在與水撞擊的過程中進行測量。在 [WSH04] 當中的研究也採用了二維勢流模型，來進行數值研究。為了驗證我們的計算流體力學方法，實驗的設定也以三維網格來重現。圖 4 是不同參數值所得出的加速時間曲線。(其中一個變動參數「橫斜角」(deadrise angle)，定義為楔塊傾斜面與水平面

大氣壓	$1 \times 10^5 \text{ Pa}$
氣壓下界	$1 \times 10^4 \text{ Pa}$
水的動黏度	$1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
空氣的動黏度	$1.589 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
氣水表面張力 (γ)	0.07 N/m
重力加速度 (g)	9.80665 m/s^2
6 中的 ρ_0	1000 kg/m^3
水的壓縮係數 (6 中的 ψ_1)	$1 \times 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$
空氣的壓縮係數 (7 中的 ψ_1)	$1 \times 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$
$\kappa - \epsilon$ 紊流模型中的常數	$C_\mu=0.09, C_1=1.44, C_2=1.92, \sigma_\epsilon=1.3$
$\kappa - \epsilon$ 紊流模型中的初始值	$\kappa = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2, \epsilon = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}^3$
飛機相對於靜止水面的初速率 (V_0)	$58 \text{ m/s} (\approx 210 \text{ km/h})$

表 2 CFD 計算所採用的流體流動參數值

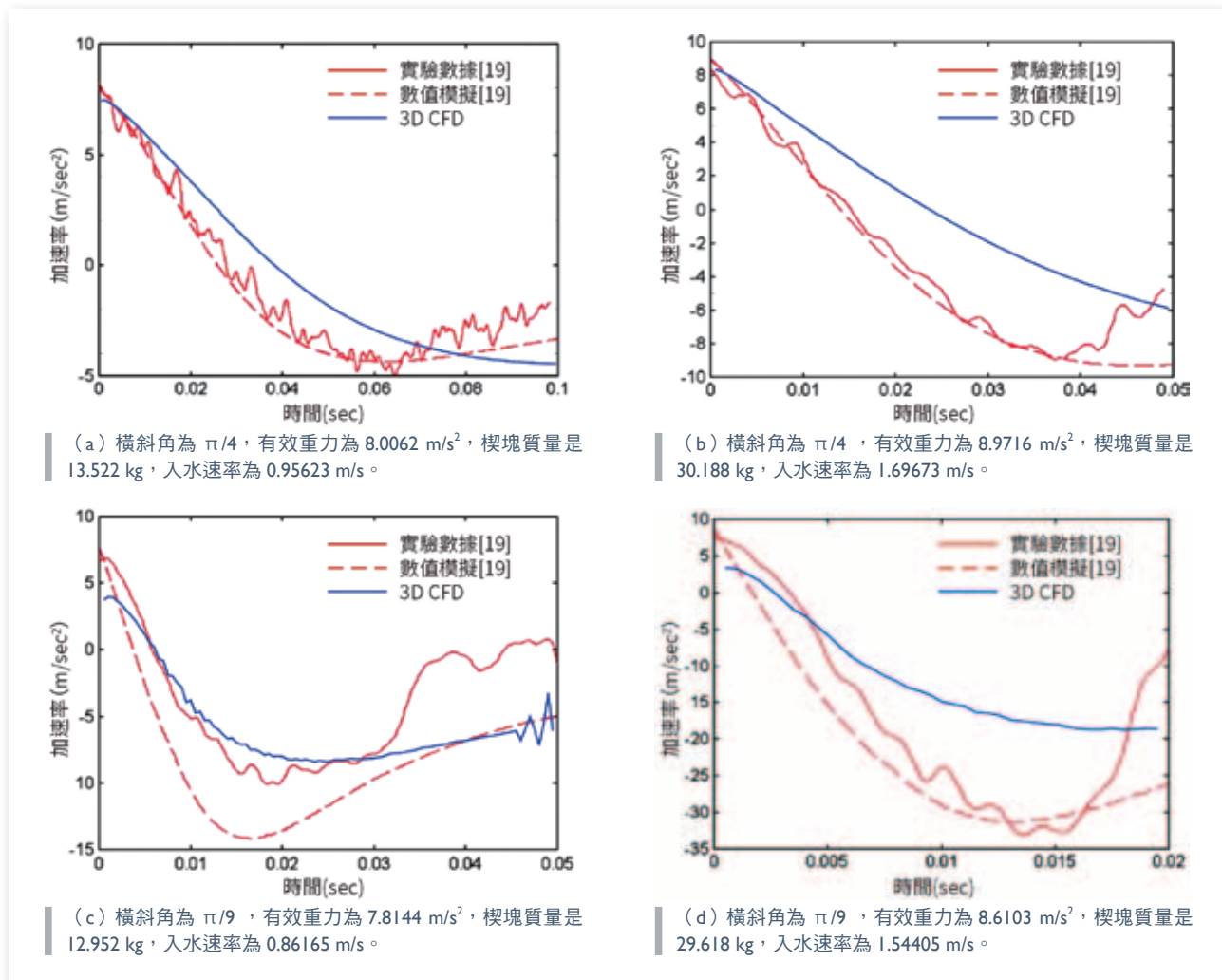


圖 4 隨時間基準而變化的加速曲線，並與吳國雄等人所做的曲線來作對照。圖中的曲線是以不同的設定值，從實驗與數值模擬所做出來的；藍色曲線代表本文中由我們的計算方法得出的數據。（感謝 Elsevier 版權部門及 Ms. Lakshmi Shridhar 同意圖形重製，原圖來自 [WSH04] 28 頁）

之間所成的角度。) 雖然幾個值有出入，但我們的 CFD 模擬，與加(減)速曲線是定性相符的。我們也注意到，[WSH04] 當中的數值模型非常簡化，並未把一些空氣流體動力效應考慮進去。

五種情形分析

航空專家普遍認為，客機的入水方式決定它的解體形式，這對於搜索行動是重要的線索與方向 [syr]。因此接下來我們會提出五種可能的入水情形，在每個情形中，我們都會提供短評、示意圖(見圖 5)、數據及 CFD 電腦動態模擬。每個動態模

擬都分成兩部分，第一個部分在呈現視覺效果，第二個部分則在顯示壓力負載。

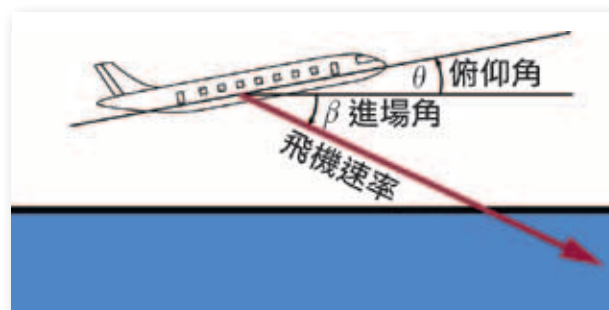
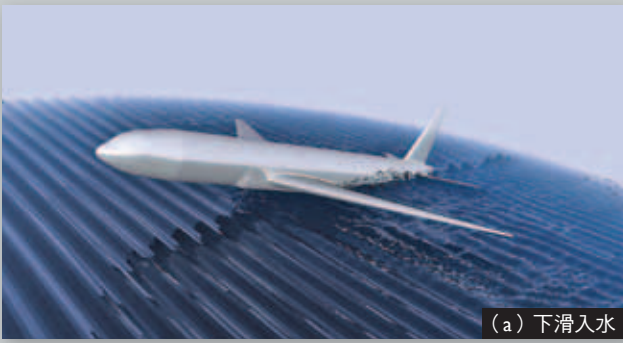
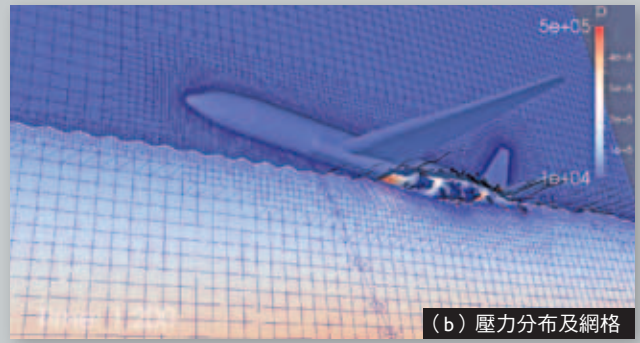


圖 5 圖中的 θ 角是情形 1 至情形 5 中的俯仰角，而 β 角為進場角。飛機的速率是以質心的速率來代表。



(a) 下滑入水



(b) 壓力分布及網格

圖 6 俯仰角 = 8° ，進場角 = 1° 。這個圖對應的是情形 1。動態模擬可以上網看：<https://www.dropbox.com/s/zpme04bmakien2h/comb8.mp4>。動態模擬分成兩部分：第一個部分呈現了水流模式，第二個部分是在顯示壓力分布。（本節其餘附圖的動態模擬也是如此。）

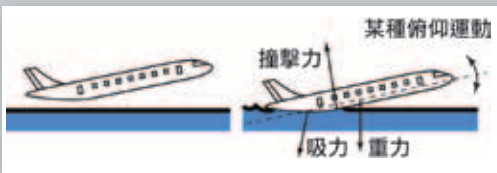
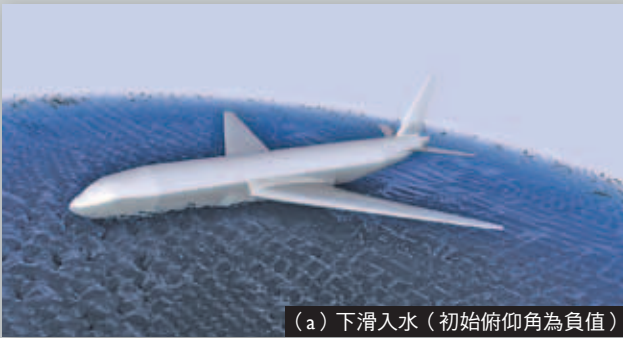


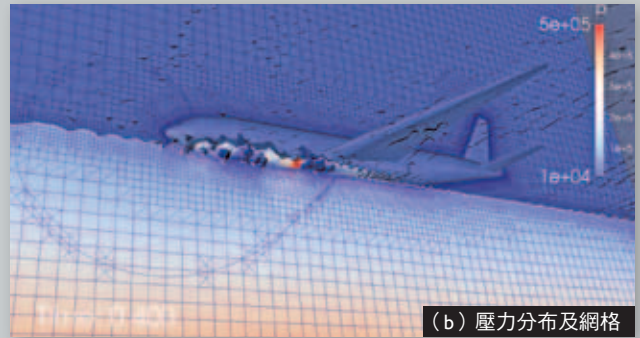
圖 7 滑翔式水上迫降過程示意圖；圖中畫出了主要的作用力。這個圖對應的是情形 1。

情形 1：俯仰角 = 8° ，進場角 = 1°

這或許可以稱為滑翔式水上迫降（glided ditching），情形與第一節提到的全美航空 1549 班機類似；請見圖 6 及附帶的動態模擬。由下一節 13，可得飛機速度的垂直分量為 1 m/s 至 2 m/s，這遠比下節提到的，會造成結構失效的臨界速率 $V_{cr}=15\sim 20\text{m/s}$ 來得小，因此是好事。也可參考圖 7。

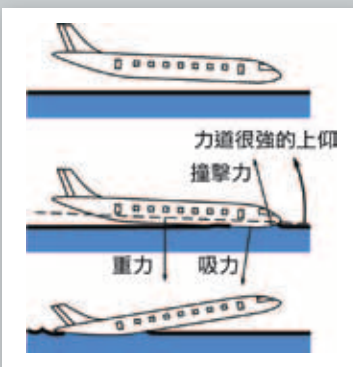


(a) 下滑入水（初始俯仰角為負值）



(b) 壓力分布及網格

圖 8 俯仰角 = -3° ，進場角 = 3° 。這個圖對應的是情形 2。動態模擬請見：<https://www.dropbox.com/s/6zakw7js7kbcwed/comb-3.mp4>。



情形 2：俯仰角 = -3° ，進場角 = -30°

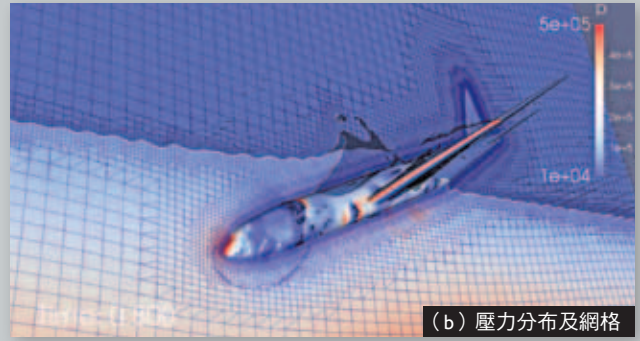
請見圖 8 及它的動態模擬。在此處我們看到一個有趣的現象；亦即，雖然俯仰角原先是負值，但飛機會在水上「反彈」，讓俯仰角變成正值。如圖 9。這種情形發生時，機腹底部（機身與水的接觸面）會承受到很大的彎曲力矩和表面壓力，這可能會導致飛機從中段解體，這種全面性的結構失效會在下一節說明。

圖 9 初始俯仰角為負值的水上迫降過程示意圖。飛機能夠回到跟圖 7 類似的滑翔式水上迫降姿態 1。這個圖對應的是情形 2。

1 水上迫降姿態（ditching attitude）是專業術語。



(a) 俯衝入水



(b) 壓力分布及網格

圖 10 俯仰角 = -30° ，進場角 = 30° 。這個圖對應的是情形 3。動態模擬請見：<https://www.dropbox.com/s/8iyj9xws4d90avk/comb-30.mp4>。

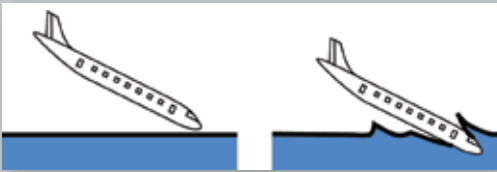
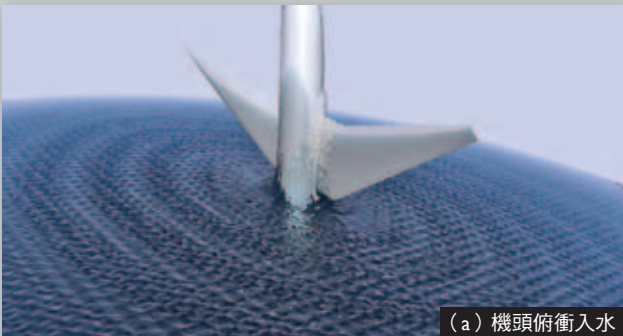


圖 11 俯仰角的負值太大，無法回到滑翔式水上迫降姿態。機頭俯衝進水中，幾乎沒有反彈。這個圖對應的是情形 3。

情形 3：俯仰角 = -30° ，進場角 = 30°

請見圖 10 及它的動態模擬。在此處我們看到，機頭在這段時間裡都受到很大的壓力。也可對照圖 9，看一下圖 11 的示意圖。機翼一旦入水，機翼前緣所受的壓力負載會高達 10^6 帕。



(a) 機頭俯衝入水



(b) 壓力分布及網格

圖 12 俯仰角 = -90° ，進場角 = 93° 。這個圖對應的是情形 4。動態模擬請見：<https://www.dropbox.com/s/vaf0qenjqw0lk5yz/comb-90.mp4>。

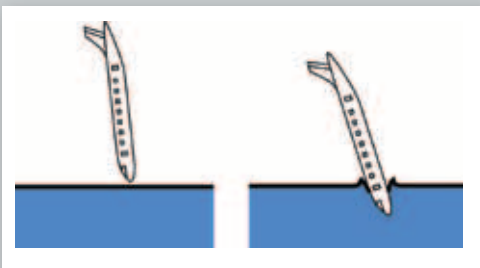
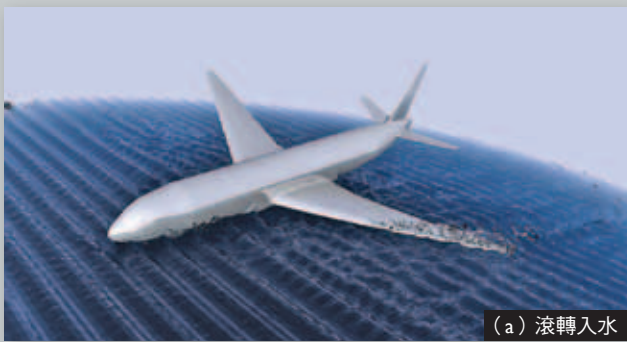


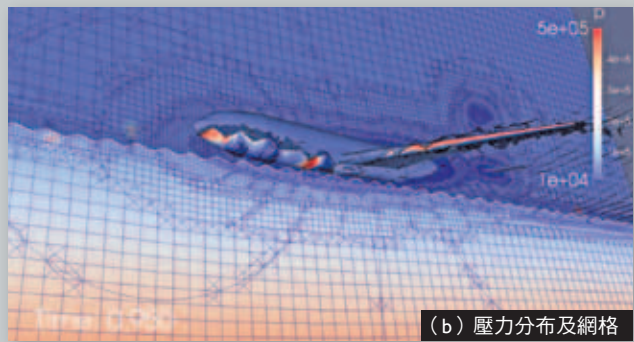
圖 13 機頭俯衝的示意圖。海流會把飛機朝右推，最後可能會使飛機仰躺在海底。這個圖對應的是情形 4。

情形 4：俯仰角 = -90° ，進場角 = 93°

請見圖 12 及它的動態模擬。這是機頭俯衝的情況。在此處我們進一步假設，海流是以 3 m/s 的速度由左往右流動。那麼，飛機一旦入水，就會逐漸被海流帶往五點鐘方向，最後有可能掉到海底，機腹朝上，如圖 13。更多的討論可參照 BOX 3。



(a) 滾轉入水



(b) 壓力分布及網格

圖 14 俯仰角 = -3° ，進場角 = 3° ，但有 20° 的左滾轉角。這個圖對應的是情形 5。
動態模擬請見：<https://www.dropbox.com/s/cgvn99okc4ao0i4/combSide.mp4>。

情形 5：俯仰角 = -3° 且滾轉角 = 20° ，進場角 = 3°

請見圖 14 及它的動態模擬。在這個情形中，由於有 20 度的滾轉角，飛機左翼會先入水，這極可能會導致左翼結構失效。詳見 BOX 4 針對非洲科摩羅島外海空難的描述。

BOX

3. 機頭俯衝與找不到殘骸是否有關聯？

如果飛機在爬升時失速，或操縱面（副翼、方向舵、安定器）故障，或是萬一燃料耗盡，自動駕駛儀失靈（當機師喪失行動能力或是蓄意如此），飛機就有可能呈機頭俯衝狀態，甚至垂直墜落（本文所講到的情形 4）。

那麼在入水時會發生什麼情況？在此我們直接引用美聯社的報導 [syr]：

……機翼和尾翼會被扯掉，機身有可能在幾秒內墜入 30 公尺或 40 公尺深，然後繼續下沉。機翼碎片和其他重型殘骸隨後很快也會掉下來。

來自客艙的漂浮碎片，像發泡座墊、折疊餐桌、礦泉水瓶等物品是否會浮到水面上，要看機身有沒有因撞擊而解體以及受損的程度。

澳洲新南威爾斯大學航空學教授米道頓（Jason Middleton）說：「它幾乎可說是完全失去蹤影，沒有在海面上留下多少痕跡。」……

這很有可能可以作為有力的線索，解釋為什麼至今一直沒找到 MH370 的任何殘骸。

BOX

4. 滾轉入水案例

1996 年，遭劫持的衣索比亞航空編號 961 班機於非洲科摩羅島外海上迫降。這次空難有一段極為完整的錄影，可上網看：www.youtube.com/watch?v=sKC9C0HCNH8。

遭到劫持的波音 767-260ER 廣體客機滾轉飛進海中，左翼撞擊水面，所以先被扯斷。緊接著，右翼也遭遇同樣的命運。這時機身開始水平急轉彎，然後解體。機上有 175 位機組人員和乘客，只有 50 人生還。

殘骸散布範圍很廣，比較輕的碎片說不定會漂浮好一段時間。

破壞與解體

正如引言所描述的，不是所有的緊急水上降落都成了災難。「哈德遜河上的奇蹟」就是極為驚險的成功迫降案例，機上全員生還，足以證明機師和機組人員的經驗以及在壓力下的應變能力。這架飛機裂了一個破洞，但除此之外結構上幾乎未受損傷。據估計，飛機水上迫降時的時速是 240 公里（67 m/s）。美國國家運輸安全委員會（NTSB）認為這是「航空史上最成功的水上迫降。」[23]

除了 BOX 4 提到的科摩羅島空難之外，我們還要再看一個嘗試水上迫降的案例，其結果就不像全美航空 1549 班機那麼幸運了。2005 年 8 月 6 日，突尼西亞國際航空 1153 班機從義大利巴里國際機場起飛，預計飛往突尼西亞傑爾巴國際機場，這架 ATR-72 雙螺旋槳客機因為燃料耗盡，迫降在義大利西西里島東北方 43 公里外的地中海。飛機撞擊水面時，機身斷成三截，機上 39 名乘客和機組人員有 16 人死亡，其中八人是在撞擊受傷之後溺水身亡。

前一節提供的數值模擬中，我們並沒有把破裂和結構解體的影響考量進去，但在飛機高速入水時，這些效應幾乎一定會發生，就連「哈德遜河上的奇蹟」的滑翔式迫降過程中也不例外。關於撞擊損傷和解體的研究，屬於撞擊工程學（impact engineering）的範疇，它根據的是固體的塑性及斷裂特性，與我們一直在談的流體力學截然不同。

受限於本文所談的主題，我們無法繼續深入探討撞擊效應的研究，不過我們倒是可以用另一個著名的例子，挑戰者號太空梭爆炸事故，來理解可能會發生的情況。以下是根據共同作者之一的威爾畢茨基所做的分析 [WY86b, WY86a]。

挑戰者號太空梭的飛具結構（環與桁條加強壁板的組合體），本質上與波音 747 廣體客機的結構相似，而這又類似我們在此處討論的，與波音 777

同類型的廣體客機。因此我們期望，在 [WY86b, WY86a] 當中用於挑戰者號的材料和結構失效分析，在我們的例子也能適用。

下面兩個情形之間有個區別：

（a）全面破損型態：這是由水與結構之間的巨大接觸力造成的；

（b）局部破損型態：由超大壓力造成的。

接觸力與壓力這兩者都會隨空間及時間變化。兩者都可從前一節所提的解的 CFD 計算值得出來，並可用於評估破壞程度。分析全面性的破損時，可以用簡單的飛機樑桿結構做為機身的模型。在下文中，我們很快地回顧一下該如何研究撞擊下的結構解體，至於更技術面的研究，就留待後續文章再來寫了。

在 [WY86b] 所採用的模型裡，是把飛行中的飛機視為雙端自由樑（free-free beam），外部負載的空間及時間變化為已知，而彎曲力矩的分布可由動力平衡方程式來決定。這樣一來，橫截面最大彎曲力矩，就有可能跟機身的完全塑性抗彎承載能力不相上下。這表示將會發生結構崩潰，並且解體。

局部破損型態包括了機身蒙皮撕裂，以及桁條與環狀構架系統的張力斷裂和剪力斷裂（圖 15）。根據撞擊速度，局部破損可能包含了機身的連續彎折變形或是四分五裂。像這樣的破損型態，是發生在低撞擊速度的情形下，美國航太總署（NASA）已經以退役飛機的實際模型，使用結構動力墜落分析法（Dynamic Crash Analysis of Structures, DYCAST）證明了這件事 [FWR87]。這些研究發現雖然是將近三十年前發表的，至今仍然適用。

至於斷裂破損型態，估計是發生在速度的垂直分量超過某個臨界值 V_{cr} 的情況時。機身與機翼會先出現張力裂縫和剪力裂縫，然後擴散到加強殼，最後造成全面性的結構破損。這個動態過程分析起來頗有難度，不過，對於局部破損的開始發生點，我們可有個簡單的估計值，方法是利用沿桿傳播的單

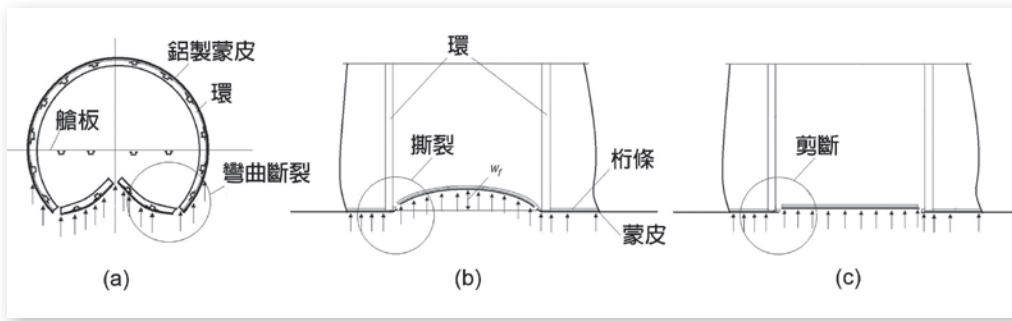


圖 15 廣體客機結構破損的三種類型：(a) 結構環的撓曲破損；(b) 撕裂破損；(c) 縱向加強殼的剪斷（改編自 [WY86b, p. 651]）

否存活的關鍵。在 [WY86b] 當中也分析了，若最終撞擊速度的垂直分量落在 62.5 m/s 和 80.5 m/s 的範圍內，減速的最大值有可能在短時間內達到 100g 至 150g（g 是

軸波的動態連續性條件，根據以下這個方程式

$$\text{I} \quad [\sigma] = \rho c [u]$$

其中 $[\sigma]$ 和 $[u]$ 表示跨越水 / 結構界面時的跳躍不連續性， $\rho = 2.8 \text{ g/cm}^3$ 是鋁金屬機身的質量密度，而 $c = \sqrt{E/\rho}$ 是彈性桿上單軸波傳播的速率，彈性模數 $E = 85 \text{ GPa}$ （即 10^9 帕）。一旦應力等於材料的降伏應力 σ_y （yield stress），就會達到臨界撞擊速度 V_{cr} （只取垂直分量）。因此由 I，可以得出下面這個 V_{cr} 估計值：

$$\text{II} \quad V_{cr} = \frac{\sigma_y}{E} c$$

依材料的不同，飛機的臨界下降速率通常會在 $V_{cr} = 15 \sim 20 \text{ m/s}$ 的範圍內。其中一種常見的機身材料是 2024 T351 鋁合金，其降伏應力為 $\sigma_y = 324 \text{ MPa}$ （ 10^6 帕）。因此臨界撞擊速度會是 $V_{cr} = 22 \text{ m/s}$ ，很接近挑戰者號太空梭水上迫降的預測值 18.8 m/s，但在 [WY86b] 當中採用了不同的方法。 V_0 （飛機迫降速率）的垂直分量 V_{cr} ，與進場角 β 有關：

$$\text{III} \quad \sin \beta = \frac{V_{cr}}{V_0}$$

因此，關鍵是要讓進場角保持在小角度，尤其是在高速下迫降的時候。

除了結構破裂和解體，自由落下造成的加速與結構受到撞擊所造成的減速，也是墜機時人員能

而被 NASA 列入「重傷害」[WY86b, MHV59]。

備註 2：根據前一節的數值模擬結果，這架客機的蒙皮會受到高達 6 MPa 的表面壓力，比起 2024 T351 鋁合金的降伏應力 324 MPa，這是相當小的。因此，在我們所考慮的迫降速率 58 m/s（極低速！）之下，似乎不會有降伏應力造成的局部破裂。若有結構破損，必定出現在脆弱的接合處、機架支柱及加強桁條，也就是發動機短艙、機翼和機身的連接處，這些就屬於全面性的破損了。

由計算得出的減速，顯示五種情形的最大減速都在 6g 左右，遠小於上段提到的危險值 100g 至 150g。但如果是在高速的情況下進行水上迫降，減速值就有可能遠遠超過 6g。

結果就是，現在我們可以清楚看到，最終入水速度的垂直分量應該要盡可能減小，正如全美航空 1549 班機的機長薩倫伯格在哈德遜河上採取的下滑式水上降落法。也就是說，飛機在某些「俯仰姿勢」下，可以避免結構損傷及機上人員的減速，存活機率也會高出許多 [WY86a, 34 頁]。的確，根據郭保東等人的研究 [GLQW13]，對於低平尾的運輸機，若要更安全地水上迫降，俯仰角最好選在 10° 和 12° 之間（同時進場角要是 1° ），這與 (13) 式的預測結果是一致的。這類資訊可提升飛航安全，而且正如本文解釋的，我們能夠透過計算流體力學模擬獲得這些資訊。

結語

在看過客機入水模擬的五種情形，以及前兩節對於可能導致的破壞的初步探討之後，我們自然想問這個問題：

MH370 班機最後的遭遇最有可能是哪一種？

我們的評估是情形 4；即機頭俯衝入水，或是陡斜俯仰角的入水。這個斷言雖然只是推測，但有科學方法來輔助，主要根據前一節介紹的計算數據，加上我們對於航空先例、大氣及海面條件等方面的理解，並基於以下幾點觀察：

(a) 到目前為止，完全沒有漂浮殘骸。同樣的，也一直沒有找到漏油跡象，這暗示飛機在失事前（幾乎）耗盡燃料了。

(b) 情形 1 的平順滑翔式入水（與全美航空 1549 班機類似）可能只會造成小範圍的破裂，但一般而言，要讓大型飛機迫降在開闊的印度洋上，會遇到幾公尺高的大浪甚至巨浪，容易造成解體，讓碎片四散。

(c) 如前文所述，情形 2 會遭遇強大的彎曲力矩，隨後可能會發生彎曲變形和斷裂。

(d) 對於情形 3，浪濤也有可能導致解體，讓碎片四散。

(e) 至於情形 5，正如我們在 BOX4 提供的影片裡可看到的，飛機從中段某處斷裂的機率很大。

只剩下情形 4，最有可能解釋為什麼一直沒有發現漂浮的殘骸。這個評估一樣只是推測，因為我們在做電腦模擬時，並沒有把所有的飛機速率與海面條件包含進去，也沒有考量到彎曲力矩的效應。MH370 的最後遭遇依然成謎，可能要等到找到黑盒子並進行解讀，最後才能水落石出。

客機失事墜海是令人傷痛的慘劇，但站在數學和工程的角度來看，我們應該特別去關注事故的模擬與計算，才能更加了解其中的物理機制，希望能提升飛機耐摔性和存活率。計算流體力學方法可以替

實驗設定程序和測量，節省不少時間與成本。如今，有了越來越多免費、開源的計算工具和使用方便的軟體，數學家在遇到複雜和「實際」問題的建模及計算，需要與工程師、物理學家進行跨學門的合作時，會變得容易許多，這正是本文想要表達的。未來仍有很多挑戰。關於計算流體力學用於飛機水上迫降的研究，請見劉沛清等人精采的回顧與展望論文 [LQG+14]。對於慣於分析的數學家，不妨列出所有需處理一般化方法的嚴謹度、穩健性、穩定度等有待思考的問題。

關於（陸上墜毀或撞上建築物）失事飛機破裂與解體的電腦模擬，現在已經有大量的文獻。我們已經知道，由 Abaqus [Aba]、LS-DYNA [lsd] 等公司開發出來的軟體，可以模擬固體受到碰撞之下的衝擊與破碎情況，但這個環節過於專門，必須另寫一篇文章才談得清楚。

不管哪一天，全世界都有數十萬人搭飛機，如今航空運輸要比以前安全，往後還會更加安全。根據巴奈特 (Arnold Barnett) 的統計 [Bar10]，在 2000 至 2007 年間，先進國家客機的每班次死亡風險是 $1/2,000,000$ ，其中 200 萬天差不多等於 5,500 年！不幸的事故總會發生，但我們可以預見，靠著數值模擬產生的數據，未來將能進一步提升水上緊急降落的乘客存活率。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

本文出處

Notices 62 (2015) No.4 AMS.

譯者簡介

畢馨云畢業於清華大學數學系，資深科普書編輯，現為自由譯者。

延伸閱讀

► 本文所提到的模擬影片或媒體影片連結，可以到本文資料網頁直接連結。

<http://yaucenter.nctu.edu.tw/journal/201507/ch2/main.php>