我像發現生命意義卻苦於無法言詮的人

2014 年京都獎得主韋頓訪談

訪談：大栗博司
戶田幸伸
山崎雅人
譯者：翁秉仁

受訪者簡介：愛德華．韋頓（Edward Witten）是美國理論物理學家，現任職於普林斯頓高等研究院，專長領域為弦論、量子重力，超對稱量子場論。韋頓在研究所之前曾修歷史、語言學、經濟，並短暫參與政治，最後進入普林斯頓大學應用數學所，最後取得物理學博士。他是弦論發展的主要領導人，啟動弦論第二次革命，被譽為愛因斯坦的真正接班人。1990 年，韋頓獲頒數學大獎費爾茲獎，迄今仍是唯一一位物理學家得主。

訪談者簡介：大栗博司（Hirosi Ooguri）是加州理工大學的理論物理與數學的卡弗里（Fred Kavli）講座教授，並為該校柏克（Walter Burke）理論物理研究所所長。他也是東京大學卡弗里數物連攜宇宙研究機構（Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe，Kavli IPMA）的主要研究員。

戶田幸伸（Yukinobu Toda）是 Kavli IPMU 的准教授，研究代數幾何。

山崎雅人（Masahito Yamazaki）是 Kavli IPMU 的助教授，研究弦論。

訪 大栗：首先要恭喜愛德華獲得京都獎。基礎科學部門的京都獎每四年會輪回數理科學領域，今年是第一次頒予物理學家。

是的，我非常榮幸獲得這項大獎。

訪 大栗：你在數學與物理交界處的研究，同時被視為數學與物理的重要進展，感覺真是美好，我們這些同領域工作的人都備感光榮。

事實上，我在幾天前的頒獎演說中也曾特別提及，我將這個獎視為對這整個領域的肯定，而不僅只於我個人。

陳－西蒙斯理論的推廣

訪 大栗：這次訪談將會刊登於《数学セミナー》（*Sugaku Seminar*），同時也會發表在 Kavli IPMU 的《所訊》上。《数学セミナー》曾兩次刊登你的訪談。1990 年，你在京都舉辦的世界數學家大會（ICM）獲頒費爾茲獎，當時江口徹（Tohru Eguchi）曾經訪問你，你也曾和當屆另一位費爾茲獎得主瓊斯（Vaughan Jones）討論，我記得你當時表示想推廣你在帶著譜參數（spectral parameter）的陳－西蒙斯理論（Chern-Simons Theory）方面的研究，因為從可積模型（integrable model）的觀點這是很自然的。

是的，我非常想從「可積性」的方向找到解釋，

採訪中的韋頓。（大栗博司提供）

物理学者の最初の反応はといえば，topological field theory は数学にすぎないという見方でした．これは物理の人間からするとどうしてもありがちな見方なのですが…，私はこうした見解は近視眼的ではないかと思っています．なにか野心的なことを試みる場合それから何がでてくるか予想できませんから．実際，近視眼だと保証できるわけではありません．当面なにかうまく行かないことがあるかも知れませんが，全体としては今までの研究の方向は満足すべきものだと思っています．

これからの方向性

——これからの研究の方向をきかせてください．

EW　現在行きづまって悩んでいる研究テーマがいくつかあります．1つは large N matrix モデルで，これについては今年の春に仕事をしてその後これ以上の進

EW　現在すすめている研究方向は生産的ですし，私に向いていると思います．ここ2〜3年は今までの方向を踏襲するつもりです．私は多くの物理学者のフラストレーション——特に弦理論の停滞からくるもの——はよくわかっています．物理の統一理論としての

1990 年韋頓獲得費爾茲獎，《数学セミナー》刊登江口徹之訪談稿，此為部分掃描截圖。

希望能像易辛（Ising）模型一樣，在二維晶格模型（lattice model）上找到確解。我完全失敗了，不過幾年前，科思特羅（Kevin Costello）基本上完成了我想達成的目標 [Co]。

訪　大栗：剛才在你到達之前，我們也正在討論科思特羅的工作。你認為他已經完成你當時所設定的目標了嗎？

是的。可積模型有很多面向，沒有單一的方法可以理解所有事情。但是我認為我想尋找的那種特定解釋，正是科思特羅所發現的結果。科思特羅對三維陳－西蒙斯理論（Chern-Simons theory）做了一個簡單而漂亮的轉折，他將空間三個實數維度的其中之一，換成複數 z。

訪　大栗：這樣就變成四維了。

這是一個四維的世界，其中有兩個實坐標與一個複坐標 z。科思特羅定義一個四維微分形式（4-form），這是陳－西蒙斯三維形式與一維形式 dz 的楔積（wedge product）。他將這個四維形式當作四維理論的作用量（action）來研究，其中關鍵的技術細節是這個理論若真要有意義，將運動方程式線性化所得到的微分算子，在模去規範群（gauge group）後必須是橢圓算子。我覺得這有點出人意表，但是事實如此。於是科思特羅推廣了陳－西蒙斯理論，放棄三維空間的完整對稱性，但是得到一個複變數 z。

如果仔細琢磨，你會發現楊－貝克斯特（Yang-Baxter）方程的可積性牽涉的是二維而非三維的對稱性。我之所以一直無法整併譜參數，是因為我的問題脈絡是三維拓樸場論。在三維拓樸場論裡，除了結（knot）交叉的變動之外──也就是除了楊－貝克斯特關係之外，還牽涉到生成與消滅的關係，結的萊德邁斯特移動（Reidemeister move）雖然在三維拓樸場論正確，卻和可積系統無關。由於我採用了拓樸場論的架構，所以找不到譜參數。科思特羅的簡單轉折，用複變數取代實變數，一切就漂亮完成了。我確定這就是我在 1990 年左右想找到卻失敗的解釋方式。

訪　大栗：原來如此。所以在 23 年之後你的問題終於解決了。

由左至右為戶田幸伸、山崎雅人、大栗博司、韋頓。（大栗博司提供）

1994 年你第二次訪問京都時，剛完成賽伯格－韋頓（Seiberg-Witten）理論與瓦法－韋頓（Vafa-Witten）理論。記得當時在京都大學的數理解析研究所（RIMS），我們還有中島啟（Hiraku Nakajima）曾做過討論，當時中島說明他如何以仿射李代數（affine Lie algera）作用在瞬子模空間（moduli space of instantons）的上同調群（cohomology）。在江口徹為《数学セミナー》所做的第二次訪談裡，你提及鏡對稱（mirror symmetry）與 S 對偶性（S-duality）當時的進展，並表示盼望能以更統一的觀點，囊括規範場論與弦論來理解對偶性。我想，這個期盼在過去 20 年有一部分已經達成了。

確實有一部分完成了。其中之一是在第二次訪談之後幾年內，弦論中出現了一幅非微擾（nonperturbative）對偶性的圖象，推廣場論已知的對偶性。不過，也有一些面向仍然保持神祕，大家還不太理解。

從正面看待，無論四維規範（gauge）對偶性、抑或更多低維對偶性，都源自某一個六維保角場論（conformal field theory），這正是我們能更理解對偶性的主要洞識。但我們還未徹底認識它，因為大家還不真正理解這個六維理論。不過光是知道對偶性必須以六維理論來解釋，就已經是理解對偶性的一大進展，這在上次訪談時確實還不知道。

我曾經懷疑對偶性

訪 大栗：我忘了介紹今天的其他與談人。戶田幸伸是數學家，他是 Kavli IPMU 的准教授，在 2006 年獲得博士。山崎雅人是物理學家，是 Kavli IPMU 的新任助教授 [1]，他是 2010 年的博士。他們代表了在弦論和規範場論領域做研究的年輕一代數學家和物理學家。

在京都獎紀念演講中，你回顧了理論物理的職涯。你是在 1973 年就讀研究所，當時漸進自由（asymptotic freedom）的理論才剛發現，而你第二次訪日是 1994 年，並做了前述訪談，當時離你初為研究生大約 20 年。如今 20 年又過去了，所以我們應該試著趕上你職涯的第二個 20 年，回顧你在一些最重要進展中的思想。

我們剛剛談了一些 1994 年訪談之後的發展，或許你可以再加詳述，告訴讀者，在過去 20 年內，你認為這個領域中最突出的成就。

主要的成就之一當然是理解弦論中的非微擾對偶性，讓我們對於弦論有更開闊的認識。在 1994 年時，我們知道鏡對稱，以及其他從微擾弦論所得到的二維對偶性，當時我們才剛開始思考時空是否有類似的對偶性，也就是和二維對偶性類似的四維規範場論對偶性。在 1994 年時，如果說弦論中也存在類似對偶性的想法，那真的只是臆測。

當時在文獻中有一些線索，1990 年代早期也發現一些新證據。影響我最深的是史瓦茲（John Schwarz）和沈恩（Ashoke Sen）的研究 [SS]，他們說明六維環面（torus）上雜弦（heterotic string）的低能有效作用量和一個非微擾 $SL(2,\mathbb{Z})$ 對偶性相容，我不認為他們的結果是該猜想的決定證據，但是他們的想法很有說服力。

當時我還不清楚如何為時空的非微擾對偶性找出決定性的證據，至少對我而言，第一個這樣的證據出自沈恩一篇簡短卻傑出的論文 [Se]，其中涉及 $N=4$ 超楊－米爾斯理論（super Yang-Mills theory）中的雙單極束縛態（two monopole bound state）。對我來說，這是蒙東涅－奧立佛（Montonen-Olive）對偶猜想的根本新證據。它說服我對偶性必然正確，而且同樣重要的，是它也讓我相信存在著更佳的闡釋。

訪 大栗：我認為沈恩的論文提供了 S 對偶性的堅強證據，不過是你和瓦法（Cumrun Vafa）的論文說服了我們。

謝謝。沈恩的文章顯示我們真的可以超越熟知電磁對偶性那種充滿暗示卻又侷限的論證方式，學習到嶄新的東西。到沈恩的論文出現之前，我感覺我們所理解的電磁對偶性，甚至包括深刻影響我的史瓦茲與沈恩的結果，都不出 20 年前蒙東涅（Claus Montonen）與奧立佛（David Olive）所建立的框架 [MO]。但是，沈恩做了一個簡單又精妙的計算，找到兩個單極的束縛態，而且其存在性是出自對偶性的預測。這激發我相信我們還能走得更深入。

基於這份靈感以及想要尋找對偶性猜想的更多證據，瓦法和我開始研究瞬子模空間的歐拉示性數（Euler characteristics）[VW]。不難看出從超對稱楊－米爾斯理論的電磁對偶性，可以推論出這些歐拉示性數的生成函數（generating function）應該是模函數（modular function）。我們很幸運，因為數學家在某些情況（包括你剛剛提到中島啟的工作）已經計算過這些歐拉示性數，或者早已得到緊密相關的結果，從而可以推出歐拉示性數。我們發現對所有情況，所期待的模函數結論都正確。（其中在複二維射影空間 $\mathbb{CP}^2$ 上，我們得到所謂的「近模形式」（mock modular form）[2]，當時這對我們來說是新概念，但在後續的規範場論和弦論中經常出現。）

同時在這段期間，賽伯格（Nathan Seiberg）正以全純性質（holomorphy）為工具，分析超對稱規範場論的動力學，他希望理解 $N=2$ 的理論。於是我們開始討論，而沈恩的文章啟發我們思考對偶性所扮演的角色，這正是實際導致後來成為賽伯格－韋頓理論的線索之一 [SW94]。

訪 大栗：山崎或戶田這樣的年輕人現在可能很難相信，但是在 1994 年之前，至少對我而言，S 對

[1] 譯註：日本職銜為「助教」，不過為避免國情不同而誤解，直譯為「助教授」。

[2] 譯註：mock modular form 歷史上首次出現於拉曼努真（S. Ramanujan）與哈第（G.H. Hardy）的知名通信裡，1913 年拉曼努真在他臨終給哈第的最後一封信中，寫著 17 個這樣的神祕函數並命名。大約 90 年之後，這個近似模形式的數學對象才被數學家嚴格釐清。

偶性真的很難以置信，感覺就像一場美夢，有，當然很好，但是現實上你很難相信有可能發生這種事。就像我之前說的，沈恩的文章是證據，然後就某種意義來說，愛德華和瓦法的研究為之定調。此後，大家都相信了。

訪 山崎：這很讓人驚訝，因為我以為蒙東涅和奧立佛的文章已經很古董了，以前大家懷疑他們的想法嗎？

你們可能會覺得很好笑，我要說說我自己和蒙東涅與奧立佛文章的早期歷史。首先，在 1977 年底訪問牛津之前，我根本沒聽過這篇論文。是阿提雅（Michael Atiyah）告訴我這篇文章，說我應該到倫敦去跟奧立佛談談。因此我讀了文章，並和奧立佛聯絡安排去拜訪他。不過到達倫敦時，我心裡其實十分懷疑。你讀過他們原來的文章嗎？

訪 山崎：讀過。

他們原來的文章考慮的是某種規範場的玻色子理論，以及一個取值在伴隨表現（adjoint representation）的實純量場。他們假設純量場的位能完全為零，然後推導出粒子質量的卓越公式，在這個特例裡全然正確。而他們所提出的電磁對偶性，正是基於在他們的質量公式裡，電荷和磁荷是對稱的。

但是，量子場論我懂得夠多，知道純量場位能為零的假設，就量子力學來說沒有意義，不然粒子物理學就不會出現規範級別問題（gauge hierarchy problem）。所以當我去倫敦見奧立佛時，我絕對是個懷疑者。不過既然我已經去拜訪他，我不想只是跟他說他的想法是胡扯。我們想要理出一點道理，於是就在超對稱的脈絡中討論，這單純只是因為在超對稱時，純量場的質量重整化（甚至整個有效位能）可以為零。這是唯一的情境，我覺得蒙東涅和奧立佛的高明想法有可能成真。到了那天結束時，我們發現他們的公式在 $N=2$ 超對稱中是成立的。因此我們寫了一篇論文 [OW]，這篇文章寫起來很愜意，不過我下錯結論了。我的結論是不需要假設非微擾對偶性，就能解釋他們的公式。

訪 大栗：是，那正是我讀你和奧立佛的文章的印象，超對稱簡單的解釋了似乎是奇蹟的現象。

所以不管是當時還是之後多年，我並不真覺得有那麼多關於四維非微擾對偶性的證據。

回到山崎的問題，在那些年，我的確是懷疑電磁對偶性的存在。我的懷疑有兩個層次。首先，我懷疑它是否為真；其次，就算它為真，我懷疑我們能對它說些什麼。

為了完整起見，我再補充一些證據，在 1990 年代早期出現了一些奇特的線索，有一些來自像是德弗（Mike Duff）的工作，還有卡朗（Curt Callan）、哈維（Jeff Harvey）與史聰閔格（Andy Strominger）的論文 [CJS]，他們研究的是弦論中的孤子（soliton）；另外，當然還有前面提到的史瓦茲和沈恩的工作。我記得 1993 年在柏克萊舉行的弦論會議中，史瓦茲感覺比我在 1984 年 1 月見到他時還興奮。1984 年 1 月史瓦茲告訴我，他和葛林（Michael Green）最近的研究時，他跟我說：「我們很接近了。」當時我並不知道他們接近的目標是什麼。結果，原來他們再過幾個月，就消除了異徵（anomaly）❶ [GS]。所以當史瓦茲在柏克萊會議中又那麼興奮時，我決定這一次最好更嚴肅看待他的意見。

如果用面對蒙東涅與奧立佛文章相同的懷疑態度，你會認為史瓦茲和沈恩只不過在討論低能物理，對於強耦合（strong coupling）行為則缺乏堅實的證據。不過史瓦茲的狂熱足以消除我的懷疑，我開始更仔細的審視德弗以及其他作者關於弦論孤子的論文。我想大概是 1993 年秋天的某個時候，德弗送來一堆他的論文，我很認真閱讀。現在，

我無法完整記得那段時間讀過的弦論孤子論文，不過其中很重要的一篇，當然是卡朗、哈維與史聰閔格合作的文章。

我應該說明這段期間的另一部分背景，德弗、湯森德（Paul Townsend）和其他研究超膜（supermembrane）的物理學家，在 1980 年代中期花了好幾年，宣稱比照基本弦的理論，應該也存在基本膜的理論。在當時，有很多原因讓這個說法無法令人信服。首先，三維流形沒有歐拉示性數，所以不像弦論可以做拓撲展開（topological expansion）；其次，三維理論缺乏保角不變量，無法幫忙建立有意義的膜論。膜論就像廣義相對論一樣無法重整化。

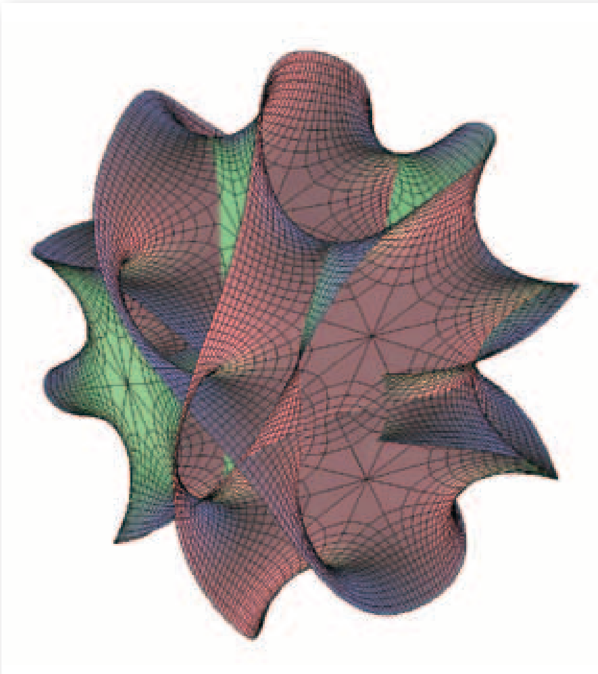
大栗博司與韋頓。（大栗博司提供）

對於這個想法，技術反對的理由不絕於耳。但是就在 1990 年或 1991 年的某一時刻起，這個領域的人不再將膜想成基本物件，他們開始認為膜以及其他 p 膜是可能存在於弦論中的非微擾物件。這個想法原則上說得通，但若考慮細節，情況會變得比較複雜。如果你真的審視這些論文，有些很有道理，因為他們掌握了具備良好性質的古典孤子解（甚且，這些解經常帶有奇怪的性質，其中某些例子成為後續發現的線索）；但其他文章就比較沒道理，因為其中的古典解包含奇點（singularity），出現在古典逼近不太成立的區域。不過把膜當作弦論中非微擾、類似孤子的物件，是相當有見地的想法，即使某些文章的細節很可疑。雖然我對這個想法能發展出什麼仍有一些保留，不過基於上面解釋的理由，我比之前更加留意其發展。而這正是為什麼當沈恩關於雙單極束縛態的論文一出，我已經準備好完全改變我的觀點。

沈恩的文章顯示在強耦合的情況可以完成新的工作，而且很顯然的，如果有人能掌握像沈恩的靈感，在 10 或 15 年前就能完成他的研究。這顯示我們都錯失了良機，這也很確定的改變了我的研究方向，導致你之前善意提及的瓦法和我的論文，協助賽伯格和我走上正確的方向，完成 1994 年的工作，以及其他等等⋯⋯

訪 大栗：就像巴斯德（Louis Pasteur）說的一樣，這個了不起的故事顯示機會永遠留給準備好的人。在那之後，你甚至發現了弦論的對偶性 [W95]。

❶ 譯註：1984 年，葛林和史瓦茲對消了 I 型弦論的異徵，證明弦論足以描述基本粒子，並有資格成為萬有理論（theory of everything），開啟了第一代弦論革命。



一個卡拉比－丘流形的截面範例。（維基百科）

弦論對偶的革命

1994 年底，大家已經具備二維和四維場論非微擾對偶性的經驗。以二維為例，如果研究的是以卡拉比－丘流形（Calabi-Yau manifold）為目標空間的 σ 模型（這在研究弦論緊緻化時很重要），你會發現量子論可以推廣到遠比卡拉比－丘流形這類古典幾何還要更豐富的境地，你會發現一網絡的相變發生在不同幾何或非幾何的 σ 模型之間，呈現出該理論不同的半古典極限（semi-classical limit）。經由後來的研究者琢磨過的蒙東涅－奧立佛對偶性猜想，認為四維的 $N=4$ 超楊－米爾斯理論也發生類似的現象，而賽伯格與我在 1994 年發現 $N=2$ 理論也有類似的現象。

當時確實存在著弦論也會有類似現象的美夢。而且這不只是夢，事實上有許多論文已經指出這個故事的片片段段，其中我已經提過一些，另一篇重要論文是 1995 年春天戶爾（Chris Hull）和湯森德所寫的 [HT]，他們希望能說明 IIA 型超弦論與圓上的 M 理論是一樣的，他們唯一沒做到的是更定量的處理，其中存在著潛藏的矛盾，因為在 IIA 型超弦論中你看不到 11 維的東西。不過最後經過我稍後的釐清，發現這個問題的答案很簡單，從 IIA 型超弦論的觀點，11 維的極限是強耦合的區域，因此弱耦合看不到 11 維的東西。

很快就很清楚，其他情況也發生類似的現象。例如可以期待 I 型超弦論和 $SO(32)$ 雜弦論是一樣的。這裡有一個明顯而直接的矛盾——這兩個理論有相同的無質量譜（massless spectrum）與低能相互作用，但是越過低能極限後看起來卻完全不同。答案是，如果你讓低能場論相符合，那麼其中一個理論的弱耦合將會等於另一個理論的強耦合，反之亦然。

一旦你開始以這個方向來思考，結果一切就都對了。這意味著什麼？這種想法當然會對何謂弦論給出更統一的圖象。但是很快的，更多的發展顯示我們傳統提問的方式似乎不恰當。在 1980 年代，我相當相信，就某種意義，弦論的基礎是某個拉格朗日函數（Lagrangian），這是重力論中愛因斯坦－希爾伯特的拉格朗日函數的推廣，它的對稱群則是微分同胚（diffeomorphism）群的推廣，因此應該存在一個新的古典幾何理論，具備以古典對稱展現的非微擾二維對偶性，於是我們可以將這個古典理論量子化，進而生成弦論。

不過在 1990 年代早期，出現了一個我自己並沒有特別留意的麻煩細節。在卡拉比－丘流形的模空間有各式各樣的奇點，有些牽涉到這些奇點的問題，在我之前的研究裡已經占有重要的地位。

訪 大栗：你說的是涉及線性 σ 模型的工作。

沒錯，另外也包括我過去和哈維、瓦法，以及狄克森（Lance Dixon）在軌形（orbifold）的工作 [DHVW]。我一向對古典幾何存在奇點，但量子 σ 模型卻不含的情況感興趣。這些案例顯示了正常幾

何與它在弦論古典極限的推廣不同。我比較沒有仔細考慮的，是一般在卡拉比－丘流形模空間變形（deform）時，其實還存在著不但古典幾何含奇點，而且所對應的 σ 模型也**確實**含有奇點的情況。

這類奇點出現在弦論甚至其古典極限之中，所以如果你試圖將弦論解釋成古典理論的量子化，看起來就像是古典理論也具有奇點，這一點很奇怪。我自己並沒有專心思考這個問題，但是史聰閔格解釋說這類奇點實際上反映了一種非微擾的量子效應 [St]。這種奇點會在帶電黑洞（charged black hole）變成無質量時發生，這顯示將古典理論量子化的看法不足以完全描述弦論——即使在我們想稱之為古典極限的情況中，仍然存在著非微擾的量子效應。

訪 大栗：你的意思是說在場論中並沒有類似的情況，這是弦論獨有的現象。

我是這麼認為。

訪 大栗：所以，你認為這是弦論並不存在拉格朗日函數描述的證據嗎？

它是光靠古典理論的量子化不足以完全描述弦論的證據，我並不是說不存在古典理論，因為我相信就某種觀點來說還是有的。

訪 大栗：當然，做為逼近的描述當然有。但是你說的是我們不能從一個古典理論開始，然後進行量子化的程序……

光靠量子化背後的古典理論並無法完全理解弦論，以某種意義而言，弦論是一個內稟的量子力學理論。

我不想說成你無法靠古典理論的量子化推導出弦論，但我認為這種方法不足以描述它。

讓我們切記，即使在場論中，蒙東涅－奧立佛對偶性意味著同樣的理論卻有不同的古典極限，這顯示其古典極限無法真的區分開來。

訪 大栗：不過在這種情況，你有拉格朗日函數的描述。

當然，在蒙東涅－奧立佛的情況，我們有古典拉格朗日函數的描述，事實上還有不少。弦論的情況更麻煩些，因為即使在你想視之為古典極限的情況，仍然具有從古典觀點說不太清楚的現象。

終究，史聰閔格的研究闡明了某些我忽略的現象。我在 1995 年弦論會議裡關於弦論非微擾對偶性的演講，以及其相應的論文之中 [W95]，有處細節不是那麼有道理，在 $K3$ 流形上的 IIA 型超弦論應該和四維環面上的雜弦對偶，在那個脈絡裡，我可以看出從 $K3$ 面得到的強化規範對稱（enhanced gauge symmetry）會發展出 ADE 奇點。而 ADE 奇點在古典幾何中只是一類軌形奇點，在軌形的情況，弦論的微擾理論仍然適用。照理說，軌形不會產生非微擾規範對稱，我因此困擾了幾個月。事實上我犯了一個簡單的錯誤，亞斯平沃（Paul Aspinwall）在 1995 年夏天的一篇論文中更正了這個錯誤 [A]。亞斯平沃的解釋是，在 ADE 奇點的 M 理論只牽涉到超凱勒模空間（hyper-Kähler moduli），但是在 ADE 奇點的弦論，另外還多了所謂的 B 場模空間。當 B 場模空間為零時，其保角場論的行為會變奇特（singular）。而軌形所描述的是正常狀態，這時 B 場模空間不為零。

當 B 場模空間消失時，古典描述會失效，宛如史聰閔格在他關於卡拉比－丘奇點的文章中所描述的情況。於是從 IIA 型超弦論的觀點，導出了具備非微擾對稱起源的強化規範對稱。

史聰閔格所考慮的是源自纏捲（wrapped）三維膜的帶電黑洞，而前述的情況相關的粒子則是纏捲二維膜。不過兩者的想法類似。

訪 大栗：所以這就是規範場論和弦論彼此想法互

動的開端，規範場論的非交換非微擾動力學可以從弦論的極限中突現出來。

正是。另外一篇重要又極為簡單的是 1996 年葛林的論文，它也展示了如何從弦論得出規範場論中的非微擾對偶性。在當時，波欽斯基（Joe Polchinski）和他的合作者基本上已經說明，用現代的語言來說，一組 n 平行膜系統具有 $U(n)$ 規範對稱 [P]，而我在 1995 年底寫了一篇文章說明為何這很有用 [W96]。然而葛林卻寫了一篇很簡單的文章提出下面的觀察 [G]，IIB 型超弦論具有非微擾對偶性（當時我們已相信其正確性），而另一方面，四維而具有 $U(n)$ 規範群的 $N=4$ 超楊－米爾斯理論，可以從 IIB 型超弦論的一組 n 平行 $D3$ 膜系統推導出來。於是葛林將這兩個事實結合起來，取其低能極限，就推導出具 $U(n)$ 規範群的 $N=4$ 超楊－米爾斯理論的蒙東涅－奧立佛對偶性，當在 IIB 型超弦論中特別考慮 $D3$ 膜時，這只是先天內建的結果。這是一個早期的重要典例，說明可以從弦論對偶性推導出規範場論對偶性。

即使早在前述過程之前，德弗和庫利（Ramzi Khuri）在 1993 年就已經寫了一篇文章 [DK]，討論他們所謂的弦 / 弦對偶性。他們認為應該存在一種自對偶的六維弦論，當用不同角度去檢視時，就會得到四維規範場論的電磁對偶性。這真的是一個聰明的想法，唯一的麻煩是，他們舉不出行得通的例子。

我在 1995 年中期，領略到如果我們用在 $K3$ 和 T^4 上的雜弦 /II 型對偶性，再將另一個二維環面緊緻化，就可以得到一個很類似於德弗和庫利所建議的例子。他們想的是同一個弦論的自對偶，而我考慮的是不同弦論的對偶，但想法是類似的。在 1995 年底，德弗、我和米納先（Ruben Minasian）舉出另一個例子 [DMW]，更接近他兩年前提出的想法。這牽涉到在 $K3$ 面上的 $E_8\times E_8$ 雜弦，其中在兩個 E_8 上有相同的瞬子數。在所有這些情況裡，都可以從弦論對偶性得到蒙東涅－奧立佛對偶性。

就在我們剛剛對談的過程裡，讓我回想起越來越多我在 1995-1996 年間寫的論文，當時是頗有戲劇性，但老實說大部分都很簡單。我是在昨天京都獎會議裡，聽中島啟的演講時給提醒的。中島開場時很體貼的提及 1996 年我在英國劍橋牛頓研究院（Newton Institute）所給的三場演講，這些演講牽涉到我所寫的三篇文章 [RW][HW][SW96]，分別是和羅贊斯基（Lev Rozansky），哈納利（Ami Hanany），以及賽伯格合作的，這三篇文章天衣無縫的契合起來，寫這些文章很好玩，演講也很好玩。不過我記憶裡所突顯出來的感覺是，在當時像這樣的洞識是多少都已浮現在表面了。回顧那一段時光，在這個領域做研究真是好玩極了，我希望在我還能工作的職涯階段，還能有一段這樣的時光。

何者為真與為何為真的差異

訪 戶田：我的領域是代數幾何，本來研究的是古典角度的代數幾何，後來因為受你研究的啟發，才開始對代數幾何與弦論之間的關係感興趣。你曾經討論 S 對偶性和模形式，從數學觀點來看，這十分令人意外，我實在看不出牽涉到模性質是如何出現的。從數學的角度，你有沒有什麼深入的洞見？

瓦法和我的確有個理由，也就是蒙東涅－奧立佛對偶猜想。我們所做的是說明，歐拉示性數的某些生成函數的模性質是某種蒙東涅－奧立佛對偶性的結論。這有點像是說某些數論命題是黎曼假說的結論一樣。如果有人從黎曼假說證明了某些敘述，你可以認為或不認為這是該敘述的解釋，但至少這將該敘述放入一個更大的框架，蒙東涅－奧立佛對偶性提供瓦法和我的研究一個類似的宏大框架。但很快的，我們又發現更大的框架，將蒙東涅－奧立佛

對偶性納入某個六維理論存在性的假說。蒙東涅－奧立佛對偶性也可以看成某些弦論對偶性的結論，其中有一些構造我前面已經提過了。不過大部分物理學家可能認為，解釋蒙東涅－奧立佛對偶性最完整的框架是它和前述六維理論的關係。

訪 大栗：戶田問的是數學的解釋。我想某些數學解釋的提示，可能來自中島對瞬子模空間對稱性的研究。從數學觀點，瓦法－韋頓理論所計算的是瞬子模空間歐拉示性數的生成函數。

中島仿射李代數的發現是某種證明，同時也確實是奇妙的發現。但它仍然讓人會去玩味這些仿射李代數對稱的根源

訪 戶田： 確實如此。在計算歐拉示性數之後，可以知道這的確是模形式，但卻不明白為什麼出現模性質，連最簡單的例子都無法理解。

我全然同意。你所說的正是我在京都獎紀念演講中試圖表達的。知道何者為真以及知道為何為真是不同的。在你提及的情況，你有一個數學證明，但還是想要追索原因，對這一點，物理學家終究是一無所知的。我們能做的是提供更大的猜想，讓該敘述成為它的結論。但是我們並不真正理解更大的猜想。

訪 大栗：從物理學家的觀點，這個對偶性已經被幾何化為六維理論的對稱性了。

但是這個六維理論相當神祕。

訪 戶田：S 對偶性和這個六維理論的關係很容易理解嗎？

訪 大栗：它們的關係很清楚，但是你得先讓這個六維理論說得通。

事實上，我們知道許多關於這個六維理論的行為，雖然對於要如何微觀的建構或理解這個理論，目前還所知不多。

戶田幸伸（左）和山崎雅人（右）。（大栗博司提供）

這方面最深刻的發現，來自 1997 年馬爾達西納（Juan Maldacena）的工作 [M]。他發現藉由超重力，可以在 N 很大時將這個六維理論解出來，其中 N 表示 $SU(N)$ 規範群的秩（rank）。不幸的是，用超重力解出這個理論的範圍，和我們通常研究感興趣的問題範圍並不相同。

訪 大栗：我的理解是這個大 N 極限並不是 S 對偶不變的。

是的，沒錯。馬爾達西納對這個理論在 N 很大時的解是成立的，而且完全有其道理。只是不能直接幫我們理解蒙東涅－奧立佛對偶性，因為他研究這個理論所牽涉到的是不同區域的參數，它們在對偶關係下並非不變。或者，採用另一種說法，如果想要運用馬爾達西納的解來理解蒙東涅－奧立佛對偶性，我們必須在馬爾達西納描述並不那麼有用的參數範圍中工作。

不過馬爾達西納解的存在和成功，肯定提升了物理學家的信心，相信六維理論的存在，而且所有關於它的典型敘述皆為真，即使我們並不了解所有事情。這有點像數學家發現一些黎曼假說的新推論結果為真，這會讓人對黎曼假說的信心更上一層樓，

但不表示我們理解黎曼假說。

訪 大栗：戶田你對物理學最近的走向有什麼看法？譬如，昨天中島說他花了 18 年去理解愛德華的劍橋演講。而深谷賢治（Kenji Fukaya）說他有時甚至連命題敘述都看不懂，不能理解物理學家方程式的左項和右項是什麼意思。你已經在 Kavli IPMU 好幾年，和物理學家時有互動，你可以提供一點看法嗎？

訪 戶田：當然我對弦論是一竅不通，不過有時候閱讀文章與某些計算時，會試著把物理的用詞翻譯成數學。像是把 D 膜譯成層（sheaf）、把 BPS 態譯成穩定（stable）的物件。我有許多東西要跟物理學家學，也有許多問題要解決，雖然我並不理解這些問題的物理緣起，但我也發現它們和代數幾何的古典問題有關。

訪 大栗：你也參加了弦論討論班，參加這些討論班並和物理學家交談，有什麼收穫嗎？

訪 戶田：我想弦論的研究者有很多類型，有些人的研究和我緊密相關，像是多納森－湯瑪斯不變量（Donaldson-Thomas invariant），以及由連貫層（coherent sheaf）所構成的導來範疇（derived category）。在他們的討論班我可以學到一些東西，不過那幾乎是一個數學討論班。

訪 大栗：有一個數學家告訴我，物理學家就好像猜想的生成函數，對數學家來說，某些特定的物理學家研究更有用。譬如，中島告訴我他特別喜歡愛德華的演講，因為即使他不懂其動機與想法的來源，但對他們來說，愛德華的某些敘述具有非常鮮明的數學意義，就像立川裕二（Yuji Tachikawa）昨天在會議演講中徵引的方程式，這些都是數學家可以研究的問題。

訪 山崎：不過，有時候人們想知道的是背後的思考邏輯。我可以提出一個有數學意義的敘述，數學家可以嘗試去證明，但是他們也確實想知道背後的道理。

在這些情況裡，我無法保證不存在更簡單的答案。不過對於我們討論過的許多問題，大部分物理學家的觀點就是，這些問題的最佳設定就是對物理學很重要的量子場論。

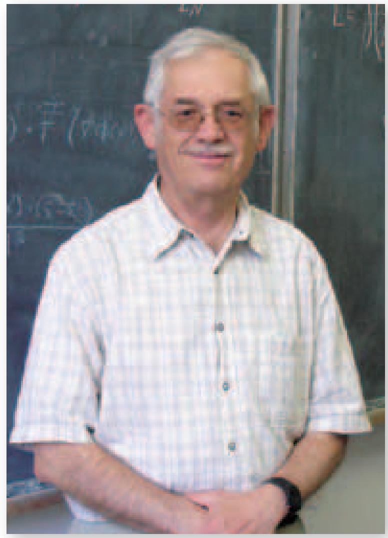
量子纏結

訪 大栗：我們剛剛所討論的課題還停留在 1990 年代，讓我們繼續踏入新千禧年。你認為過去 14 年的進展亮點是什麼？

答案之一是馬爾達西納引介的規範－重力對偶性，這個結果十分深刻。即使到了今天，這方面還是有許多有趣的新發現。其中一個重要的例子是笠真生（Shinsei Ryū）和高柳匡（Tadashi Takayanagi）在規範－重力對偶性方面的纏結熵（entanglement entropy）研究 [RT]。他們發現了黑洞貝肯斯坦－霍金熵（Bekenstein-Hawking entropy）非常有趣的推廣，雖然我自己不曾做過這個主題的研究，但這個進展非常有趣，可能蘊藏著關於量子重力更深刻的線索。如果我能夠找到正確的研究方法，可能自己就會踏入這個領域，不過至少到現在還沒發生。這個方向是我最推薦觀察的方向。

除了笠和高柳，我也一定要推薦卡西尼（Horacio Casini）的文章，其中有些是和沃爾塔（Marina Huerta）一起合作的。這些文章中有一篇討論下述問題 [Ca]：黑洞具有貝肯斯坦－霍金熵。大概 20 年前，貝肯斯坦（Jacob Bekenstein）思考這樣的問題，假設有一個物體掉入黑洞，這個物體具有熵，當它掉入黑洞，熵也跟著消失。當黑洞捕獲此物體，重量會增加，其熵也會提高。根據熱力學第

霍金。（維基百科）



貝肯斯坦。（維基百科）

考慮的是單一粒子，在某個給定時間，我們幾乎確定它會位於時空中的某區域，即使並沒有盒子裝著它（我說「幾乎確定」，因為相對論性量子力學禁止我們說某個粒子肯定會出現在某個區域中）。對這個單一粒子，我們可以定義它的能量，可以找出它被束縛的區域（在相對論性量子力學的一般限制內），但是卻很難說清楚單一粒子的熵。長久以來，有許多文章討論這個問題，大約有幾十篇甚至幾百篇，大部分文章的洞識都很有限。然後出現了卡西尼簡單而出色的論文，他說明正確的概念是纏結熵，永遠可以用自然的方式定義，並且也滿足一個普適的類貝肯斯坦上限。這篇文章遙遙領先這個領域流行的想法，要過了好幾年，我想，大家才廣泛的接受與賞識它。

二定律，這在個過程裡整體熵會提高。換句話說，黑洞所增加的熵至少大於該物體掉入黑洞前的熵。這基本上告訴我們，若一個物體具有給定能量，且小到足以放入給定質量的黑洞，那麼這個物體的熵就有上限。貝肯斯坦提出這樣的上限，稱為貝肯斯坦上限（Bekenstein bound），不過有很長一段時間，沒有人能夠說清楚這個上限有什麼意義。

這就讓我想到深谷賢治說到物理和數學的關係，他提到很難去精確構想物理學家敘述中的用詞。就貝肯斯坦上限的例子來說，情況大致如下。在概念（如大小、能量、掉入物體的熵）有清楚意義的情況下，貝肯斯坦上限顯然成立，因此不太有趣。例如考慮在盒子中許多粒子跳來跳去構成的氣體，這時系統的大小、能量、熵都很具體清楚，貝肯斯坦上限是正確而無趣，因為在很大的範圍內這個式子都滿足。我們可以問，是否能找到一種情境的熵幾乎達到貝肯斯坦上限，要達到這個目標，你不能考慮整個氣體的粒子，而是盒子中的單一粒子。更精確來說，如果我們能忽略盒子的質量，這個情況幾乎會達到貝肯斯坦上限，可惜這是一個不怎麼實際的假設。

於是如果想要靠近貝肯斯坦上限，我們實際應該

訪 **大栗：舉例來說，卡西尼的文章解決了類數問題（species problem），我曾經被這個問題困擾了一段時間，結果他提出令人信服的解釋，說明為何不需要煩惱這個問題。**

過去有許多大家認為是貝肯斯坦上限的反例，因此有些人，包括我，認為如果這個上限是對的，它應該是屬於能與重力耦合的量子場論的敘述，而非任何的量子場論。但是卡西尼說明這個想法全然錯誤，他為貝肯斯坦上限中的所有項給出精確的意義，並且說明這是源自一般性原理、對於所有量子場論都成立的普適敘述。這深具啟發性，而且就像其他的纏結熵研究一樣，說不定是一條很重要的線索，不過這或許需要比我更年輕的人，以他們清新的想法才能知道這條線索到底通往何處。

在這個研究方向上，我想再提一項貢獻，這是卡西尼、馬爾達西納，以及布守（Rafael Bousso）和費雪（Zachary Fisher）的研究 [BCFM]。多

年之前，布守曾經構造了貝肯斯坦上限的共變（covariant）版本，非常適用於宇宙學的問題。任何我所談過關於貝肯斯坦上限的敘述，在布守上限都有相應的敘述。如果你了解其中的意義，會覺得不太有趣；但是當它顯得有趣時，你卻不了解它的意義。在 BCFM 最近的研究裡，他們給出布守上限的精確表述與證明，至少在平坦時空的量子場論是如此。

訪 大栗：我的觀察是，量子重力論與量子資訊論之間嶄新的連結研究，已經有了令人非常興奮的演變。很顯然在這個脈絡裡，纏結概念對於時空的突現一定能有所貢獻。

但願如此，我擔心它的進展會很困難。所以事實上，我研究的是更熟悉的東西。過去十年左右，我花了許多時間承續研究一些可能有點偏離主流的問題，不像我先前大部分的研究那樣。而且我花在這些問題的時間，也比我過去研究任何問題的時間都長。我想，有三個問題最適合我剛才的說法：規範場論與幾何朗蘭茲綱領（Langlands program）、規範場論與科凡諾夫同調群（Khovanov homology），以及超弦微擾論。

超弦微擾論若透過超黎曼面（super Riemann surface）的架構最容易理解。我所有關於超黎曼面的知識都來自德利涅（Pierre Deligne），在 1980 年代如此，最近更多。超黎曼面是正常黎曼面的迷人推廣，納入了奇（odd）或反交換（anticommutative）變數。其中有一部分美好的代數幾何理論發展於 1980 年代，但自此停滯。如果這個研究方向能夠復興就太好了，事實上，2015 年 5 月 18 日到 22 日，在美國石溪大學的西蒙斯幾何和物理研究中心（Simons Center for

2013 年，韋頓在克累數學研究所會議演講結不變量和瓊斯多項式。（Nick Hale 攝影，Clay Mathematics Institute 提供。）

Geometry and Physics）有一個名為「超模空間」（Supermoduli）的研討會，代數幾何學家可能會感興趣。

科凡諾夫同調群

訪 山崎：我昨天聽了你的演講，你解說了自己如何想到將科凡諾夫同調群視為 $N = 4$ 超楊－米爾斯場在一個奇特的迴圈上做積分的結果。我感到印象深刻的是，其中的關鍵材料來自你之前的研究，像是你與卡普斯丁（Anton Kapustin）的工作，其中表述了卡普斯丁－韋頓方程，還有後續你和嘉尤多（Davide Gaiotto）在 $N = 4$ 超楊－米爾斯理論邊界條件的研究。在你撰寫這些論文時，你已經知道可以應用到科凡諾夫同調群了嗎？

答案是「沒有」。我知道科凡諾夫同調群，而且因為不理解它而挫折，但是我完全沒想到它和幾何朗蘭茲對應（Langlands correspondence）有關 ❶。挫折的原因是我認為以前我對結的瓊斯多項式（Jones polynomial）研究 [W89]，應該是研究科凡諾夫同調群的絕佳起點，但是我就是看不出來該如何進行 ❷。事實上在 2004 年，古科夫（Sergei Gukov）、亞伯特 ‧ 史瓦茲（Albert Schwarz）與瓦法就已經以物理學為基礎，提出對科凡諾夫同調群的詮釋 [GSV]，其中部分可以追源到大栗與瓦法的研究。但我覺得很疑惑也有點沮喪，因為他們的說法和規範場論的關係十分迂迴而遙遠。我希望能找到更直接的看法，但是耗了好幾年，仍然覺得很困難。

結果最後，數學文獻的某些進展幫我意識到，科凡諾夫同調群應該以理解幾何朗蘭茲對應的相同材料來處理。由於我對這方面的知識全然無知，我的學習依靠兩個來源。一是蓋茨哥利（Dennis Gaitsgory）對數學家所謂的量子幾何朗蘭茲對應（我不確定這是物理學家會採用的名稱）的研究，他解釋量子幾何朗蘭茲對應中的 q 參數，以及量子群與瓊斯多項式中的 q 參數有關；其次是科提斯（Sabin Cautis）和康尼澤（Joel Kamnitzer）的文章，他們用重複的赫克修正（repeated Hecke modifications）所形成的空間來構造科凡諾夫同調群。剛開頭我並不知道要如何運用這些線索，不過它們就像高掛的紅旗一樣不斷提醒我。

赫克轉換是幾何朗蘭茲對應最重要的材料之一，至於它在物理的意義何在，困擾我非常久，最後更成為我想從物理學與規範場論詮釋幾何朗蘭茲對應的最後主要絆腳石。結果，我在一趟從西雅圖返家的班機上，突然領悟到幾何朗蘭茲對應中的赫克轉換，其實就是以代數幾何的方式，去描述量子規範場論中的「特胡夫特算子」（’t Hooft operator）效應。我從來沒有研究過特胡夫特算子，但我很熟悉它，因為這是 1970 年代末就被引入當作理解量子規範場論的工具。如何運用特胡夫特算子的基本知識，以及它在電磁對偶下的行為都是廣為人知的，所以一旦我可以重新用特胡夫特算子詮釋赫克轉換，許多事情就變得顯而易見。

科提斯和康尼澤用重複赫克修正所構造的空間中的 B 模型來詮釋科凡諾夫同調群。康尼澤在另一篇文章中猜想，用同一空間的 A 模型也會有另一種不同的描述方式，不過技術上要找到正確的 A 模型並不容易。我真的很想了解 A 模型，因為在這個方向上，能夠期待達到明顯的三維或四維對稱。我研究科凡諾夫同調群的主要目標，是要找到具有明顯對稱的描述方式，以及和瓊斯多項式的規範場論描述的明晰關係。我最終成功了 [W12]，其中最難處理的部分是其中的規範場必須遵守一個很微妙的邊界條件，我稱之為納姆極點（Nahm pole）邊界條件 ❸。幸運的是我對納姆極點邊界條件以及它在電磁對偶的角色很熟悉，這得力於幾年前我和嘉尤多的研究 [GW]。

我猜測數學界在短期或中期內會開始領會我的科

凡諾夫同調群研究，其中的障礙大部分是因為不熟悉納姆極點邊界條件。基於此，我一直和馬捷歐（Rafe Mazzeo）合作，試著給出這個邊界條件的數學細節。我們已經寫了一篇文章 [MW]，在沒有結的情況，嚴格表述納姆極點邊界條件，我們正試圖將此推廣到含結的情況，其中必要的不等式已經掌握，只有一些細節還沒到位。

訪 山崎： 原來如此。這是一段物理和數學互動的佳話。你的動機部分出自重要的數學論文，接著以物理學家的立場提出詮釋，然後你發展自己的物理故事，現在你嘗試要將它帶回數學。

前面說過，科提斯和康尼澤真正能處理的是 B 模型，但因為這個詮釋不存在明顯的三維對稱，所以我決定集中精神處理 A 模型。不過如果能夠騰出幾個月的時間，我會試著以物理學家的立場解釋科提斯和康尼澤的 B 模型。我合理樂觀的相信我做得到，並且相信結果會很有啟發性。唯一的問題是，類似這樣——我認為如果專心幾個月應該能釐清的有趣枝節——真的非常多。

朗蘭茲對應與規範場論對偶性

訪 大栗：大概在 1970 年代末期，人們就知道朗蘭茲對應和 S 對偶有某種關係，你是在什麼時候真的意識到這一點的？

剛才我沒有說完整 1977 年時和阿提雅的互動經過。他告訴我兩件當時我不知道的事。一是蒙東涅－奧立佛的文章，另一件就是朗蘭茲對應，這是數論的核心課題，但是我從沒聽過。阿提雅注意到朗蘭茲的對偶群和蒙東涅－奧立佛猜想的對偶群是一樣的 [4]。因此，阿提雅猜測朗蘭茲對應和蒙東涅－奧立佛猜想有某種關係。

訪 大栗：這是 1970 年代末的事吧？

那是 1977 年 12 月或 1978 年 1 月的事，當時我第一次訪問牛津。

訪 大栗：你在當時是否就已經認真看待這個朗蘭茲對應與規範動力學有關的看法？

嗯，我從來沒忘記這一點，但正如我前面說的，由於我懷疑蒙東涅－奧立佛對偶性的想法，所以也沒有很認真把它和朗蘭茲對應兜起來，那時我並沒想過要學習朗蘭茲對應，一直到 1980 年代末，我從沒碰過這方面的東西。然後我才很膚淺的學習朗蘭茲對應。只要你學過一點朗蘭茲對應，以及一點黎曼面上的保角場論，就會看出兩者的相似性。我因此寫了一篇文章，然後就領悟到我的了解實在太膚淺，得不到深刻的結果，所以放棄這些東西達數年之久。

訪 大栗：我記得，當我 1988 年到 1989 年在普林斯頓高等研究院做博士後研究時，朗蘭茲（Robert Langlands）自己對保角場論非常感興趣，只是我不確切知道他感興趣的角度。

我不認為他是基於朗蘭茲對應的理由，不過我認為他的研究影響深遠。即使從某種觀點，他自己缺乏明確的主要突破，但他協助找到一些問題，刺激了後來隨機羅烏納演化（Stochastic Loewner Evolution）概念的後續發展，這對數學影響重大，也啟發物理學家對保角場論的某些問題產生新的想

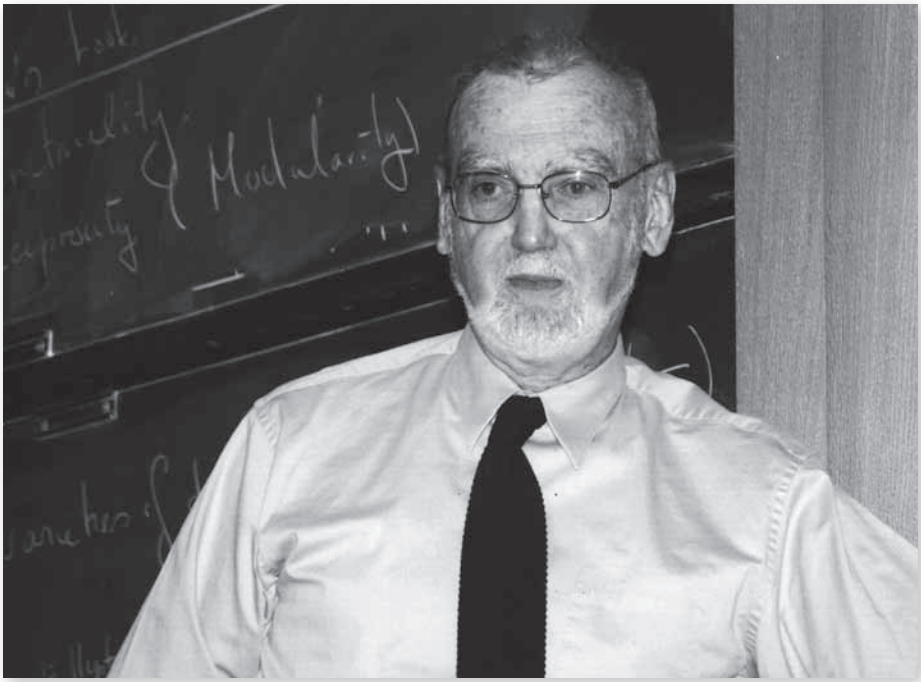
---

❶ 譯註：韋頓本只使用「幾何朗蘭茲」的泛稱，包括幾何朗蘭茲綱領、幾何朗蘭茲對應、幾何朗蘭茲對偶性等緊密相關之概念，暫譯為接近他之後要詳談的幾何朗蘭茲對應，以符合閱讀習慣。

❷ 從數學觀點，科凡諾夫同調群是瓊斯多項式的精緻化或「範疇化」。

❸ 納姆（Werner Nahm）在他 30 年前研究磁單極時，引入納姆極點邊界條件的基本想法。

❹ 這在稍早一點就已由高達（Peter Goddard）、努茨（Jean Nuyts）與奧立佛所介紹引入了。



朗蘭茲。（維基百科）

兜不起來的熟悉材料

正如我昨天在京都獎紀念演講中所解釋的，與瓊斯多項式有關的「體積猜想」曾經困擾我。這個猜想是 2000 年左右，卡塞夫（Rinat Kashaev）、村上齊（Hitoshi Murakami）與村上順（Jun Murakami）等人開始表述與發展出來的，大部分古科夫都曾向我解說過。雖然他們的敘述和有物理意義的命題具有表面的相似性（事實上就出自我 1988 年關於瓊斯多項式的原始文章），其中卻有關鍵的差異。在他們的看法裡似乎出現複臨界點，造成指數般大的貢獻，這在物理中通常是不可能的。我不知道這一點是否曾困擾其他人，我是很困擾。結果這是一個很值得思考的問題，因為我終究找到一個合宜的解釋，而且成為引領我藉由規範場論去理解科凡諾夫同調群的轉捩點。

貝林森與狄林費德的幾何朗蘭茲對應研究也一樣困擾我，他們採用了物理學家熟知的材料，但使用的方式卻似乎兜不攏。看起來就像有人拿了一堆西洋棋子，或者在日本，應該說拿的是一堆將棋棋子，然後很隨性的擺在棋盤上。對我來說，棋子的擺法全無章法可言，這很困擾，但我卻無計可施。

事實上，從僅能理解的一小部分，我很納悶貝林森與狄林費德所說的是否和希沁（Nigel Hitchin）的研究有關。所以我跟他們提到希沁的文章，其中希沁構造了複曲線上某纖維叢模空間上的可交換微分算子；換一種說法，希沁是將他幾年前構造的古典可積系統給量子化了。雖然我幾乎完全不懂貝林

法。我認為他對這項研究有影響，但我不相信他對保角場論的興趣，是來自朗蘭茲對應或是規範場論的對偶性。這是我和他多年互動的印象。

我剛才說過，在 1980 年代末，我花了一些時間試圖發展保角場論和朗蘭茲對應的類比，最後不甘不願的總結說，我所發展的那種類比形式實在太膚淺，於是研究就中止了。但是在 1990 年左右，我聽到貝林森（Alexander Beilinson）與狄林費德（Vladimir Drinfeld）在幾何朗蘭茲對應的嶄新研究。這件事有幾個效應。首先，這確認了我對於這項對偶性的物理意義的理解太膚淺。比起我在朗蘭茲對應與保角場論的粗糙類比，他們的研究結果更勝許多，不但更通透也更富細節。他們的研究也確認了和我所知的物理學的相關性。但另一方面我也感到煩惱，因為他們運用保角場論的方式，對我來說其實沒有意義。他們所研究的保角場論是在負整數階（level），但在物理學只有正整數階才自然，而且他們用法十分怪異。

森與狄林費德的工作，倒是幫他們與希沁的工作拉上線，結果在貝林森與狄林費德一篇非常長而不曾出版的關於幾何朗蘭茲對應的基礎文章裡（可在網路找到），他們很大方的感謝我，過份高估了我的理解。真正發生的只是我的一個猜測，告訴他們希沁的研究，我想這讓他們看清了所有事情。他們可能以為我知道一些東西，但其實並沒有。不管如何，在那些年裡，大家有許多理由猜測幾何朗蘭茲對應和物理有某種關係，不過就像你看到的，我當時還沒搞清楚其中的道理。

訪 大栗：所以，是什麼靈感讓你又回到這個問題？

大概十年後，在高等研究院有一個為物理學家舉辦的幾何朗蘭茲對應研討會，這個會議你有出席嗎？

訪 大栗：我有收到邀請，但因為時程的衝突，無法參加。

這個研討會有兩個系列演講，再加上一些額外的零星演講。系列演講非常出色，但對我幫助不大。郭列斯基（Mark Goresky）的系列演講目標，是想告訴物理學家何謂朗蘭茲對應。對我來說唯一的麻煩是，如果想要靠幾次演講解釋這個主題，而且還假設不超過體（代數意義的 field）的代數知識，那我已經熟知朗蘭茲對應。也就是說，雖然我對這個主題所知甚少，不過我至少還具有從零開始並在幾個小時內可以解釋的程度。所以這個系列演講我沒有什麼收穫。

再來，這個研討會的主要推動者弗倫科（Edward Frenkel）給了另一系列的演講，就我而言，基本上他談的就是棋子亂擺的將棋棋盤，我實在也無法從中獲益。因為我已經知道研究幾何朗蘭茲對應的人，從我的觀點就是把大家熟知的將棋棋子在棋盤上亂擺一通。

除了系列演講，這個研討會還有一些額外的演講。其中之一的講者是本茲維（David Ben-Zvi）。他談的是應該如何逼近幾何朗蘭茲對應。我想他大部分談的是另一位數學家艾林金（Dima Arinkin）的工作。他們所謂的逼近是在希沁纖形（Hitchin fibration）的纖維（fiber）上的 T 對偶。本茲維以複結構來描述，其中希沁纖形的纖維是全純的（holomorphic），因此 T 對偶是全純對偶。物理學家已經知道，希沁纖形纖維上的 T 對偶來自四維蒙東涅－奧立佛對偶性，而且自從阿提雅在 1977-78 年告知他的觀察後，我當然也開始注意某種朗蘭茲對應與蒙東涅－奧立佛對偶性有關聯的可能性。但是為什麼本茲維宣稱的只是從 T 對偶得到朗蘭茲對應的逼近，而不是朗蘭茲對應本身呢？到了某個地步，我開始懷疑原因或許出在本茲維的描述用錯複結構了。其中的想法是希沁模空間上的同一 T 對偶，如果用不同觀點就會得到鏡對稱，一邊是某複結構的 B 模型，另一邊是某辛結構（symplectic structure）的 A 模型。這個鏡對稱應該就是真正的幾何朗蘭茲對應，而不僅止於逼近。事實上，我之所以開始和卡普斯丁合作研究幾何朗蘭茲對應，就是因為他已經研究過二維對偶中的廣義複幾何。在他描述的世界裡，一系列的對偶會出現退化，而且鏡對稱會退化成全純對偶。

只要開始沿著這個方向思考，很快就會理解幾何朗蘭茲對偶就是鏡對稱，偶而才會退化成全純對偶，而這正是本茲維告訴我們的逼近。我開始相信這是正確的看法，但是還必須克服一些障礙。最困難的一步前面已經談過，赫克算子是證明朗蘭茲對應的第一步，所以必須用規範場論的特胡夫特算子以物理來詮釋赫克算子。再來必須藉由複流形 M 上的微分算子來詮釋 M 餘切叢（cotangent bundle）的 A 模型。這和卡普斯丁先前的研究頗為接近。只要把這些關鍵都釐清了，那麼何謂幾何朗蘭茲對偶，從我作為物理學家的角度來說，可以算是相當清楚了。

發現生命的意義卻難以言詮

但是寫一篇文章討論這個主題並非易事，大概花了一年的時間才完成 [KW]。在那一年，我好像一個發現生命意義的人，卻苦於無法向他人解釋。而且就某種意義，我現在仍然有這種感覺，原因是這樣的，一個有弦論或規範場論對偶性背景的物理學家，可以了解我和卡普斯丁關於幾何朗蘭茲對應的文章，不過對大部分的物理學家，這項主題太過繁瑣，很難真的令人興奮起來。另一方面，數學家雖然認為這是激動人心的課題，卻很難理解我們的文章，因為裡面有太多不熟悉的量子場論與弦論（而且也難以嚴格表述）。所以很遺憾，這篇我和卡普斯丁合寫的文章，恐怕會有很長一段時間，數學家難以理解。

訪 山崎：這表示也許我們得再等上 10 或 15 年。

可能還真是如此。我想的確很難看出近日有哪些進展才能讓數學家理解幾何朗蘭茲對應的規範場論詮釋。實際上這正是為什麼我會對科凡諾夫同調群的結果那麼興奮的原因。針對科凡諾夫同調群與幾何朗蘭茲對應，我的研究理路用了許多相似的材料。但是在科凡諾夫同調群的情況，如果數學家對這個結果有興趣，那麼在最近的未來他們一定可以理解證明的想法，我相信這個方向比較行得通。如果要我賭，我認為有相當的可能性，可以親眼看到規範場論與科凡諾夫同調群的研究被數學家接受與讚賞。但是我認為要非常幸運，才能看到規範場論與幾何朗蘭茲對應的研究被同樣的領會。當然這純粹只是個人的揣測。

訪 戶田：你認為你對 S 對偶性與幾何朗蘭茲對應的想法，有可能應用到真正的朗蘭茲綱領嗎？

我覺得還差的很遠。我個人以為數論終究會與物理學搭上線是一種夢想，但我懷疑進展會那麼快。在物理的許多領域裡出現某些特定的數論公式，或許正是哪天美夢能成真的線索。但要讓我真的傾心關注，數論必須以更結構化的方式呈現在物理學中。對於那種多少是基於特設情境的物理計算中所出現的特殊公式，我並不太感興趣。數論要與物理更加整合才有趣，我不覺得這會很快發生。

我的研究專注於朗蘭茲對應的幾何形式，因為我察覺在奠基於物理且唾手可得的工具脈絡裡，有希望真的理解這個問題。對於數論的朗蘭茲對應，或許某一天這種情況也會發生，不過現在還缺了許多東西，我們也不知道哪一樣會先出現。我之所以能夠有進展，是因為我把焦點放得夠狹窄，沒有試著去理解數論的朗蘭茲對應。

訪 戶田：S 對偶性與幾何朗蘭茲對應的關係讓我很意外，因為對我來說，數論這個研究領域似乎和物理相距甚遠。

儘管如此，還是有很多重要發展來日可能成為重要的線索。其中最深刻的發現之一，是大約 15 年前塞迪（Savdeep Sethi）和葛林，以及後續葛林與其他合作者的研究。在塞迪和葛林原初的研究裡 [GSe]，他們研究 10 維 IIB 型超弦論的低能 R^4 交互作用（這裡的 R 是黎曼曲率張量）。他們得到我認為很驚人的發現，答案是某種非全純且權重為 3/2 的艾森斯坦級數（Eisenstein series）。雖然我對數論的知識很膚淺，我想這類結果比較接近現代數論學家的興趣，而不是經常出現在二維保角場論的古典模形式。

訪 大栗：在數論中也出現這一類並非完全遵守模特性的物件。

正是如此。很多數論學家喜愛的東西在物理進展中出現，有些甚至就在我的研究裡。其中很多發現顯示，我們做為弦論學者所研究的物理理論，能令數論學家感到興趣，原來物理理論竟然包藏著一些

數論的知識。不過我個人不覺得在可預見的未來，物理有多大機會能以結構性的方式與數論接觸。我甚至無法表述這樣的接觸將會長的什麼模樣，所以甚至無法中肯的告訴你什麼是物理做不到的，總之我覺得這個時間點不對。

好吧，這就是為什麼我個人比較在意幾何朗蘭茲對應而非數論的原因。光是幾何朗蘭茲對應就夠困難了，需要竭精耗神才能理解。不過我認為理解之後，許多數學家涉及表現論幾何面向的研究材料，從物理觀點已經容易了解得多。舉例來說，雖然我不理解昨天中島在京都獎研討會的演講，但我認為要理解他的結果，可能會牽涉幾何朗蘭茲對應的研究之後所釐清的概念。我無法保證，但值得一試。

至少有件事很明顯，雖然中島來不及解釋整個架構，但在他的演講快結束時，談到仿射格拉斯曼空間（affine Grassmannian）。但是特胡夫特算子的同構類和仿射格拉斯曼空間的閉鏈（cycle）有關，所以當數學家跟你談到仿射格拉斯曼空間，也許你可以至少就所聽到的部分，從特胡夫特算子的角度來思考。我無法保證一定可行，但至少從物理學家的角度，想要了解中島的結果，這個想法絕對值得一試。

不管如何，我很篤定，從物理學家的觀點，我們可以而且應該盡量去理解幾何表現論（geometric representation theory）。事實上，貝林森與狄林費德原初研究中的其中一部分，我還無法充分理解。我所關心的是他們把保角場論用在所謂的臨界階 $-h$，其中 h 是對偶考克斯特數（dual Coxeter number），然後構造某種 B 膜（用他們的術語對應到所謂的算元（oper）❶）的 A 模型對偶。嘉尤多和我在幾年前，提出一個合理的解釋，說明電磁對偶和算元解形（variety of opers）的關係，但我仍然不認為理解它和保角場論的關係了。不過在過去幾年裡，研究超對稱規範場論的物理學家，已經在四維以及其六維親戚有了幾項發現，其中牽涉到臨界階的保角場論，所以現在可能是解決這個疑點的正確時機了。

如何與數學家合作

訪 戶田：我有個一般性的問題。數學家該做的是哪一類問題？

有許多代數幾何學家研究的問題牽涉到物理學家研究的對偶性。有許多情況我無法給出多少建議，畢竟我不是最近進展的專家。其中有些前一陣子物理學家完成且十分相關的工作，我還一直在努力理解。舉些例子，像郭帕庫瑪－瓦法公式（Gopakumar-Vafa formula），還有大栗－瓦法公式（Ooguri-Vafa formula），對代數幾何學家都很有影響。不過做為物理學家，我從不認為已經澈底了解。所以事實上，去年我和一位學生迪杜森寇（Mykola Dedushenko）花了很多時間想更深入理解這些公式。在這個研究裡，我在做一些要回答你的問題之前必須研究的功課 [DeW]。

訪 大栗：這是你下週在 Kavli IPMU 要演講的主題。

回到戶田的問題，對於最近大家感興趣的數學領域，雖然有很多我可能提不出有用的意見，但是對於代數幾何學家我有一點小建議。我非常推薦超黎曼面這個主題，我很確定其中含有深刻的理論，但我無法保證它多快會綻放神采，因為也許只有在夠多人受到吸引後，深刻的理論才能在短時間內獲得發展，或許下個春天在西蒙斯研究中心舉行的研討會是一個機會，只能靜觀其變了。

❶ 譯註：依照貝林森與狄林費德的說明，“oper” 一詞源於線叢間微分算子的抽象化，故譯為「算元」。

訪 大栗：25 到 30 年前，的確有人研究微擾弦論中宇宙常數是否有限或零的問題，但無法令人完全滿意。我想只有在你以超黎曼面幾何來給出適切的描述後，才得到完整的理解。

謝謝，大栗，很高興你這樣認為。但不是所有物理學家都同意，因為他們可以用圖變算子（picture changing operator）等概念來表示所有東西，進而把超黎曼面隱藏起來。我個人認為這樣做，讓人無法真正理解這些公式的意義。當然言人人殊。

我認為超黎曼面之所以在 1980 年代中止發展，是因為物理學家已經滿意於他們的部分理解，將超黎曼面藏到舞台後頭。如果你想那樣去理解，就只會忽略這個極為美麗的課題。我很關心這個方向，到現在已經花了好幾年的時間處理運用超黎曼面的細節。

是否有許多物理學家會因為我嘗試填補的細節而真的感到興奮，似乎不是很清楚。所以我的期待之一，是數學家會對超黎曼面的發展感興趣。無法保證，但我覺得他們應該感興趣。

訪 大栗：由於更明確的理解微擾弦論了，你會希望出現嶄新的物理洞識嗎？

答案可能得看你如何看待物理洞識。如果一個人認為用超黎曼面模空間上的積分表述，將能更清楚超弦微擾論的意義，這可以算是一種洞見。但是我看不出有什麼證據，以上述的方式納入超黎曼面來理解微擾理論之後，就能幫忙回答譬如非微擾的問題，或更了解弦論的對稱結構，或者其他任何可能正確的概念。

訪 山崎：我有一個最後的問題。你研究領域的其中一部分是數學物理。你和數學家有許多討論，寫了很多數學論文。

這樣說吧，我只在很特別的情況下寫數學文章，只寫自認能帶來啟發性的題材。最近的例子是我和多納吉（Ron Donagi）討論超黎曼面模空間基礎性問題的工作 [DoW]，還有前述我和馬捷歐研究納姆極點邊界條件的文章。

訪 山崎：我了解了，所以我的問題是，如果物理學家想要有效率的和數學家合作，你會提出什麼忠告？

這很難。想要做出嚴格的證明需要很細微的方法，這對物理學家很困難，就連我也只能在很特殊的情況，像是我發現某些環節真的有缺陷，而又真的簡單到只要有正確的合作者我就能有所幫助的情形。有一些物理學家針對特殊的領域，會希望踏入問題的細節，學習嚴格證明的技巧。但我認為大部分物理學家，只會在很特別的情況，才會願意並能成功的執行，就像我的選擇一樣。

訪 山崎：原來如此。另外，在你的許多研究中，和數學家的交談是否曾為你帶來靈感？

這經常發生在數學家的研究牽涉到物理面向，但大家還不甚了解，而且對我也沒有意義的時候。例如先前提到的體積猜想，有相當多年我無法理解該領域的這個結論，因為複臨界點提供指數層級的貢獻。我只能不斷的將它擺到一旁，毫無進展。最後在 2009 年 9 月，我參加在德國波昂豪斯朵夫研究所（Hausdorff Institute）為慶祝陳－西蒙斯理論 20 周年所舉辦的會議裡，我聽到更多關於體積猜想的演講，結果我真的很尷尬，竟然不懂出現指數級貢獻的起因。後來的發展證明我當時對這問題如此憂心是對的，因為它的答案極為有用。

訪 山崎：是的，因為感覺棋子被錯擺讓你對這個問題產生興趣，你最後解決了這個問題並導致新的發展。

是啊，另一個例子是貝林森與狄林費德那個棋子

亂成一團的將棋棋盤。

給年輕的學生

訪 大栗：棋子看起來擺錯了，但如果從不同的維度看起來，說不定根本就很整齊。

我也有一個最後的問題，在 20 年前《数学セミナー》的江口徹訪談裡，他問起數學和物理交界處的發展願景，你回答說這個領域的進展十分強勁，你預測在可見的未來這項進展將會持續下去，你的預測在過去 20 年當然已經被大大的證實了。基於此，我想再一次問同樣這個問題，你能否給閱讀這篇文章的年輕學子，對這個領域的未來給予忠告。

首先，過去 20 年，數學和物理不只有持續的互動關係，而且已經多元發展到一種地步，許多有趣的結果我很尷尬的只能領略一二，這個領域一直往許多方向擴張。

我很確定這個現象會持續下去，而且我相信會持續下去的理由是，我確信在量子場論與弦論裡有著相當豐富的數學祕密。當這些祕密部分浮現到表面時，經常讓物理學家很意外，因為做為物理學的領域，我們其實並不真的那麼理解弦論，不理解弦論背後的核心概念。而在更根本的層次，數學家仍然還不能全面掌握量子場論，因此從而出現的結論也很令數學家驚訝。基於這兩個原因，我認為從物理和數學裡所生成的各種概念，還會繼續令人意外很長一段時間。

對年輕人來說，我很確定這裡面有許多令人興奮的機會，他們可以幫忙詮釋箇中的意義，因為我們無法適切理解這個理論。在 1990 年代，當我們益發清楚不同的弦論可以用非微擾對偶性來統一，而弦論就某種意義上是固有的量子理論時，我們因此獲得更開闊的視野。但我們仍然只是不斷研究這個主題的許多不同面向，卻不十分清楚其核心基礎原理。只要這一點繼續保持下去，今天的年輕人就有機會做出更大的發現。如果我真的能夠確切的告訴你該往那個方向走，我自己就會在那裡。

訪 大栗：非常感謝你花時間與我們長談，這是一場十分有趣的訪談，再次恭喜你獲得京都獎。

謝謝你對我獲得京都獎的溢美之詞，也很感謝和你們所進行的討論，這幫忙我回想起過去 20 年裡我們的許多進展。

訪 大栗：讓我們 20 年後再聚一次，品賞下一個 20 年的進展。

可以試試。但這樣我們就都得多多運動，保持健康才行。∞

本文參考資料為本刊編輯室新編，請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

2014 年 11 月，因韋頓獲得 2014 年基礎科學京都獎而進行此次訪談。本文發表於 Kavli IPMU《所訊》（2014 年 12 月），並節譯分上下兩期發表於日本數學普及雜誌《数学セミナー》（2015 年 4 月與 5 月），經受訪人略做修整後亦發表於《美國數學學會會訊》（2015 年 5 月）。

本刊感謝 Kavli IPMU、大栗博司、韋頓同意轉載翻譯，本譯稿依受訪人要求，使用《美國數學學會會訊》的版本翻譯。

審定簡介

賀培銘為臺大物理系特聘教授，專長為數學物理與弦論。

譯者簡介

翁秉仁為臺大數學系副教授。

延伸閱讀

▶ 2014 京都獎網站中之韋頓主網頁，包含許多相關資訊。

http://www.inamori-f.or.jp/laureates/k30_b_edward/prf_e.html

韋頓的獲獎紀念演講，講題是 Adventures in Physics and Math

https://www.youtube.com/watch?v=zZ4m-mqcFkA

▶ 格林恩（Brian Greene）介紹弦論的 *Elegant Universe* 當年真是洛陽紙貴。同名的 PBS 影集也有很好的銷售量。（影片目前 YouTube 也找得到）底下是兩個比較新的現場演講：

Greene,Brian “Making sense of string theory” TED Talk (2008)

https://www.youtube.com/watch?v=YtdE662eY_M

Greene,Brian “The State of String Theory” (2011), Stony Brook University.

http://scgp.stonybrook.edu/video_portal/video.php?id=24

▶ 丘成桐、納迪斯《丘成桐談空間的內在形狀》（2012）遠流。