The Journal of National Chiao Tung University
Vol. 8, July 1980
pp. 17-29

認知模式與相似判斷
A Perception Model and Its Implication in Similarity Judgement

陳英亮 Yin-Liang Chen

Institute of Management Science, N. C. T. U.

(Received February 27, 1980)

Abstract — A perception model is presented and a method of analyzing subjective differences is developed hereof. A model of similarity judgement is then built for analyzing similarity data to reveal the information conceived and a method is suggested for retrieving this information. The paper starts with axioms and goes deductively. The models and the methods of analysis presented possess a common feature of including in the perception space, the dimensions of both the internal and external states of each object. This gives the possibility of seeing the changes of both the view points of subjects and the internal states of objects, responding to the changes of environmental states. The axioms accepted in this paper are either abstraction of common perception experiences or basic principles obeyed by very general systems.

摘要：本文提出一種認知模式，從而發展出主觀差異的一種分析方法。由此又建立一個相似判斷模式以分析相似判斷資料中所隱藏的情報並提供抽取這些情報的方法。全文的特點是以公設爲起點，經逐步推演以達結論。文中所提之模式與分析方法，其共同特點是主張認知空間除了客體內在狀態之維度外，還應該包括環境狀態之維度，因此能顯示出環境狀態改變時，主體的觀點或客體的內在狀態變化的情形。文中所提出的公設都是一般的認知經驗以及一般系統所遵循的基本原理。

一、緒　言

研究認知問題的一種手段是對一群客體作相似判斷，由相似判斷資料獲得主體據以判斷的認知空間以及客體在這空間的關係。這方面的研究已有相當的進展〔8〕〔9〕〔13〕〔14〕〔15〕，其在管理以及其它科學上也有廣泛的應用〔2〕〔4〕。相似判斷資料中顯然同時隱藏著主體的個性與客體的屬性成分，因此如果僅根據一個主體的判斷資料所推出來的客體屬性，自然只能代表該主體一己之見而已。若主體的數目增加，則綜合其個別的判斷資料，可望將主體與客體的情報加以分離，也就是說，可望獲得一個衆主體據以判斷的共同認知空間，而客體在空間的關係以及主體間的個別差異也得以揭露。主體間個別差異的研究，學者們亦多有為之；如 Kruskal〔9〕〔10〕，McGee〔12〕以及 Tucker - Messick〔17〕等氏皆是。其中 Tucker - Messick 二氏的做法是先將主體加以分群，每一個組群以一份相似資料為代表，再將代表各組群的相似資料個別獨立地加以處理，然後比較其差異。這種辦法的最大問題是在比較結果時缺乏一個共同的基礎〔3〕。其後 Carroll - Chang 二氏將主體間差異的起因解釋為各主體在共同認知空間採用不同的幾何來判斷相近程度所造成〔3〕〔4〕。他們還根據這個原理提出一套分析的方法並且已經寫成計算機程式，名曰 INDSCAL，廣為研究者所採用。縱觀這些學說可以發現兩個共同的特點：

1. 缺少一個可以說明相似判斷的內在運作法則，導致整個架構出現不可避免的缺陷。例如在 Carroll - Chang 的模式中，主體應採用那些類型的幾何來度量，並不明確，導致當所獲得的度規矩陣出現負數特徵值時，不易解釋〔3〕。又如對原始資料的化一工作，似也缺少根據。
2. 忽略客體歷史對相似判斷的影響，認為相似判斷資料是靜態資料，忽略了主體對客體的印象會因環境狀態而改變的動態本質。

一般在建立預測模式時，若模式過於簡陋則嫌不足，模式過於複雜，則將逼使模式去吻合那些含有隨機因素的資料，當然也不合理。建立相似判斷模式時情形也是一樣。解決之道有賴於找出系統的運作法則。根據運作法則所建立的模式，才可望免於泛濫或不足。

本文根據相對原理建立了一個認知模式，對認知的主觀差異加以探討，並提出一種主觀差異的分析方法作為相似判斷的內在運作法則。主張認知空間應包括環境狀態的維度，同時認為客體在主體心目中的印象是一段軌跡，會隨環境狀態而改變。希望這個模式一方面能解決以上兩個問題，一方面能提供比較有用的管理情報。

文中在第二節提出四個假設以建立認知模式；第三節分析認知的主觀差異；第四節再根據兩個假設建立相似判斷模式；第五節提出第七個假設以完成相似資料分析；在第六節裡提出結論。文中為敘述方面所採用幾個特別名詞都曾加界定。

二、認知模式

〔定義〕主體用以描述客體狀態的領域，稱為認知空間。

在自然科學的相對理論〔1〕〔11〕中，觀察者在時空的聯合領域裡描述物理世界。所謂物理定律乃是時空中的一些關係（Relation），而每一個關係以不同的座標系統來敘述，都會呈現相同的形式，是為相對理論之要義。

G. Jumarie氏對於將相對理論推廣到一般系統上曾有研究〔6〕〔7〕，認為「系統應閉以為界定，開以為觀察」（Close for definition，Open for observation），因此在描述系統的狀態時，除了系統的內在狀態之外，也應該包括環境之狀態，一如在物理系統中描述一個質點時，除了質點的空間位置之外，其時間位置亦應包括。本文認為在認知的問題中，客體在主體認知空間的印象會隨客體的環境狀態而改變，因此客體的環境狀態尤其不能忽略，是以主張認知空間除了客體內在狀態的維度外，尤應包括環境狀態之維度。

〔假設一〕主體綜合客體之環境狀態以及客體之內在狀態以認知客體。

這個假設明確地指出認知空間應包括客體內在狀態以及外在狀態之維度。本文認為環境狀態會影響主體對客體內在狀態之認知，同樣地，客體內在狀態也會影響主體對外在狀態之認知，因此若僅言及客體之內在狀態，而不說明客體的外在狀態，對客體的認知實在有所不足。

〔例〕國民要認識他們的領袖，除了要根據其言行之外，還必須根據當時國內外的局勢，因為國內外的局勢顯然會影響領袖的言行。

〔例〕對酒的認知，一方面要根據飲者的感言，一方面還要根據飲時的環境狀態，如飲者對酒瓶、酒杯、宴席、主人、夜景等之感受，因為外在狀態會影響飲者對酒的品嚐感受。

〔定義〕主體根據自己的座標系統以描述客體在認知空間的關係。這個座標系統是為主體的認知系統。

根據一個認知系統，本文以 $X=(x_1, x_2, \cdots)$ 代表內在狀態變數，而以 $Y=(y_1, y_2, \cdots)$ 代表環境狀態變數。

〔假設二〕若客體的內在狀態能隨着外在狀態的改變產生一定的應變，則其在主體的認知地位不變。

當環境狀態改變時，客體的內部狀態在認知空間會發生變化，是吾人認知經驗中視為當然的事。

〔例〕當妻子的容貌隨著歲月而衰退，而其內在涵養、處世態度若能隨著有適當的應變，則在丈夫心目中（認知空間）的地位不變。

這個假設的要點之一在於「一定的應變」，意思是「有應變，但不是無限的應變」。另一個要點是不論環境在什麼狀態下發生變化，內在狀態所生的應變情形都相同。

〔例〕當國內外的局勢發生變化時，領袖的言行若能因而有適當的應變，則其在國民心目中的地位不變。但若沒有應變或應變過烈，則國民將感覺到他們的領袖「變了」。設客體原來在（X，Y）的狀態，其中X為內在狀態，Y為外在狀態，改變到（X＋dX，Y＋dY）的狀態，若要認知地位不變，根據本假設必須

$$\| dX \| = c \| dY \| \qquad (2-1)$$

$\| \cdot \|$ 代表對狀態改變量的某種度規，c為比例常數，與選用的單位有關，而與（X，Y）無關。

〔例〕設有某種品牌的轎車，隨著石油危機的演進，其設計皆未改變，因而在顧客心目中的地位愈來愈低。究其原因乃是轎車欲維持在顧客心目中的地位不變，則當石油危機（環境狀態）加深時，其省油設計（內在狀態）必須有相應的改進。今其設計不變，在主體的認知地位自然要沒落了。

〔假設三〕客體的內在、外在狀態在認知空間的關係，以每一個認知系統來敍述都是相同的。

本文認為相對原理是宇宙的基本原理之一，這個假設就是把相對原理推廣到認知現象。根據這個假設，客體在認知空間的狀態座標固然會因認知系統而異，但客體間的關係地位則不論以那一個系統來看都是一樣的。〔假設二〕中客體外在狀態的改變量 $\| dY \|$，與內在狀態應變量 $\| dX \|$ 的關係，（2－1）式，是認知空間的一個關係，根據本假設，這個關係對各認知系統都應相同；也就是（2－1）式中之c在每一個認知系統中都相同，可令為1。

〔假設四〕主體對認知空間中兩個客體狀態間差異的認知，是將之置於相同的環境狀態下為之者。

〔例〕倘若我們要比較古今兩個領袖人物，事實上並非僅依據其言行作直接之比較，而是假想將古人置身於今日之環境中，再由該古人生時之言行推想其在今日環境狀態下之應有言行，以之與今日領袖之言行相比較。亦或假想將今日領袖置身於古代的環境中，再由其言行推想其在古代環境狀態下之應有言行，以之與古人生時言行相比較。〔假設四〕旨在說明這種想法。

設對認知系統K而言，（X，Y）與（X＋dX，Y＋dY）是兩個客體狀態，根據本假設，二者認知地位之差異是將一者置身於另一者的環境狀態來度量。今外在狀態改變了 dY，根據〔

假設二〕，若內在狀態感變了 $\|dY\|$，則認知地位不變，今二者內在狀態之差異量為 $\|dX\|$ 而不是 $\|dY\|$，二者認知地位的差異於是造成

$$ds^2 = \|dY\|^2 - \|dX\|^2 \qquad (2-2)$$

（2－2）式確立了認知空間的幾何。$ds^2 < 0$ 表示其差異是起於內在狀態；$ds^2 > 0$ 表示其差異是起於外在狀態。根據〔假設三〕，ds^2 對每一個認知系統都相同。

以上四個假設為本文所提出之認知模式，其中除了〔假設三〕為相對原理之推廣，其餘都是一般認知經驗概念化的結果。

三、主觀差異分析

主體間的主觀差異在認知過程會產生怎樣的效應？是一個有趣、有用的題目。這個問題的另一面是主體的主觀差異應該如何分析比較恰當？也就是如何分析可使所獲得的情報最為合用？根據第二節所建立的認知模式，本文對這個問題提出以下的看法。

設對認知系統K而言，客體的狀態可以用一個（n+m）維向量 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 來表示，其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 代表內在狀態成分；$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 代表外在狀態成分，可將 $(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 簡寫成（X，Y）。本文中之認知系統對認知空間之內在狀態子空間以及外在狀態子空間都採用正交座標系統以及歐氏幾何，因此

$$\|dX\|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$
$$\|dY\|^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_m^2$$

而認知空間的幾何為

$$ds^2 = \|dY\|^2 - \|dX\|^2$$

或者寫成

$$-ds^2 = (dX, dY)\, G\, (dX, dY)^T$$

其中之度規矩陣

$$G = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array}\right) \qquad (3-1)$$

I_n 為 n×n，I_m 為 m×m 之單位矩陣。由（3－1）式可以看出G之負數特徵值所對應之維度為外在狀態維度，此乃認知模式的結果，因此本模式分析的結果可助於各維度的解釋。茲先對能保持 ds^2 不變的所有座標系統加以探討，以瞭解不同的認知系統間的關係，這種關係正是主體主觀差異的起源，而這種關係的表現形式正暗示著主觀差異的分析方法。文中的變數以及常數都是實數。

〔前提一〕設P為m×n之矩陣，m≤n，P^TP 之特徵值為 $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_m^2, 0, \cdots, 0)$，則 $P = Q_m \wedge_{mn} R_n^T$，其中 Q_m 為m×m之任意化一正交矩陣，R_n 為 P^TP 之n個特徵向量，而

$$\wedge_{mn} = (\wedge_m \,\vdots\, 0)$$
$$\wedge_m = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

〔證明〕見附錄一。

〔前提二〕設Q，R為兩個n×n之化一正交矩陣，$\wedge$，Ω為兩個n×n之對角矩陣，若$Q\wedge=\Omega R$則必須

$$\wedge^2 = \Omega^2$$

且
$$Q\wedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 & & 0 \\ & \lambda_2 S_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_l S_l \end{pmatrix}$$

其中{ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ }為$\wedge$之相異特徵值，{ $S_1, S_2, \cdots, S_l$ }為任意之一群化一正交矩陣，其個別之維數與對應特徵值之重度(multiplicity)相同。

〔證明〕見附錄二。

〔前提二〕中若Q_n為n×n，R_m為m×m之化一正交矩陣，$m \leqslant n$，$\wedge_{nm} = \begin{pmatrix} \wedge_m \\ 0 \end{pmatrix}$，

$\Omega_{nm} = \begin{pmatrix} \Omega_m \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}$，若$Q_n \wedge_{nm} = \Omega_{nm} R_m$，則必

$$\wedge_m^2 = \Omega_m^2$$
$$Q_n \wedge_{nm} = \begin{pmatrix} \lambda_1 Q_1 \ddots & 0 \\ 0 & \lambda_l Q_l \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix}$$

〔定理一〕設$P = \begin{pmatrix} A_n, & B_{nm} \\ C_{mn}, & D_m \end{pmatrix}$為一個(n+m)×(n+m)之矩陣，$m \leqslant n$，而$A_n$，$B_{nm}$，$C_{mn}$，$D_m$分別為n×n，n×m，m×n，m×m之矩陣，G為(3－1)式之度規矩陣，欲$P^T GP = G$，則必須

$$A_n = Q_n \left(\begin{array}{cc:c} \sqrt{1+\lambda_1^2} \ddots & 0 & \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_l^2} & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & I \end{array}\right) R_n^T \text{ , } B_{nm} = Q_n \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 \ddots & \\ & \lambda_l S_l \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix} R_m^T$$

$$C_{mn} = Q_m \left(\begin{array}{c:c} \lambda_1 S_1^T \ddots \lambda_l S_l^T & 0 \end{array}\right) R_n^T \text{ , } D_m = Q_m \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} \ddots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_l^2} \end{pmatrix} R_m^T$$

其中Q_n，R_n為n×n之化一正交矩陣，Q_m，R_m為m×m之化一正交矩陣，S_i如〔前提二〕中之化一正交矩陣。

〔證明〕欲$P^T GP = G$，則必須

(1) $A_n^T A_n = I_n + C_{mn}^T C_{mn}$

$$(2)\ D_m^T D_m = I_m + B_{nm}^T B_{nm}$$

$$(3)\ A_n^T B_{nm} = C_{mn}^T D_m$$

但 $(A_n^T A_n)(C_{mn}^T C_{mn}) = (C_{mn}^T C_{mn})(A_n^T A_m)$

因此存在 R_n 之化一正交矩陣可同時使〔5〕

$$R_n^T C_{mn}^T C_{mn} R_n = \wedge_{mn}^T \wedge_{mn}$$

且 $$R_n^T A_n^T A_n R_n = I_n + \wedge_{mn}^T \wedge_{mn}$$

其中 $$\wedge_{mn} = (\wedge_m \,\vdots\, 0)\ ,\ \wedge_m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_l \end{pmatrix}$$

由〔前提一〕得知必須

$$A_n = Q_n(\sqrt{I_n + \wedge_{mn}^T \wedge_{mn}})\, R_n^T \qquad (3-2)$$

$$C_{mn} = E_m \wedge_{mn} R_n^T \qquad (3-3)$$

Q_n，E_m 分別為 $n \times n$，$m \times m$ 之任意化一正交矩陣。同理必須

$$D_m = Q_m(\sqrt{I_m + \Omega_m^2})\, R_m^T \qquad (3-4)$$

$$B_{nm} = F_n\, \Omega_{nm} R_m^T \qquad (3-5)$$

其中

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & w_2 & \\ 0 & & w_k \end{pmatrix}\ ,\quad \Omega_{nm} = \begin{pmatrix} \Omega_m \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

Q_m，R_m，F_n 分別為 $m\times m$，$m\times m$，$n\times n$ 之化一正交矩陣。又由(3)必須

$$\sqrt{I_n + \wedge_{mn}^T \wedge_{mn}}\ Q_n^T F_n \Omega_{nm} = \wedge_{mn}^T E_m^T Q_m \sqrt{I_m + \Omega_m^2}$$

也就是必須

$$Q_n^T F_n \Omega_{nm} (\sqrt{I_m + \Omega_m^2})^{-1} = (\sqrt{I_n + \wedge_{mn}^T \wedge_{mn}})^{-1} \wedge_{mn}^T E_m^T Q_m$$

由〔前提二〕得知欲上式成立必須

$$\Omega_m^2 = \wedge_m^2$$

且 $$Q_n^T F_n \Omega_{nm} = \wedge_{mn}^T E_m^T Q_m = \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l S_l \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}$$

將之代入（3－3）式得

$$C_{mn} = Q_m Q_m^T E_m \wedge_{mn} R_n^T = Q_m \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 S_1^T & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_l S_l^T & \end{array}\right) R_n^T$$

代入（3－5）式得

$$B_{nm} = Q_n Q_n^T F_n \Omega_{nm} R_m^T = Q_n \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l S_l \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} R_m^T$$

再代入（3－2）、（3－4）式，定理得證

〔推論〕若P如〔定理一〕，也就是

$$P=\left(\begin{array}{c|c} Q_n & 0 \\ \hline 0 & Q_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n+\Lambda_{mn}^T\Lambda_{mn}} & \Lambda_{mn}^T S_m^T \\ \hline S_m\Lambda_{mn} & \sqrt{I_m+\Lambda_m^2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_n^T & 0 \\ \hline 0 & R_m^T \end{array}\right)$$

則

$$P^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} R_n & 0 \\ \hline 0 & R_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n+\Lambda_{mn}^T\Lambda_{mn}} & -\Lambda_{mn}^T S_m^T \\ \hline -S_m\Lambda_{mn} & \sqrt{I_m+\Lambda_m^2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q_n^T & 0 \\ \hline 0 & Q_m^T \end{array}\right)$$

〔定理二〕一客體狀態對系統K而言，座標為（X，Y），對另一系統K′而言，座標為（X′，Y′）。今若（X＋dX，Y＋dY）為（X，Y）附近之狀態，其在K′中為（X′＋dX′，Y′＋dY′），則必有如〔定理一〕中之矩陣P，使

$$(dX',\ dY')=(dX,\ dY)P^T \qquad (3-6)$$

〔證明〕由〔假設三〕得知

$$-ds'^2=(dX',\ dY')G(dX',\ dY')^T=(dX,\ dY)G(dX,\ dY)^T=-ds^2$$

在（X，Y）附近可假設 $(dX',\ dY')=(dX,\ dY)H^T$

H為 $(n+m)\times(n+m)$ 之矩陣，則必須

$$H^TGH=G$$

由〔定理一〕得知必須

$$H=P$$ 定理得證。

在〔定理一〕與〔定理二〕中雖然要求 $m\leqslant n$，但當 $m>n$ 時也可以得到類似的結果。

由這兩個定理可以看出，在某一客體狀態附近，不同認知系統間的關係完全表現在矩陣P中，其中 Q_n，R_n，Q_m，R_m 諸矩陣代表內、外在狀態子空間中座標架之轉動。事實上如果要求各認知系統之座標軸都對應相平行，則 $Q_n=R_n$，$Q_m=R_m$，此時（3－6）式成為

$$(dX',\ dY')=(dX,\ dY)\left(\begin{array}{c|c} R_n & 0 \\ \hline 0 & R_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n+\Lambda_{mn}^T\Lambda_{mn}} & \Lambda_{mn}^T S_m^T \\ \hline S_m\Lambda_{mn} & \sqrt{I_m+\Lambda_m^2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} R_n^T & 0 \\ \hline 0 & R_m^T \end{array}\right)$$

或者

$$(dX'R_n,\ dY'R_m)=(dXR_n,\ dYR_m)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n+\Lambda_{mn}^T\Lambda_{mn}} & \Lambda_{mn}^T S_m^T \\ \hline S_m\Lambda_{mn} & \sqrt{I_m+\Lambda_m^2} \end{array}\right)$$

當 Λ_m 之特徵值各不相等時，$S_m=I_m$。以下的討論都在這種情況下進行，因為這是主要的情況，其它的情況也可仿照進行。當 $S_m=I_m$ 時

$$(dX'R_n,\ dY'R_m)=(dXR_n,\ dYR_m)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n+\Lambda_{mn}^T\Lambda_{mn}} & \Lambda_{mn}^T \\ \hline \Lambda_{mn} & \sqrt{I_m+\Lambda_m^2} \end{array}\right) \qquad (3-7)$$

可見若內、外在子空間的座標架分別作了 R_n 與 R_m 的轉動後，兩個認知系統間的主觀差異實際上

是表現在矩陣Λ_m之中。

其次的工作是解釋Λ_m的心理意義，進而獲得主觀差異的一種分析方法。由（3－7）式可以看出當K與K′的座標架選在適當的方向（特徵方向）時，

$$(dX', dY') = (dX, dY)\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{I_n + \Lambda_{mn}^T \Lambda_{mn}} & \Lambda_{mn}^T \\ \hline \Lambda_{mn} & \sqrt{I_m + \Lambda_m^2} \end{array}\right) \qquad (3-8)$$

為了瞭解Λ_m的意義，設想在K系統中有

$$(dX, dY) = (0, 0, \cdots 0, t, 0, \cdots 0), \quad dy_1 = t$$

的狀態改變（環境狀態改變所造成），則由（3－8）式知道在K′系統中的對應改變為

$$(dX', dY') = (\lambda_1 t, 0, \cdots, 0, \sqrt{1+\lambda_1^2}\, t, 0, \cdots, 0)$$

$$dx_1' = \lambda_1 t, \quad dy_1' = \sqrt{1+\lambda_1^2}\; t$$

這表示K認為是$dy_1 = t$所造成的狀態改變，K′認為是$dy_1' = \sqrt{1+\lambda_1^2}\; t$所造成的（伴隨著$dx_1' = \lambda_1 t$的改變）。

同樣地

$$\begin{array}{l} (\text{在特徵方向})\ dy_k = t \text{ 與 } dy_k' = \sqrt{1+\lambda_k^2} \\ (\text{以及 } dx_k' = \lambda_k t\ )\text{造成相同的狀態改變} \end{array} \qquad (3-9)$$

（3－9）式說明了Λ_m的意義，同時提供了主觀差異的分析方法，就是將K′對K的主觀差異分析為（λ_1，λ_2，$\cdots \lambda_m$）。

當K，K′之座標架不在特徵方向時，則主觀差異表現在矩陣Λ_m，R_m，R_n之中。其中R_m，R_n分別代表K與K′兩系統外在與內在之特徵方向。本文將主觀差異分析為Λ_m與傳統的做法，如Carroll - Chang二氏的幾何看法有別，這種分析的方法表現出主觀差異與環境狀態的關係，在管理科學上或許更具有應用的價值。

四、相似判斷模式

主體間的主觀差異是相似判斷中個別差異的起源。這一節將根據第二、三節的結果對相似判斷提出一個模式來說明相似判斷的運作，並指出相似判斷資料中所藏有的情報以及如何抽出這些情報的方法。

主體對一群客體作相似判斷時，一個單獨客體的外在狀態顯然與其它客體的存在有關，因此在認知空間中，各客體之間除了內在狀態不同之外，其外在狀態也可能所有不同。此外，這群客體還有一個共同的外在環境，也就是說，客體的外在狀態中有一個維度是代表共同的外在環境。

〔定義〕一群客體所共處的外在環境稱為群體環境。

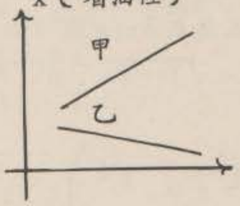
在傳統的相似判斷模式中，都把客體看成是認知空間的一點，本文的看法有些不同，其見地可以用以下的例子來說明。

〔例〕設有兩個質點，它們的其它屬性都相同（或與判斷無關），在時間t_0時，它們由相反的方向而來在空間相會（空間位置亦同）。若在t_0時對二質點作相似判斷，顯然有人會判為二個質點有差異，究其原因乃是由於二者運動之故。可見客體在認知空間不是一點，而是一段軌

跡，因此雖然是在 t_o 時作判斷，但判斷時決不是根據 t_o 時的位置，而是根據 t_o 時的「印象」，這「印象」就是存在認知空間的一段軌跡。因此「念舊型」的人根據軌跡中（$t_o-\triangle$）時的位置作判斷，而「預測型」的人根據軌跡中（$t_o+\triangle$）時的位置作判斷。顯然二者的判斷會不相同。

〔假設五〕客體在認知空間為一段軌跡，以群體環境狀態為參數。

〔例〕設有甲、乙兩種品牌的轎車，甲之省油設計優於乙，其它性能大致相同，由於二者的設計並未因石油危機而改變，因此在顧客心目中的差異愈來愈大，也就是二者在認知空間的兩段軌跡，隨著石油危機（群體環境狀態）的加深，其間的差異愈來愈大，這個差異主要發生在省油特性（內在狀態）上，如下圖所示。



〔假設六〕主體在相同的群體環境狀態下，綜合各客體的內在與外在狀態以作相似判斷。

如果認知空間的維數有四：前兩個是內在狀態維度，後兩個是外在狀態維度，第四個是群體環境狀態維度。設有K，K′ 兩個主體對 α，β，γ 三個客體作相似判斷。根據〔假設五〕，在K系統中

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), t]\\ \beta(t) &= [\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), t]\\ \gamma(t) &= [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), t]\end{aligned} \qquad (4-1)$$

根據〔假設六〕，K判斷的是 $t=t_o$ 的客體狀態：$\alpha(t_o)$，$\beta(t_o)$，$\gamma(t_o)$，其相異程度為

$$\begin{aligned}d_{\alpha\beta}^2(t_o) &= [\alpha(t_o)-\beta(t_o)]\, G\, [\alpha(t_o)-\beta(t_o)]^T\\ d_{\alpha\gamma}^2(t_o) &= [\alpha(t_o)-\gamma(t_o)]\, G\, [\alpha(t_o)-\gamma(t_o)]^T\\ d_{\beta\gamma}^2(t_o) &= [\beta(t_o)-\gamma(t_o)]\, G\, [\beta(t_o)-\gamma(t_o)]^T\end{aligned} \qquad (4-2)$$

同樣地，K′ 對 $t'=t_o'$ 的客體狀態，$\alpha'(t_o')$，$\beta'(t_o')$，$\gamma'(t_o')$ 作相似（相異）判斷得 $d'^2_{\alpha\beta}(t_o')$，$d'^2_{\alpha\gamma}(t_o')$，$d'^2_{\beta\gamma}(t_o')$。（4－1）、（4－2）式為相似判斷模式。為了瞭解相似判斷的個別差異，必須在同一系統中來說明。若在K系統中來說明，則K′ 中的 $\alpha'(t_o')$ 相當於K中的 $\alpha(t_\alpha')$，$\beta'(t_o')$ 相當於K中的 $\beta(t_\beta')$，$\gamma'(t_o')$ 相當於K中的 $\gamma(t_\gamma')$，也就是說，依K看來，自己看的是 t_o 狀態下的 $\alpha(t_o)$，$\beta(t_o)$，$\gamma(t_o)$，而K′ 看的是 t_α'，t_β'，t_γ' 狀態下的 $\alpha(t_\alpha')$，$\beta(t_\beta')$，$\gamma(t_\gamma')$。是以K與K′ 的個別差異乃藉著客體 α，β，γ 而表現於（t_o，t_o，t_o）與（t_α'，t_β'，t_γ'）之中。這個個別差異顯然與主體之主觀差異密切相關。為了說明這點，假設在衆客體的軌跡範圍內，K′ 對K之主觀差異矩陣為 $\wedge_m$，則根據前一節的結果得知

$$\begin{aligned} \alpha'(t_o') &= \alpha(t_\alpha')P^T \\ \beta'(t_o') &= \beta(t_\beta')P^T \\ \gamma'(t_o') &= \gamma(t_\gamma')P^T \end{aligned} \tag{4-3}$$

其中P與$\wedge_m$有〔定理一〕中的關係。(4－3)式表現了$(t_\alpha', t_\beta', t_\gamma')$與P的關係。

〔例〕有K，K′兩人對α，β 兩種品牌的轎車作相似判斷，設認知空間的維度有二，一為省油特性（內在），一為石油危機程度（外在），若在K看來其軌跡為

$$\alpha(t) = (2, t)$$
$$\beta(t) = (1, t)$$

因此二者差異為1，不因石油危機而改變，表示β牌車在省油設計方面不斷地接近α。若K′對K之主觀差異為$\lambda > 0$，也就是說，K認為石油危機增加1單位的結果（$dy = 1$），K′認為那是石油危機增加$\sqrt{1+\lambda^2}$單位（$dy' = \sqrt{1+\lambda^2}$，$dx' = \lambda$）的結果，顯然K′對石油危機較不敏感，這時

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda^2} & \lambda \\ \lambda & \sqrt{1+\lambda^2} \end{pmatrix}$$

因此

$$\alpha' = (2, t)P^T = (2\sqrt{1+\lambda^2} + \lambda t, \ 2\lambda + t\sqrt{1+\lambda^2})$$
$$\beta' = (1, t)P^T = (\sqrt{1+\lambda^2} + \lambda t, \ \lambda + t\sqrt{1+\lambda^2})$$

當K′作判斷時，依〔假設六〕

$$t_o' = 2\lambda + t_1\sqrt{1+\lambda^2} = \lambda + t_2\sqrt{1+\lambda^2}$$

也就是

$$t_2 - t_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

因此 $$\alpha'(t_o') - \beta'(t_o') = \alpha(t_1) - \beta(t_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} < 1 = \alpha(t_o) - \beta(t_o)$$

可見K′認為α，β之差異比K認為的要小。正與吾人經驗相合。再由$t_2 - t_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} > 0$

來分析，$t_2 > t_1$ 表示，就K看來，K′是拿t_2狀況下的β車與t_1狀況下的α車比較，由於t_1時的石油危機不如t_2時嚴重，α車之省油特性較未被重視，因此差異較小。

五、相似資料分析

由多個主體對一群客體所作的相似判斷資料中到底含有那些情報？是不是如Carroll-Chang等氏所認為，可由資料分離出客體與主體的特性？這一節對此加以說明。

設由K，K′對α，β，γ作相似判斷得$d_{\alpha\beta}$，$d_{\alpha\gamma}$，$d_{\beta\gamma}$以及$d'_{\alpha\beta}$，$d'_{\alpha\gamma}$，$d'_{\beta\gamma}$，根據〔假設六〕可以求得〔16〕某t_o上之$\alpha(t_o)$，$\beta(t_o)$，$\gamma(t_o)$使其間之差異如K所判。同理可以求得某t_o上之$\alpha'(t_o')$，$\beta'(t_o')$，$\gamma'(t_o')$使其間之差異如K′所判。又根據(4－3)式知道有如〔定理一〕之矩陣P以及t_α'，t_β'，t_γ'可使

$$\begin{aligned}\alpha'(t_o') &= \alpha(t_\alpha')P^T\\ \beta'(t_o') &= \beta(t_\beta')P^T \\ \gamma'(t_o') &= \gamma(t_\gamma')P^T\end{aligned} \qquad (4-3)$$

欲由（4－3）式解出P以及（t_α'，t_β'，t_γ'）顯然須要對$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$之軌跡有所認識。欲瞭解客體在認知空間隨群體環境的進化法則，首先注意群體環境狀態的演進有一定的次序，根據〔假設三〕，這種次序對每個認知系統都相同。

〔定理三〕設客體由（x_1，x_2，…，x_n；y_1，y_2，…，y_m）的狀態演變到（x_1+dx_1，…，x_n+dx_n；y_1+dy_1，…，y_m+dy_m）的狀態，其中y_m代表群體環境狀態，若$y_m>0$，則$ds^2=(dy_1^2+dy_2^2+\cdots+dy_m^2)-(dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2)>0$。

〔證明〕吾人只須證明$ds^2=dy_m^2-dx_m^2>0$即可。

設想另一個系統K′與原系統的主觀差異矩陣為

$$\wedge_m=\mathrm{diag}(0,0,\cdots,\lambda_m)$$

則
$$dy_m'=dy_m\sqrt{1+\lambda_m^2}\left(1+\frac{\lambda_m}{\sqrt{1+\lambda_m^2}}\frac{dx_m}{dy_m}\right)$$

由於dy_m'與dy_m同號，而$\left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{1+\lambda_m^2}}\right)^2<1$，因此$\left(\frac{dx_m}{dy_m}\right)^2<1$定理得證。

一般系統的進化往往服從某種極值原理〔7〕〔11〕，有關客體狀態之演進，本文有以下之極大原理。

〔假設七〕客體軌跡$\alpha(t)$在群體環境狀態t_o至$t_o+\triangle$之間的演進應使

$$\int_{t_o}^{t_o+\triangle} ds \text{ 為極大}$$

其中$ds=dy_m\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dy_m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dy_{m-1}}{dy_m}\right)^2-\left(\frac{dx_1}{dy_m}\right)^2-\cdots-\left(\frac{dx_n}{dy_m}\right)^2}$

y_m代表群體環境狀態。

本文分析相似資料的方法乃是根據這個原理，在（4－3）式的限制下求取P以及（t_α'，t_β'，t_γ'）使$\int_{t_1}^{t_2} ds$為極大。如此吾人一方面獲得認知系統間的主觀差異P（或$\wedge_{mn}$），同時獲得了客體軌跡$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$上兩點的情報：即$\alpha(t_o)$，$\alpha(t_\alpha')$；$\beta(t_o)$，$\beta(t_\beta')$；$\gamma(t_o)$，$\gamma(t_\gamma')$。若主體的數目增加，則可以獲得各客體軌跡上更多的情報。這種情報的另一個特色是在各客體軌跡上可以獲知各主體是根據怎樣的環境狀態認知這個客體的，也是有用的管理情報。

六、結　論

本文根據四個假設建立一個認知模式，並提出主觀差異的一種分析方法，根據另兩個假設建立了相似判斷模式，又以另一假設作為客體狀態的進化法則，而提出相似資料的一種分析方法。除了第三與第七兩個假設之外，其餘皆是認知經驗概念化的結果。而第三、第七假設是一般系統遵循的基本原理。

本文所提出的模式與分析方法的共同特點是引入環境狀態的維度，能顯示出環境狀態變化時，主體的觀點或客體的內在狀態的改變情形。這種特質的情報在管理科學上或有較適之應用。

本文所提的模式以公設為起點，逐步演繹而得出分析方法，整個理論的檢討容易進行，可以彌補緒言中所提一般學說的兩個缺陷。根據第五節中所提的分析方法以得出一種實用的算程，當具有其應有之先天優點，作者正在進行之中。將本文之概念應用於偏好判斷，亦為可以想見的發展。

文中所提之假設有待實驗證明，而對於非計量性判斷資料之處理，亦未在本文內容之中。

參考文獻

(1)吳大猷著，「相對論」，理論物理第四冊，台北：聯經出版公司，民國六十七年六月。

(2)黃俊英著，「行銷研究」，台北：華泰書局，民國六十五年。

(3) Carroll J. D. Chang J. J., " Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling, an N-way generalization of Eckart - Young Decomposition ", Psychometrica, 35, p.p 283 - 319, Sept. 1970.

(4) Carroll J. D. " Individual Differences and Multidimensional Scaling ", in R. N. Shepard, A. K. Romney and S. Nerlove (Eds.), Multidimensional Scaling: Theory and Application in the Behavioral Sciences, Vol. I, New York: Seminar Press, 1972.

(5) Hoffman K., Linear Algebra, 2nd ed., p.p 207, New Jercey: Prentice - Hall, 1971.

(6) Jumarie G., " A Relativistic Approach to Modelling Dynamic Systems Involving Human Factor ", Int. J. Systems Sci., 10, 89 - 112, 1979.

(7) Jumarie G., " The Concept of Structural Entropy and its Applications to General Systems ", Int. J. General Systems, 5, 99 - 120, 1979.

(8) Kamenskii V. S., " Methods and Models of Nonmetric Multidimensional Scaling (Survey) ", Automation and Remote Control, A translation of Avtom Telemekh., 38, 1212 - 1241, Jan. 1978.

(9) Kruskal J. B., " Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis ", Psychometrica, 29, 1 - 27 (a), 1964.

(10) Kruskal J. B., " Nonmetric multidimensional scaling: a numerical methed ", Psychometrica, 29, 28 - 42 (b), 1964.

(11) Landaw L. D. Lifshitz E. M., The classical Theory of Fields, Vol.2 of Course of Theoretical Physics, 1959.

(12) Mc Gee V. E., " Multidimensional scaling of N sets similarity measures: A nonmetric individual differences approach ", Multivariate Behavioral Research, 3, 233-248, 1968.

(13) Shepard R. N., Romney A. K. and Nerlove S. B. (Eds.), Multidimensional scal-

ing : Theory and Application in the behavioral sciences , I , New York : Seminar Press , 1972.

(14) Shepard R. N. , " The Analysis of proximities : Multidimensional scaling with an unknown distances function , I ", Psychometrica , 27 , 125 - 140 , 1962.

(15) Shepard R. N. , " The Analysis of proximities : Multidimensional scaling with an unknown distance fanction , II ", Psychometrica , 27 , 219 - 246 , 1962.

(16) Torgerson W. S. , Theory and Methods of Scaling , New York : Wiley , 1958. p.p 254 - 259.

(17) Tucker L. R. and Messick S. , " An Individual Difference Model for Multidimensional Scaling ", Psychometrica , 28 , 333 - 367 , 1963.

附錄一

〔前提一證明〕 P^TP之特徵值為（$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_m^2, 0 \cdots 0$），也就是$R_n^TP^TPR_n = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_m^2, 0, \cdots 0)$，$R_n$ 為P^TP之 n 個特徵向量，這表示 PR_n 中之前 m 行為一組正交向量（$u_1, u_2, \cdots, u_m$）

且 $$u_k^T u_k = \lambda_k^2$$

因此 $PR_n = (u_1, u_2, \cdots, u_m, 0, 0, \cdots, 0) = Q_m \wedge_{mn}$，$Q_m$ 為化一正交矩陣

故 $P = Q_m \wedge_{mn} R_n^T$，〔前提一〕得證。

附錄二

〔前提二證明〕

因 $Q\wedge = \Omega R$，故 $R^T\Omega^2R = \wedge^2$，意即$\wedge^2$ 與Ω^2 有相同之特徵值，故$\wedge^2 = \Omega^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2)$

又因$\wedge^2R = R\wedge^2$，若 $R = (r_{ij})$，則

$$\begin{cases} r_{11}\lambda_1^2 = \lambda_1^2 r_{11} \\ r_{21}\lambda_1^2 = \lambda_2^2 r_{21} \\ \quad\vdots \\ r_{n1}\lambda_1^2 = \lambda_n^2 r_{n1} \end{cases}$$

若 $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$，則 $r_{ij} = 0$

設$\wedge^2$之不等特徵值為（$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_t^2$）

則 $$\wedge^2R = \begin{pmatrix} \lambda_1^2S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_t^2S_t \end{pmatrix}$$，S_t 如〔前提二〕

故 $$Q\wedge = \Omega R = \begin{pmatrix} \lambda_1S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_tS_t \end{pmatrix}$$，〔前提二〕得證