The Journal of National Chiao Tung University
Vol. 5, July 1978
pp. 81-94

桿端荷重振動問題之幾種解法

Mathematical Methods of Solution for Rod Vibrations with End Loading

萬廸棣 Ti-Ti Wan

Department of Marine Technology, N. C. T. U.

(Received March 10, 1978)

Abstract — The behavious of the longitudinal and transverse vibrations of a rod loaded on one end were studied via two new techniques which involve the proper ways of choosing boundary conditions and change of variables. The same problem was also treated by using the Laplace transform and non-orthogonal expansions as suggested by Langer and later Churchill for Comparison. The merits of all those four methods of solutions were examined to a certain extent.

摘要：桿之一端荷重受力而振動時，其縱向及橫向之振動狀態，可用一偏微分方程式及其所附之初時及邊界值條件表示之。

當變數未能分離時，用拉普拉斯轉換法（ Laplace transform method ），不難求得其解，當變數分離時，R.E. Langer 與 R.V. Churchill ，曾用拉普拉斯轉換法，求得此方程式之非正交特徵函數（ non-Orthogonal characteristic functions ）之展開式，惟在其文獻中，未見詳解之過程，亦未提出在何條件下，可用其法解之。因此，本文之目的，一方面用常用之拉普拉斯轉換法解之，且參考R.E. Langer與R.V. Churchill 之解，解此方程式，再用格陵氏法（ Green's method ），調和分析法（ Harmonic analysis method），及另二方法解之，并在文中提出詳細之解法以探討此類方程式可用之方法。

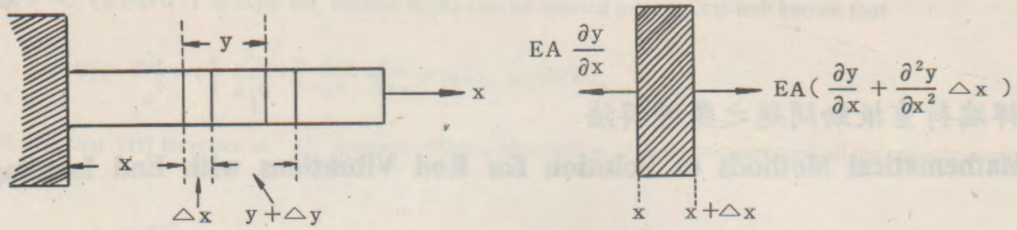
一、前　言

桿之一端荷重受力而振動時，可用一偏微分方程式及其所附之初時及邊界值條件表示之，此類方程式之求解，一般多用拉普拉斯轉換法解之， R.E. Langer 曾於 Tohoku mathematical Journal, volume（ 35 ）1932 討論過，R.V. Churchill ，亦曾於 Bulletin of the american mathematical society volume（ 48 ）1942 ，略涉及此類方程式之解法，惟在文獻中，均未詳細寫出解之過程，及在何條件下可用其法解之，因此，本文之目的，一方面用常用之拉普拉斯轉換法解之，且參考R. E. Langer 與 R.V. Churchill之解法，解此方程式，再用格陵氏，調和分析法，及另二方法解之，以探討此類方程式可用之解法。

二、桿之縱向振動 (Longitudinal vibration)

一均勻桿振動時，其位移與軸向平行，若 t 表時間，△y 與△T分別表位移 y 與單位面積上所受之拉力 T 沿軸向 x 在△x 長度內之變化，設 x 為橫坐標，如圖一所示。

則　　$T = E\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$



（圖一）

用均值定理，則 $\triangle T = \frac{\partial T}{\partial x} \triangle x = E \triangle x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\triangle y}{\triangle x} \right)$

式中E為楊氏彈性模數，力A△T作用於△x上，A為桿之橫斷面積，若作用於桿上單位質量之外力為F(x,t)，此力與桿向平行，則作用於桿上之總外力為$A\rho F(x,t)\triangle x$，此二力所生之加速度為$y_{tt}(x,t)$，按牛頓第二運動定律，可寫成

$$A\rho y_{tt}(x,t)\triangle x = AE\triangle x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right) + A\rho F(x,t)\triangle x \tag{1}$$

或用極限式表示之，為

$$ {}^{*}\, y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t) + F(x,t) \tag{2}$$

式中 $c^2 = E/\rho$ ，ρ為桿之密度。

若桿之一端夾住於 x=0 處，則

$$y(o,t) = 0 \tag{3}$$

若質量M繫縛於桿之另一端 x=a 處，則外力為$MF(a,t)$，桿所受之拉力為$AEy_x(a,t)$，則作用於M上之力為$-AEy_x(a,t)$，此二作用於M上之力使M生成一加速度$y_{tt}(a,t)$，而得

$$y_{tt}(a,t) + \frac{c^2}{b} y_x(a,t) = F(a,t) \tag{4}$$

式中 $b = M/A\rho$，若 f(x) 與 g(x) 分別為初位移及初速度，

則 $y(x,o) = f(x)$, $y_t(x,o) = g(x)$ (5)

方程式(2)，(3)，(4)，與(5)式為一具初時及邊界條件之微分方程式，惟此微分方程式之導式於 x=0 及 x=a 兩端點，幷不能確定成立。但$F(o,t)$，對桿之振動不發生作用，故可由(2)式證明 $y_{tt}(o,t) = c^2 y_{xx}(o,t)$ 成立，因此微分方程式(2)於 x=0 處能成立。而$F(a,t)$為作用M上在 x=a 處之外力，不一定在任何情況下成立，設若$F(a,t)$之力，能使(2)式成立於 x=a 處，則(4)式之條件可寫成

$$b\, y_{xx}(a,t) + y_x(a,t) = 0 \tag{6}$$

在本文中，常用(6)式代替(4)式之條件。

若$F(x,t)$，$o < x < a$，與$F(a,t)$ 均為定數，且分別設其為 C_x 與 C_a，轉換變數，

* Epstein : Partial differential equation (1962) P 13-15.

幷令

$$y(x,t) = Z(x,t) + (bc_a + ac_x)\frac{x}{c^2} - \frac{x^2}{2c^2}c_x$$

可使上述之微分方程式及其所附之條件變為

$$z_{tt}(x,t) = c^2 z_{xx}(x,t)$$

$$z(o,t) = 0$$

$$bz_{tt}(a,t) + c^2 z_x(a,t) = 0$$

$$z(x,o) = \bar{\bar{f}}(x) = f(x) - (bc_a + ac_x)\frac{x}{c^2} + \frac{x^2}{2c^2}c_x$$

$$z_t(x,o) = g(x)$$

1 拉普拉斯轉換解（ Laplace transform solution ）

用拉普拉斯轉換法所求得之解，若變數不能分離，其特徵函數，正交與否，無關緊要，因此不必用特殊方法求得非正交特徵函數之級數展開式。

用 e^{-ickt} 卽可求得其解，k之虛數部份為負值，若以常用之 e^{-pt} 代之，且設 F(x,t)為零，用(6)式之條件及令

$$z(x,k) = \int_0^\infty e^{-ickt}\, y(x,t)\,dt$$

$$h^*(x,k) = -\frac{g(x)}{c^2} - \frac{ikf(x)}{c}$$

則微分方程式及其所附之條件為

$$z_{xx}(x,t) + k^2 z(x,t) = h^*(x,k)$$

$$z(o,k) = 0$$

$$bz_{xx}(a,k) + z_x(a,k) = 0$$

其解則為

$$z(x,k) = \frac{1}{k}\int_0^x h^*(u,k)\sin k(x-u)\,du$$

$$\pm \frac{\int_0^a h^*(u,k)[\cos k(a-u) - bk\sin k(a-u)]\,du + bh^*(a,k)}{k(\cos ka - bk\sin ka)}\sin kx$$

則 e^{-ickt} 之反轉式為

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{s\to\infty}\int_{c_r-is}^{c_r+is} e^{ickt}\, z(x,k)\,d(ik)$$

$$= \frac{c}{2\pi}\lim_{s\to\infty}\int_{-s-ir}^{s-ir} e^{ickt}\, z(x,k)\,dk$$

積分之圍線為平行於實數軸且在所有異點（ Singularity ）下之直線，當半徑 R → ∞，沿 C_R 之積分收斂至 0，此處 C_R 為圓心固定於直線上，且半徑為R之上半圓，故此積分之值為全部剩餘之和，若 f(x) 與 g(x) 均為連續，則

$$* \quad \frac{e^{ickt}}{k}\int_0^x h^*(u,k)\sin k(x-u)\,du$$

與剩餘無關，故其剩餘為

$$-\frac{c}{2\pi}\times\frac{\int_0^a h^*(u,k)[\cos k(a-u)-bk\sin k(a-u)]\,du+bh^*(a,k)}{k(\cos ka-bk\sin ka)}\times e^{ickt}\sin kx$$

式中若 f(x) 與 g(x)，均為連續時，僅於分母中之零（ Zeros ）為非分析函數，其剩餘之和為

$$y(x,t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} ic\,e^{ick_nt}\sin k_n x$$

$$\times\frac{\int_0^a h^*(u,k_n)[\operatorname{con} k_n(a-u)-bh_n\sin h_n(a-u)]\,du+bh^*(a,k_n)}{k_n[a\sin k_n a+b\sin k_n a+abk_n\cos k_n a]}$$

且全部零（ Zeros ）均為實數。

若 $\cos ka-bk\sin ka=0$，寫為

$$e^{2ika}=\frac{ibk-1}{ibk+1}$$

則甚易察知其所有零（ Zeros ）均為實數。

若 $e^w=\frac{w-p}{w+p}$ 之根為虛根，p 為正數，其零（ Zeros ）均為實數。

若 $R(w)>0$，則 $|e^w|>1$， $\left|\frac{w-p}{w+p}\right|<1$

$R(w)<0$ $|e^w|<1$ $\left|\frac{w-p}{w+p}\right|>1$

上式中，在任何情況下為矛盾，因此 w 之任意根為虛數。若 k 為零（ Zeros ）則 −k 亦為零（ Zeros ），且有無限個零（ Zeros ）。且若 $k=0$，其零（ Zeros ）均為簡單（ Simple ），則 $\cos ka-bk\sin ka$ 之 k 導式可寫為

$$-(a+ab^2k^2+b)\sin ka$$

此導式之實數零（ Zeros ）均為 $\sin ka$ 之零（ Zeros ），無一零（ Zeros ）為 $\cos ka-bk\sin ka$ 之零。

設函數

$$h(u,k,t)=\frac{ic}{2k}[h^*(u,k)e^{ickt}-h^*(u,-k)e^{-ickt}]$$

$$=\frac{g(u)}{ck}\sin ckt+f(u)\cos ckt$$

* E.C. Tichmarsh. The theory of functions second edition. Oxford university press. 1939. section. 2.83.

則其解可寫成

$$y(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[\int_0^a h(u,k_n,t)\sin k_n u\,du+bh(a,k_n,t)\sin k_n a\right]\sin k_n x$$

式中之

$$c_n=\frac{1+b^2k_n^2}{a(1+b^2k_n^2)+b}$$

上式僅為函數 $\cos ka-bk\sin ka$ 正零之和，亦可另寫為

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^a h(u,k_n,t)\sin k_n u\,du+bh(a,k_n,t)\sin k_n a}{\int_0^a \sin^2 k_n u\,du+b\sin^2 k_n a}\sin k_n x$$

2. 格陵氏解 *(Green's solution)

此法為解此問題而不用特徵函數求解之正常方法，若函數 $F(x,t)$ 與 $g(x)$ 為零，則其微分方程式及其所附之條件變為

$$y_{tt}(x,t)=c^2y_{xx}(x,t)$$
$$y(o,t)=0$$
$$by_{tt}(a,t)+c^2y_x(a,t)=0$$
$$y(x,o)=f(x)$$
$$y_t(x,o)=0$$

一週期性之位移 e^{ickt} 於 z 點有一負波 $e^{i\quad -ik(z-x)}$ 向 $x=0$ 之方向波動，一正波 $e^{ickt-ik(x-z)}$ 向 $x=a$ 之方向波動，為適合此二條件，負波及其反射波應為

$$e^{ickt-ik(z-x)}\ ,\quad e^{ickt-ik(z+x)}\ ,\quad -Be^{ickt-ik(2a+z-x)}\ ,\quad Be^{ickt-ik(2a+z+x)}$$
$$B^2e^{ickt-ik(4a+z-x)}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

式中

$$B=\frac{i+bk}{i-bk}$$

正波與其反射波應為

$$e^{ickt-ik(x-z)}\ ,\quad Be^{ickt-ik(2a-x-z)}\ ,\quad -Be^{ickt-ik(2a+x-z)}$$
$$-B^2e^{ickt-ik(4a-x-z)}\ ,\quad B^2e^{ickt-ik(4a+x-z)}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$ 此式中之 B 與上者相同。

上式之數列為一幾何級數，其前後二項之比值為 $-Be^{-2ika}$ ，故其負波及其反射波之和為

$$\frac{e^{ickt-ik(z-x)}-e^{ickt-ik(z+x)}}{1+Be^{-2ika}}$$

正波之反射波之和為

$$\frac{e^{ickt-ik(-x+z)}-e^{ickt-ik(x+z)}}{1+Be^{-2ika}}\,Be^{2ik(a-z)}$$

負波及其反射波，正波之反射波通過 $x<z$ ，故其全擾動為

$$y^*=\frac{1+Be^{-2ik(a-z)}}{1+Be^{-2ika}}\left[e^{ickt-ik(z-x)}-e^{ickt-ik(z+x)}\right]$$

* George Green, Philosophical Magazine, Volume 22 (1936) . P.1079 ～ 1088.

$$= 2i \frac{\cos k(a-z) - bk\sin k(a-z)}{\cos ka - bk\sin ka} e^{ickt}\sin kx。$$

於 $x > z$，則可將上式中之 x 與 z 互換，且 y^* 在 $x=z$ 處為連續，故能適合微分方程式及其所附之邊界條件，但不能適合其初時條件。

故格陵氏以

$$\frac{1}{\pi c}\int_0^\infty y^* d(ck)$$

為瞬時之單位位移。

當 $x < z$ 時，此積分為

$$y_2 = \frac{2i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos k(a-z) - bk\sin k(a-z)}{\cos ka - bk\sin ka} e^{ickt}\sin kx\,dk。$$

此式可用複變函數積分之剩餘和求出，若再令

$$c_n = \frac{1 + b^2k_n^2}{a(1+b^2k_n^2)+b}$$

積分之值為

$$y_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n z \sin k_n x \operatorname{con} ck_n t$$

此為 $\cos ka - bk\sin ka$ 函數正零之和，此處 y_2 為 $x < z$，因 y_2 為 x 與 z 之對稱函數，故將 x 與 z 互換，即能得 z 點之單位位移，位移之分配 $f(z)$ 為：

$$y_3 = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^a f(z)\sin k_n z \sin k_n x \cos k_n t\,dz$$

M之初位移為 $f(a)$，若質量M一定，且軸之質量甚小時，此位移具較大之效應，則其有效位移須乘以 b，b 為質量M與軸單位長度質量之比值。於 $x=a$ 處之單位有效位移為

$$y_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n a \sin k_n x \operatorname{con} ck_n t$$

此式乘以 $bf(a)$ 再加上 y_3，而得

$$y(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\int_0^a f(z)\sin k_n z\,dz + bf(a)\sin k_n a\right]\sin k_n x \cos ck_n t$$

此即為微分方程式之解。亦可寫成

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a f(z)\sin k_n z\,dz + bf(a)\sin k_n a}{\int_0^a \sin^2 k_n z\,dz + b\sin^2 k_n a}\sin k_n x \cos ck_n t$$

(3)調和分析解（Harmonic analysis solution）

此法為用特徵函數求解之方法，所得之展開式，不論其為非正交性，亦可得其展開式，若用(6)式之邊界條件及當其變數能分離時，

即 $y(x,t) = X(x)T(t)$

則此問題決定其特徵函數為

$$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

$$X(o) = 0$$
$$bX''(a) + X'(a) = 0$$

此特徵函數為實函數，但不一定是正交函數；故用下式代替之。

$$\int_0^a X_m(x)X_n(x)\,dx + bX_m(a)X_n(a) = 0 \quad , \quad k_m^2 \neq k_n^2 \tag{8}$$

得其展開式*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n Z_n(x)$$

$$\int_0^a f(x)Z_n(x)\,dx + bf(a)Z_n(a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_m \left[\int_0^a Z_m(x)Z_n(x)\,dx + bZ_m(a)Z_n(a) \right]$$

$$= f_n \left[\int_0^a Z_n^2(x)\,dx + bZ_n^2(a) \right]$$

因特徵函數均為 $\sin k_n x$ ，其特徵數為標數一，而此處 k_n 均為函數 $\cos ka - bk \sin ka$ 之正零數，此所有之零均為簡單，而此零均於前節中已討論。

又
$$f_n = \frac{\int_0^a f(x)X_n(x)\,dx + bf(a)X_n(a)}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx + bX_n^2(a)} \tag{9}$$

$$= \frac{\int_0^a f(x)\sin k_n x\,dx + bf(a)\sin k_n a}{\int_0^a \sin^2 k_n x\,dx + b\sin^2 k_n a}$$

設 $T_n(t)$ 為此方程式及其所附條件之解，

$$T_n''(t) + c^2k_n^2T_n(t) = F_n(t)$$
$$T_n(o) = f_n$$
$$T_n'(o) = g_n$$

式中之 $F_n(t)$ ， f_n 與 g_n 分別為 $F(x,t)$, $f(x)$ 與 $g(x)$ ，展開式中之係數，則函數，

$$y(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)T_n(t)$$

為微分方程式之解。

函數 $T_n(t)$ 可由下式中察知

$$\frac{1}{ck}\int_0^t F_n(v)\sin ck_n(t-v)\,dv + f_n\cos ck_n t + \frac{g_n}{ck_n}\sin ck_n t.$$

因 $F_n(t)$, f_n ，與 g_n ，均由(9)式中知，故其正確解能寫成

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a h(u,k_n,t)\sin k_n u\,du + bh(a,k_n,t)\sin k_n a}{\int_0^a \sin^2 k_n u\,du + b\sin^2 k_n a}\sin k_n x$$

* R.E. Langer, Tohoku Mathematical Journal, Volume (35) 1932, P 260 ~ 275.

式中之 $h(u,k,t)=\frac{1}{ck}\int_0^t F(u,v)\sin ck(t-v)\,dv+f(u)\cos ckt+\frac{g(u)}{ck}\sin ckt$，此解之結果與前討論者相吻合。

(4)另一解法

另一解法亦可求得此微分方程式及其所附條件之解，用(6)式之邊界條件及令

$$y(x,t)=y_x(x,t)+\frac{x-a-b}{c^2}F(o,t)$$

則微分方程式及其所附之初時值及邊界條件可寫成

$$y_{tt}(x,t)=c^2y_{xx}(x,t)+F^*(x,t)$$
$$y_x(o,t)=0$$
$$by_x(a,t)+y(a,t)=0$$
$$y(x,o)=f^*(x)$$
$$y_t(x,o)=g^*(x)$$

此處之特徵函數為正交函數。

同理，若方程式

$$P'(x)R^2-P''(x)R+q'(x)=0$$

有一根 $R\neq 0$，在 (a,b) 中與 x 無關，且亦為下列二方程式之根。

$$A_2R^2-A_1R+A_0=0$$
$$B_2R^2-B_1R+B_0=0$$

變換變數

$$Y(x)=X'(x)+RX(x)$$

使上列之式變為

$$P(x)X''(x)+P'(x)X'(x)+[q(x)+k]X(x)=0$$
$$A_0X(a)+A_1X'(a)+A_2X''(a)=0$$
$$B_0X(b)+B_1X'(b)+B_2X''(b)=0$$

由(8)式用部份積分法積分之。

$$\int_0^a X_m'(x)X_n'(x)\,dx=k_n^2\left[\int_0^a X_m(x)X_n(x)\,dx+bX_m(a)X_n(a)\right]=0$$

設 $k_m^2\neq k_n^2$，則能證明其正交性。

若 $f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_n'X_n'(x)$

部份積分之，則得正交級數係數，

$$f_n'=\frac{\int_0^a f'X_n'\,dx}{\int_0^a X_n'^2\,dx}$$

$$=\frac{\int_0^a[f(x)-f(o)]X_n(x)\,dx+b[f(a)-f(o)]X_n(a)}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx+bX_n^2(a)} \tag{10}$$

則 $\quad {}^{*}f(x)=f(o)+\sum_{n=1}^{\infty} f_n' X_n(x)$

此解與上列之解亦相吻合。

若 $f'(x)$ 為有界函數與在 (0,a) 之間任意點均存在，即可證明上述之積分，可分項積分之。

又設 $\quad \int_0^a f(x)X_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a f_m X_m(x)X_n(x)\,dx$

用此假設，部份積分之，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_m\int_0^a X_m' X_n'\,dx$$

$$=k_n^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a f_m X_m X_n\,dx+k_n^2\,bX_n(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_m X_n(a)=k_n^2\left[\int_0^a f(x)X_n(x)\,dx+bf(a)X_n(a)\right]$$

式用其正交性，部份積分之

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_m\int_0^a X_m' X_n'\,dx$$

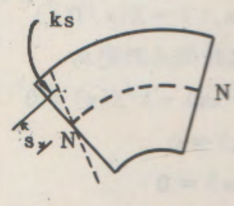
$$=f_n\int_0^a X_n'^2(x)\,dx+f_n k_n^2\left[\int_0^a X_n^2(x)\,dx+bX_n^2(a)\right]$$

將此二式等之，解 f_n，即可得與前述相同之結果。

三、桿之橫向振動(Transverse vibration)

桿之橫向振動，其振動之位移 $u(x,t)$ 平行一平面，桿上任意一點由於彎曲之伸長為 ks，k 為彎曲之曲率，s 為桿上任意點至中性面間之距離，如圖二所示。故加於橫斷面之微面積 dA 上之力為 EksdA，及 A 面積上之力矩為

$Ek\int_A s^2 dA=EkJ^2$，式中 $J^2=\int_A s^2 dA$ 即面積 A 之迴轉半徑平方。



（圖二）

沿軸向力矩之變化，使桿拉直。因此，生成一負方向力 F^*。

$$F^*=-(EkJ^2)_x=-EJ^2k_x=-EJ^2u_{xxx}(x,t)$$

位移 y 甚小時，曲率半徑 k 甚接近 $u_{xx}(x,t)$；則作用桿上長度為 $\triangle x$ 之力為

$$\triangle F^*=F_x^*\triangle x=-EJ^2u_{xxxx}(x,t)\triangle x\text{。}$$

若作用於單位質量上之外力 $F(x,t)$ 幾與位移平行時，ρ 為軸之密度，則亦有一力 $A\rho F(x,t)\triangle x$ 作用於 $\triangle x$ 上，此二力生成一加速度 $y_{tt}(x,t)$，依牛頓第二定律，得

$$u_{tt}(x,t)+c^2u_{xxxx}(x,t)=F(x,t)$$

式中 $c^2=EJ^2/A\rho$

* R.V. Churchill, Bulletin of the American Mathematic.society, Volume (48) 1942, P. 143 ~ 149、

若軸之一端於 $x=0$ 處夾住，

$$u(o,t)=0\,,\qquad u_r(o,t)=0 \tag{12}$$

若一質量M緊縛於桿之另一端 $x=a$ 處，由桿作用之力為 $-EJ^2u_{xxx}(x,t)$ ，及外力 $MF(a,t)$，此二力產生一加速度 $u_{tt}(a,t)$

$$u_{tt}(a,t)+\frac{c^2}{b}u_{xxx}(a,t)=F(a,t) \tag{13}$$

式中

$$b=\frac{MC^2}{EJ^2}=\frac{M}{A\rho}$$

於 $x=a$ 處之力矩為 $EJ^2u_{xx}(a,t)$，因此，質量M之轉動慣量不計，

$$u_{xx}(a,t)=0 \tag{14}$$

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 分別表初位移及初速度，則

$$u(x,o)=f(x)\quad,\qquad u_t(x,o)=g(x) \tag{15}$$

上列之微分方程式及其所附之條件即為一具初時值及邊界值之待解方程式。此導式並不能保證微分方程式(11)於 $x=0$ 及 $x=a$ 處成立。又 $F(o,t)$ 對軸之振動不生作用，但 $u_{tt}(o,t)+c^2u_{xxxx}(o,t)$ 能存在，故此式於 $x=0$ 成立。但 $F(a,t)$ 為作用於質量M上之外力，故不能任意存在。

下述所求得之解，為假設 $F(a,t)$ 當 $x=a$ 處，方程式(11)成立，如此則可使邊界條件(13)式寫成

$$bu_{xxxx}(a,t)-u_{xxx}(a,t)=0 \tag{16}$$

(5)調和分析解 (Harmonic analysis solution)

用邊界條件(16)式，且設

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

決定上列式之特徵函數變為

$$\begin{aligned}&X^{(4)}(x)-k^2X(x)=0\\&X(o)=0\\&X'(o)=0\\&X''(a)=0\\&bX^{(4)}(a)-X^{(3)}(a)=0\end{aligned} \tag{17}$$

此特徵函數均非正交函數，而替以

$$\int_0^a X_m(x)X_n(x)\,dx-bX_m(a)X_n(a)=0\qquad k_m^4\neq k_n^4 \tag{18}$$

在下節中將能證明特徵值均為實數，且用前述之方法甚易求得特徵函數之展開式，

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_mX_m(x)$$

$$\int_0^a f(x)X_n(x)\,dx-bf(a)X_n(a)=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}f_m\Big[\int_0^a X_m(x)X_n(x)\,dx-bX_m(a)X_n(a)\Big]=f_n\Big[\int_0^a X_n^2(x)\,dx-bX_n^2(a)\Big]$$

f_n 之係數為

$$k_n^{-4}\int_0^a X_n''^2(x)\,dx$$ ，且不會為零。

因此

$$f_n=\frac{\int_0^a f(x)X_n(x)\,dx-bf(a)X_n(a)}{\int_0^a X_n^2(x)\,dx-bX_n^2(a)}$$

又若 $T_n(t)$ 為下列方程式組之解，

$$T_n''(t)+c^2k_n^4T_n(t)=F_n(t)$$

$$T_n(o)=f_n\,,\quad T_n'(o)=g_n$$

式中 $F_n(t)$，f_n 與 g_n 分別為 $F(x,t)$，$f(x)$ 與 $g(x)$ 特徵函數展開式中之係數，則函數

$$u(x,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\,T_n(t)$$

為具初時及邊界值問題之正式解。

(6)另二解法

用(16)式之邊界條件并設

$$u(x,t)=u_x(x,t)-\frac{1}{c^2}\left[\frac{(x-a)^3+a^3}{6}+\frac{b(x-a)^2-ba^2}{2}\right]F(o,t)$$

$$Z(x,t)=u_{xx}(x,t)-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^2-a^2}{2}+(a-x)(a-b)\right]F(o,t)$$

$$-\frac{1}{c^2}\left[\frac{x^3-a^3}{6}+(a-x)\left(\frac{1}{2}a^2-ab\right)\right]F_x(o,t)$$

則具初時值及邊界值問題能寫成下列之形式

$$u_{tt}(x,t)+c^2y_{xxxx}(x,t)=F_2(x,t)$$

$$u(o,t)=0$$

$$u_{xxx}(o,t)=0$$

$$u_x(a,t)=0$$

$$bu_{xxx}(a,t)-y_{xx}(a,t)=0$$

$$u(x,o)=f_2(x)$$

$$u_t(x,o)=g_2(x)$$

....

$$z_{tt}(x,t)+c^2z_{xxx}(x,t)=F_3(x,t)$$

$$z_{xx}(o,t)=0$$

$$z_{xxx}(o,t)=0$$

$$z(a,t)=0$$

$$bz_{xx}(a,t)-z_x(a,t)=0$$

$$z(x,o)=f_3(x)$$

$$z_t(x,o)=g_3(x)$$

第一組之特徵函數至其第二次導式均為雙正交，第二組之特徵函數為正交函數，此即為特徵函數之第一及第三次導式為雙正交，特徵函數之第二次導式為正交，因此可用(18)式，部份積分之得

$$\int_0^a X_m'' X_n'' \, dx = -\int_0^a X_m'' X_n''' \, dx$$

$$= k^4 \left[\int_0^a X_m X_n \, dx - b X_m(a) X_n(a) \right] = 0$$

式中 $k_m^4 \neq k_n^4$

特徵數 k^4 均為實數，因為若不相等之共軛數與函數均用於方程式

$$(k_m^4 - k_n^4) \int_0^a X_m''(x) X_n''(x) \, dx = 0$$

則得一矛盾之結果，而且能證明其特徵數之特徵矩陣為三秩矩陣。四函數 sin kx , cos kx , sin hkx cos hkx ，組成一微分方程式(17)之綫性獨立解，此函數之特徵矩陣之前三列為

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & k & 0 \\ -k^2 \sin ka & -k^2 \cos ka & k^2 \sinh ka & k^2 \cosh ka \end{matrix}$$

前三行組成之行列式之值為 $-k^3(\sin ka + \sinh ka)$，後三行組成行列式之值為 $k^3(\cos ka + \cosh ka)$。$k = 0$ 不是特徵數，k 之值應適合上列二方程式，即

$$\sin ka + \sinh ka = 0 \quad , \quad 或 \quad \sin ka = -\sinh ka$$

$$\cos ka + \cosh ka = 0 \quad , \quad 或 \quad \cos ka = -\cosh ka$$

但無此值能適合其式，故所有特徵數之矩陣為三秩矩陣。

若 k 為下方程式之根

$$G(k) = bk(\sin ka \cosh ka - \cos ka \sinh ka) + (1 + \cos ka \cosh ka) = 0$$

則函數

$$X(x) = (\sin kx - \sinh kx)(\cos ka + \cosh ka) - (\cos kx - \cosh kx)(\sin ka + \sinh ka)$$

具特徵數 k^4 之特徵函數，且所有之特徵函數均可表示出。此四根 k , ik , -k 與 -ik ，有相同之特徵函數，因為特徵數 k^4 必為實數，任何根之形或為 k 式 $(1+i)k'$, k 與 k' 均為正數。

當 n 夠大時，因 G(k) 於 $k = \dfrac{2n\pi}{a}$ 與 $k = \dfrac{(2n + \frac{1}{2})\pi}{a}$ 之間變號，故有無限個不等根 k 。

k' 為 $H(k') = bk'(\sin 2k'a - \sinh 2k'a) + (\cos^2 k'a + \cosh^2 k'a) = 0$

特徵函數若用 k' 代入，則

$$X(x) = (\cos k'x \sinh k'x - \sin k'x \cosh k'x) \cos k'a \cosh k'a + \sin k'x \sinh k'x (\sin k'a \cosh k'a + \cos k'a \sinh k'a).$$

因 $\lim\limits_{k' \to \infty} H(k') = -\infty$

故其根之數有一定之個數，又因 $H(o) = +2$ ，則至少有一根。H函數之導函數為

$$H'(k') = 2abk' \left[\cos 2k'a - \cosh 2k'a \right] + (b - a)(\sin 2k'a - \sinh 2k'a)$$

若質量M較軸之質量 $Aa\rho$ 為大時，卽（b－a）為正，k′ 為正數時，則函數 H(k′) 為單調函數（monotonic），故僅有一正根 k′。

若 $$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n' X_n'(x)$$

可用部份積分法求雙正交級數之係數。

$$f_n' = \frac{\int_0^a f' X_n''' \, dx}{\int_0^a X_n' X_n''' \, dx} = \frac{\int_0^a [f(x) - f(o)] X_n(x) \, dx - b[f(a) - f(o)] X_n(a)}{\int_0^a X_n^2(x) \, dx - bX_n^2(a)}$$

則得

$$f(x) = f(o) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n' X_n(x)$$

此所得之結果與前述所得者相吻合。

展開式

$$f''(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n'' X_n''(x)$$

$$f_n'' = \frac{\int_0^a f''(x) X_n''(x) \, dx}{\int_0^a X_n''(x) \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a [f(x) - f(o) - x f'(o)] X_n(x) \, dx - b[f(a) - f(o) - af'(o)] X_n(a)}{\int_0^a X_n^2(x) \, dx - bX_n^2(a)}$$

則

$$f(x) = f(o) + f'(o) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'' X_n(x)$$

上列係數之求得不必假定 $f'(x)$ 或 $f''(x)$ 之存在，可分別用

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_m \int_0^a X_m'(x) X_n'''(x) \, dx$$

及 $$\sum_{n=1}^{\infty} f_m \int_0^a X_m''(x) X_n''(x) \, dx$$

求之，惟後者須部份積分二次。

四、結　論

(1)就以上之多種解法觀之，其特徵函數之導函數為正交函數或雙正交函數，用 R.E. Langer 之解法，甚易求得其解之展開式，且此展開式之收歛性甚易證明。

(2)若用 Langer 之解法，不適用此類方程式之通式，此法可用於熱傳學之固體與液體界面間之熱流問題。

(3)調和分析法，用於在變數能分離時，其特徵函數為非正交函數，此法用於解此類方程式，較為簡單，惟缺乏一般性。

(4)所用之另二解法，其特徵函數為正交函數或雙正交函數，且其特徵數均為實數，及所得之特徵矩陣為較簡之三秩矩陣，在運算過程中較為簡易。

參考文獻

Epstein : Partial Differential equation (1962)頁次13--15

Hellwig : Partial Differential equation (1964)頁次244--249

I.E.C. Titchmarsh : Theory of functions 2 edition, Oxford University Press, 1939, section 2.83

George Green : Philosophical Magazine, Volume 22 (1936)頁次1079--1088

R.E. Langer : Tohoku Mathematical Journal, Volume 35 (1932)頁次260--275

R.V. Churchill : Bulletin of the American Mathematical society, Volume 48 (1942)頁次143--149