

只有詠唱才能學會詠唱（上）

悼威廉·瑟斯頓（1946~2012）

作者：噶拜（David Gabai）與 科寇夫（Steve Kerckhoff）聯合編輯 譯者：翁秉仁

作者 | 噶拜現為普林斯頓大學教授。

簡介 | 科寇夫現為史丹福大學教授。

瑟

斯頓（William Paul Thurston，大家都叫他比爾）是一位卓越的數學家，他的工作和思想徹底改變許多數學領域的風貌，包括葉層論（foliation）、泰希穆勒理論（Teichmüller theory）、曲面自同構（automorphism）、三維拓樸、接觸結構（contact structure）、雙曲幾何、有理映射、圓裝填（circle packing）、不可壓縮曲面（incompressible surface）、三維流形之幾何化等等。

瑟斯頓的影響遠遠超過他曾提出的傑出洞見、定理或猜想。比爾改變了人們思考與看待事物的方式，大方分享他那種好玩、很奇特、近似魔術，有時又顯得雜沓的數學思路。事實上，他在 **MathOverflow** ² 的自我簡介中這麼寫著：「做數學是一種充滿堅忍、專注不捨，針對混淆與困惑的迷霧，最終能突破釐清的過程。我樂於承認（至少就我個人）自己的思考混亂，嘗試去克服可能看來無知或迷惑的窘態。許多年來，這讓我能逐漸釐清某些物事，儘管還有許多東西讓我混淆如昔。我喜歡誠實的問題，即使它包含或顯示出混亂的模樣，遠勝過那些看起來就是為了精巧而設計過的問題。」

瑟斯頓的研究不只緊密包藏著美好的想法，同時也十分豐富而深邃。從某個角度切入研讀他的工作，就像打開箱子後卻發現裡面還有兩個以上的箱子；打開一個個箱子，裡面又會出現更多的箱子，而且箱中經常有小通道連接到各式各樣的不同箱子系統。當我們費盡全力到達終點時，便能領受到美好的感悟，同時也意識到自己的發現終歸只是整體的一小部分。經過夠長的時間，當我們又回到原先出發的小徑，竟然能夠在自己曾經認定已經完全理解的課



瑟斯頓。（感謝 K. Delp 提供）

題上，重新取得更深入的洞識。

類似的，對於瑟斯頓這個深刻又複雜的人物，這篇文章實在很難公平的描述他的全貌。文中只能從他多重向度的人生，點提部分故事，擷取片段光景，然後在文章角落，為感興趣的讀者指引更多有關的閱讀材料。

本文在瑟斯頓簡單的生平介紹之後，是 13 位數學家的追思文章，他們的文字連結到比爾專業職涯的各種不同向度。認識到比爾曾經以如此不同和深刻的方式影響到這麼多的個人與機構，實在很難不折服。

家庭

比爾的父親保羅·瑟斯頓（Paul Thurston）是物理學博士，後來任職於貝爾實驗室從物理與工程研究 ³。他擅長構建東西，是一個自信、聰穎、有想像力又精力無窮的人。他曾經向比爾展示如何赤手

¹ 若未特別說明，本文所附照片都來自瑞秋·芬德里（Rachel Findley）。

² 譯註：MathOverflow 是一個屬於數學社群的數學問題交流平台，於 2009 年開設。

³ 譯註：正確的說，他應該是任職於美國海軍武器實驗室（Naval Ordnance Laboratory）彈道計畫部門。

讓水沸騰：他在水面上啟動常見的地下室真空幫浦，讓水的沸點降到正好高過當時的氣溫，然後他把手放入水中，水就開始沸騰了！

比爾的母親瑪格麗特（Margaret，原姓Martt）是一位專業裁縫，可以剪裁出讓保羅和比爾百思不得其



瑟斯頓的母親瑪格麗特與她的作品。

解的精妙圖樣。由於比爾後來醉心於雙曲幾何，這也為瑪格麗特帶來靈感，縫出一件雙曲帽裙、一個七色環面，以及比爾和他的兩個兒子納塔尼耳（Nathaniel）和戴倫（Dylan）發想設計的一個用24片七邊形製成的克萊恩四次曲面（虧格三，具有168

階對稱群）。她在俄亥俄衛斯理大學讀書時曾經想主修數學，但當時別人告訴她沒有女人主修數學，她才打消主意。

比爾的名字取自他的父親（Paul），以及死於硫磺島戰役醫療船上的舅舅（William）。他有一個哥哥羅伯特（Robert）、一個姐姐琴（Jean）和一個弟弟喬治（George）；喬治的妻子莎拉（Sarah）是數學家惠特尼（Hassler Whitney）的女兒。

比爾的第一任妻子瑞秋·芬德里（Rachel Findley）是他的大學戀人，他們有三個小孩納塔尼耳、戴倫和艾蜜莉（Emily）。他和第二任太太茱莉安（Julian Thurston）生了兩個小孩嘉德（Jade）和連恩（Liam）。

童年

比爾患有先天斜視，雙眼不能對焦，無法感受景深，因此很難像一般人從兩個二維圖像構造出三維圖像。比爾兩歲時，他的母親就得花幾小時陪他

閱視特殊的顏色書。比爾對模式的喜愛至少可以追溯到這個時間點。他在小一時決定要「每天鍛鍊視覺。」別人問他怎麼能看到四維或五維的圖像，他說這就像三維一樣，都是從兩個二維投影圖建立起來的。為了停止兄弟間的吵



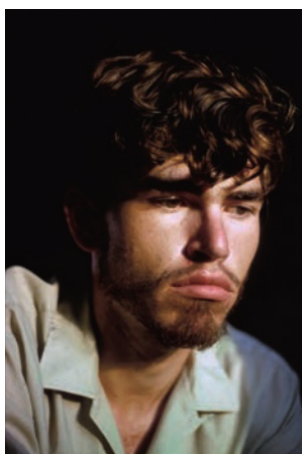
瑟斯頓六歲攝於馬里蘭州惠頓郡（Wheaton）。

鬧，他們父親會問小孩數學題。有次他開車時，問當時五歲的比爾「 $1 + 2 + \dots + 100$ 是多少？」比爾回答「5,000」。保羅說：「很接近了。」比爾說：「唔，一個正方形是1，兩個正方形是2，這樣擺了100個，所以就是 $100 \times 100 = 10,000$ 的一半，我忘了中間的正方形都被切掉半個，所以應該是5,050。」

因為比爾的父親是童子軍團長，所以比爾也參與很多童軍活動，他們用繩索製作過許多東西如橋樑。比爾很擅長在大雨中生火。他們全家人都熱愛露營，做過許多次長途旅行，生活中充滿了音樂。

佛羅里達新學院

比爾是1964年佛羅里達新學院（New College）



比爾攝於新學院。

的首屆生⁴，根據數學家也是校友的史密利（John Smillie）所言，新學院的擘建者認為保持品質遠比培育品質容易，因此他們花了很多

⁴ [譯註] 佛羅里達新學院1964年的第一屆在美國是有名的實驗教育，當年招收101名學生。其新教育方式甚至吸引知名歷史學家湯恩比加入教師陣容。

心血，在第一屆招收了百名左右最聰明的年輕人，其中包括了比爾未來的妻子瑞秋。

新學院的課程為期三年，每學年上課 11 個月。學生想要如何制訂個人學習計劃或日常生活規範，都有非常大的自由。比爾就曾經斷斷續續住在附近森林裡的帳篷內，或者就睡在教學大樓內和守衛捉迷藏。學校的圖書館雖然很小，但只要比爾需要什麼數學書，他們就會幫他購買。史密利說他借的書上幾乎都有比爾的簽名。

比爾曾經說過：「我猜我是對高中生活不滿，想要找一個地方，能享有更多自由可以用自己的方式工作。」新學院能給他的更多。第一年之後，的教師辭職，圖書館瀕臨崩解。但是比爾說他和許多同學因為這場混亂而受惠，他說：「這確實教導我們如何獨立，以及如何為自己思考。」⁵ 瑞秋說比爾本來在兩年之後就可以去讀研究所，但是他實在太喜愛學校的獨立性，所以選擇留下來。

柏克萊

比爾在越戰正熾熱的 1967 年進入柏克萊就讀，他在一篇文章中說過：「我們很多人都捲入學生示威與罷課。不論我們抗議與否，都被噴過催淚瓦斯。我們有朋友被殺，拒絕徵召的則被判重刑。……」⁶

比爾終其一生關心軍事議題，尤其是與他專業生活有關的部分。例如 1984 年他拒絕成為普林斯頓大學第一任費爾柴講座教授（Fairchild Professor）的邀約，只因為捐款人曾經牽涉到軍事合約的生意。

比爾曾經參加一個抗議數學家接受軍事合同的委員會，他們為美國數學學會（AMS）草擬了與此相關的五項解決方案，每一項都獲得大多數會員的贊同⁷。（參見本文艾普斯坦〔David Epstein〕的段落。）

在柏克萊的早期，比爾的家庭成員擴張了。瑞秋說他們因為避免比爾被徵召，因此生下了納塔尼耳。

她在比爾論文考試的前一晚還得去工作，考試無法因為育嬰的理由更改時間。雖然比爾還是通過考試，但過程並不順利，他的答案讓口試委員很困惑，但是其中的提示又充滿他思考的傑出原創性。

比爾在研究所時期便獲得一系列非凡的數學研究成果。他驚人的證明了葛比倫/威不變量（Godbillon-Vey invariant）的值有不可數無窮多個。這個不變量來自某個狄拉姆上同調類（de Rham cohomology class），比爾將它連結到葉層結構（foliation）中葉層的螺旋晃動（helical wobble）。他的研究顯示，在三維球面上具有不可數無窮多的不共邊（noncobordant）餘維一葉層結構。

比爾在赫許（Morris Hirsch）指導之下寫的博士論文（未曾發表）中，具體描述了一大類三維流形的 C^2 葉層結構，這些結構都是圓叢（circle bundle）。論文中也對諾威柯夫（Sergei P. Novikov）一項關於某具有偏序葉層結構存在最大值的結果提出反例。不過，超越任何單一定理證明之上的是，比爾在這段時期提出一籬筐基礎概念，日後將協助解答很多關於葉層結構的基本問題，並且最終引領他完成曲面與三維流形的革命性研究。

高等研究院和麻省理工

比爾 1972~73 年曾在普林斯頓高等研究院進修，1973~74 年轉任麻省理工學院的助理教授。這段時間他持續進行葉層結構的傑出研究，也因此與西蒙斯（James Simons）合得 1976 年的威布倫獎（Veblen Prize）。值得一談的是，比爾在這段時間開始和米爾諾（John Milnor）探討區間上逐段遞增

⁵ Home News, Lifestyle section, December 30, 1984。

⁶ “Military funding in mathematics”, *Notices of the AMS* 34 (1987), 39–44。

⁷ 參見“Commentary on defense spending”, *Notices of the AMS* 35 (1988), 35–37；以及“Referendum results and letter”, *Notices of the AMS* 35 (1988), 554, 675。

映射的揉捏不變量 (kneading invariant)。比爾對一維 (無論實數或複數) 動力系統的興趣延伸到整個研究生涯, 影響他的二維與三維流形研究, 並且在人生最後數年, 再度返回這項課題。

普林斯頓

1974年, 比爾到普林斯頓大學擔任正教授, 時間長達約20年, 在這裡他完成了革命性也是基礎性的研究: 包括泰希穆勒理論、曲面自同構、雙曲幾何、三維流形、接觸結構以及有理映射。

在這段時期裡, 瑟斯頓最引人注目的面向, 是他如何將本來被認為迥異的多種數學類型編織在一起, 並以令人震撼的原創手法運用它們。例如他對曲面自同構映射類 (mapping class) 的分類就使用了底下這些領域的概念: 拓樸、雙曲幾何、複分析、泰希穆勒理論、動力系統、遍歷論 (ergodic theory)。

繼這項研究之後, 比爾以雙曲幾何為主要工具, 大爆發似的獲得許多三維拓樸的結果。這些結果完全改變了這項主題周遭的地貌。比爾1978年的雙曲幾何課程講義 (部分由弗洛德 [Bill Floyd] 和科寇夫 [Steve Kerckhoff] 編寫) 必須分批以普通郵件寄給逾千名數學家。「這套講義瞬即傳遍全世界, 或許所有低維拓樸的數學家都認為講義中的概念, 是這個領域著作中前所未見最重要與最有影響力的想法。」⁸

比爾這部著作的觀點濃縮在他的幾何化猜想內, 也就是所有封閉可賦向的三維流形, 都可以被分解成已知古典幾何的某種組合, 每一部分具有八種齊性賦距幾何 (homogeneous metric geometry) 結構中的一種。雖然這個猜想以截然不同的觀點看待三維流形, 卻囊括了這個領域許多懸而未決的猜想, 包括三維流形的龐卡赫猜想 (Poincaré Conjecture)、球空間形式 (spherical space form) 問題、基本群為

剩餘有限群 (residual finiteness) 問題、萬有覆蓋 (universal covering) 分類問題等。比爾在一大類流形 (哈肯流形 [Haken manifold]) 上證明了這個猜想。1982年, 比爾在《美國數學學會學報》 (AMS Bulletin) 上發表一篇文章, 綜述了他對三維流形的看法, 其中包括24個未解問題。雖然比爾並不認為數學相當於一系列未解問題, 但他提的這些問題獲得相當多關注, 協助這個領域聚焦了未來30年的研究路線。請參閱瑟斯頓數學研究闡述[7], 一睹這些問題至2013年時的進展。

比爾普林斯頓時期的研究, 還包括二維球面有理映射理論的重要貢獻, 其中運用了他在克萊恩群 (Kleinian group) 以及早期曲面論的想法。另外不論是在實用上或理論上, 比爾對計算理論與群論都深感興趣, 這引領他和加農 (James Cannon)、艾普斯坦等人完成群論字處理 (word processing) 問題上的自動群 (automatic group) 理論。在這段時期裡, 比爾泉湧而出的想法至為重要, 可惜限於篇幅, 我們無法在此合宜的記述。

1979年, 比爾因為「在葉層論、函數論與拓樸上引入革命性新幾何方法的成就」獲頒瓦特曼獎 (Waterman Prize)。1982年, 他獲得費爾茲獎, 隔年被選為美國國家科學院院士。

瑟斯頓對於他的時間和點子通常都很慷慨, 他在普林斯頓時期一共收了29位博士生, 這些學生到今天筆者落筆時, 又總共有151位畢業的學生。除此之外, 他影響了諸多到普林斯頓大學和高等研究院的訪問學者。他在系上也是社交的中心, 經常在數學系茶會之後, 拿出他的排球網, 打幾場即興的排球賽。

除了在數學研究上的非凡廣度之外, 比爾在思考數學與做數學的方式上也頗有影響。他對於做數

⁸ A. Papadopoulos, MR1435975 (97m:57016) review of *Three-Dimensional Geometry and Topology* .

學的過程以及交流數學的方法都曾深入思考。比爾的教育熱情很有感染力，而他誠然獨一無二的觀點，提供一般大眾許多把數學納入日常生活的新渠道。

電腦

比爾是最早在數學研究中積極使用電腦的純數學家之一，而且他也是在數學社群內全方位運用計算的強烈支持者。1970年代晚期，他就啟發威克斯（Jeff Weeks）去發展SnapPea程式，可以計算和視覺化雙曲結構。這個程式以及後來的版本如庫勒（Marc Culler）與丹菲爾德（Nathan Dunfield）的SnapPy；古德曼（Oliver Goodman）、赫吉森（Craig Hodgson）、紐曼（Walter Neumann）相關發展的Snap，都是任何人想在這個領域做研究的必備工具。威克斯本人就運用這個程式，發現了現在所謂的威克斯流形。⁹

根據馬爾登（Albert Marden）所言，比爾是「幾何超級電腦計畫」（Geometry Supercomputer Project）與「幾何中心」（Geometry Center）擊建與各項活動背後的智識支持力量，這是兩個美國國科會支持並集中在明尼蘇達大學執行的研究計畫，馬爾登則是首位主任。在眾多業務之中，這些計畫聯合



瑟斯頓與韋頓攝於瓦特曼獎授獎儀式。

製作了兩支美妙的影片：《非結》（Not Knot）與《翻轉》（Outside In）。《非結》是一段瀏覽比爾發現的雙曲世界的電腦動畫之旅，其中一部份甚至出現在搖滾樂團「死之華」（Grateful Dead）的音樂會上¹⁰。《翻轉》是一支獲得許多獎項的錄影帶，內容呈現比爾對球面翻轉的證明，這個不可思議的結果最先是史梅爾（Steven Smale）在1957年證明的。

當噶拜和梅爾霍夫（Robert Meyerhoff）的研究需要高端電腦技術時，他們在幾何中心找到支援。這導致他們和納塔尼耳（比爾的兒子）完成了 $(\log 3)/2$ 定理的電腦輔助證明，聰明的納塔尼耳當時在幾何中心當助手，澈底運用了中心電腦資源。這項結果後來在證明其他重要定理時扮演要角，例如雙曲三維流形的史梅爾猜想，以及封閉可賦向雙曲三維流形中體積最小的唯一流形是威克斯流形。

數學教育

比爾對於教育總是很感興趣。他和新學院的同學（包括瑞秋）曾經為數學落後的學生當數學家教。在柏克萊時，比爾是協助改革助教系統的學生委員會一員，他曾經寫道：「我幫忙組織一個針對新助教的計畫，包括討論群以及班級互訪。我所觀察到的助教群似乎保持著許多熱情教學的初衷，這在新助教身上很常見，資深助教則往往喪失這樣的心情。」¹¹

比爾的小孩就讀於普林斯頓的公立小學，每年在學校的科學日活動，他會去教個「一兩樣東西」。他說：「看到小孩這麼開放實在讓人欣喜，大人或許會覺得異常或陌生的東西，他們卻學習得很快。當你

⁹ 弗門科（A. Fomenko）和馬特威夫（S. Matveev）團隊以及波修特斯基（Józef Przytycki）都各自發現了威克斯流形。

¹⁰ *Scientific American*, October 1993, p. 101。

¹¹ 瑟斯頓從柏克萊寄往普林斯頓的申請信。

解釋這類東西給大人聽時，他們往往掉頭就走。」¹²

在普林斯頓，他和康威（John Conway）、多伊爾（Peter Doyle）設計了一門很有創意的大學部課程「幾何與想像」（Geometry and the Imagination），後來他也在明尼蘇達幾何中心與加州大學戴維斯分校上過這門課。

想數學、做數學

每一位數學系學生都應該閱讀瑟斯頓開闊而深思的文章〈論證明與數學的進展〉（On proof and progress in mathematics）¹³。在文章中比爾問讀者，數學家要如何增進人類對數學的理解？附帶的問題是，我們如何理解與溝通數學？我們有何動機要這樣做？證明是什麼？比爾以他的個人經驗為文章做總結，談到他的葉層結構、雙曲幾何以及幾何化猜想的研究。除此之外，他討論了專家如何把新成果傳達給其他專家，以及至少他是如何思考的。文中呈現專業數學家做數學的方式，和外行人或甚至許多資深學生所想的迥然有異。

比爾上述文章的想法也曾出現在其他管道。例如他說：「數學是人類知解的藝術……當整個大腦都能感覺到數學時，它便開始詠唱……只有詠唱才能學習詠唱。」¹⁴「關於數學最重要的事是數學如何存在於人類大腦之內。數學不是我們能直接感受的東西，它位於我們的想像之中，只能間接的感受。數學在腦中如何流動的選擇並不是標準而自動的過程，因此對於提示和環境非常敏感。因為我們的心靈運作倚賴許多相互連結、功能特定又威力十足的大腦模組，把日常事務分派到這些模組是本能而潛意識的過程。」¹⁵ 比爾還有兩篇在 MathOverflow 的討論文章也很值得一讀。¹⁶

勞作、模型、服裝設計



雙曲面鉤針編織作品：龐卡赫圓盤。（Gabriele Meyers. Used with permission.）

比爾喜歡用手實作，他在普林斯頓的家裡就有一間工作房，有次客人到家裡而床不夠，比爾就去買木材，一個下午就做了一張雙層床。比爾的母親瑪格麗特是一位裁縫大師，能縫出他設計的華麗曲面。他的研究也帶給泰蜜娜（Daina Taimina）靈感，泰蜜娜不但編織許多美麗的作品，還撰寫《雙曲面上的編織冒險》（Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes），這本製作精美的書獲得2012年歐拉獎¹⁷。比爾和戴爾珀（Kelly Delp）合作，他設計了一種方法，可以用平面圖樣（拓樸等價於圓盤）黏貼出近乎光滑的雙曲幾何模型。一如往常，比爾在兩天之內打造出一



環繞一圓柱的自我相交複曲面 $w = z^{12}$ 。（Gabriele Meyers. Used with permission.）

¹² Home News, Lifestyle section, Sunday, December 30, 1984。

¹³ Bull. Amer. Math. Soc. 30 (1994), 161–177。

¹⁴ 見泰蜜娜著《雙曲面上的編織冒險》之序言。（參見下節）

¹⁵ 見哈伯德（John Hubbard）著《泰希穆勒理論及其幾何、拓樸、動力學應用》Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics 第一冊（泰希穆勒理論）之序言。

¹⁶ 比爾在“[What's a mathematician to do?](http://mathoverflow.net/questions/43690/whats-a-mathematician-to-do/)”文中回答詢問者：<http://mathoverflow.net/questions/43690/whats-a-mathematician-to-do/44213#44213>，比爾發表的“[Thinking and Explaining](http://mathoverflow.net/questions/38639/thinking-and-explaining/)”短文：<http://mathoverflow.net/questions/38639/thinking-and-explaining/>。

¹⁷ 譯註：歐拉獎是由數學家哈默斯（Paul Halmos）與其夫人捐贈設立的數學科普著作獎，2007年起頒發至今。

間工作室，裡頭有製版機、裁紙機和鉚釘槍，然後開始製作各種有趣的模型，最後進步到不用膠帶、以漂亮泡棉構造的模型，可謂工程界的奇蹟。

日本時尚設計師藤原大（Dai Fujiwara）在知道瑟斯頓的八種幾何之後開始聯絡他。在比爾的啟迪之下，再加上他提供的大量幾何材料，包括一組兩階覆蓋是八種幾何軌形（orbifold）的環結（link），藤原大和他的三宅一生公司團隊，設計並打造了一系列優美的女性時尚作品，並在2010年3月三宅一生時尚秀中發表。

事實上早在35年前，比爾就已經表示過服裝設計和流形理論的關係。他在1974年ICM結集的文章是這樣開始的：「假設有一大批某種布料，我們能夠製作什麼樣的流形，使得布料圖樣在接縫處可以吻合？這是一個很廣泛的問題，已經有人以微分拓樸和微分幾何的工具研究過。」¹⁸ 再引一段《華爾街日報》的報導：「瑟斯頓先生將這項〔八種幾何的〕發現比擬成找出八種服裝套件，可以搭配世上任何人的體軀，他希望有一天可以證明，這八類幾何可以適配所有可想像的三維流形。」¹⁹

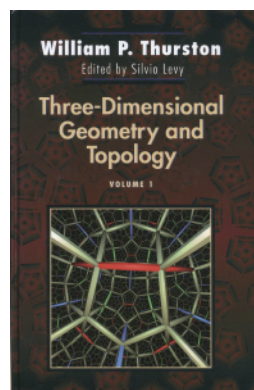
加州時期

1992年，比爾到加州柏克萊擔任柏克萊數學科學研究所（MSRI）的所長，時間從1992年到1997年。1996年到2003年，他則在加州大學戴維斯分校任教。本文中伍德（Carol Wood）的段落詳述了比爾的MSRI年代，指出在這段期間內，MSRI啟動了許多創新的教育與推廣計畫，這些在當時極富革命性的舉措，如今已成為學術研究機構的標準常態活動。

在戴維斯時，比爾出版了眾人引頸期盼已久的《三維幾何與拓樸》（*Three-Dimensional Geometry and Topology*，由李維〔Silvio Levy〕編輯），這本書源自他普林斯頓授課講義的其中一部分，並贏得了2005年的美國數學學會圖書獎（AMS Book Prize）。

這時期，他也和伊利艾許伯格（Yasha Eliashberg）合寫了甚具影響力的《觸葉結構》（*Confoliations*）。²⁰

在戴維斯，比爾開設了觸及面很廣的大學部與研究所課程。阿戈爾（Ian Agol）在戴維斯兩年的博士後階段，曾經是比爾的共同授課教師，同時也是某些課程的學生。比爾本來計畫在2012年秋季重返戴維斯。



《三維幾何與拓樸》封面。

康乃爾大學

比爾在2003年來到康乃爾大學。大概在這個時候，帕瑞爾曼（Grigori Perelman）發布了幾何化的證明。雖然帕瑞爾曼的主要證明工具是分析，似乎和比爾的研究相去甚遠，但他覺得這項證明和他的觀點精神相當符合，因此誠摯的喜悅這個問題終被解決。²¹

2011年，比爾被診斷出黑色素瘤，4月便動手術摘除腫瘤，在手術過程中失去了右眼。儘管療程艱辛，比爾仍然盡快回到數學，參加會議、啟迪年輕人，並且繼續證明有理映射理論的性質，這項工作可以上溯到他和米爾諾在70年代的研究。比爾於2012年8月21日逝世，家人皆在身旁。

2014年6月，康乃爾大學舉行一場內容寬廣的學術會議「下一步？瑟斯頓的數學遺產」（What's Next? The Mathematical Legacy of Bill Thurston）²²。

¹⁸ “On the construction and classification of foliations”, *Proc. ICM*, Vancouver, 1974, vol. 1。

¹⁹ *WSJ*, March 18, 1983。

²⁰ 觸葉結構（confoliation）是調和三維流形上接觸結構與餘維一葉層結構這兩種截然相異概念的思考架構。

²¹ 見瑟斯頓對帕瑞爾曼的讚詞（2010年克累研究會議）：
<http://www.claymath.org/perelman-laudations>。

²² <http://www.math.cornell.edu/~thurston/index.php>。

瑟斯頓相關資源：

- [1] William Thurston at the Mathematics Genealogy Project:
www.genealogy.ams.org/id.php?id=11749
- [2] Cornell tribute and remembrance page:
www.math.cornell.edu/News/2012-2013/thurston.html
- [3] New College obituary:
www.ncf.edu/william-thurston
- [4] AMS obituary:
www.ams.org/news?news_id=1602
- [5] Mathematics Meets Fashion: Thurston's Concepts Inspire Designer:
www.ams.org/news/ams-news-releases/thurston-miyake
- [6] AMS Feature column:
www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-10
- [7] *New York Times* obituary:
www.nytimes.com/2012/08/23/us/william-p-thurston-theoretical-mathematician-dies-at-65.html?_r=2
- [8] *The Atlantic* obituary:
www.theatlantic.com/technology/archive/2012/08/remembering-bill-thurston-mathematician-who-helped-us-understand-the-shape-of-the-universe/261479/
- [9] AMS 2005 Book Prize citation for *Three-Dimensional Geometry and Topology*:
www.ams.org/notices/200504/comm-book.pdf
- [10] AMS Steele Prize citation for "Seminal Contribution to Research":
www.ams.org/notices/201204/rtx120400563p.pdf
- [11] W. Thurston and J-P. Bourguignon, Interview de William Thurston (in English), *Gaz. Math.* No. 65 (1995), 11–18.
- [12] J. Hubbard, Bill Thurston (1946–2012), *European Math. Soc. Newsletter*, June 2014, 36–37.

瑟斯頓數學研究闡述：

- [1] W. Browder and W-C. Hsiang, The work of William P. Thurston, *Notices Amer. Math. Soc.* 29 (1982), 501.
- [2] S. Friedl, Thurston's vision and the virtual fibering theorem, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 111 (2014), 223–241.
- [3] D. Gabai and S. Kerckhoff, Thurston's Geometrization Conjecture, *Clay Mathematics Institute, 2009 Annual Report*, pp. 32–38.
- [4] M. Gromov, Hyperbolic Manifolds (according to Thurston and Jørgensen), *Bourbaki Seminar*, Vol. 1979/80, Springer Lecture Notes in Math., 842, 1981, pp. 40–53.
- [5] B. Lawson, Thurston's work on foliations, *Notices Amer. Math. Soc.* 26 (1979), 294–295.
- [6] D. Margalit, Thurston's work on Surfaces, *Bulletin Amer. Math. Soc.* 51 (2014), 151–161.
- [7] J. P. Otal, William P. Thurston: Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 116 (2014), 3–20.
- [8] F. Sergeraert, $B\Gamma$, *Seminaire Bourbaki* 524 (1977–78), 300–315.
- [9] D. Sullivan, The new geometry of Thurston, *Notices Amer. Math. Soc.* 26 (1979), 295–296.
- [10] W. Thurston, How to see 3-manifolds, *Class. Quantum Grav.* 15 (1998), 2545–2571.
- [11] W. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6 (1982), no. 3, 357–381.
- [12] C. T. C. Wall, On the Work of W. Thurston, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1, Warsaw, 1983, pp. 11–14 (PWN, Warsaw, 1984).



比爾和兩個兒子納塔尼耳和戴倫一起修腳踏車。

他的母親、兄弟、姐姐、瑞秋和茱莉安、他的小孩，以及其他親戚都參加會議，到場的還有 300 多位數學家，包括許多學生與畢業不久的博士生。這場會議是對於比爾留給我們的廣袤未來的真摯禮讚。

● 海夫里格 (André Haefliger)

作者簡介：海夫里格是瑞士日內瓦大學的退休教授。

1972 年 3 月我第一次見到瑟斯頓，當時有一個葉層理論的學術會議在瑞士群山之間的普朗索貝 (Les Plans-sur-Bex) 舉行。

讓我先回顧這個領域幾項重要的結果。針對想將平面場變形成切於光滑葉層可積場的問題，博特 (Raoul Bott) 在 1969 年發現了以特徵類 (characteristic class) 表示的拓樸障礙 (obstruction)。這個定理讓我重新提起對葉層理論的興趣。這一年葛爾方德和富克斯 (Dmitry Fuchs) 開始發表一系列多向量場李代數上同調群的文章。1969 年，我在一場於法國南部蒙貝里耶 (Montpellier) 附近的埃古阿勒峰 (Mont-Aigual) 舉辦的微分拓樸會議中，概述了 Γ_q 結構分類空間 (classifying space, 記為 $B\Gamma_q$) 的構造方式。

Γ_q 結構是我的 1958 年博士論文中引介的概念，表

示 \mathbb{R}^q 上光滑局部微分同胚之芽 (germ) 所形成的拓樸廣群 (groupoid)。拓樸空間 X 上的 Γ_q 結構可以用一組開覆蓋 (open cover) $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 以及 \mathcal{U} 上一取值在 Γ_q 的一維餘閉鏈 (cocycle) 來定義；亦即對任意 $i, j \in I$ ，給定一連續映射 $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \Gamma_q$ 滿足 $\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x), \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ 因此 γ_{ii} 是一個連續映射 $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ (等同於 Γ_q 中的可逆元素)。

定義兩個餘閉鏈 γ_{ij} 和 γ'_{ij} 彼此等價，如果存在連續映射 $\delta_i : U_i \rightarrow \Gamma_q$ 使得對任意 $x \in U_i \cap U_j$ 皆有 $\gamma'_{ij}(x) = \delta_i(x)\gamma_{ij}(x)(\delta_j(x))^{-1}$ 上的一個 Γ_q 結構就是在 X 的開覆蓋取極限後的一維餘閉鏈等價類。如果 X 是光滑流形，而且 f_i 是叢射 (submersion)，則一維餘閉鏈 γ_{ij} 定義了一個 X 上餘維 q 的光滑葉層結構。上述的建構方式如果將 Γ_q 換成其他的拓樸廣群也一樣可行，例如 \mathbb{R}^q 或李群 G 上局部解析微分同胚芽所形成的廣群。 X 上 Γ_q 結構的同倫類 (homotopy class) 和 X 到分類空間 $B\Gamma_q$ 連續映射的同倫類正好形成一對一對應。

1971 年，羅森伯格 (Harold Rosenberg) 開了一門葉層理論的課程，瑟斯頓是課上的學生。羅森伯格很快就意識到瑟斯頓的聰穎，在這堂課的最後，兩人合寫了一篇文章，其中有許多有趣的幾何結果。同一年，葛比倫 (Claude Godbillon) 在歐伯沃爾法數學研究院 (Mathematical Research Institute of Oberwolfach) 的一場數學會議裡，解釋他和威 (Jacques Vey) 共同構造的 GV 不變量，當時他們並不知道這是否只是無聊的不變量 (但是現場羅森伯格學生烏薩利 [Robert Roussarie] 很快就發現非無聊的例子)，不過人也與會的勞森 (H. Blaine Lawson) 並不知道烏薩利的例子，他向瑟斯頓解說 GV 不變量的構造方法，勞森在一封電子郵件內寫道：「我跟他說了定義，隔天他就來敲門說：『這不是無聊的不變量』，再隔一天他又敲門，這一次他說：『這個不變量可以是任何實數值。』我跟自

已說，什麼呀？？！！這傢伙是誰？」

此後很快的，許多人就各自從理論上理解到葛爾方德/富克斯上同調群和各類葉層結構分類空間上同調群之間的連結。

1972年初，比爾在柏克萊拿到博士學位，他的論文老師是赫許，勞森則是口試委員。比爾將他的論文〈三維流形上具有圓叢結構的葉層〉（Foliations on 3-manifolds which are circle bundles）投稿到《數學新研》（*Inventiones Math*），審查人建議作者解釋得更詳細一點，結果忙著證明更多定理的瑟斯頓決定放棄。

與此同時，麥塞（John Mather）也獨立致力於探討葉層結構分類空間的性質。1971年，他寫了幾篇文章和預印稿證明 $B\Gamma_1$ 的深刻定理。麥塞研究葉層理論的路數不像瑟斯頓那麼幾何，但是非常有效率。

羅森伯格從柏克萊回到巴黎之後，邀請比爾到巴黎。當羅森伯格在最後一刻得知我們在普朗索貝舉辦的會議，他便帶比爾一起來。當時與會的數學家還有阿坎波（Norbert A'Campo）、赫克特（Gilbert Hector）、賀曼（Michael Herman）、穆蘇（Robert Moussu）、希本曼（Laurent Siebenmann）、羅傑（Claude Roger）、烏薩利、提胥勒（David Tischler）、威、約翰·伍德（John Wood），我的盧安達學生班亞加（Augustin Banyaga）等等。

在勞森的建議下，米爾諾邀請比爾（作為「助理」）和我在1972~73往訪高等研究院。我們兩家人在研究院宿舍裡剛好是鄰居。我們籌辦了一個討論班，每週碰面一次，有好幾個人來參加。在班上，比爾主講了好幾次，經常帶來新穎、令人意外的結果或點子。

1973年4月，我回到日內瓦。5月4日，我寫了一封信給布勞德（William Browder）推薦比爾申請普林斯頓大學的教職，信裡詳列了瑟斯頓在這個年度內令人驚豔的研究成果，例如 $B\Gamma_n$ 同調群和 \mathbb{R}^n 上緊緻支撐微分同胚群的同調群之間的深刻連結；

證明 n 維流形上任何餘維 > 1 的二維平面場皆同倫於一光滑可積平面場；建立在 n 維流形上將 p 維空間場形變到光滑可積的障礙理論（假設 $n - p > 1$ ），由此證明若 p 維空間場的法叢是無聊的，就能形變到光滑可積場。相比之下，從 p 維空間場形變到某 C^0 -葉層結構的切空間場則無任何障礙等等。我在結語中寫道：「我十分震懾於比爾理解數學的方式，他有一種非常直接和原創的方式去注視幾何問題並立即理解。他有時會困擾於給出證明的細節，但是過一陣子，你就能領會他的短短數語就是本質關鍵。」

在1973年8月16日的信裡，瑟斯頓寄給我一篇論文稿〈高於一維的葉層理論〉（The theory of foliations of dimension greater than one），希望發表於《瑞士數學評論》（*Commentarii Mathematici Helvetici*，CMH）。在同一封信裡，他也附上一篇預印稿，談及高維環面 T^n 上的保體積微分同胚，他說後續還要寄給我一篇構造三維流形葉狀結構的文章。

10月10日，比爾從麻州劍橋寄給我六頁的信，述及他根據我的意見對論文稿的修訂。在後面五頁，比爾很仔細的解釋了他對瑞伯穩態定理（Reeb stability theorem）的推廣。除此之外，是三頁CMH論文的修正。

1973年12月7日，他寄給我文稿的修訂版，然後在七頁的信裡，比爾解釋了他對餘維一分類定理的推廣。

1976年夏季，華威大學（University of Warwick）籌辦了一個大型學術會議。瑟斯頓、米爾諾、威、麥塞、赫許都來參加。我家兩個小孩當時正迷鄉村音樂，我們從瑞士一路開車到華威，在那裡待了兩個禮拜。底下的照片是比爾和小孩堆疊的大麥草堆。

最上面是我家的兩個男孩，米爾諾的長女，側面是比爾和其他人。那段時間，赫許和我的小孩彈奏了很多鄉村音樂，威則優美的演唱傳統的法國歌曲。

1976年8月25日至9月4日，國際數學夏季中心（Centro Internazionale Matematico Estivo，CIME）



瑞秋在下方右邊，納塔尼耳在瑟斯頓的腳邊，戴倫在上方左邊探出頭來。

籌設了在義大利瓦倫納（Varenna）舉行的夏季班，由瑟斯頓、麥塞與我提供葉層理論的說明課程，除此之外還有許多參加者提供的演講像是塞吉拉特（Francis Sergeraert）；班亞加演講他的論文，談論緊緻辛（symplectic）流形上的辛微分同胚群，這是瑟斯頓一篇保體積微分同胚未出版預印稿的推廣。另外當時還是日內瓦大學學生的瓊斯（Vaughn Jones）也到場參加。²³

瑟斯頓的演講十分優美，但他並沒有撰寫成稿。當時他對葉層理論已經不感興趣，正準備在普林斯頓開設雙曲幾何課。

● 艾普斯坦（David Epstein）

作者簡介：艾普斯坦是華威大學的退休教授。

追憶比爾

1970年12月，我在加州大學柏克萊演講我的定理：任何緊緻三維流形上的圓葉層結構一定是塞弗特纖維形（Seifert fibration）。演講之後，比爾的論文指導教授赫許介紹我們認識，比爾很沒自信的告訴

我他知道如何將 \mathbb{R}^3 分解成普通平面圓的組合，他還解釋說他這些圓並不是葉層結構。43年之後，我還在納悶這怎麼有可能。

下一次聽到比爾的訊息，是他寫給我的長信（航空信，當時還沒有電子郵件），內容是葉層、分類空間、海夫里格結構，信裡有很多手繪圖式和譜序列，多到我有點難消受。我舉一個句子讓讀者感受一下：「如果你瞥一眼這幅圖，就可以掌握到重點。」我為比爾的信下了很多功夫，最後終於在他的一項敘述找到反例，於是放鬆的跟自己說這下我終於找到錯誤，可以停止掙扎。沒想到比爾的回信修正了問題，當下我只好真心舉手投降。

在有趣的〈論證明與數學的進展〉一文中，比爾區分了他在葉層理論與三維流形貢獻的方式。他在葉層理論上宏大而令人生畏的進展，阻嚇學生繼續進入這個領域，讓這項課題在它仍然是發展顛峰時，不幸而早熟的乍然停滯。（如果某人想寫一本書並納入比爾的貢獻，恐怕又會再次打消念頭。）相較起來，比爾在低維流形上宏大而令人生畏的進展，則是被未正式出版但廣為流傳的上課筆記所支撐，這些充實的筆記是比爾、學生或其他人所撰寫的，賦予這項主題實質且詳細的基礎材料，讓想要繼續推動比爾研究的人容易進入這個領域，後來還集結成一本美麗的書：《三維幾何與拓樸》，由比爾和李維撰寫。

我和比爾最熟的時候是他和瑞秋在一起的期間，我的看法和追憶都和那段期間有關，大概止於1993年。那時我經常訪問普林斯頓，住在他們那棟大學提供的住宅，房子寬敞、零亂、溫暖又宜人，離數學系只有幾步之遙。比爾總是在發現或發明有趣的數學，各式各樣的情境都有，根本找不出時間把他所想的一切或其中主要的部分，給嚴格形式化再公諸於眾。舉例來說，比爾發展一套迷宮（maze）集上的機率

²³ 譯註：瓊斯1990年獲得費爾茲獎。

分布，這些兒童雜誌上常見的迷宮圖，被設定成方格圖再加上某些格邊不能穿越的限制。他很樂於在指定困難度下，用電腦程式生成許多隨機的迷宮圖樣。

和比爾談數學很有趣、很有啟發，但也很挫折，我經常希望能隨身帶著錄音機錄下來。當下我聽著他的論點，很確定自己懂了，但是事後回想重構整個對話時，我經常會碰到困難。花了一番功夫之後，我將問題聚焦在某個特殊點，緊急要求他釐清。結果他不直接回答，卻說：「也許你會更喜歡這樣的證明。」然後開始解釋給我聽。這樣的過程反覆發生。另一方面，閱讀、理解，以及幫忙撫平比爾筆記的稜稜角角，是很吸引人又很有收穫的工作，我從中學習真是獲益良多。我相信其他協助比爾的人都有類似的體驗。

理解比爾數學的困難程度，讓他對數學教學的問題特別敏銳。比爾的數學教育觀持續廣被徵引²⁴。比起他的著作，更令人驚訝的是他在不同教學方法上的實驗。在幾何中心主任馬爾登的協助下，我得以時常訪問該中心。我在1991年暑假到達時，便強烈感受到一門課程的智識騷動氛圍，那是比爾、康威、多伊爾、吉爾曼（Jane Gilman）合開的「幾何與想像」。聽眾成分很雜，包括小學生、大學生、小學教師、大學數學老師。這門課程的部分教材仍然能在網路上找到²⁵，我強烈推薦對數學或數學教育感興趣的人花點時間去閱讀。

當時，一些小學生聽眾很興奮的跟我說，多伊爾剛剛把泥巴塗到腳踏車輪胎上，而幾何中心的地板上則鋪滿了大型海報紙，然後多伊爾在聽眾不在場的情況下在大廳的紙上騎來騎去。被分成小組的聽眾的第一個任務是駁斥福爾摩斯在〈修道院公學〉（Adventure of the Priory School）一案中的推理：「當然是承擔重量的後輪壓出的軌跡深。這裡有幾處後輪的軌跡和前輪的交叉，前輪的軌跡較淺被埋住了。車子無疑是從學校騎過來的。」聽眾的第二項

工作是從海報紙上泥巴弄髒的痕跡正確推理出腳踏進的方向。多伊爾天才的解答在韋根（Stan Wagon）與合著者所寫的《腳踏車往那個方向走？》（Which way did the bicycle go?）一書中有詳細的解說²⁶。韋根來自座落於幾何中心街角的麥卡里斯特學院（Macalester College），他也是這門課的授課者，我聽說他當時也是聽眾之一。

比爾安排過很多這樣的課程，適合不同的程度。當今大學裡許多美國或世界上的優秀數學家，都曾受到他上課的啟發。

不能不提的還有《非結》和《翻轉》這兩支錄影帶，這是幾何中心工作人員把比爾想法具體呈現的結果。這兩支影帶是各大獎的常勝軍，現在仍然能在YouTube上免費觀賞，讓你歡享又驚訝。這些影片不用形式數學語言，就能解釋重要又困難的數學觀念，可以用來與非數學家共享，你的大學生或研究生皆可從中受惠。在這樣的過程中，你也更能深入體認到比爾極富想像力的精神與構造數學的文化威力（每支影帶還附帶說明小冊，讓使用者更易深入研讀）。

比爾是數學領域中以電腦為工具的先驅者，顯露出他強烈構造主義者的一面。事實上，他曾經考慮博士論文是否該以邏輯為題而非拓樸學，但是被塔斯基（Alfred Tarski）勸阻了，因為柏克萊的邏輯學家對直覺主義（intuitionism）並沒有興趣。比爾曾經建議我用「空無存在」（hollow exist）²⁷去標示非構造性的存在性證明（例如康托〔Georg Cantor〕證明超越數存在的方式）。比爾想的比還強，是一種「快速構造主義」（rapid constructivism），希望能利用程式在合理時間內完成證明。比爾有一位聰穎的學

²⁴ Thurston, W. "Mathematical Education", arXiv: math/0503081。原刊於 *Notices of the AMS* 37 (1990)。

²⁵ <http://www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91/handouts/handouts.html>。

²⁶ J. D. E. Kronhauser, D. J. Velleman, and Stan Wagon, *Which way did the bicycle go?* MAA, 1996。

生叫威克斯，發展了 SnapPea 程式，在雙曲結構存在的前提下，可以計算單體（simplicial）三維流形的完備雙曲結構。這個以比爾想法為基礎的程式，曾經被應用於許多重要的研究計畫，例如它能夠很快的證明兩個單體三維流形是否同胚，或者兩個複雜的結是否相同。

1980 年代早期，比爾認為普林斯頓的純數學家需要認識電腦，結果他所募到的款項雖然可以買一部當時非常昂貴的電腦，但卻不足以再多聘一個管理員。我記得比爾週末會到范樓（Fine Hall，普林斯頓數學系所在）去，一個人自己布設必要的纜線。就這樣比爾成為校園附近的 UNIX 專家和勇敢的系統程式師。當 UNIX 龐大的文字編輯軟體 vi 出現問題時，他決定自己下場為程式除蟲（debug），當然這段冒險以失敗收場。另一回，有個博士生發明一個程式，持續不斷的複製自己直到系統爆掉，箇中情節宛如科幻小說，每除掉一個複製副本，其他的副本馬上會生出另一個來取代。比爾決心找出一種比較人性的方法去除這些複製體，免得系統被迫關機。結果這個連專業系統工程師都束手無策的問題，卻被比爾成功解決了。像這類和電腦相關的事務佔據比爾相當多的時間，數學社群可能更希望他把時間用來寫下自己的數學發現，不過比爾把轉化數學同仁心態、學習應用電腦當作優先要務。

比爾和瑞秋成長於越戰年代，因此都非常反對美國的軍事行動，瑞秋尤其活躍。1980 年代早期，當電腦對純數學家益發重要時（部分源於電腦排版軟體 L^AT_EX 的播散），美國國防部開始提供研究經費給純數學家，由於電腦經費很難找到別的替代來源，因此純數學界很難拒絕這種機會。其中有些來自美國中央情報局的經費更不需通過審查。紐約城市大學的數學家夏布（Mike Shub）因此辭去教職，並發起學術界拒絕國防經費的運動，比爾也參與其中。在 1987 到 1988 年的《美國數學學會會刊》（*Notices of the AMS*）上有許多這項議題的有趣討

論，提出了很多不同的觀點，其中包括比爾的信。最後在 1988 年，美國數學學會通過決議，呼籲投入更多努力，減少數學經費中來自國防部的比例。同時，美國數學學會也聲明質疑 SDI 計畫（雷根的星際大戰計畫）。一如以往，比爾並不為他奮力爭取並贏得的這項決議而雀躍，反而對應用數學家的沮喪耿耿於懷。因為應用數學家有接受軍方資助的傳統，他們並不同意這樣的舉措會對公民社會的價值有危險的影響。

在我跟他相熟的時期，比爾是一個非常享受生活的人。不論是在學術會議或在數學系，他都會熱情組織大家去打排球。比爾很有幽默感。有次我的妻子待在他們家，想要使用烘乾機，他說他們家使用的是太陽能，唬得她一愣一愣的。比爾還曾經收到普林斯頓鎮方的嚴厲譴責，因為他在家旁路邊的楓樹上裝龍頭想要汲取楓漿，其實他已經很小心的選擇適當的裝置。比爾也是一個熱情參與的父親，他和小孩的相處情景我腦中有很多鮮明的畫面。他也是一位優秀的廚師，除了固定烹煮日常餐點，也有特製的餐品，例如他獨家的桃子冰淇淋。比爾喜歡遊戲、野餐、社交，聊天有一定的深度，不是膚淺的閒聊。比爾也是一位貼心的朋友，具有十足溫暖的人格，一旦你接觸過他，就會終生難忘。

● 蘇利文

作者簡介：蘇利文目前是紐約州立大學石溪分校教授與紐約城市大學愛因斯坦講座教授。他是 2010 年沃爾夫獎得主。

瑟斯頓的傳奇年代

故事一：

1971 年 12 月，在某個柏克萊數學系動力學討論班即將結束時，講者得出一個平面難題的解答，勢必將在動力系統上有很好的應用。這項解是要將 N 個相異點移動到另一組「 ϵ 近距」的 N 相異點，移動



蘇利文。(維基)

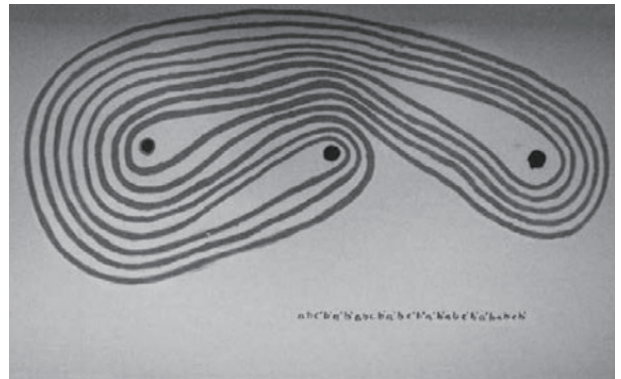
時要保持彼此互異，並且要維持在一種稱為「 ϵ 質近距」的移動方式。坐在前排的前輩動力學家都很興奮，因為當時的已知結果至少要三維，這只要運用顯然的一般位置（**general position**）性質就能知道，如果前述這項結果正確，就能應用到二維。

結果，教室後面一個滿臉鬍子的長髮研究生站起來，說他認為這個證明的算則不能成立。瑟斯頓害羞的走到黑板前，畫了兩組各約七個點的圖，然後開始運用剛剛最後討論的方法。一段段短路徑開始浮現，阻擋了其他出現的路徑，為了避免交錯，路徑必須愈來愈長。於是基於這個相當複雜的圖式，剛剛大家談論的算則完全不成立。我從來沒見過有人能這麼迅速的理解並給出這麼有原創性的反例，這也讓我對於這個問題浮顯的幾何複雜性凜然生畏。

故事二：

幾天之後，一些研究生邀我（我也是濃鬚長髮）一起合作，為電梯房與他們研究室之間的走廊牆壁繪製數學壁畫，當我們作畫前到處亂晃時，之前那位研究生跑來問我：「你覺得畫這個有不有趣？」那是一幅光滑的一維曲線環繞平面三點的複雜圖形。我問他「這是什麼？」然後很訝異的聽到：「這是簡單封閉曲線。」我說：「好，這個有意思！」於

是我們花了幾個小時在牆上畫下這條曲線。那是很棒的學習和合作經驗，要把曲線畫得好看，得逐段畫出短而平行又略帶彎曲的線條（就像葉層結構中的流線盒圖〔**flow box**〕），然後再光滑的連接在一起。我問他怎麼想到這樣的曲線，他說：「對給定的簡單曲線，連續做幾對沿某相交曲線的鄧恩扭轉（**Dehn twist**）即可。」這幅「曲線壁畫」有兩公尺高、四公尺寬，上面簽署「**DPS and BT, December, 1971**」。雖然柏克萊的牆壁歷經多次整修，仍保存了大約40年，直到幾年前才被塗漆覆蓋。



比爾和蘇利文在柏克萊的壁畫。

(Photographer: Professor Ken Ribet. Used with permission.)

故事三：

1971年12月的這個星期，我從麻省理工學院到柏克萊訪問，準備給關於微分形式（**differential form**）與流形同倫論的系列演講。由於當時葉層結構和微分形式的研究結果如雨後春筍，我想以我的方法中關於基本群下中心序列（**lower central series**）出現的一維微分形式來構造葉層結構。這種葉層結構的葉層會涵蓋此流形的某類映射圖形，其中該映射的值域是基本群所有高階零幕商（**higher nilpotent quotient**）所對應的零幕流形（**nilmanifold**），這將會推廣已知流形映射到第一同調群環面的阿貝爾映射（**Abel's map**）。由於我不熟悉李群的理論，關於這種建構的可能性，我已經問遍了麻省理工和哈佛的微分幾何

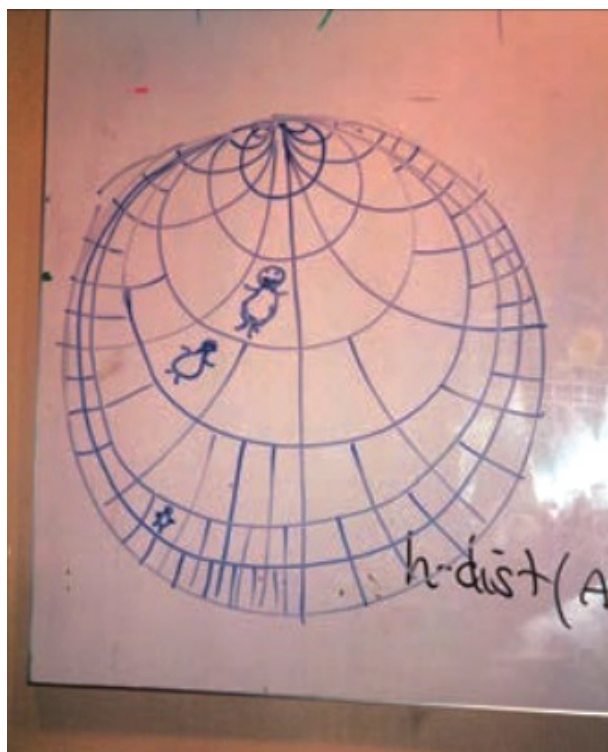
學家。但可能因為我的說法太模糊、太代數了，他們聽不懂我的問題。我在柏克萊第一場演講就提出這項問題，也私下跟比爾談過，但並不抱太大期望，因為這是一個奇怪的代數/幾何混合問題。沒想到，隔天比爾就提出了全面的解答與完整的解釋。對他來說，這只是個基礎問題，只牽涉到對於卡當 (Elie Cartan) $dd = 0$ 對偶形式之中雅可比關係 (Jacobi relation) 基本幾何意義的透澈理解。

在前兩段故事之間，我曾經和我的老友赫許談到比爾。比爾跟赫許作博士論文，當時已經快畢業，這是他的第五年，顯然他很晚才開始作論文。忘了是赫許還是其他人告訴我比爾的資格口試出了點小問題，因為當委員請他舉一個萬有覆蓋的例子時，比爾竟然選了虧格二的曲面，然後開始在黑板上畫一大堆八邊形，每個頂點有八條邊匯聚，這種做法很快就在黑板上弄出一團難以令人信服的混亂。我相信比爾是在那裡考試唯一一個想出這麼複雜的萬有覆蓋的學生。赫許接著說：「近來，比爾已經開始解決博士論文程度的問題，而且速度是一個月一個問題。」幾年之後，比爾告訴我，他的第一個小孩納塔尼耳晚上不喜歡睡覺，所以他也無法睡覺，讀研究所時有一整年「都跟納塔尼耳在地板上走來走去。」

我在柏克萊數學系的那一週改變了我的一生，非常感激我能夠如此嚴謹鑑賞到活生生的莫札特現象，而且結交到一個新朋友。那一週後我回到麻省理工，把我的新聞分享給同事，不過我想我可能太過狂熱很難取信於他人，因為我說：「我最近剛遇到我見過或一生僅見最好的研究生。」他們安排比爾到麻省理工演講，然後轉成邀他在往訪高等研究院之後到麻省理工任職的計畫。最後他在麻省理工待了一年 (1973~74)。那年我恰巧到法國高等科學研究院 (IHES) 訪問，此後在法國待了 20 多年，而比爾則被普林斯頓大學請回去任教。

故事四：普林斯頓高等研究院 (1972~73)

1972~73 年，我從麻省理工到高等研究院訪問，與比爾有更多的往來。有一天，我們走路去吃中餐，我問比爾極限圓 (horocycle) 是什麼。他說：「你不要動。」然後就離開走到研究院的草地上，走了一定距離後，他回頭站得直挺挺的說：「你在圓周上，我是圓心。」然後他回頭走得更遠，回頭說了一句話，但是因為距離太遠，我聽不到。他和圍觀的人樂得互吼了一陣，我們才了解比爾說的是同一句話：「你在圓周上，我是圓心。」然後他甚至走得更遠，人只剩下很小一個，當然更聽不清楚他在吼什麼。比爾從那邊走回來，開口又吼著應該是同樣的一句話。於是大家都知道極限圓是什麼了。



極限圓。

有一天，阿提雅問我們這些拓樸學家一個問題：平直向量叢 (flat vector bundle) 是否有分類空間？因為他當時已經為這類向量叢構造了新的特徵類。由布朗定理 (Brown's theorem) 我們知道分類空間一定存在，但不知道如何可以明確的構造。隔天，

阿提雅說他問了比爾這個問題，結果他提出一種在當時很嚇人的構造方式：把向量叢的李結構群視為賦予離散拓樸的抽象群，然後再構造它的分類空間。

更後來，我聽說比爾畫了一幅圖給米爾諾看，證明任何單峰（unimodal）映射的動力系統模式都會出現在二次函數族 $x \mapsto x^2 + c$ 中。因為我正在學習動力系統，所以計畫和比爾在普林斯頓待一學期，學習從這幅圖得出米爾諾/瑟斯頓普適性（Milnor-Thurston universality）的重要論文。

故事五：普林斯頓大學（1976秋）

我在1976年9月到達普林斯頓，期待學習一些一維動力系統，但是那時瑟斯頓已經發展出一套曲面變換映射的新理論。在最初幾天，他在高等研究院即席給了三個鐘頭的美好演講，詳細闡述他的理論。很幸運的，由於前述我在柏克萊辛苦創作曲線壁畫的經驗，比爾的極限葉層主定理對我來說直觀上是清楚的。在我待的這學期最後，比爾告訴我他相信這些曲面的映射環體（mapping torus）具備雙曲度量（metric）。我問他為什麼，他說還不到跟我解釋的時候，因為我懂得微分幾何太少。我離開普林斯頓幾個星期後，由於沒有我在旁分心，比爾因此更有時間研究，基本上理清了某些哈肯流形具備雙曲度量的證明。至於映射環體的情況，還需要再等兩年才完成（見後述）。

這個學期的比爾課上，研究生和我學到幾項關鍵概念：

（1）關於「雙曲幾何的無窮端會變成無窮球面的保角幾何」的準類比（quasi-analogue）。（值得一提的記憶是比爾所透露出來的感覺，彷彿他真的融入雙曲空間的內部，而不是站在外部注視一個特別的模型。對我而言，這有心理上的差別。）

（2）我們學到凸曲面在極值點（extreme point）外的內在幾何。（有一次比爾來上課，只是不斷的

在講桌上一次次的轉動著他做的紙製形體，有很長的時間一語不發，直到我們感受到平直〔flat〕的性質。）

（3）我們學到雙曲曲面的粗細分解（thick-thin decomposition）。（我記得比爾在靠近休息室的黑板上畫了50公尺長的細瘦圖形，幾乎塗滿整個黑板。然後突然之間，我一切都明白了，包括如何幾何收斂到黎曼面模空間DM緊緻化所增加的那些點。²⁷）

1976年秋天我待在普林斯頓的這個學期，比爾和我討論龐卡赫猜想（Poincaré conjecture），基於三維是相對小維度的想法，我們試圖證明一個所有封閉三維流形都滿足的定理。在我們的小論文〈正準坐標……〉²⁸提到證明龐卡赫猜想的可能充分條件是所有封閉三維流形都具備保角平直（conformally flat）坐標（但是那年秋天常在旁邊聽講的大學部學生高德曼〔William Goldman〕在幾年後否證了這個想法）。於是我們決定未來準備用一整個學年一起談論這個問題。

下一個階段，比爾在普林斯頓大學發展了克萊恩群中準富克斯群（quasi-Fuchsian）的極限集，研究映射環體上的雙曲結構，我則在巴黎研究阿爾弗斯（Lars Ahlfors）的極限集測度問題，大概一年後，比爾取得實質正面的進展如消除尖點（closing the cusp），而我則獲得實質負面的進展，顯示所有已知的遍歷方法加上所有已知的克萊恩群資訊並不合拍，其中有太多潛在的非線性問題。我們在瑞士阿爾卑斯山間的普朗索貝會議見面交換心得。他的映射環體計畫已經成功完成，但是細節很複雜，而我的負面資訊顯示某種剛性（rigidity）的存在，或可

²⁷ 譯註：DM指的是德利涅（Pierre Deligne）和曼弗德（David Mumford）。DM緊緻化是他們在1969年的重要研究。

²⁸ 譯註：原文為“Canonical coordinates...Commentarii”。此文指的應該是〈具有正準坐標的流形：一些範例〉（Manifolds with canonical coordinates charts: some examples）的第一稿，該文註明第一稿完成於1977年1月。Commentarii暗示的發表期刊Commentarii Math. Helvetici也不同于最後1983年發表時的L'Enseignement Mathematique。

推廣莫司特（George Mostow）的剛性定理，正好可以相當簡化比爾透過纖形的證明（fibring proof），這點可參看我隔年在布巴基（Bourbaki）對瑟斯頓研究的報告。

故事六：石溪會議（1978年夏）

1978年夏天，在紐約州立大學石溪分校舉辦了一場關於克萊恩群的學術會議，比爾到場參加但沒有給演講。格羅莫夫（Mikhail Gromov）和我邀他在議程之外給一場很長的即席演講。看著雙曲三維流形研究伴隨著凸包（convex hull）、褶面（pleated surface）、終端紋理（ending lamination）等等概念踏上完結，真的是一趟精彩的旅程。在演講中，格羅莫夫靠近我說他看著比爾的說明，讓他覺得「這個領域還沒有正式誕生。」

故事七：科羅拉多波德（1980~81）

1980學年度，比爾和我共同擔當科羅拉多大學波德分校（Boulder）的烏朗訪問講座教授，主持兩個討論班。比較大的班綜整所有完成雙曲幾何定理的線索，比較小的班討論克萊恩群的動力系統行為，也兼及其他一般的動力學主題。關於雙曲幾何證明的所有面向都通過了參與研究生的審視。在另一堂討論班，有一天比爾遲到了，那天魯道夫（Daniel Rudolph）精力充沛的解釋了一小時，為一個本來非常複雜的證明給出新穎的較短說明。本來的定理證明如果能控制軌道等價（orbit equivalence）的差異，則兩遍歷且保測度變換之共軛（conjugacy）等價特性可導出軌道等價。這項來自卡茲奈爾森（Yitzhak Katznelson）、歐恩斯坦（Donald Ornstein）、魏斯（Benjamin Weiss）三人幫的新證明很值得注意，因為第一個證明需要運用一個小課程才能解釋，而新證明只需要一個小時。瑟斯頓最後終於到了，他

請我說明好趕上進度。課程進行到最後，比爾大聲質疑困難何在，我得噓他安靜希望能尊重討論的脈絡。在最後，比爾說我們可以想像往兩端無窮延伸的珠的珠串，其中有有限個缺漏的空白，然後他大大張開的雙臂，表現大致只要將這些都往左滑移，加上能作標準的紀錄，就能得到新的證明。那天稍後，肅然起敬的魯道夫告訴我，在那時之前，他從來沒有意識到比爾究竟有多聰明。

故事八：拉荷雅與巴黎（1981年晚夏）

這一段科羅拉多的經驗十分美好，聽比爾的幾何討論班很放鬆（某一天我們搞懂八種幾何，另一天我們投票看某個概念該稱為manifolded還是orbifold），撰寫幾篇我自己的論文，討論豪斯朵夫維度（Hausdorff dimension）、動力系統或動力系統極限集的測度。

那一年的晚夏，我從巴黎飛到加州拉荷雅，準備提供一系列關於動力系統的美國數學學會（AMS）演講，但我改變計畫，為了「眾人之善」，嘗試解說整個瑟斯頓的雙曲三維流形結果，同時這也是作為自己波德時光的期終考。在飛機上我準備寫出一頁的概覽，而實際演講是一天兩次，要講四或五天。我想第一天應該沒問題，我只需要做個概述，剩下的時間再即性發揮即可，但需要一點運氣。

然後上場的時間到了。加州和巴黎有九個小時的時差。第一天，我在加州的午夜醒過來，因此我就到大會為我準備的研究室去準備講稿。經過幾個小時，我對雙曲定理的證明生出許多疑問，只有少數有答案。我注意到書桌上有台電話，而且很神奇的可以打長途電話。當時加州是早上四點，普林斯頓是七點。於是我撥電話到比爾家，他接了電話。我提出我的問題，他快速給出回應，我連忙做筆記。然後比爾說他得先送孩子到學校，等他到研究室再回我電話。大概普林斯頓九點半電話通了，我對他

的答案提出質疑，他更全面的回答我。我們的討論涵蓋許多不同的途徑，全方位的包含所有的要點。到了加州八點時，我已經準備好兩次演講的材料。第一天非常順利：演講之後是午餐、海灘、游泳，接著是第二次演講、晚餐，之後跟大家說再見，回去上床睡覺。我得這麼有紀律才行，看過錄影的人就知道，現場的聽眾可是令人生畏：阿爾弗斯、博特、陳省身、科比（Robion Kirby）、希本曼、愛德華茲（Robert Edwards）、羅森伯格、弗利德曼（Michael Freedman）、丘成桐、馬斯基特（Bernard Maskit）、科拉（Bryna Kra）、金因（Linda Jo Keen）、多茲尤克（Józef Dodziuk）等等。

比爾和我每天重複這個過程，來來回回修正講稿，於是每天的加州時間八點，我的兩個演講就準備好了，而且也執行得很順利。演講的高潮是解釋比爾絕妙的論證，他要控制分歧摺面（branched pleated surface）上表現分歧軌跡（branching locus）的測地線的長度，比爾用的是混沌的動力學比率或內在曲面測地線流（geodesic flow）的熵，這又受限於分歧曲面萬有覆蓋的面積成長率，但因為這是負曲率，所以會被包含它們的雙曲三維空間的體積成長率所控制。證明完畢！其中附帶的是比爾優美的示例，顯示這項估計以定性來說已經是最好的結果。

我演講傑出的完成度對聽眾席中的羅森伯格來說有點好得太過頭，我這位精明的巴黎友人後來跑來找我，沮喪的問我：「丹尼斯，你是不是把瑟斯頓一直鎖在樓上研究室裡？」

弗利德曼將這些演講全程錄影，這項秘密我一直到今天都守口如瓶。這段（瑟斯頓）/蘇利文演講錄影可以在網路上找到²⁹。

故事九：巴黎（1981年秋）

比爾到巴黎來找我，我在我的家兼研究室買了一套舒服的沙發床好給他睡覺。比爾很有禮貌的問我，

如果我的AMS演講沒有臨時改變計畫，原本準備要講什麼，他尤其想知道我在科羅拉多除了雙曲討論班之外的其他研究細節。我得跟他說明六篇論文，其中也用到了我從他身上學到的引人想法：在無窮球面上適當集合的豪斯朵夫維度 f ，如果從內部一點來看，決定了三維雙曲空間拉普拉斯算子的一個正特徵函數，其特徵值為 $f(2-f)$ 。然後我開始說明論文的概念和定理，每當我說了一段命題，要嘛他很快就給出證明，不然就是我說明我的證明想法。我們一口氣把六篇論文的定理都走了一遍，由他或我給出證明。其中還缺了一項結果：當 $f > 1$ 時，底特徵函數（譯按：特徵值 λ_0 ）可用標準化後的特徵函數來表示，此時其方積範數（square integral norm）可用此空間凸核（convex core）的體積來估計。比爾在沙發床上躺了一會兒，眼睛閉著，接著瞬間證明了這項敘述。他的估計是把橫截而過的測地線打散再做平均。然後我們就出門散步穿越巴黎市，從地鐵 Port d'Orleans 站往北走到地鐵 Port de Clignancourt 站。當然，在路上我們談了很多現在巴黎基本上已經遺忘的數學，只有在跨過塞納河同時面對巴黎聖母院和巴黎古監獄的景色時才暫停。

故事十：普林斯頓/曼哈頓（1982~83）

1982年，我開始把時間分配給IHES和紐約城市大學的研究生中心，在城市大學擔任了13年的愛因斯坦講座教授，討論動力系統與準保角同胚（quasi-conformal homeomorphism）的課題（當時已經轉變成拓樸的量子物件）。比爾繼續培養一幫年輕的幾何學生，廣為宣傳負曲率空間的優美概念。比爾延遲了把雙曲證明寫成確定文本的時程，讓他一批日益成熟的年輕或稍長的幾何子弟兵，順著開放的研究方向發展。比爾嘗試避免在雙曲幾何領域

²⁹ <http://www.math.stonybrook.edu/Videos/Einstein/>。



2011年瑟斯頓攝於在般夫舉辦的米爾諾祝壽會議（暱稱 Jackfest）演講。
（感謝 Stony Brook University 提供）

裡，讓 1970 年代他葉層論基本文章如海嘯般席卷整個領域的事件再度重演。

有一次，我們計畫在曼哈頓碰面討論單變數全純（holomorphic）動力系統，與雙曲幾何和克萊恩群之間的相似性，那是我當時正全神處理的問題。但是我們很隨性，在我的公寓裡聊著別的事情，結果到了比爾必須離開搭火車回普林斯頓之前半個鐘頭，我們才轉回正題。我大致描述了其中的相似性：在雙曲幾何有龐卡赫極限集、非連續域、形變、剛性、分類、阿爾弗斯有限定理、阿爾弗斯和伯斯（Lipman Bers）的研究等等；相較之下，全純動力系統也有朱利亞集（Julia set）、法圖集（Fatou set）、形變、剛性、分類、非漫遊域（non-wandering domain）定理、哈伯德和多厄迪（Adrien Douady）的成果等等。比爾在離開搭火車前，很完美又迅速的吸收了這些資訊。兩週之後，我們聽說比爾已經將某個全純動力

系統重新表述為泰希穆勒空間上的固定點，就像他的雙曲定理中的一部份，這個想法產生了很多新結果，包括數年之後麥克穆蘭（Curtis McMullen）的結果，從此之後全純動力系統課題的研究進入另一個更高的層次。

結語：

2011 年 2 月，比爾和我在班夫（Banff）舉行的米爾諾八十歲慶祝會議中再次見面，過了整整約 30 年，我們重拾當時未完成的話題。（當他穿第二次時，我稱讚他的綠色格子襯衫好看，隔天他就送給我了。）我們約定要一起解決克萊恩群/全純動力系統詞彙對應表中還剩下的一個大破洞：「不變線場猜想」（the invariant line field conjecture）。這想法很棒，卻很遺憾不可能了。

本文出處

本文出自“William P. Thurston, 1946-2012”*Notices of the AMS* (62) 2015 No. 11。這裡是上篇（下篇將於下期刊載）。感謝 AMS 同意翻譯刊登。

譯者簡介

翁秉仁是臺灣大學副教授。

延伸閱讀

- 《非結》YouTube網址：http://www.youtube.com/watch?v=zd_HGjH7QZo
- 《翻轉》YouTube網址：<http://www.youtube.com/watch?v=wO61D9x61NY>
- 瑟斯頓的 MathOverflow：<http://mathoverflow.net/users/9062/bill-thurston>
有瑟斯頓的數學相關的隨筆以及與網友的互動問答。



巴黎塞納河畔古監獄。（Ricardo Andr Frantz 攝，維基）



巴黎塞納河左岸聖母院。(維基)

