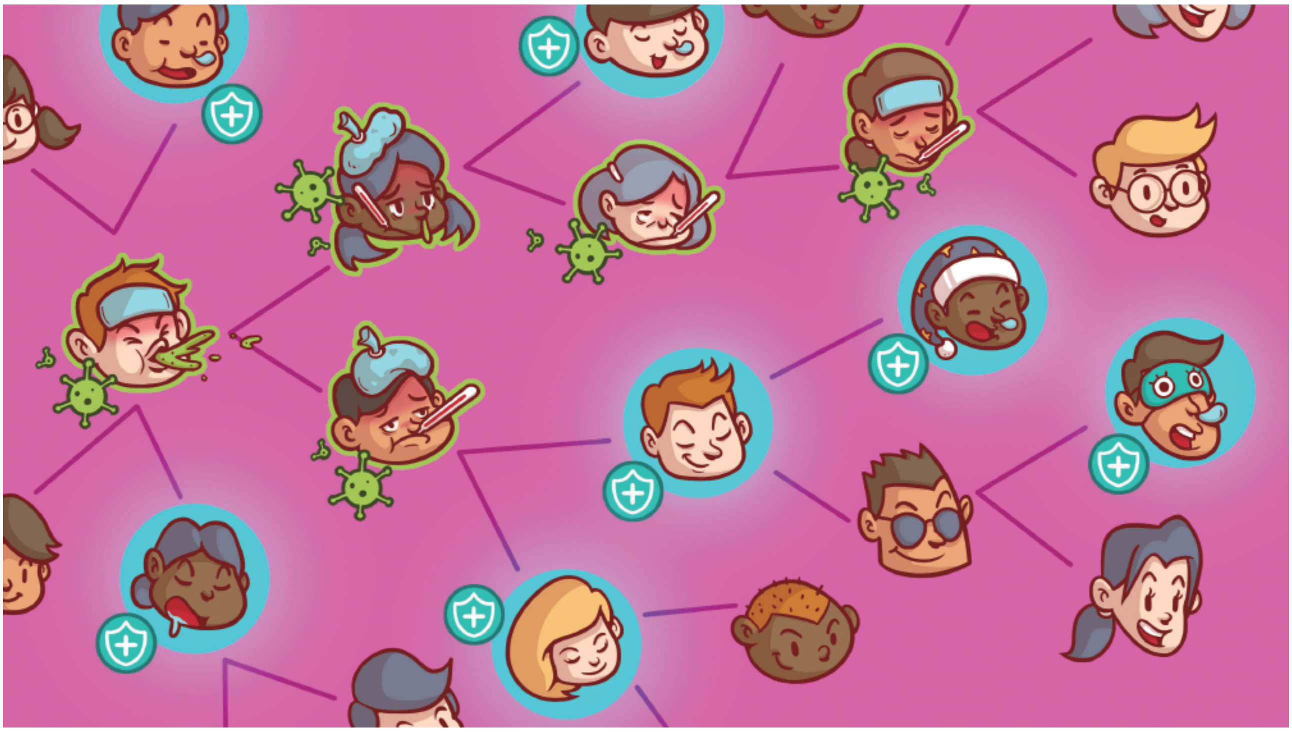
數

數學與疫苗如何確保你遠離流感？

簡單的數學揭示：如何以不需要全面的疫苗接種阻止疾病以指數形式散播，從而避免流行病爆發。

作者：洪納（Patrick Honner）　譯者：紀露結

作者簡介　洪納在布魯克林科技高中教授數學和計算機科學，他還擔任該校的教學教練。他是「為美國教數學」（Math for America）的專家級講師，而獲頒2013年美國的數學和科學教學卓越總統獎。他經常發表數學和教學的文章和演講。



（BIG MOUTH for Quanta Magazine 繪製）

請設想：你聽到一則令人興奮不已的謠言。你討厭嚼舌根，於是打定主意把謠言轉告某人後就把嘴巴閉上——這沒什麼嘛，對吧？你思忖：如果對方也一樣只再跟另一人說，這謠言不會散佈得太廣。掐指一算後你發現，如果每天有一個新人聽到這則謠言，30天後，包括自己僅有31個人知曉謠言。

你暗暗打算再多告知一人，沒想到這竟然會翻天覆地。如果每天剛聽到謠言的人在隔日就向另外兩個沒聽過謠言的人提起，那麼30天後世界上的1/4人都會知道這則謠言了。更精確地說，這可是 $2^{31}-1=2,147,483,647$ 人！你困惑不解：為何多告訴一個人，這不起眼的改變竟帶出迥然不同的結果——這其中的關竅在於變化率。

在第一種情況中，謠言的傳遞為「昨日有多少人聽到，今日也要有多少人聽到」。當然，曾經聽過的不算在內。這表示無論今日、明日或接下來多少天都好，每日聽到謠言的新增人數維持固定。在上述的例子中這個固定數為1。

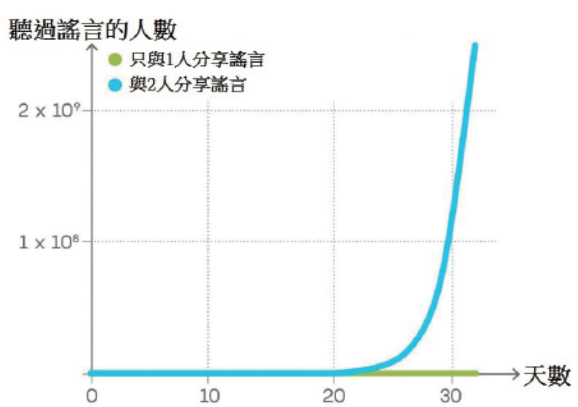
倘若謠言傳遞改變成「今日聽到謠言的人數是昨日的兩倍」，則得知謠言的人口數會以指數形式

Quanta Magazine 是西蒙斯基金會（Simons Foundation）出版但編輯獨立之網路科普雜誌（http://www.quantamagazine.org/），希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：
https://www.quantamagazine.org/flu-vaccines-and-the-math-of-herd-immunity-20180205/
本刊感謝 *Quanta magazine* 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。

爆增。讓我們掰起手指頭算一算：第一天兩個人聽到了，第二天又多了四個，第三天多了八個人，如此下去在第30天的時候，哇不得了，單是這一天就多了2^{30}個人！手指頭都不夠用了！（我們稍後再談及這之中省略了的現實考量）。

為什麼這兩種情況會有天差地遠的效果？追根究底，這差距來自線性函數與指數函數。線性函數的特徵是擁有固定的變化率，就好像第一種情況中每日新增人口維持在1。線性增長緩慢且平穩，增加量保持不變。指數函數則恰恰相反，其變化率以倍數增長：新增人口先是2個，再來是4、8、16、……。有別於線性增長，指數增長會加速，換句話說：增加量本身持續增加。

這就是30天後31人聽到謠言與2億人聽到謠言的區別。而這一切竟來源於謠言傳遞由1略增為2的微小更變。



此圖顯示每天聽到謠言的人數。藍色的指數函數往上延伸到2億，而綠色的線性函數相形之下幾乎呈水平直線。

這基礎數學模型成功捕捉到了特定種類增長的精髓；其影響之廣，遠超謠言散播這一例子。如同所有的基礎模型，這模型忽略化簡了許多複雜因素——例如謠言是否傳播得出去的機率、人口總數等——但這仍是個好的開端，我們可以由此探索想法是如何廣為流傳、人口是如何增長，乃至於疾病是如何散播的。

疾病傳染的方式與謠言傳開來的方式極為相似：某人染病開了端，接著傳遞給別人。當然，這之中還是存在著差異，只是以上的基礎數學模型皆適用於二者。在謠言散佈的簡單例子中，我們看到傳播率的細微改變可以帶來人數上的巨大變化——當我們討論疾病傳染時，這依然成立。若疾病每次感染一人，終究是零星個案，但如果每個患者一次可感染兩人，則會發展成流行病。

每一種傳染病在群體中的傳播率與該群體的生物、環境、社會因素息息相關。流行病學家嘗試將這些因素帶來的影響歸結成「基礎再生數」（basic reproduction number）。我們將疾病的基礎再生數記作 R_0，此為每個感染者可能會再造成的感染案例平均個數。在上述的謠言例子中，若每日只告訴一人，其基礎再生數 R_0 為1；若每日告訴兩人，其基礎再生數 R_0 為2。兩個情況的「傳染期」（infectious period）都是一天。

以下是一些廣為人知的疾病基礎再生數：

疾病	R_0
麻疹	12-18
天花	5-7
流行性腮腺炎	4-7
流行性感冒（1918年大流行的病毒株）	2-3

來源：美國傳染病中心與美國國立衛生研究院。

值得留意的是這些疾病的基礎再生數都大於1。這就是它們危險之處——如果一個感染者平均而言會至少感染兩個人，如此以往，感染者數量會以指數形式遞增。這將對人口產生破壞力強大的衝擊。我們不由得思索：是否可將指數增長變為線性增長？換句話說，我們是否能將基礎再生數降低到1？

此時，我們想到了疫苗接種——接種疫苗後，個體會對疾病產生抗體，從而避免感染疾病。但接種的成功率不固定，為了簡單起見，我們假設只要打了疫苗就可保證不染病。疫苗施打可以直接保護接種者之外，也能間接保護廣大群眾。如果為了對抗某種疾病，群體中有許多人接種了疫苗，那這疾病就無法快速傳播開來。

實際上，廣泛施打疫苗能降低疾病的有效再生數（effective reproduction number）。同時，如果有足夠

多的人接種了疫苗，有效再生數可以降到1，從而確保疾病只以線性速率傳播。所以問題來了：至少需要多少人接種疫苗才能把有效再生數降到1呢？

我們來想想基礎再生數告訴我們什麼。考慮某種 $R_0 = 2$ 的流行性感冒，這表示每個感染者平均會感染兩個人。這簡單的 $R_0 = 2$ 能透露許多資訊：疾病是如何輕易傳播的、傳染期的長度、感染者在特定期間內接觸的平均人數。瞭解了這數字的意義以後，我們很快能看到疫苗是如何降低基礎再生數的。

假設某人感染了 $R_0 = 2$ 的流行性感冒病毒，他在染病期間與10人接觸。我們將這畫成圖，並為感染者塗上綠色，置於中心，從他輻射出去的10個箭頭指向與他接觸的10人。

每個接觸者都有可能染上感，但實際上 $R_0 = 2$ 的意義為平均10人裡會有2人感染疾病。

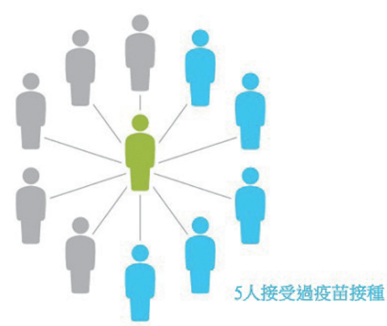
一般而言，我們能說每個接觸者有2/10或20%的機會染病。

但假設10個人中有2人接種了流感疫苗。為了方便討論，我們進一步假設疫苗能提供百分之百的保護，換句話說就是接種後不會染病。如此，剩餘的8人中依舊有20%的可能會染上流感——平均而言，感染者人數為 $0.2 \times \frac{8}{10} = 1.6$ 。

所以結論是：10個人中如果有2個接受了疫苗接種，那麼1個感染者平均只會感染1.6人。如此看來，疫苗接種能有效地把這疾病的基礎再生數從 $R_0 = 2$ 控制到 $R_0 = 1.6$。為了避免指數增長，我們應該如何再把基礎再生數降到1呢？

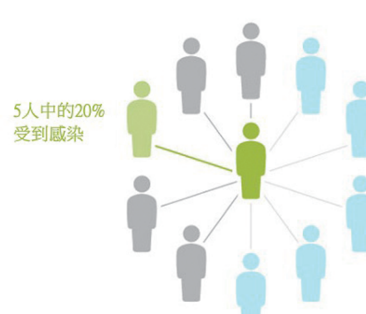
同樣的，我們再次假設最初感染者在感染期間與10個人接觸，且每個沒接受疫苗接種的人都有20%的機會被感染。現在假設10個人中有 V 個人接受了疫苗接種。我們會預期剩下的 $10 - V$ 個人中平均會有20% 的人被感染，也就是 $0.2 \times (10 - V)$ 個人。為了避開指數增長而使疾病呈線性增長，新增感染者的平均數需為1，因此我們待解的方程式為：$0.2 \times (10 - V) = 1$ 。

簡單的代數運算得方程式的解為 $V = 5$。讓我們回頭瞧瞧10個人中有5個疫苗接種者的情況。圖中塗上藍色的是接種過疫苗的人。



基本上我們可以不用擔心這五個藍色的人，因為疫苗能確保他們不受感染。

現在剩餘的5個人他們仍有20%的感染機率，這表示感染者平均為1人。換句話說就是原本的10個接觸者中只有1人被感染。所以只要每10個人有5個人接受疫苗接種，那我們就能有效地將這種疾病的基礎再生數 R_0 降到1。



以上的過程可以被推廣到任何的基礎再生數 R_0。假設每個感染者在每段傳染期接觸 N 個未被感染的人，那我們可以預期平均會有 R_0 個人被感染。但如果這 N 個人當中有 V 個人接種過疫苗，則新增的感染人數變成了：

$$\frac{R_0}{N}(N-V)$$

我們希望基礎再生數為 1，所以需要解的方程式即為：

$$\frac{R_0}{N}(N-V)=1$$

比起將 V 算出來，計算 V/N 更有意義，因為這代表人口中接受疫苗接種的百分比。簡單的乘法與移項得出：

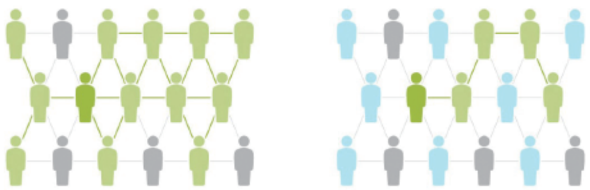
$$\frac{V}{N}=1-\frac{1}{R_0}$$

這顯示如果人口中接受疫苗接種的百分比是 $1-1/R_0$ 那麼平均新增感染者就會是 1 人。所以 $1-1/R_0$ 是神奇的百分比，它能控制疾病，使之維持線性增長而非指數增長。

如果總人口中接受疫苗接種的百分比達到 $1-1/R_0$ 在這種程度下群體對疾病達成了集體免疫 —— 這並非意味不再會有人感染疾病，而是疾病無法在群體中以指數速率傳播。這種特性稱作「群體免疫」(herd immunity)。我們將達成群體免疫所需接受疫苗接種的人數百分比稱為「群體免疫臨界值」(herd immunity threshold, HIT)。以下是各種疾病的群體免疫臨界值：

疾病	R_0	$1-1/R_0$	HIT
麻疹	12	$1-1/12$	91.7%
天花	5	$1-1/5$	80%
流行性腮腺炎	4	$1-1/4$	75%
流行性感冒	2	$1-1/2$	50%

明顯的，對疾病的疫苗接種不只對接種者帶來好處，也能惠及整個群體。達到群體免疫臨界值時，疾病在群體中的傳播速率低到可以避免潛在的災難。廣泛施打疫苗將左圖有許多可能傳播路徑的情況轉變成右圖中較少傳播路徑的情況。這意味著疾病傳播得慢且爆發成流行病的機率大為降低。



群體免疫的一個重要性質是能保護群體中沒有接受疫苗接種的人。當疾病無法廣泛傳播，群體中每個人的風險降低了，這當然包括沒有接受疫苗接種的人。這對醫生不建議施打疫苗的族群例如嬰兒、年長者以及身體衰弱的人特別重要。雖然我們之前假設了疫苗肯定能發揮功效，但即便疫苗的效用沒有達到百分百，群體免疫的好處仍能發揮——廣泛施打疫苗還是能減低每個感染者所引起的平均感染個數，並由此降低疾病的有效再生數。

我們見識過了線性增長與指數增長的巨大差異。當我們談及疾病傳播時，這可是人命關天的事。疫苗接種與群體免疫所蘊涵的數學是重要的，所以快告訴你的朋友吧！說到這，與其只告訴 1 人，不如向 2 個朋友分享？讓它以指數形式傳遞出去吧。

本文出處

Quanta Magazine February 5, 2018。

譯者簡介

紀露結現就讀於臺灣大學數學研究所。

延伸閱讀

讀者可在下列網址下載學習單：
https://d2r55xnwy6nx47.cloudfront.net/uploads/2018/02/SafetyInNumbers_Worksheet.pdf 。