

最小曲面的黃金年代

柯丁 / 米尼庫齊理論

作者：裴瑞茲 (Joaquín Pérez) 譯者：王夏聲

作者簡介：裴瑞茲是西班牙格蘭納達大學的數學與拓樸學教授與數學研究所 (IEMath-GR) 的主任。該研究所是屬於西班牙國家研究委員會所設的四個數學研究所其中之一。他也是西班牙皇家數學學會的國際關係委員會的一員。

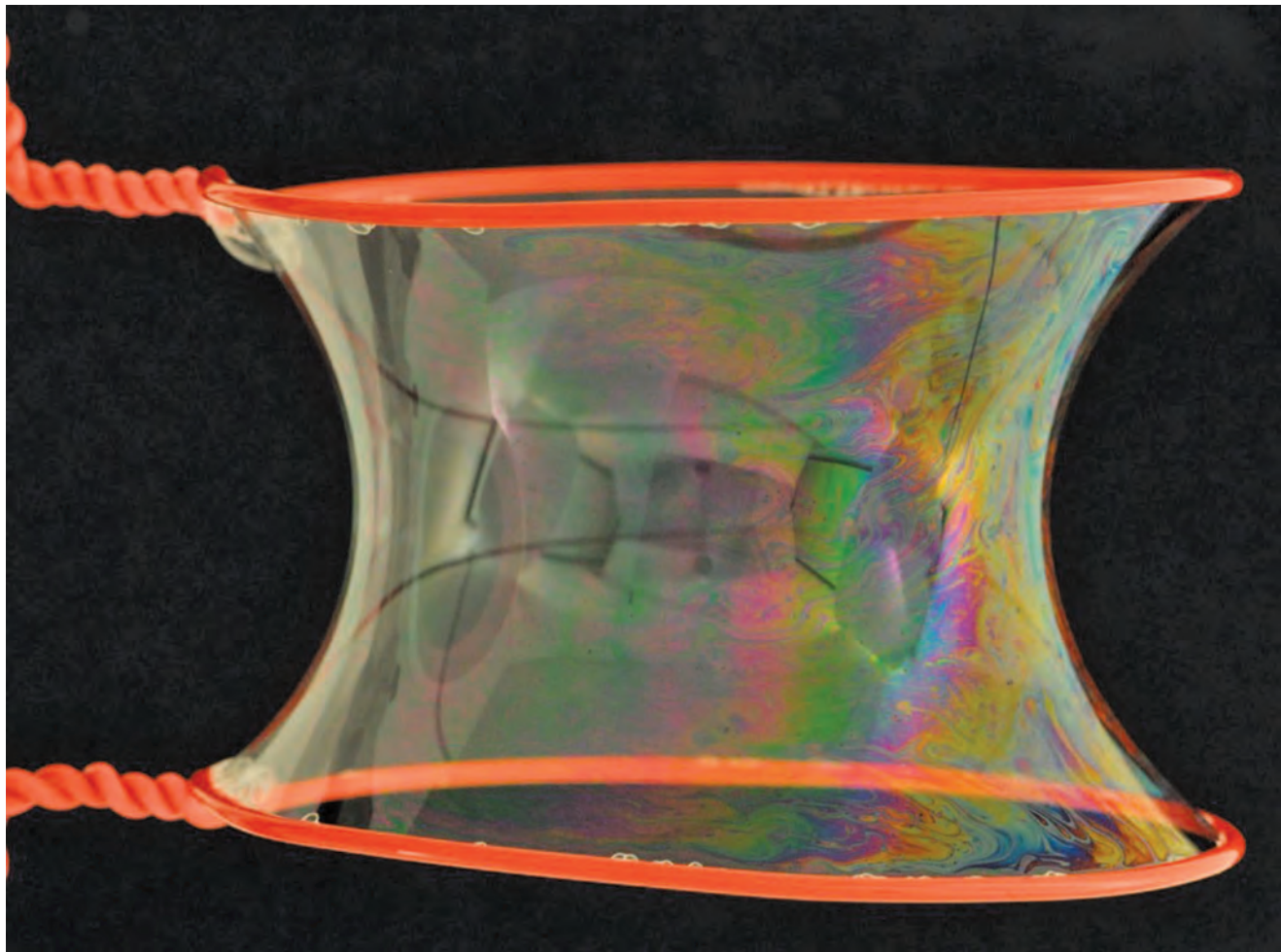


圖 1：像這肥皂膜一樣，最小曲面可以由在小區域內給定邊界時面積是最小的性質所刻畫。(soapbubble.dk)

簡介

最小曲面就像圖 1 中的肥皂膜一樣，可由以下述性質所刻畫：當給定邊界時，它局部的面積是最小的，即使整個曲面本身可能是不穩定 (stable) 的。最初，僅有平面、1741 年歐拉發現的懸鏈面 (catenoid) 以及 1776 年穆斯尼爾 (Jean Meusnier) 發現的螺旋面 (helicoid) (見圖 2) 這

些例子。

歷史上許多偉大的數學家都曾面對過最小曲面問題的挑戰，其中有一些數學家在相對確定的時期內獲得了驚人的進展，而促成了最小曲面的黃金年代：

第一個約發生在 1830 ~ 1890 年間，當時著名的數學家，如恩納朴 (Alfred Enneper)，謝爾克 (Heinrich Scherk)，史瓦茲 (Hermann Schwarz)，

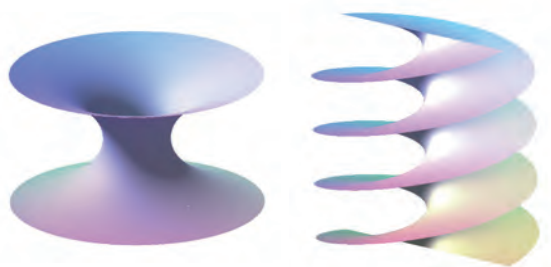


圖 2：(左) 最初發現的最小曲面有歐拉在 1741 年發現的懸鐘面，(右) 1776 年穆斯尼爾發現的螺旋面。

黎曼和懷爾斯查司 (Karl Weierstrass) 在最小曲面的理論上取得了重大進展。這是以應用了當時才新創建的複分析領域為工具，提供了一般最小曲面的解析表達式。這在同一時期，普拉托 (Joseph Plateau) 對於給定封閉曲線下，關於肥皂膜表面張力面積最小化問題的基礎研究賦予了物理詮釋，這使得這種最小化問題的超越了數學範圍，從那時起，慣例上就稱為普拉托問題。

最小曲面的第二個黃金時代約發生在 1914 年到 1950 年間，隨同著初創的偏微分方程理論一起發展。這裡，我們強調下列數學家的貢獻：伯恩斯坦 (Sergei Bernstein)，庫朗 (Richard Courant) 道格拉斯 (Jesse Douglas) (他在 1936 年因為解了普拉托問題而榮獲第一屆費爾茲獎^①)，莫瑞 (Charles Morrey)，莫爾斯 (Marston Morse)，拉多 (Tibor Radó)，和希夫曼 (Max Shiffman)。

第三個黃金時代開始於 1960 年代，當時的巨匠，如艾姆格林 (Frederick Almgren)，艾爾特 (Hans Alt)，卡拉比 (Eugenio Calabi)，杜卡莫 (Manfredo do Carmo)，陳省身，費德勒 (Herbert Federer)，范 (Robert Finn)，弗萊明 (Wendell Fleming)，蓋格斯台特 (Fritz Gackstatter)，格列佛 (Robert Gulliver)，哈特 (Robert Hardt)，希爾德布蘭特 (Stefan Hildebrandt)，詹金斯 (Howard Jenkins)，勞森 (Blaine Lawson)，尼采 (Joachim Nitsche)，奧瑟曼 (Robert Osserman)，瑟林 (James Serrin)，賽門 (Leon Simon) 與西蒙斯 (James Simons) 等人，由黎曼面 (Riemann surface) 到幾何測度論 (geometric measure theory) 的多種技術，經由可積系統 (integrable system)、共形幾

何 (conformal geometry) 及泛函分析 (functional analysis)，開拓了新的研究路徑。電腦的出現對上世紀 80 年代所新發現的許多沒有自我相交 (self-intersection) 的完備 (complete) 最小曲面至關重要。而這些新發現的豐富例子，又引出了關於給定拓撲最小曲面族的結構與分類的新問題和猜想。最近的主要貢獻者太多，無法一一在此列出。

在本文中，就與之前的里程碑一樣，我們希望讓讀者相信，我們正在見證最小曲面理論的黃金年代的開始。這是主要受益於 2004 年發現的新工具——柯丁 / 米尼庫齊理論 (Colding-Minicozzi theory)。這是發表在同一期《數學年刊》[2] 的一系列令人印象深刻的四篇文章中。其中分析了在不對面積或曲率強加先驗一致上界的嵌入最小圓盤序列收斂性。我們將概述這個理論如何幫助解決那些直到最近還一直被認為是無法切進的問題。考慮到應對所有預測該有所質疑與保留的前提下，我們將大膽嘗試揭露這領域中一些最有趣的未解問題。

為了在有限的篇幅內達到這些目標，我們必須付出不夠詳細的代價。有興趣的讀者可以參考很多相關的文章、書籍以及一些書籍的章節，滿足他們的好奇心，例如柯丁 (Tobias Colding) 和米尼庫齊 (William Minicozzi) 的書 [1] 或密克斯 (William Meeks) 和作者的簡介論文 [3]。

基本結果

^① 因黎曼面理論的研究工作，阿爾弗斯 (Lars Ahlfors) 也在同年獲獎。

最小曲面理論是許多數學分支領域的匯合。根據我們最熱衷的理論，我們可以至少八種不同但等價的方式來定義最小曲面。

假設 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是黎曼曲面 (Riemannian surface) 在 3 維歐氏空間中的等距浸入 (isometric immersion)，而 $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ 是它的單位法向量 (unit normal) 或高斯映射 (Gauss map) (這裡 $\mathbb{S}^2(1)$ 表示半徑為 1 以 \mathbb{R}^3 的原點為球心的球面)。如果我們通過一個有緊緻支集 (compact supported set) 的光滑函數 $f \in C_0^\infty(\Omega)$ 在一個相對緊緻 (relatively compact) 的區域 $\Omega \subset M$ 擾動，那麼只要 $|t| < \epsilon$ 和 $\epsilon > 0$ 足夠小， $X + t f N$ 仍然是浸入曲面。通過對 X 的面積公式的一次變分 (first variation of area formula)，

$$1 \quad A'(0) = -2 \int_{\Omega} f H dA$$

其中 dA 是 M 的面積元素，建立了 X 的均曲率 (mean curvature) (主曲率 [principal curvature] 的算術平均值) $H \in C^\infty(M)$ 與 X 的面積泛函 (area functional) $A(t) = \text{Area}((X + t f N)(\Omega))$ 的關聯。現在我們可以敘述最小性的兩個等價定義。

定義 1：如果曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是面積泛函對所有有緊緻支集變分的關鍵點 (critical point) 時，則它是最小曲面。

定義 2：如果曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的均曲率等於 0 時，則它是最小曲面。

在旋轉後，每一曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 局部都可以看成一

可微分函數 $u = u(x, y)$ 的圖形。在 1796 年拉格朗日 (Joseph Lagrange) 對於曲面是函數圖形的情形，透過計算面積泛函關鍵點推導出了相對應的偏微分方程，從而奠定了變分學 (calculus of variation) 的基礎。

定義 3：如果在曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的任何一點附近可以表示成函數 $u = u(x, y)$ 的圖，而且滿足 2 階半線性橢圓偏微分方程式 (second order, quasi-linear elliptic partial differential equation)

$$2 \quad (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

時，則它是最小曲面。

上式可也改寫成散度型式 (divergence form)

$$3 \quad \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

如果忽略 3 式的分母中的梯度項，就得出著名的拉普拉斯方程式 (Laplace equation)。這意味著在小範圍內 (這裡指的是：當 u 非常接近常數時)，最小曲面承繼的調和函數的諸多性質：最大值原理 (maximum principle)、哈納克不等式 (Harnack's inequality) 等等。在大範圍上，拉普拉斯和最小曲面方程的全域解表現出來的方式則有戲劇性的變化。也許這區隔的典範例子是伯恩斯坦定理 (Bernstein's theorem)：在全平面上都有定義 3 的唯一解是仿射函數 (affine function)，然而有許多定義在全平面的調和函數。

由面積泛函的 2 次變分表達式 $A''(0)$ 可以推知最小曲面在局部的面積是最小的。這性質讓這些曲面的最小二字有了正當性。但不要與更強的限制——

全域面積最小——混淆：仿射平面（affine plane）在 \mathbb{R}^3 中的唯一全域面積最小的完備曲面。

定義4：如果對 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的點 $p \in M$ 都存在一鄰域，使得在此鄰域內與 M 有相同邊界的任何曲面比較時， M 的面積最小時，則（eigenvalue）是最小曲面。

定義1與4說明了最小曲面是黎曼幾何（Riemannian geometry）測地線（geodesic）的2維類比，它們的連繫是變分學（calculus of variation）。另一重要的泛函是能量

$$E = \int_{\Omega} |\nabla X|^2 dA$$

這裡 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 等距浸入，而 $\Omega \subset M$ 是相對緊緻區域。面積與能量的關係是來至於不等式 $E \geq 2A$ ，而等式僅能在 X 是共形（conformal）時成立。已知每個黎曼曲面都承認局部共形（等溫〔isothermal〕）坐標，由此我們可以給出另外兩個最小的等價定義。

定義5：如果共形浸入（conformal immersion） $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是能量泛函在任何有緊緻支集變分的關鍵點；或者，換句話來說， M 上任何一點 $p \in M$ 都存在一鄰域，使得在此鄰域內與 M 有相同邊界的任何曲面比較時， M 的能量最小時，則 M 是最小曲面。

將等距浸入 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的拉普拉斯算子（Laplacian）與它的均曲率 H （mean curvature）

以及高斯映射（Gauss map） M 連結起來的是經典等式 $\Delta X = 2HN$ 。這帶出了下一個的定義。

定義6：如果 $X = (x_1, x_2, x_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是黎曼曲面等距浸入到3維歐氏空間，而且它的坐標分量函數 $x_i, i = 1, 2, 3$ 都是調和函數（harmonic function），也就是說 $\Delta x_i = 0, i = 1, 2, 3$ ，則 M 是最小曲面。

從物理角度來看，所謂的楊方程（Young's equation）描述到，分離兩種介質的表面的均曲率代表了介質之間壓力的差異。當兩種介質處於相同壓力下時，將它們分開界面的面積是最小的。在將線框（數學上，不一定是平面約當曲線〔Jordan curve〕）浸入肥皂水中之後，這種情況就會發生。然而，我們都吹過的肥皂泡，它們有非零的常數均曲率，這是因為它們包圍了一定體積的空氣，而它的壓力大於大氣壓力。

定義7：如果 M 上任何一點 $p \in M$ 都存在一鄰域， M 與以此鄰域邊界的線框所圍出的肥皂膜重疊，則 M 是最小曲面。

為了給出最後的定義，請記住高斯映射 N 在每一點 $p \in M$ 的微分 dN_p 是切平面 $T_p M$ 的自伴自同態（self-adjoint endomorphism）。因此，存在一由切平面 $T_p M$ 的主曲率方向（principal direction）組成的單範正交基底（orthonormal basis），使得 dN_p 對這組基底的矩陣表達是對角方陣，且 dN_p 的特徵值（eigenvalue），也就是所謂 M 在 p 的主曲

率 (principal curvature)，是相反數。由於均曲率 H 是主曲率的算術平均數，因此 M 是最小曲面等同於 dN_p 的跡 (trace) 是 0。亦即，對任何 $T_p M$ 單範正交基底， dN_p 的矩陣表達式是

$$dN_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

的形式。

在將 N 視為到黎曼球面的球極平面投影 (stereographic projection) 後，柯西 / 黎曼方程 (Cauchy-Riemann equations) 允許我們闡明第八個等價版本。

定義 8：如果曲面 M 的球極平面投影高斯映射 $g: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是亞純 (meromorphic) 時，則 M 是最小曲面。

事實上，對於任何最小曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ ，不但它的高斯映射是亞純的，整個浸入也可以以全純訊息 (holomorphic data) 表達。因為曲面 M 的第 3 個分量坐標函數 x_3 是調和函數，所以存在一共軛調和函數 x_3^* 。得到高度微分形式 (height differential) $dh := dx_3 + idx_3^*$ 是在 M 上可明確定義的全純微分 1 型式。而曲面可由明確的公式：

$$X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(p) = \Re \int_{p_0}^p \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) dh$$

共形參數式描述。這裡， \Re 指的是取實部，而 p_0 是選自 M 的一點使得 $X(p_0)$ 是 \mathbb{R}^3 的原點 (也就是說， X 是透過一在空間的平移後，由式 4 定義)。我們稱 (g, dh) 為 M 的懷爾斯查司資料

(Weierstrass data)。

最小曲面經常出現在自然界中，不僅在肥皂膜中，在相同壓力下分隔不混溶流體 (immiscible fluid) 的界面。或者更一般的來說，例如：在二嵌段共聚物 (diblock copolymer) 中，層列型液晶 (smectic liquid crystal) (在每層內具有均勻間隔層且具有流體狀順序的材料)，晶體學 (crystallography)，半導體技術，……甚至在某些昆蟲的翅膀鱗片中的表皮結構！見圖 3。



圖 3：(左) 在二嵌段共聚物體系中觀察到了螺旋二十四面體 (A. Schoen, 1970)；(右) 自然常常在周長和面積方面尋求最佳形式，例如最小曲面。(Maria Taimina)

這類曲面的最小化特殊性質，啟迪了著名建築師，如奧托 (Frei Otto)，使用它們來設計最佳結構，例如慕尼黑奧林匹克體育場 (圖 4)。這類結構平衡形式之美，喚起了恩格曼 (Robert Engman) 和朗赫斯特 (Robert Longhurst) 等雕塑家的興趣。純粹以數學觀點來看，關於其他非歐氏空間的環境空間中最小曲面的研究，也引發了許多大異其趣問題的應用，如數學物理中的正質量猜想 (positive mass conjecture) 和彭羅斯猜想 (Penrose conjecture)，3 維球體有限階微分同態 (diffeomorphism of finite order on 3-dimensional sphere) 的史密斯猜想 (Smith conjecture)，以及瑟斯頓在 3 維流形理論中的幾何化猜想。



圖 4：奧托模仿最小曲面的慕尼黑奧林匹克體育場。（維基·Fritz Geller-Grimm 攝）

經典的最小曲面理論

所謂的經典理論，指的是在 \mathbb{R}^3 中連通（connected）、可定向（orientable）、完備而且嵌入（embedded）最小曲面的理論研究。記 \mathfrak{M}_C 為所有完備、有限虧格和嵌入最小曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的集合。為了理解「有限虧格」這一個名詞，請回顧一下，調和函數的最大值原理意味著在 \mathbb{R}^3 中不存在沒有邊界的緊緻最小曲面。因此，完備的最小曲面必須具有拓樸末端（topological end）（粗略的說，在曲面上以內蘊方式來看，它趨向無窮遠的方式）。將每一末端加一點，對最小曲面 M 作拓樸緊緻化（compactification）後，我們定義 M 的虧格等於它拓樸緊緻化後的虧格。如果 $g \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ 和 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ，我們記 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 等於那些有 g 個虧格和 k 個末端的曲面所組成的集合，它是 \mathfrak{M}_C 的子集合。當曲面的 g 和 k 都是有限時，我們稱它有有限拓樸（finite topology）。

當在曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 上的任何內蘊發散的點列同時也在 \mathbb{R}^3 是發散的點列時，我們稱 M 是正常（proper）的。粗略地說，當一完備曲面的拓樸末端是位於 \mathbb{R}^3 無窮遠處時，則曲面是正常的。

一無限長的紙纏繞一無限的圓柱體無限多次，但非正常曲面的例子。記所有正常最小曲面所構成的集合為 \mathfrak{M}_P ，它是 \mathfrak{M}_C 的子集合。而且記 $\mathfrak{M}_P(g, k) = \mathfrak{M}_P \cap \mathfrak{M}_C(g, k)$ 。

我們在這一節中的目標是描述這些系列中最小曲面的主要例子，著重於它們的拓樸，共形結構，漸近行為和主要的分類結果。在我們描述這些結果的同時，我們也將會討論一些最有趣的未解問題。

具有有限拓樸類型的完備最小曲面

這個類型中的無聊（trivial）例子是平面。最小曲面的第一個非無聊（non-trivial）的例子（圖 2）屬於這一類：歐拉在 1741 年發現的懸鏈面（0 虧格和 2 末端）和 1776 年由穆斯尼爾發現的螺旋面（0 虧格和 1 末端）。兩個曲面各自都有許多不同的刻畫。在那些中最經典的結論中，我們將提到的是歐拉的結論：平面與懸鏈面是唯一的旋轉最小曲面；與卡塔蘭（Eugène Catalan）的結論：螺旋面和平面是唯一的直紋最小曲面（ruled minimal surface）。

在這個系列的例子中，特別值得一提的是科斯達環面（Costa torus），這是在前面提到的例子之後（206 年之後！）發現的第一個完備有限拓樸的嵌

入最小曲面，它具有 1 虧格和 3 末端，並且霍夫曼（David Hoffman）和密克斯發現推廣，可以用類似的方法構造任何有限 $g \geq 3$ 虧格，也有 3 末端的最小曲面，見圖 5。

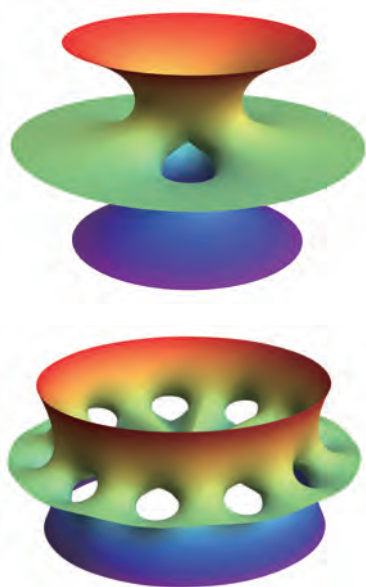


圖 5 (上) 科斯塔環面；(下) 霍夫曼 / 密克斯曲面。

在有限拓樸的情況下，關於 \mathfrak{M}_C 和 \mathfrak{M}_P 之間的關係，我們將強調一個柯丁和米尼庫齊理論深刻的結果，它主張每個完備有限拓樸的嵌入最小曲面都是正常的。證明是柯丁和米尼庫齊的著名理論的應用，我們將在稍後討論這個話題。

關於我們對有限拓樸的情況的討論，我們將根據最小曲面的末端數是一個還是多於一個來區分兩個子類。

有限虧格和 1 個末端的曲面：在 2005 年，密克斯和羅森堡（Harold Rosenberg）應用柯丁 / 米尼庫齊理論來證明平面和螺旋曲面是 $\mathfrak{M}_P(0, 1)$ 中唯一可

能的例子。也就是說，他們給出了單連通（simply connected）且正常嵌入（properly embedded）的最小曲面的完整分類。依據上述柯丁和米尼庫齊關於正常性的結果，同樣的唯一性結論在 $\mathfrak{M}_C(0, 1)$ 中同樣成立。至於當 $1 \leq g < \infty$ 屬於 $\mathfrak{M}_P(g, 1) = \mathfrak{M}_C(g, 1)$ 的曲面的漸進行為，伯恩斯坦（Jacob Bernstein）和布萊納（Christine Breiner）在 2011 年證明了任何屬 $\mathfrak{M}_P(g, 1)$ 的曲面是趨近到一螺旋曲面而且是共形拋物的^②（conformally parabolic）。因此，屬於 $\mathfrak{M}_P(g, 1)$ 的曲面稱他們為虧格 g 的螺旋曲面（helicoid of genus g ）。值得一提的是，在這一方面關於存在的結果，霍夫曼，韋伯（Matthias Weber）和沃爾夫（Michael Wolf）在 2009 年發現了一個帶有菱形環面（rhombic torus）扣掉一點的共形結構類型的螺旋面，並且霍夫曼，崔才特（Martin Traizet）和懷特（Brain White）^③ 在 2016 年證明了：對每個有限 $g \geq 1$ ，存在 $\mathfrak{M}_P(g, 1)$ 類型的例子。關於在給定虧格時， $\mathfrak{M}_P(g, 1)$ 類型例子唯一性的可能是一個重要未解問題：該唯一性在 $g = 0$ 的情況下是已知的。而猜想虧格 $g \geq 1$ 的螺旋曲面都是唯一，但即使是該結果的局部版本也是未知的。

有限虧格和 k 個末端的曲面， $2 \leq k < \infty$ ：在這種情況下，主要的結構性的結果是科林（Pascal Collin）在 1997 年證明的：如果當 g 和 k 都是有限的， $M \in \mathfrak{M}_P(g, k)$ 且 $k \geq 2$ ，則 M 屬於一已

② 當曲面上不存在一非常數且非正的劣調和函數（subharmonic function），稱曲面是共形拋物的。

③ 編註：D. Hoffman, M. Traizet and B. White, *Helicoidal minimal surfaces with prescribed genus*, Acta Math. 216 (2016) 217-323。

被深入研究的類型——有限總曲率（finite total curvature）的曲面。也就是那些高斯曲率（Gaussian curvature） K 是可積（integrable）的曲面

$$\int_M K dA = - \int_M |K| dA > -\infty$$

請注意，由於均曲率（主曲率之和）為零，因此高斯曲率（主曲率的乘積）是非正的。依據之前胡博（Alfred Huber）與奧瑟曼的研究，由 5 可知 M 與一移掉 k 點後的虧格 g 緊緻黎曼面 \mathbb{M} 共形等價的。特別的是， \mathbb{M} 是共形拋物的，而且都可以把高斯映射 $g: M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 以及 M 的高度微分形式 dh 全純延拓定義到 \mathbb{M} 。就某種程度而言，基於在 \mathbb{R}^3 中完備的最小曲面不是緊緻的，這些有限總曲率的最小曲面是最接近緊緻的。這容許我們使用複分析和緊緻黎曼面的代數幾何強大工具。

這些最小曲面的漸近行為也是眾所周知的：每一末端都是漸近到平面或半懸鏈曲面。關於唯一性結果，我們著眼於以下幾點：

1. 1983 年，孫理察證明了：如果 $M \in \mathfrak{M}_C(g, 2)$ 且總曲率是有限的，則 M 是懸鏈面。這是著名的亞歷山卓夫移動平面的反射方法（reflection method of moving planes of Alexandrov）的應用，而後者則是依據方程式 2 的最大值原理。
2. 1991 年，洛佩茲（Francisco López）與羅斯（Antonio Ros）證明了：在 $\mathfrak{M}_C(0, 2)$ 中，除了平面外，懸鏈曲面是唯一的 minimum 曲面。證明的想法仍是應用最大值原理到現在稱為洛佩茲 / 羅斯形變（López-Ros deformation）。洛佩茲 / 羅斯形變是依據

一最小曲面的懷爾斯查司資料 (g, dh) 所定義出的最小曲面的單參數族（1-parameter family）。裴瑞茲 / 羅斯形變僅在某種關於原曲面的通量（flux）映射的假設下存在 4。

3. 1984 年，科斯塔（Celso Costa）將屬於 $\mathfrak{M}_C(1, 3)$ 且全曲率是有限的 minimum 曲面分類化簡到科斯塔環面，或者是由霍夫曼和米克斯發現的經由去掉 3 點的科斯塔環面形變的單參數環面族（之後由霍夫曼和凱徹〔Hermann Karcher〕持續研究）。

前述科斯塔的結果是第一次對於非僅化簡為單一 minimum 曲面的模空間（moduli space） $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 有完整的描述： $\mathfrak{M}_C(1, 3)$ 具有可視為開區間的非緊緻 1 維流型結構。在外加一個假設會影響在 minimum 曲面 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 上的雅可比函數（Jacobi function）所組成的線性空間是非退化（nondegeneracy）條件下，也就是說，它們是在 M 上的 2 階線性橢圓方程式

$$\Delta u - 2Ku = 0$$

的解空間（這裡 $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ ，而 K 是 M 的高斯曲率），1996 年作者和羅斯推廣這一結果：賦予了每一 minimum 曲面 $M \in \mathfrak{M}_C(g, k)$ 的周圍，模空間 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ ($0 \leq g < \infty, 2 \leq k < \infty$) $k-2$ 維的微分結構。到目前為止， $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 中的所有已知例子都滿足這種非退化性假設。我們強調在 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 中非退化 minimum 曲面空間的維數與虧格數 g 無關，而只取決於末端數 k 。

4 一 minimum 曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的通量指的是線性映射 $F: H_1(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。對任何 1 維同調類（1-dimensional homology class）以及任何代表 $c \in [c]$ ，沿著任何垂直於 c 的 M 單位切向量場積分。在 M 上，裴瑞茲 / 羅斯形變可精確定義的充分條件是 F 取值最多是 1。

一個主要的未解問題是霍夫曼 / 密克斯猜想 (Hoffmann-Meeks conjecture)：如果 $M \in \mathfrak{M}_C(g, k)$ 則 $k \leq g + 2$ 。到目前為止，這方面最好已知的結果是由密克斯，作者和羅斯 (2016)，他們再次通過應用柯丁 / 米尼庫齊理論證明了 k 的上界僅取決於 g 。

另一個重要的未解問題包含了決定是否在某些模空間 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 中存在不滿足上述非退化條件的最小曲面；如果它們的確存在，則為這一奇點的最小曲面附近賦予模空間 $\mathfrak{M}_C(g, k)$ 任何「合理」結構（作為一個軌形 (orbifold) ？）。

具有無限拓樸結構類型的最小曲面

接下來，我們考慮有無限拓樸的經典最小曲面的範疇，也就是說，那些有無限多末端或無限多虧格的最小曲面。在這族中最基本的例子是由黎曼在 19 世紀發現的（在黎曼過世後，由他的學生哈騰多夫 [Karl Hattendorf] 整理出版），由一單參數族的正常嵌入最小曲面組成，對一平移不變，0 虧格和無限多末端漸近於等距平行的平面。黎曼的例子有以下令人著迷的特徵：與平面，螺旋面和懸鏈面一起，它們是 \mathbb{R}^3 中獨特以平行平面上的圓和直線為葉層 (foliated) 的正常嵌入最小曲面（實際上，黎曼就是經由以假設有這個性質的方式而發現這些例子），見圖 6。

黎曼的例子顯示了如何將曲面的周期性視為產生無限拓樸的例子方法：如果等距群 (isometry group) 的商曲面 (quotient surface) 不是單連通的，則 \mathbb{R}^3 中的舉升曲面 (lifted surface) 具有無限拓樸。

同樣情形也發生在 19 世紀發現的最小曲面的其他最小曲面的其他例子，就如圖 6 所展示的例子：

1. 單週期謝爾克最小曲面（圖 6 中左起第二個）是對平移生成的循環群 (cyclic group) 作用下不變的。在循環群作用後的商曲面有 0 虧格和 4 個末端（分別漸近到半平面；這些末端稱為謝爾克型末端 (Scherk type end)）；從 \mathbb{R}^3 看，這曲面有無限多虧格和 1 末端。我們可以這麼解讀這個例子是由兩個互相垂直的平面，通過引入無限多個交替的孔，與沿著它們的相交的線的平面形成 45° 角而消除奇點 (desingularization)。與黎曼例子的情況一樣，單週期謝爾克最小曲面可以經由以角度 $\theta \in (0, \pi)$ 相交並消除奇點的兩個平面而變形獲得單參數族的單週期，正常嵌入最小曲面）。
2. 雙週期謝爾克最小曲面（圖 6 中左起第三個）對於由兩個不同方向的平移所生成的無限群是不變的。商曲面同樣有 0 虧格和 4 謝爾克型末端；在 \mathbb{R}^3 來看，這曲面有無限多虧格和 1 末端。它可以被解讀為是由兩個族的無限多等間距垂直的半平面在消除奇點後而得到。其中一個族在上半空間 $\{(x, y, z) | z > 0\}$ ，另一族在下半空間 $\{(x, y, z) | z < 0\}$ 以這種方式，不同族的半平面相互垂直。這個最小曲面也屬於一單參數族的正常嵌入的雙週期最小曲面，每個曲面都在的 \mathbb{R}^3 上半開空間和下半開空間中對兩個無限的垂直半平面系列進行消除奇點而得到的，這裡的參數是兩個族中的半平面之

間的夾角 $\theta \in (0, \pi)$ 。單週期和雙週期的謝爾克最小曲面之間存在一個直接的關係，這就是反應了每個調和函數都有（在局部）一個對應的共軛調和函數的事實。

3. 三週期史瓦茲 P -曲面（圖 6，右）對於由三個線性獨立向量的平移所生成的群是不變的。對應於這個平移晶格群的商曲面是具有 3 虧格的緊緻曲面，並且存在於 3 維立體環面（three-dimensional cubic torus）中；從 \mathbb{R}^3 看，這曲面有無限多虧格和 1 末端。史瓦茲 P -曲面是最著名的三週期性最小曲面（triply periodic minimal surface）之一。這一類曲面在結晶學（crystallography）和材料科學有許多的應用：每個三週期性最小曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的等距群是一晶格群（crystallographic group），而 M 在秩（rank）為 3 的晶格群（lattice group） Γ 作用下是不變的，這裡的商曲面將 3 維環體 \mathbb{R}^3/Γ 分割成有相同體積稱為迷宮（labyrinth）的兩個區域。螺旋 24 面體（gyroid）（圖 3，左）是另一個著名的三重週期最小曲面，具有 3 虧格緊緻商曲面。對於那些三週期嵌入最小曲面中，具有 3 虧格的緊緻商曲面（最低可

能的非無聊值）的分類是另一個主要的未解問題。

有鑑於上述的例子，我們可以問自己，是否構造具有無限拓樸的最小曲面的唯一方法是強加週期性的假設？答案是否定的，如 2007 年由奧斯威斯（Laurent Hauswirth）和帕卡（Frank Pacard）所示，他使用黏合技術⁵將一個霍夫曼 / 米克斯最小曲面（我們在「具有有限拓樸類型的完備最小曲面」小節中，描述 $\mathfrak{M}_C(g, 3)$ 中的例子時，有提到這些曲面）與黎曼最小曲面 \mathcal{R} 的上、下兩半分別黏合起來。在圖 7（左）中，我們可以看到奧斯威斯和帕卡的一個例子的示意圖，其中用來黏合的中央的曲面是科斯達環面（也就是說，虧格 $g = 1$ ）。同樣也是利用黏合技術，但是曲面是具有節點（node）的黎曼曲面，崔才特在 2012 年能夠證明存在一非週期性的完備最小曲面，具有無限多虧格並且有無限多個末端漸近於半懸鏈面（圖 7 右）。總而言之，存在很多無限拓樸類型的例子。

關於無限拓樸最小曲面的唯一性結果，根據前一段，我們很清楚的了解，必須對我們已經發現的

⁵ 該技術包含了精巧的應用隱函數定理（implicit function theorem）到定義在某些特定的巴拿赫空間（Banach space）之間的均曲率算子。

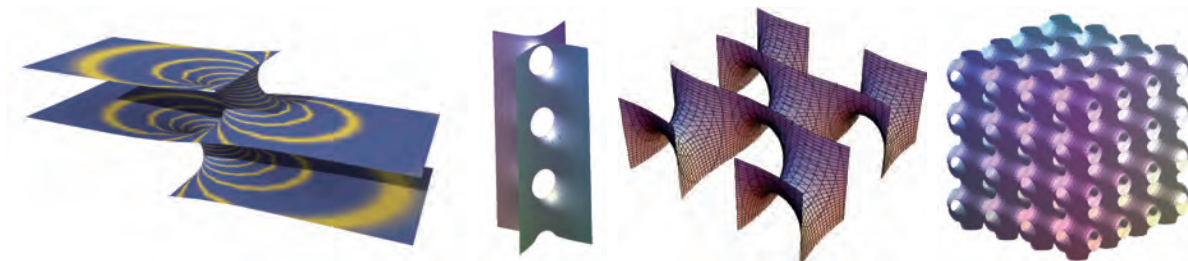


圖 6 從左到右：黎曼最小曲面的例子（維基），單週期和雙週期（維基）謝爾克曲面，以及三重週期史瓦茲 P -曲面。

各族例子以某種方式來分類：一個合理的起點可能會加上某種週期性假設。這裡，值得一提的是具有指定拓樸的周期最小曲面的以下模空間分類結果：

1. 黎曼最小曲面是在 \mathbb{R}^3 中經一平移作用後的商曲面，唯一具有有限多的平坦末端（planar end）正常嵌入最小環面（依據密克斯，作者和羅斯在 1998 年的結果）。末端的個數必須是偶數，並且當我們給定這個數量時，相應的模空間是 1 維非緊緻流形。
2. 謝爾克雙週期極小曲面是在 \mathbb{R}^3 中經兩個獨立平移作用後的商曲面，唯一具有 0 虧格和有限多個末端正常嵌入最小曲面（依據勒札德何利 [Hippolyte Lazard-Holly] 和密克斯在 2001 年的結果）。末端的個數仍必須是偶數，並且當我們給定這個數量時，相應模空間的與開區間是微分同構的（diffeomorphic）。
3. 作者，羅德里格斯（Magdalena Rodríguez）和崔才特於 2005 年描述了在 \mathbb{R}^3 中經兩個獨立平移作用後的商曲面，具有任意固定有限多個的平行平坦末端的正常嵌入最小環面的模空間。每一個這樣的模空間（對於任何固定的偶數個末端）都是 3 維的非緊緻流形，其中的曲面被稱為 KMR 例子（KMR example）（這是為了向凱徹，密克斯和羅森堡表達敬意，因為他們之前在此模空間找到了這類曲面的一些單參數族）。
4. 在 2007 年，作者和崔才特對在 \mathbb{R}^3 中經一平移作用後的商曲面具有 0 虧格和有限多謝爾克類型末端的正常嵌入最小曲面的模空

間做了分類。在這種情況下，這些模空間是 $2k - 3$ 維的非緊緻流形（這裡 $2k$ 是末端數），其中的曲面是在 1988 年由凱徹推廣謝爾克單週期性最小曲面而發現的。

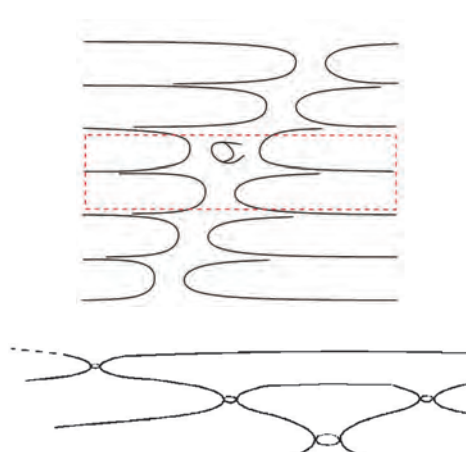


圖 7 從上到下：具有虧格 1 的奧斯威斯 / 帕卡最小曲面和崔才特的無限多虧格例子的示意圖；兩者都是具有無限拓樸的非週期性、完備嵌入最小曲面。

上面所列出的四個唯一性結果都有共同的特性。首先，週期性的條件起了很大的作用，因為它允許透過在 \mathbb{R}^3 上與相對應等距群的商空間中進行研究，並且最小商曲面在等式 5 的意義上總是具有有限的總曲率；在這一設定之下，可以控制所研究的最小曲面的漸近幾何和共形表示。其次，所預期的唯一性可以一連續性論證（continuity argument）：首先證明每個模空間中的任何曲面 M 都可以在模空間（開的部分）內變形，直到到達模空間邊界的 M_∞ 點，而它是一個正常嵌入最小曲面，且比最初模空間的曲面具有更簡單的拓樸或週期性（緊緻的部分）；這種緊緻性結果，需要對於最初的模空間中最小曲面的序列的可能極限行為有相當完整的理解。一旦我們到達 M_∞ ，所預期的

全域唯一性來自反函數定理論述（ M_∞ 附近的局部唯一性），它需要先前對 M_∞ 所屬的最小曲面的模空間進行分類。最後的這一步驟，揭示了具有給定拓樸類型和周期性的嵌入最小曲面模空間中的分層結構（stratified structure）：給定模空間的邊界是其他具有更簡單的拓樸或週期性條件的最小曲面模空間聯集。例如，描述上面第 3 項中模空間就需要解決第 4 項中的分類問題。

如果我們在沒有加上週期性條件的情況下，尋找具有無限拓樸最小曲面的分類結果，那麼前一段中描述的策略就行不通了。但在這種情況下，柯丁 / 米尼庫齊理論會有很大的幫助，我們將在下面解釋。

柯丁 / 米尼庫齊理論

考慮以下問題：

問題 9：在 \mathbb{R}^3 中，哪些是具有虧格 0 的正常嵌入最小曲面？

假設 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是符合問題 9 條件的最小曲面。如上所述，在 M 只有一末端的情況下，我們知道 M 是一個平面或一個螺旋面（密克斯和羅森堡的結果）。如果 M 有 k 末端，而且 $2 \leq k < \infty$ ，則由辜冷（Pascal Collin）定理和羅佩斯 / 羅斯定理可知 M 是鏈懸面。剩下來，仍然須要研究 M 具有無限多末端的情況。如果我們知道這樣的 M 對於平移 T 是不變的，那麼是不難證明，通過 T 生成的循環群的 M 商曲面是具有有限多個末端的環面，並且依據密克斯，作者和羅斯的 1998 年結果，得知 M 是

黎曼最小曲面。因此，解決問題 9 的方法是證明如果 M 的末端數是無窮大，則 M 是周期性的。

我們經常面臨的問題是，需要理解一嵌入最小曲面的序列可能極限值。作為一個簡單的例子，讓我們想像一個曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ ，它是對由向量 $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ 的平移不變的。「常」序列 $\{M_n := M - nv = M\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有簡單的極限，就是 M 本身。這個簡單的例子提出了解決問題 9 的可能方法：假設一個具有無限多末端的正常嵌入最小曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是這個解決問題的答案。那麼，由於 M 的末端數是無限大，可以推斷出 M 具有無限大總曲率，從而我們可以找到一個發散的點列 $p_n \in M$ ，使得與 M 在這些點的單位法向量取相同的值。可以合理的推斷 $\{M_n = M - p_n\}_n$ （至少）具有收斂子序列作為證明 M 具有所預期週期性的步驟。因此，我們將問題 9 轉換為也許更雄心勃勃的另一個問題：

問題 10：在什麼條件下，我們可以從給定的嵌入最小曲面序列中提取收斂子序列？

假設 $\{M_n\}_n$ 是一在開集合 $A \subset \mathbb{R}^3$ 中的嵌入最小曲面序列。再假設 $\{M_n\}_n$ 至少有一聚點（accumulation point），以免 M_n 完全逃離而沒有極限可供分析。每一最小曲面 M_n 局部可以寫成定義在 M_n 的一點的切平面上開集合的函數 u_n 的圖形。而當所有曲面的高斯曲率，或者說它們的第二基本形式（second fundamental form），有一致的上、下界時，所有函數 u_n 的定義域也可以做一致的控制。如果我們有 M_n 的局部面積上界時，則

我們可以控制圖形落在一定的區域 A 內的總數量。因此，當限制到一小且一致的尺度範圍內，我們可以推得每一曲面 M_n 可以以唯一的函數 u_n 的圖形表達。因此，我們將關於曲面收斂性的問題 10 轉換為另一個問題——圖形的收斂性。由此設定， M_n 的局部曲率有界性質可推得函數 u_n 的等度連續性 (equicontinuity) 與 u_n 的一致有界性。由阿爾澤拉 / 阿斯柯利定理 (Arzelá-Ascoli Theorem) 可確認存在一 u_n 的子序列一致收斂到 u_∞ ，而且可以證明它與 u_n 一樣都滿足偏微分方程式 2。經由一種延拓 (prolongation) 論述可以推得 $\{M_n\}_n$ 的子序列在 A 中收斂到一最小曲面，因此在此情況下解決了我們問題 10。

如果我們沒有 M_n 的局部面積上界，但仍然假設局部曲率有一致的上、下界，那麼類似於上述推理得出的結論是 $\{M_n\}_n$ 的子序列收斂到一所謂的紋理 (lamination) 結構，它的葉片 (leaf) 都是最小曲面。這是最小曲面概念的自然推廣。不深入細節， A 的紋理 \mathcal{L} 指的是它是一些稱為 \mathcal{L} 的葉片的嵌入曲面閉集合 (對 A 中的誘導拓樸 [induced topology] 而言) 的聯集，且具有局部乘積結構 (local product structure)。這意味著我們可以取一 A 的局部坐標，將這些葉片轉換成為 2 維圓盤與 \mathbb{R} 上的閉集合的乘積，而這可以將其視為水平放置不相交的圓盤在不同的高度上 (參見圖 8)。這一局部乘積結構可以給 \mathcal{L} 上的葉片賦予兩兩不相交的光滑曲面結構。當紋理的葉片都是最小曲面時，我們稱它是它是最小紋理。舉例來說：當 Z 是 \mathbb{R} 上的非空閉集合，則平面的集合 $\mathcal{L}_Z = \{P_z = \mathbb{R}^2 \times \{z\} | z \in Z\}$ 是以平面 P_z 為葉片

$A = \mathbb{R}^3$ 的最小紋理。在 A 的紋理 \mathcal{L} 不在 A 中留下任何空隙時，則我們稱它是 A 的葉層 (foliation) (當 $Z = \mathbb{R}$ 時， \mathcal{L}_Z 是 \mathbb{R}^3 的葉層)。最小紋理理論是最小曲面理論的自然延伸。然而，除上述平面集合 \mathcal{L}_Z 之外，我們仍然沒有找到任何非無聊的 \mathbb{R}^3 最小紋理例子，使得它不僅有單一的嵌入最小曲面。

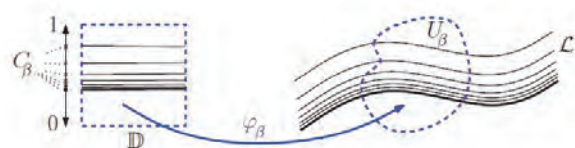


圖 8：開集合 A 被局部坐標卡 (local coordinate chart) φ_β 的圖像 U_β 所覆蓋，每個圖像將一疊特定高度的圓盤轉換成 \mathcal{L} 的葉層的部分，其中這些高度值屬於 $[0, 1]$ 的閉子集合 C_β 。

回到我們問題 10，如果這些嵌入最小曲面的第二個基本形式沒有一致的局部上、下界，那麼關於 M_n 的極限我們可以說些甚麼呢？這裡就要柯丁 / 米尼庫齊理論助我們一臂之力。按照前面的符號，缺乏一致的局部曲率上、下界意味著 M_n 的高斯曲率在 A 的某個點處爆炸 (blow up)；也就是說，以 6 集合是不是空集合：

$$\hat{S} = \left\{ x \in A \mid \sup |K_{M_n \cap \bar{\mathbb{B}}(x,r)}| \rightarrow \infty, \forall r > 0 \right\}$$

這裡 K_Σ 是曲面 Σ 的高斯曲率， $\bar{\mathbb{B}}(x,r)$ 是以 $x \in \mathbb{R}^3$ 為圓心以 $r > 0$ 為半徑的閉球體。柯丁 / 米尼庫齊理論在另一個額外的假設下描述了上述情形中 M_n 或它的一個子序列的極限：每個 M_n 必須是一個緊緻的拓樸圓盤。它包含在以原點為中心、半徑為 $R_n > 0$ 的圓球中，而且它的邊界 ∂M_n 要包含在該球的邊界球面上。取決於半徑數列 R_n 是否發散或保持有界，這個極限的描述會非常不同。

定理 11 (柯丁 / 米尼庫齊)：給定 $n \in \mathbb{N}$ ，讓 M_n 為閉球 $\mathbb{B}(R_n) = \mathbb{B}(\vec{0}, R_n)$ 中的嵌入最小圓盤，且 $\partial M_n \subset \partial \mathbb{B}(R_n)$ 。如果 $R_n \rightarrow \infty$ 和 $\hat{S} \cap \mathbb{B}(1) \neq \emptyset$ ，則 M_n 有一個子序列，在一直線 $\textcircled{6}$ (稱為收斂的奇點集) 以外，收斂到 \mathbb{R}^3 中以平行平面為葉片的葉層。當 $n \rightarrow \infty$ 時， M_n 的曲率會沿著此奇點集爆炸。

我們以下的例子來更深入理解最後的敘述：考慮標準豎直方向的螺旋面 $H = \{(x, y, z) \mid x \sin z = y \cos z\}$ 。取一趨近於 0 的任何正數列 λ_n ，對每一 $n \in \mathbb{N}$ ，考慮 H 的一個比率 λ_n 位似 (homothetic) 副本 $M_n = \lambda_n H$ ，它仍是單連通的最小曲面。當 n 增加時，可以將 M_n 解讀成以越來越遠的新觀點所看到的 H ，如圖 9。我們越遠看螺旋面 H ，它看起來就越像是間隔距離越來越小的一疊平行平面，因此我們得到了以平行平面為葉片的 \mathbb{R}^3 葉層極限。我們觀察到這極限葉層的每個葉片是平坦的 (其高斯曲率是恆等於 0)，並且在 z 軸以外， M_n 的高斯曲率收斂到 0。然而，由於 H 沿 z 軸的高斯曲率是常數 -1 ，因此沿同一軸的 M_n 的高斯曲率是 $-1/\lambda_n^2$ ，則會趨於無窮大。換句話說，在此例中的以式 $\textcircled{6}$ 定義的奇點集 \hat{S} 是 z 軸。同時，我們注意到極限葉層沿著 \hat{S} 是非常正則 (regular) 的，只是沿著 \hat{S} ， M_n 的不收斂到極限的。這個極限對象是被稱為有柱子的極限停車場結構 (limiting parking garage structure)。在 z 軸以外，結構變得任意平坦和水平 (這是停車的地方)，並且從一個停車樓層到另一個停車樓層，汽車必須沿著坡道 (在 z 軸的柱子周圍) 上行。

好吧，定理 11 告訴我們，當半徑 R_n 趨於無窮大時，嵌入最小圓盤 M_n 的收斂極限的一般性質與這個例子基本上是相同的。

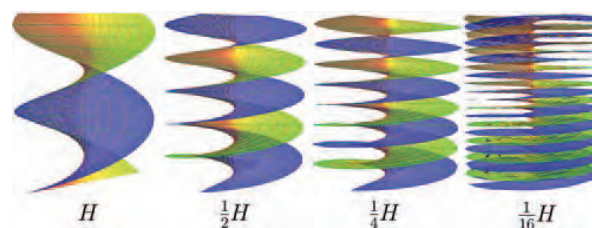


圖 9：相同豎直的螺旋面 H 的位似圖像，比率 $\lambda_n = 1/2^n$ 。

當半徑 R_n 保持有界時的描述也可以經由一個例子來想像。2003 年，柯丁和米尼庫奇造了一序列嵌入到閉單位球 $\mathbb{B}(1)$ 中的最小圓盤 M_n 。它們有螺旋面外觀的，而且當 $n \rightarrow \infty$ 時，邊界曲線 ∂M_n 圍繞 z 軸轉的圈數也趨向於無限大， M_n 的極限是 $\mathbb{B}(1) - \{\vec{0}\}$ 中的由包含 3 葉片的最小紋理 \mathcal{L} ：一個是水平的不含圓心的單位圓盤 $\mathbb{D}^* = \{(x, y, 0) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ，另外兩個是非正常的最小曲面 L^+ 和 L^- ，從 \mathbb{D}^* 的上方和下方無限旋轉多次的聚集在 \mathbb{D}^* 上，如圖 10。在這種情況下， M_n 的高斯曲率在原點處爆炸，但這次 $\vec{0}$ 是極限紋理 \mathcal{L} 名符其實的奇點，後者不存在過 $\vec{0}$ 的光滑延拓。

對一序列的有界半徑 R_n ，緊緻的嵌入最小圓盤 $M_n \subset \mathbb{B}(R_n)$ 且 $\partial M_n \subset \partial \mathbb{B}(R_n)$ 的極限，柯丁和米尼庫奇理論描述是是非常技術性的，我們將在這裡略過不談。作為替代，我們將簡單的提到，在提

$\textcircled{6}$ 事實上，柯丁和米尼庫奇只證明了奇點集是橫截 (transverse) 於極限葉層的利普希茲弧 (Lipschitz arc)。依據螺旋面是 $\mathfrak{M}_P(0, 1)$ 中的唯一的非平坦曲面，密克斯在 2004 年推論出這個利普希茲弧確實是一條直線。

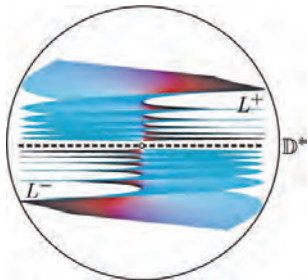


圖 10：不含球心的單位球的最小紋理，具有 3 葉片，並且在原點處具有奇點。

取子序列之後， M_n 會收斂到一具有奇點的最小紋理 (minimal lamination with singularities)。這種具奇點的最小紋理極限的奇點構成一個閉集合，每個奇點都是以下兩種類型之一：

(a) 孤立奇點，在這種情況下，圖 10 基本上顯示了極限對像的行為：紋理的一葉片 D^* 收斂到奇點 p (事實上， D^* 可光滑的延拓過奇點 p 到嵌入最小圓盤 D) 和一到兩個非正常的葉片會旋轉無限多次並積聚在 D^* 處。與此同時， M_n 在以 $p + (T_p D)^\perp$ 為軸的實心圓錐之外的部份，可以寫成定義在 $T_p D$ 上環形區域多值函數的圖形。而且，當 $n \rightarrow \infty$ 時，這些環形區域收斂到一丟心圓盤。同時，在 M_n 內的多值函數圖形所圍繞的圈數也變得任意大，多值函數圖形則塌陷成 D^* ，如圖 11 (左) 所示。

(b) 非孤立奇點，每個奇點都是至少一個孤立奇點序列的極限，如圖 11 (右) 所示。

還應該注意的是，在之前的描述中，圓盤 M_n 的高斯曲率爆炸的奇點集 \hat{S} 不僅包括極限紋理層 \mathcal{L} 的奇點，而且還可能包括 $C^{1,1}$ 的嵌入弧，在這些弧附近， \mathcal{L} 是局部葉層，如圖 11 (左) 所示。特別的

是，就像定理 11 中所述的 M_n 收斂到 \mathcal{L} 一樣：這些弧，除了它們的端點以外，都不是 \mathcal{L} 的奇點。

前面的描述直接引導我們去研究 \mathbb{R}^3 中開集最小紋理的奇點。這集合有沒有任何合理的結構呢？這個問題是最小曲面理論中另一個未解的核心問題。沿著這思路，值得一提的是密克斯，作者和羅斯在 2016 年的兩項結果：

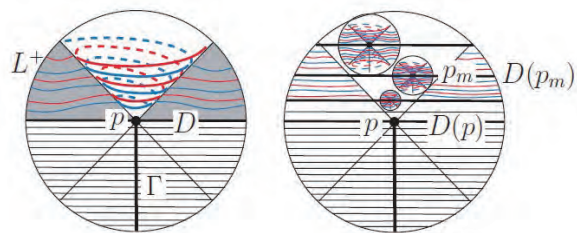


圖 11. 左圖：一含孤立奇點 p 的奇點最小紋理 \mathcal{L} 的示意圖。它是由具有非正常葉片 L^+ 在過奇點 p 的圓盤葉片 D 的一邊的嵌入最小圓盤 M_n 的極限。在 p 點附近及以 p 為頂點 $p + (T_p D)^\perp$ 為軸的實心圓錐之外， L^+ 是多值函數圖形。 D 的另一邊是由 \mathcal{L} 的葉片所堆葉層。收斂性沿著一 $C^{1,1}$ 弧 Γ 的奇性的。右圖：在非孤立奇點 p ，通過 p 的圓盤葉片 $D = D(0)$ 也是與孤立奇點 p_n 相關的相應圓盤葉片 $D(p_n)$ 的極限。這裡 p_n 收斂到 p 。

定理 12 (局部可移除奇異點定理) 設 $\mathcal{L} \subset \mathbb{B}(1) - \{\vec{0}\}$ 是最小紋理。則 \mathcal{L} 可延拓到 $\mathbb{B}(1)$ 的最小紋理 (也就是說，在 $\vec{0}$ 處的奇點是可去 [removable] 的) 的充分且必要條件是紋理的高斯曲率函數 $K_{\mathcal{L}}$ 在原點的爆炸速率不比到 $\vec{0}$ 的外蘊距離之平方更快。換句話說， $|K_{\mathcal{L}}|(x) \cdot \|x\|^2$ 在 \mathcal{L} 上是有界的。

由定理 12 可知，如果函數 $|K_{\mathcal{L}}|(x) \cdot \|x\|^2$ 在最小紋理 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ 上是有界的，則 $|K_{\mathcal{L}}|(x) \cdot \|x\|^2$ 可以延拓到原點且取值為 0。在圖 10 的例子中，這定理的另一個推論是：當 $n \rightarrow \infty$ 時，圓盤 M_n 的高斯曲率爆炸速率比到的原點距離的平方趨於 0 更快。

關於最小紋理的奇點的另一個結論是定理 12 的全域版本。它對 $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ 中的具有 2 階高斯曲率衰減的最小紋理作了分類：

定理 13 假設 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ 是一個非平坦的最小紋理，使得 $|K|(x) \cdot \|x\|^2$ 是有界的。則 \mathcal{L} 可以延拓穿過原點，得到一個 \mathbb{R}^3 的最小紋理，且它只含單一葉片 M ，後者是一個具有有限總曲率的正常嵌入最小曲面。特別是， $|K|$ 的衰減速率比到原點距離的平方更快： $|K|(x) \cdot \|x\|^4$ 在 M 上是有界的。

我們已經說過，為了將柯丁 / 米尼庫齊理論應用於嵌入最小曲面的序列，我們需要假設 M_n 的邊界在外圍球的球面上的緊緻圓盤。這個條件實際上並不是一個限制，因為它可以通過重新縮放參數自然的獲得，以便重新縮放的最小曲面的單射半徑（injectivity radius）函數一致的遠離 0（密克斯，作者和羅斯 [4]）。

\mathbb{R}^3 中 0 虧格正常嵌入最小曲面的分類

為了完成我們對經典最小曲面理論的當前狀態的簡要介紹，我們回到關於在 \mathbb{R}^3 中 0 虧格正常嵌入最小曲面 M 性質的問題 9。在「柯丁 / 米尼庫齊理論」一節的第一段中，我們曾解釋過，問題歸結到證明如果 M 有無限多個末端，則 M 是周期性的。這個策略要運用我們上面提到的柯丁 / 米尼庫齊理論，這也正是密克斯，裴瑞茲和羅斯 [5] 用來證明以下結果的策略：

定理 14 每個 0 虧格正常嵌入最小曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 必定是平面，螺旋面，懸鏈面，或者是黎曼最小曲面之一。特別是， M 是由平行平面中被圓或直線所構成的葉層。

有必要對關於定理 14 的證明作最後的註解。柯丁 / 米尼庫齊理論只能推導出 M 的準週期性（quasi-periodicity）（這指的是，如果 $\{p_n\}_n$ 是 M 中的發散點列，則 $\{M - p_n\}_n$ 的子序列會收斂到 \mathbb{R}^3 中 0 虧格、無限多末端的正常嵌入最小曲面）。一旦我們知道它是準週期性的，證明所預期的週期性的關鍵是可積系統理論的一個迷人，更準確的說全純 KdV 方程（Korteweg-de Vries equation）的應用，後者是數學上模擬淺水波表面行為的一個的 3 階偏微分方程式。☺

本文出處

本文出自“A New Golden Age of Minimal Surfaces” *Notices of the AMS* (64) 2017 No. 04。感謝 AMS 同意翻譯刊登。本刊特別 soapbubble.dk 授權刊登圖 1 照片，泰蜜娜（Maria Taimina）授權刊登圖 3 照片。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

譯者簡介

王夏聲為交通大學應用數學系副教授。

延伸閱讀

- ▶ http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_m.html
以上是最小曲面的 3D 虛擬動畫網址，還有各類最小曲面的簡介，以及講義可共下載。
- ▶ <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/>
以上是最小曲面圖形的博物館，還有一些最小曲面的 Mathematica 程式碼可供下載。