DOI:10.6851/MSHCM.201907_(16).0009

人

數學不該由上往下 必須遵從自己的想法

2011 年阿貝爾獎得主米爾諾訪談

受訪者： 米爾諾（John Milnor） 訪談者：勞森（Martin Raussen）史考（Christian Skau） 譯者：翁秉仁

訪談者簡介：勞森目前任職於丹麥奧爾堡大學（Aalborg University）數學科學系。史考是挪威科技大學（Norwegian University of Science and Technology, Trondheim）數學系退休教授。

問▸米爾諾教授，我們代表挪威與丹麥數學學會恭喜你獲頒 2011 年的阿貝爾獎。

答▸感謝你們的厚愛

普林斯頓的學生時期

問▸請問是什麼點燃了你對數學的興趣？你什麼時候發現自己穎異的數學天分？

答▸這個問題我可以很清楚的回答。我最初發展出對數學的特殊興趣是在普林斯頓大學當新生的時候。我是一個社交適應不良的人，朋友很少。但是一到普林斯頓，我就發現數學系休閒室的氣氛讓我如魚得水。大家在那裡談數學、下棋，任何時候都能來放鬆休息。數學系的課程又很有意思。這裡比我之前待過的任何地方都自在，所以我從此就留在數學界了。

問▸你在 1949 年和 1950 年的普特南數學競賽中名列普特南學者，共列最高分得主。你喜歡破解數學難題或謎題嗎？

答▸我總是把數學視為待解的有趣問題，所以當然很認同這樣的活動。

問▸1949 年，你的第一篇重要論文被接受，並在 1950 年發表於知名期刊《數學年刊》上。你當時年紀才 18 歲，這當真很罕見。這篇論文的名稱是〈結的總曲率〉（On the Total Curvature of Knots）。你是如何得到這篇論文的想法？

答▸我當時在上塔克（Albert Tucker）的微分幾何課。從課中知道凡克爾（Werner Fenchel）以及後來的伯蘇克（Karol Borsuk）證明了底下的敘述：空間中封閉曲線的總曲率至少為 2π ，而且等號只發生在曲線環繞某平面上的凸域時。伯蘇克是知名波蘭數學家，他追問如果曲線打結時，總曲率會有什麼性質。我想了好幾天，證明總曲率必定大於 4π（我那篇論文的證明解說的坑坑疤疤，人總要經過學習才知道怎麼解釋數學。）。匈牙利數學家費利（István Fáry）大概同時也獲得類似的證明。不管如何，這仍然是我美好的數學起步。

米爾諾。（Knut Falch 攝）

問▸ 這的確成就斐然！你 1948 年進入普林斯頓，認識大你三歲的研究生納許（John Nash）。透過《美麗心靈》（*A Beautiful Mind*）這部小說及同名電影，納許的事蹟廣為人知。你和他有什麼交往嗎？也請談談你在普林斯頓的學生生活。

答▸ 前面說過，我花大把時間待在休閒室裡，納許也是。他是一個非常有趣的人物，滿腦袋的點子。他也常在走廊上逡巡吹口哨，吹著巴赫的曲調，在這之前我從來沒有認真聽過巴赫，這真是怪異的古典音樂啟蒙方式。那段時光我常看到納許，也開始對他有重要貢獻的對局論（game theory）產生興趣。他是一個很有趣的人。

問▸ 你在普林斯頓下過西洋軍象棋（Kriegspiel）、圍棋，還有一個稱為「納許」的遊戲？

答▸ 是的。下西洋軍象棋的玩家必須背對背，不能看到對方的棋盤。旁邊的裁判會告訴棋手他的棋步是否可下。但是裁判很容易失誤，常常因為裁判的迷糊導致棋局無法繼續進行。這時我們就會宣布裁判獲勝！這個遊戲很好玩。

在普林斯頓，圍棋也很流行。我的第一個教授佛克斯（Ralph Fox）便是圍棋專家，我從他和其他玩家那裡學到一些下棋的手法。

「納許」其實稍早源於丹麥，是韓恩（Piet Hein）發明的，只是納許自己也獨立發明出這種棋。這種棋還有另一個名字叫做六貫棋（Hex），是基於拓樸學而發展的棋種。從數學觀點這種棋很有趣，因為不難證明先下者只要不犯錯就一定會贏。但是由於並不存在構造式的證明，所以實際下棋時，先走的人經常贏不了。

問▸ 你甚至和納許一起發表過對局論的論文？

答▸ 我們經常討論對局論，但只合作發表過一篇論文。我們和卡力西（C. Kalish）和奈林（E. D. Nering）一起進行一項實驗，和一群人玩多人對局（many-person game）。這次實驗讓我確信多人對局論並不只是數學課題，也涉及社交互動以及遠超過數學的其他東西，以致於我喪失了從數學來研究這門理論的熱情。

我自己寫過一篇描述圍棋理論模型的論文，這項理論後來由哈訥（Olof Hanner）深入發展，還有相當久之後的伯勒坎普（Elwyn Berlekamp）和沃爾菲（David Wolfe），這門理論和康威（John Conway）構造的「超實數」（surreal number）論有密切關係。

環結理論

問▸ 你的博士論文是佛克斯指導的，論文名稱是〈環的同痕〉（Isotopy of links）。你在這方面的研究思想是自己發展出來的嗎？這項研究的影響是什麼？

答▸ 佛克斯是結環論的專家，我從他那兒學到不少結和環的知識。當時數學系有很多人在這個領域十分活躍，但也有一些人認為這個主題很不上道，

並不很有興趣。我覺得這很奇怪，當時這個領域雖然相對尚處邊陲，但直到今天依舊活得生龍活虎。

舉例來說，我常在休息室附近看到一個希臘人帕帕奇里亞科普洛斯（Christos Papakyriakopoulus），但我跟他並不熟。我不知道他當時正在進行重要研究，但是佛克斯好幾年來一直在找錢支持他。帕帕奇里亞科普洛斯的研究多少是獨立進行的。他最後成功解決結環論內一個非常重要的問題。或許可說這項成就導致三維流形研究的重生，成為嚴格數學的一個部門。

1910 年，鄧恩（Max Dehn）宣稱證明了一個結環的簡單性質，基本上他說如果一個結的餘空間基本群是循環的，那麼這個結其實並沒有打結。大家本來一直都接受鄧恩的證明，不過在 1929 年，涅瑟（Hellmuth Kneser）指出鄧恩的論證裡有一個未說明清楚的大鴻溝，於是這項敘述成了一個懸而未解的知名難題。直到 1957 年，帕帕奇里亞科普洛斯才發展出全新的方法，證明了所謂的「鄧恩引理」與相關定理。

這是數學進展的一大步，也是孤立研究卻導致數學飛躍進步的案例。這種情況相對罕見，懷爾斯的費馬最後定理證明是另一個獨立研究，結果證明震驚大眾的例子。還有一個例子是俄羅斯的帕瑞爾曼（Grigori Perelman），他也是大致上都自己研究，結果找到龐卡赫猜想的證明。

這些例子很孤立。通常數學家是在社群脈絡中做研究，彼此交流想法。事實上，數學點子很快就會跨越國度而散播。我們很幸運，數學通常和政治情境不相涉，即使在冷戰最嚴峻的時候，我們也能接收到蘇維埃的訊息，蘇維埃治下的學者也能渴切的閱讀外地的論文。數學比大部分科學領域要更加開放。

問▸補充一句：鄧恩是希爾伯特的學生，他曾經解決希爾伯特第三問題：給定兩等體積三維多面體，證明不能總是可以將它拆解成全等的一組多面體。基於鄧恩的名望，難怪大家都相信他的證明。

答▸這是一個值得警惕的故事。因為我們傾向於相信已經證明的數學敘述，就已證明為真。不過像鄧恩引理這種大家長期接受錯誤證明的例子，還是非常罕見。

流形

問▸博士論文完成之後數年，你的研究專注於流形理論。請你解釋何謂流形？以及為什麼流形這麼重要？

答▸在低維時，流形是很容易視覺化的形體。空間中的曲線就是一維流形的例子，球和甜甜圈的表面則是二維流形的例子。不過對數學家來說，一維和二維只是起步，而高維流形更加有趣。

對物理學家來說，流形的概念很重要，他們基本上在意的是高維的情況。舉例來說，研究飛機的運動時描述飛機位置的中心需要三個坐標，但是你還需要描述航行的方向，機翼的轉角又需要三個坐標，所以你已經用到六維空間。當飛機移動時，就會在六維空間中得到一道路徑。然而，這還只是剛開始的設定而已。

如果研究的是氣體的粒子運動，其中有很大量的粒子彈來彈去。描述每個粒子的位置需要三個坐標，描述速度又增添另三個坐標。因此 1000 顆粒子的系統，就需要 6000 個坐標來描述。當然，實際的粒子數更多得多。所以數學家和物理學家都很習慣高維空間的操作。

問▶讓你在 25 歲一舉成名的研究就是發現七維球上的怪異微分結構。也就是說，你說明存在一個光滑流形，它和七維球拓樸等價但卻非光滑等價。請你解釋這項結果，告訴我們你是怎麼得到這個想法的？

答▶這是全然的意外，確實也嚇到我了。我那時正在進行一項研究，想從拓樸角度去理解不同種類的類的流形。具體說來，我正在檢視以簡單且眾所周知的方法所構造出來的七維流形。它們顯然是光滑形體，我以為是大家熟知的東西。但是當我從兩個不同觀點檢視時，似乎發現完全矛盾的結果。一種論證說這些流形是拓樸球，但從另一種非常不同的論證，卻顯示它們不可能是球。

明明有完善的證明，卻證出矛盾的敘述，數學家碰到這種情況會極端懊惱。能夠擺脫這種困境的唯一出路，就是拓樸球的概念（同胚於標準球）和光滑球的概念（微分同胚於標準球）其實截然不同。這和眾人期待的不同，我不知道有沒有人明顯詢問過這個問題，我們只是以為這是顯然正確的。因為某種原因，有人採用拓樸觀點；基於別的用處，其他人運用微分結構，根本沒有人真的考慮有否實際差異的可能性。這項結果激起廣大的研究興趣與需求，想理解到底發生什麼事。

問▶你顯然是這個研究領域的驅動力。你應用微分幾何、拓撲，以及代數拓撲的工具，為流形理論提供了全新視野。或許可以公平的說，歐洲數學家的工作尤其是法國數學家如董姆（René Thom）和塞爾（2003 年阿貝爾獎得主）的基本貢獻，協助你完成你的想法。當時跨大西洋的合作是如何進行的？

答▶跨洋來回非常容易，而且法國數學家十分熱情。我花了很長時間待在巴黎附近的法國高等科學研究院（Institut des Hautes Études Scientifiques，IHÉS）。我那時不怎麼認識塞爾（要等到很久以後），但我很欽佩他，現在依舊如此。塞爾的研究有巨大的影響力。

相對來說，我和董姆熟得多。董姆真的很了不起。他有一種驚人的能力，可以結合幾何論證和困難的代數拓樸工具，得到讓眾人訝異的結論。我很崇拜董姆，他也是很友善的人。

問▶基於英國的亞當斯（Frank Adams）、美國的史梅爾（Stephen Smale）和你，以及法國的葛維（Michel Kervaire）的工作，最後相當程度的完成了球上怪異微分結構的分類。除了還有一些球的穩同倫（stable homotopy）性質尚待釐清之外，我們已經理解球上可以找到的微分結構。

答▶是的，只剩下四維情況的大難題，和少數高維的

問題（最重要的是 126 維時尚未解決的「葛維問題」）。用非常古典的論證可以處理一維和二維的情況，三維就已經很困難，但是瑟斯頓（Bill Thurston）和帕瑞爾曼的研究多少已經解決了這個問題。在 1960 年代，我們發現一件非常令人驚訝的事情：高維的情況其實比低維容易。只要維度夠高，你就有比較充裕的空間可以移動，因此論證起來也比較簡單。在很多情況，我們甚至可以在五維時進行這樣的論證。但是，四維完全是另外一回事，非常困難，因為不論是高維或低維的方法都失效了。

問 ▸ 三維和四維時，似乎需要更純粹的分析學論證。

答 ▸ 這個嘛，也對也不對。弗利德曼（Michael Freedman）首先證明了四維的拓樸龐卡赫猜想，他的方法和分析大異其趣，運用了毫無光滑性、非常野異的拓樸結構。但是理解四維微分流形的真正突破來自數學物理，也就是規範理論（gauge theory）和後來的賽伯格 / 韋頓（Seiberg-Witten）理論。雖然這些方法起源於數學物理，卻在純數學裡有很大的用處。

問 ▸ 流形理論裡的術語很有畫面感，也很實際。像是有些技巧稱為「接管」（plumbing）。另外如「手術」（surgery）已經是數學裡大分支。你還有篇論文談到如何「殺掉」（killing）同倫群。我們想知道，你得為這些術語負責的程度。

答 ▸ 說實話，我也不確定。「手術」這個詞或許是我引入的，意思是切割流形再用不同的方式黏貼起來，還有一個詞「球狀修改」（spherical modification）有時也表達一樣的意思。更晚之後，準保角手術（quasiconformal surgery）的概念則在全純動力學中扮演重要角色。

簡單而圖像式的用詞可能很有用。因為有些詞如果過度使用，會遺失本意的線索（長年下來甚至可能改變本意）。像「正則」（regular）或「光滑」（smooth）這類用詞就很危險。數學有非常多重要的概念，因此能讓人清晰確知你所言所指的術語十分緊要。使用專有名詞或許很管用，因為專有名詞相當多。將概念對應到專有名詞，經常比使用日常用詞更能精準標定概念之所指。術語很重要，成功的用詞常產生良善的影響；失敗的用詞則可能令人十分困惑。

問 ▸ 另一個出自你手而且也很令人驚訝的結果，是為所謂 Hauptvermutung 也就是組合拓樸的「主樸的「主要猜想」找到反例。1908 年史坦尼茲（Ernst Steinitz）和提茨（Heinrich Tietze）提出這個猜想，是一個關於三角分割流形或更一般的三角分割空間的問題。請說明一下你當時的證明結果。

答 ▸ 20 世紀早期，拓樸學的重要發展之一是同調（homology）的概念，後來則是上同調（cohomology）。其實 19 世紀時，同調的想法已經以某種形式出現了，真正的問題是如何精確定義這個概念。為此，數學家將拓樸空間切割成稱為單體（simplex）的線性小塊。在這個層

阿貝爾講訪談，由左至右為勞森、史考，以及米爾諾。（Eirik F. Baardsen 攝）

次，可以相對容易證明同調的概念具有健全的定義，而且如果將單體再切割得更小，同調概念甚至具備良好的性質。因此自然的猜想是，如果用這樣的手法來嚴格定義問題，是否真能處理其拓樸性質。譬如，若兩個單體複形（simplicial complexes）是拓樸同胚，那麼我們應該能將兩者分割到可以彼此對應（稱為同構）的地步。這是證明同調群是拓樸不變量的第一種嘗試，但是卻沒有人能真的解決這個問題。後來數學家很快找到更好的方法，繞過這個難題。但是 Hauptvermutung —— 證明永遠可找到同構子分割的老問題仍然未解決。

我偶然發現一個例子，證明這個猜想不成立。這是一個相當怪異的例子，和流形無關。不過大概十年之後，就找到在正常三角化流形上的反例。有好些數學家研究這個問題，不過最後能建立實質合宜理論的是柯比（Rob Kirby）和我的學生希本曼（Larry Siebenmann）。

問 ▸ 在你的博士論文之後，有很長一段時間，你幾乎每年發表一篇論文，有時甚至好幾篇，而且都被公認是指標性的論文，它們標定拓樸學後續多年的發展方向。除了前述主題之外，還包括結環論、三維流形、複超空間（hypersurface）的奇點、米爾諾纖形（fibration）、米爾諾數、複配邊理論（complex cobordism）等。另外還有些論文具有更代數的味道。其中有哪些特殊結果或論文是你特別喜歡或引以為傲的？

答 ▸ 這個問題實在很難回答。我習慣一段時間只關注一項主題，我得花點力氣才能確切記得我早期的工作。

幾何、拓樸和代數

問 ▸ 傳統上數學分成代數、分析，以及幾何 / 拓樸三

個領域。持平而言，你最傑出的成就屬於幾何和拓樸。請跟我們談談你的工作風格和你的數學直覺？譬如你是用幾何的方式來思考問題的嗎？視覺化對你是重要的嗎？

答▶非常重要！我絕對是視覺型的心智。如果沒有看到寫下的東西，我就很難進行數學對話。

問▶但從另一方面來說，你一般似乎也展現某種研究特色，至少在你處理高維拓樸的問題時，其中實質的理解乃是出自於你找到適合的代數架構，容許你表述自己的思想。

答▶我們經常用類比來思考。低維時有清楚的圖像，然後必須試著決定其中有多少成分在高維時仍然準確，又有多少必須改變。這種視覺性的活動和單純處理一串符號是非常不同的。

問▶當然，你對於拓樸的代數面向有深入的研究，其中還包括代數問題本身。當你發展流形理論時，同時也撰寫了關於史丁洛代數（Steenrod algebra）、霍普夫代數（Hopf algebra）等等的論文。我們感覺你似乎也有代數性的面向？

答▶一件事會順便帶出另一件事。如果純拓撲問題的解答顯然需要代數，你就不得不學一點代數。舉個例子，流形研究裡有一個基本不變量是四維流形（或更普遍的 $4k$ 維流形）的二次形式，懷德海（Henry Whitehead）或許是這方面研究的第一個人。為了理解這個理論，我必須查閱二次形式的文獻。追索的過程很不容易，直到我發現塞爾的優美著作切中我的需求。然後，我發現二次形式理論本身就是十分令人興奮的領域。因此順順的走下來，下一步我就開始研究二次形式的性質。在那些年，如阿提雅（Michael Atiyah）等人開始發展拓樸 K 理論，代數方面也有類似的發展，格羅騰迪克（Alexandre Grothendieck）是先驅者 [1] ，而貝斯（Hyman Bass）發展了代數 K 理論的一支。我再深入研究一兩步，發現二次形式和代數 K 理論似乎有關聯，泰特（John Tate）的研究在這一點很有益，協助我掌握這些東西的對應。

問▶插句話，泰特正巧是去年阿貝爾獎的得主。

答▶當時，我提出一個很幸運的猜測，猜想在代數 K 理論、二次形式和迦羅瓦上同調群（Galois cohomology）之間存在廣泛的關係。我手上的證據其實很有限，但事實證實這是對的，很久之後才由渥伊沃茨基（Vladimir Voevodsky）證明出來。猜測很容易，不過當結果正確時，感覺還是非常好。

問▶這只是知名米爾諾猜想之中的一個。

答▶我也有猜想最後證實是錯的。

[1] 編註： 這裡的陳述有點混亂。時間上，是格羅騰迪克先發展 K 理論的想法，影響阿提雅發展拓樸 K 理論。

問▶你剛剛已經提到代數 K 理論這項主題。我們猜你是因為探究懷德海群、懷德海撓群（torsion）和 K_1 間的關係才對這個主題發生興趣。

答▶完全正確。

問▶很顯然，透過 s 配邊理論，這是研究非單連通流形的重要工具。應該是這樣才激起你釐清一般代數 K 理論的興趣，你發明了現在所謂的米爾諾 K 理論，然後奎倫（Dan Quillen）提出另一個以拓樸為基礎的競爭的或不同的版本⋯⋯。

答▶基於博特週期性定理，拓樸 K 理論在所有維度皆能定義，代數方面應該也有對應的理論。貝斯完成 K_0 和 K_1 的完整理論，我發現 K_2 的代數版本。最近久病過逝的奎倫則提供了任何 K_n 的滿意理論。奎倫的 K_2 和我的 K_2 自然同構，雖然我們的動機和闡述並不相同。我其實曾經構造相當特設（ad hoc）的高維 K_n ，雖然無法取代奎倫 K 理論，但是對於特定問題還是相當有用，所以也有獨立存在的價值。

問▶這個想法後來導致模諦上同調理論（motivic cohomology），對嗎？

答▶是。在證明我提出的猜想過程中，渥伊沃茨基發展出模諦上同調的概念。你的說法要這麼解釋才有意義。

問▶你在 1868 年的論文中，引入有限表示群（finitely presented group）成長函數（growth function）的概念，並證明負曲率黎曼流形的基本群具有指數成長。這為現代群論的宏大發展奠定基礎，最終導致格羅莫夫（Mikhail Gromov，兩年前的阿貝爾獎得主）的雙曲群論。請說明你為何覺得這個概念很重要？

答▶我對流形拓樸性質和幾何性質之間的關係很感興趣。其中有些眾人熟知的經典定理，例如普萊斯曼（Alexandre Preissmann）證明如果一完備流形的曲率為負，則其基本群的任何交換子群（abelian subgroup，阿貝爾子群）必為循環群。成長函數應該是群的簡單性質，足以反映基本群的幾何特性。我並不是第一個注意到這件事的人，在我之前，俄國的史瓦茲（Albert Schwarz）也做過類似的工作。我或許只是比較有名，在這個概念獲得過多的讚譽。

我還可以談談另一位阿貝爾獎前得主提茲（Jacques Tits）的工作，他證明代數群的有限生成子群具有如今所謂的「提茲二擇一定理」（Tits alternative）：此群內含一非循環自由群，或此群為近可解群（virtually solvable），亦即包含一有限標數（index）的可解群。我能夠構造的所有有限生成群都具備上述性質，因此總是指數成長或多項式成長。是否存在一個群其成長介於兩者之間的問題一直懸而未決，直到俄國數學家格利果恰克（Rostislav Grigorchuk）發現一類群，其成長速度低於指數卻高於多項式。像這樣提出有趣的問題，接著發現有人得到有趣的答案，總是很棒的事。

米爾諾與阿貝爾委員會主席皮耶妮（Ragni Piene）於奧斯陸阿貝爾獎頒獎儀式。（Kyrre Lien 攝）

動力學

問▶讓我們進入最近 30 年，這段時間你在實數和複數動力學有相當多的研究。簡而言之，這些是研究連續或全純函數的迭代及其相關的軌跡與穩定行為。我們很好奇你為什麼會對這個數學領域感興趣。

答▶我對這個問題發生興趣是受到瑟斯頓的影響，他自己則是受梅（Robert May）的數理生態學研究所影響。考慮一個孤立的昆蟲族群，其數量逐年變化。若蟲數太多，就會耗盡資源，開始死亡；但若蟲數很少，他們就會指數增長。因此以今年蟲數為自變數，描述明年蟲數的函數曲線，在蟲數少時斜率為正，蟲數很多時則斜率為負。於是導致這種「單峰」（unimodal）函數動態性質的研究。如果逐年檢視，你會得到看起來很混亂的蟲數資料。

瑟斯頓對這個問題很感興趣，跟我解釋他的一些想法。我和瑟斯頓的互動經常發生這樣的事，起初我總是很懷疑，覺得他所說的難以置信。他很難說服我，不過最後我們一起寫了一篇論文，解釋其中的機制。

問▶這是一篇重要的論文。第一版可以追源到大約 1977 年。這篇文章流通多年後，直到 1988 年才在司普林格出版社的《數學講義叢書》中發表 ❷ 。你引入一個嶄新的基本不變量，稱為「揉捏矩陣」（kneading matrix）以及相關的「揉捏行列式」（kneading determinant），並且證明一個漂亮的定理，連結揉捏行列式以及映射相關週期軌跡數的 ζ 函數。閱讀這篇論文，似乎可以感受到作者的喜悅，你們的熱情躍然紙上。

答▶你說 ζ 函數描述週期軌跡，這當然是對的，只是

❷ 編 註：“On iterated maps of the interval”, *Dynamical systems (College Park, MD, 1986-87)*, 1342 , Lecture Notes in Mathematics, Springer, pp. 465-563。

忽略了一大段歷史。歐拉最先研究 ζ 函數，因黎曼的 ζ 函數而將這個概念發揚光大。ζ 函數在數論裡很重要，後來研究動力學的人發現相同的數學架構也頗有助於計數週期軌跡，其中主要的催化者是威伊，他研究有限體曲線的黎曼 ζ 函數類比，計數弗羅畢紐斯正合映射（Frobenius involution）的週期軌跡。

所以這是一段連續的歷史，從純數論開始，首先是歐拉和黎曼，然後是威伊，再銜接到動力學問題，研究迭代映射與週期軌跡的數目。這是數學家會非常欣喜的典型情境：研究某一主題所發明的手法，竟然在完全不同的領域裡發揮大用。

問▸你一定很意外，研究區間映到本身的連續映射竟然會得到這麼深刻的結果。

答▸是啊，這項主題的確充滿樂趣。.

問▸你和瑟斯頓的研究曾經被拿來與百年前龐卡赫的工作相比較，他研究圓上的微分同構，後來導致動力系統定性理論的建立，在這個領域影響深遠。

數學中的電腦

問▸這引出另一個問題。有一本期刊名稱是《實驗數學》（*Experimental Mathematics*），第一卷發行於 1992 年，其中第一篇文章就是你的論文，談論三次多項式的迭代問題。這篇文章中包含了許多電腦繪圖。後來你還有好幾篇論文刊登在這本期刊。你對於電腦在數學中的角色持何看法？

答▸打一開始，我就對電腦很著迷。我們起初得對付可怕的程式打卡，這相當痛苦，但這段時間下來，使用電腦已經愈來愈容易。事實上，電腦對數學最大的影響只是讓準備手稿更方便。我寫文章的習慣是不斷改寫，所以在過去，我常把可憐的秘書搞瘋了。我交給他們凌亂的長稿，他們努力呈現出精美的打字稿。然後我這邊刪刪，那邊改改，諸如此類。這對他們來說形同惡夢。現在因為可以在電腦上編輯文件，事情已經變得簡單輕鬆許多。

當然，電腦也讓數值實驗變得更加容易。數值實驗並不是新鮮的東西，高斯就曾做過許多數值實驗。只是他的時代這類實驗非常困難，現在就簡單多了。特別是想研究一個困難的動力系統時，在電腦上跑這個系統（或者它的簡化模型）十分有幫助。我們多少期待這會得到精確的結果，但這很危險。我們很難確定電腦是否沒有因為捨入誤差或其他計算誤差，得到全然不準確的計算結果。理解電腦的功用與限度已經是一門藝術，但使用電腦的確非常有好處。您可以很快掌握一個動力系統的可能行為，然後嘗試從電腦結果的提示來證明這個系統的性質。至少，在最好的情況是如此。當然也會碰到其他情況，能做的就只是取得電腦數據，並期待這些結果是精確的。

問▸從某種意義上說，這個數學學門類似物理學，要計劃實驗並從實驗結果提煉出結論……

答▸至少當你相信電腦程式沒有錯誤，或硬體沒有問題時，你可以有一個完整的證明，其中夾帶著電腦輔助證明的中間階段。

不過「沒有錯誤」的假設十分緊要。邦比耶里（Enrico Bombieri）就有這樣的經驗，他曾經使用一台看起來很厲害的新高速電腦做數論實驗，卻發現在某些情況下，得到的結果好像總是不對勁。邦比耶里不斷反覆上溯追查問題，最後在硬體中發現一處接線的錯誤！

問▸你自己的經驗裡是否有什麼例子，是你執行的所有實驗都暗示某猜想必然為真，但是卻始終找不到證明的方法。

答▸根據我的經驗，電腦實驗很少提示某些東西是絕對正確的，通常只會顯示很難找到任何可能存在的例外。如果你在少於 10^{10} 的範圍驗證某個數論性質，誰知道到了 10^{11} 時會發生什麼問題。在高維的動力學中，可能有些例子的動力行為會變化很大。在動力學中有一項基本教條：我們對零機率的事件不感興趣。但有些事件的機率可能是 10^{-10} 。這種事件在電腦上永遠看不到。

教科書與闡述類文章

問▸你寫過好幾本傳奇性的教科書，文字明晰，引領讀者以看似最簡短的方式快速掌握要點。你的著作主題含括微分拓撲，代數 K 理論，特徵類，二次形式，以及全純動力學。閱讀你的著作十分愉快。在撰寫數學教科書時，你有什麼特定的哲學嗎？

答▸我想大多數我寫的教科書都源於我試圖理解某項主題。前面提過我擁有十分視覺性的記憶，我能確定自己理解某樣東西的唯一方式就是把它寫得清清楚楚，這樣我才能真正理解。我現存著作的清晰程度，起因於我是一個學習緩慢的人，必須寫下許多細節才能確保其正確性，然後再持續修改到論證清楚明白。

問▸除了教科書和研究論文之外，您還寫過許多精湛的闡說或概述類的文章，閱讀這些文章，對於每一位數學家，無論專家或非專家都是一種樂趣。我們想到兩個問題。您喜歡撰寫歷史性的概述文章嗎？你顯然頗得箇中真竅。你是否認為普及或一般性數學文章或書籍出自像你一樣的傑出數學家是很重要的？

答▸第一個問題的答案是「當然」，因為數學擁有豐富而有趣的歷史。第二個問題的答案是「當然不是」，我並不在意是誰寫的文章或書籍，關鍵在於是否寫得明晰、正確、有用。

問▸你對數學史或追索數學概念的發展感興趣嗎？

答▸我當然喜歡嘗試追察我所運用的概念是何時以及如何產生的。顯然這是一種十分特別的歷史，主要關注的是日後很重要但起初很晦澀的想法，同時卻忽略在當時似乎更重要的概念。對大多數科

學家來說，歷史便是有用概念的歷史。人們對無用的概念通常覺得很無聊。更完整的歷史是要描述觀念的發展，對於即使錯謬的線索也興味盎然。就這個意義而言，我想寫的歷史是十分偏頗的，只試圖找出今日重要觀念的起源——第一位發現的人。我發現這是一個有趣的主題。但因為專業術語的演變，舊日的論文可能很難理解。例如，當一篇百年前的論文描述一個函數是「正則的」，就很難確認它的意思。明確寫下定義總是很重要，這樣即使術語真的改變，我們仍然能夠理解你的意思。

問▸和更廣大的數學聽眾交流很重要嗎？

答▸向廣大聽眾傳達數學的意義和成就是十分重要的事。不過我自己的著作想傳達的讀者，都是已經對數學有強烈興趣的人。實務上，我想寫的是我感興趣的東西，希望別人也覺得有趣。

任職機構

問▸你在普林斯頓大學開始職涯，任數學系教授多年，中間在加州大學洛杉磯分校與麻省理工學院待過，後來再回到普林斯頓，只是這次是高等研究院 ❸ 。請你比較一下研究院和大學的環境以及兩者之間的聯繫。

答▸這兩個機構在某些方面很相似，彼此也有密切聯繫，人員經常來回走動。最大的差異是在大學裡你可以持續與學生接觸，不論是教書或是與研究生相處。這種關係有相當的連續性，畢竟學生至少會有好幾年的時間可與你常伴左右。研究院就平靜許多，具有更豐富的研究機會與更田園般的環境。不過院中人員不斷轉換，經常你還沒認識某些人，一年到期他們就離開了。在這方面，研究院就不那麼令人滿意。不過這兩個地方都是美好的機構，我在兩邊都待得很愉快。

問▸1980 年代末，你離開研究院到石溪大學（紐約州立大學）任教，在那裡作為教師，你重拾和學生的接觸。

答▸是的，這當然是強烈的動機之一。我覺得研究院是一個待上幾年很棒的地方，但對我來說，或許不是一個可以終生待著的好地方。就某種意義而言，這樣太孤單了。我想和年輕人或學生多接觸，保有更多連續的聯繫，對我來說很重要，因此我很高興能在石溪找到一個好職位。另外家庭因素也是原因之一：我太太在石溪任職，經常來回通勤，起初運作的十分良好，直到我們的小孩長大會講話時就開始大聲抱怨了。

問▸我的同事和我曾經在 2005 年訪問過塞爾柏格（Atle Selberg）❹。塞爾柏格偶然提起他以為米爾諾永遠不會離開高等研究院，因為他的研究

---

❸ 編註：米爾諾 1970 ～ 1990 在高等研究院任職，如今為石溪大學的榮譽教授。

❹ 參看：Nils Baas and Christian Skau，“Lord of the numbers. Atle Selberg on life and his mathematics”，*Bulletin (New Series) AMS* 45 (2008) No. 4, AMS。

室實在太亂，光是清乾淨就不知道要花多大的力氣。不過你畢竟搬離了……

答▸我不知道那間研究室是否有清乾淨，我想東西應該都裝箱放在我們的車庫裡了。

數學的發展

問▸你這一生是否有見過那個數學家，給你留下深刻的印象？

答▸很多，當然。普林斯頓的教授就不少，佛克斯、史丁洛，以及亞丁都讓我印象深刻。我記得懷德海曾邀請一批年輕拓樸學家到牛津去，這是我年輕時很棒的一次經驗。我前面已經談過董姆。較近期的，杜瓦狄（Adrien Douady）對我有重要影響。他是一個很特殊的人，總是生機充沛，樂於談論任何數學主題。如果你有問題，寄電子郵件給他，總是大概一天左右就會收到答案。這些是我印象最深刻的人。

問▸如果將數學視為整體，你這一生中數學已經歷一些改變。有些時期，數學的內在發展佔據優勢，但在別的時候，發展動力許多來自如物理學的其他學科。目前的數學發展處於哪種時期？現在的數學界有哪些重要的外在影響？你會如何評斷未來的數學發展？

答▸我認為數學和生物學的關係如何發展是個大謎團。

問▸你前面提過生態學的例子。

答▸是，但剛剛討論的只是非常簡化的數學模型。很明顯，大多數生物學問題都十分複雜，因此永遠無法建立完整的數學模型。這是應用數學一般問題的一環：現實世界中發生的大多數事情都非常複雜。訣竅在於辨識出其中的關鍵變數，以便構造看似簡化的模型，卻仍足以協助釐清更複雜的實際情況。最近數學界在理解大數據集（還有統計分析）上已取得巨大成功。我沒有做過這類數學，但是它非常重要。哪種數學在生物學中比較有用，我認為目前仍然是懸而未決的問題。

工作風格

問▸你曾經證明很多被眾數學家譽為突破性的研究成果。可否請你回憶一些靈光乍現的例子，因此突然就解決了你正研究的問題？當一個想法突然解決你一直在做的問題時，這種情況通常發生在你戮力工作時？還是發生在很放鬆的氛圍？

答▸有種劇本是這樣的：在長久研究而煩慮一個問題後，某個晚上，你在納悶答案如何之餘入睡，竟然在早上醒來時就得到答案了。這真的會發生。另一種更常見的可能性是，你坐在書桌前工作，最後得到一些結果。數學的對話絕對很重要，和別人交談，閱讀別人的研究，獲得建議通常都十分緊要。

問▶彼此交談經常能釐清想法。

答▶沒錯，兩個方向皆然。如果你解釋某個東西給別人聽，可以幫忙你更了解內容；當然，如果有人解釋某些事情給你聽，也可能很重要。

問▶你現在做數學的方式，和你三、四十歲時有什麼不同嗎？

答▶是啊，或許吧。

問▶你每天花多少時間做數學？

答▶不知道。我早上工作幾小時，小睡一會，下午再工作幾小時。不過多少有所差別，我年輕時的工作時間可能更長。

問▶你贊成哈第的說法嗎？他說數學是年輕人的遊戲，但你似乎是一個反例！

答▶我能說什麼？無論年紀多大，盡力而為便是！

問▶在大約 15 年前的一篇文章中，你描述好幾個你原本覺得比較次要的數學領域，但後來在解決你自己一直努力的問題時卻成為根本的關鍵。我想弗利德曼的工作就是其中一例。你還有更多的例子嗎？這中間是否有什麼廣泛的寓意？

答▶我認為做數學的樂趣之一，就是它不需要巨額經費和龐大機器就能進行，一個人自己研究也仍然可能做出大貢獻。多數的問題都有許多可能的解決理路，所以我認為將所有資源集中在少數領域是一個大錯誤。讓很多人能獨立的工作真的是很有益處的想法，因為好點子可能來自全然出乎意料的方向。這種情況經常發生。我非常認同數學不該由上往下指導的見解，大家必須能遵從自己的想法。

問▶這就自然引出一個問題：數學對你的意義是什麼？身為數學家，最棒的部分是什麼？

答▶嘗試理解事物，試著向自己和他人闡明事物，交換想法並注視他人如何發展新點子。世上有太多想法正在發展，沒有人能理解所有東西，但是你可以讚美其他人的工作，即使你並不清楚其中的細節。我覺得身處這樣的世界很讓人興奮。

問▶真有的話，身為數學家最糟的部分是什麼？競爭算是其中一部份嗎？

答▶如果有幾個人為同一目標奮鬥，特別是彼此看不對眼時，競爭可能就會非常不愉快。如果壓力太大，成功的報償太高，情勢就會扭曲。一般來說，我認為大多數數學家的態度是公平的。如果兩組人在約莫同時得到大致相同的研究成果，大家會共享這份成就。我覺得過分強調誰先誰後是很不幸的事。另一方面，如果一個人想到一個點子，別人卻來掠美，場面就會變得很不愉快。不過，我覺得在數學界這種情況已經比其他領域緩和，譬如生物學界的競爭似乎就更慘烈。

問▶你現在對數學抱持的興趣一如你年輕時嗎？

答▶是的，我想是如此。

獎賞

問▶你在 1962 年獲得費爾茲獎，獎勵你在數學尤其是流形理論的研究。那屆世界數學家大會在斯德哥爾摩舉行，當時你才 31 歲。費爾茲獎是數學界價最重要的獎項，至少對年齡不到 40 歲的人是如此。阿貝爾獎相對是一個新獎，推崇不論年齡大小的數學家。你在大約 50 年前拿到費爾茲獎，還記得當時的感受嗎？菲爾茲獎如何影響你的學術職涯？

答▶嗯，如你所言，這個獎十分重要。這是一種認可，我當然覺得很榮幸。到斯德哥爾摩領獎是一次很美好的體驗。我工作的主要動機只是理解數學並完成自己的想法，能獲得這樣的榮譽令人心滿意足，但是我並不確定得獎是否造成任何直接的影響。

問▶得到費爾茲獎後，你寫論文有感到額外的壓力嗎？

答▶沒有，日子如常，感覺和之前差不多。

問▶你在職涯中曾贏得許多獎：費爾茲獎、沃爾夫獎、三次美國數學學會的史提爾獎（Steele Prize），如今你又將獲頒阿貝爾獎。除了你已經獲得的其他傑出獎項之外，你對於獲得阿貝爾獎有什麼特別感受？

答▶這誠然是最重要的一個獎。因為自己的工作而獲得認可總是件好事，但這個時機特別令人感到滿意。

問▶作為提高大眾能見度的手段，你對科學家的獎項有什麼看法？

答▶這種方式當然非常成功。我不確定自己是否喜歡獲得那麼多關注，但也沒給我帶來多大的傷害。如果這是一種贏得公眾注意數學的方式，我會全力贊成。大獎的危險在於可能導致我以生物學為例描述過的境況。競爭可能變得太強烈進而產生毒害，我希望這永遠不會在數學中發生。

個人興趣

問▶我們一直在談數學。結束訪談前，我們可以談談你感興趣的其他事情嗎？例如你的嗜好等等。

答▶我想放鬆時，喜歡閱讀科幻小說或其他無聊的小說。我很喜歡爬山，雖然從不是專家。我也喜歡滑雪，雖然這方面也不是專家，但我很喜歡，今年冬天我沒能滑成，但我希望能再去滑雪。

問▶文學或音樂呢？

答▶我喜歡音樂，但沒有精緻的音樂耳，也沒有音樂天賦。我當然喜歡閱讀，但正如前面說的，為了

放鬆，我寧可看輕鬆的東西，而不是嚴肅的書。我覺得做數學已經夠困難了，沒道理要嘗試成為了放鬆，我寧可看輕鬆的東西，而不是嚴肅的書。我覺得做數學已經夠困難了，沒道理要嘗試成為每樣東西的專家。

問 ▸ 非常感謝你接受這個非常有趣的訪談。當然，除了我們兩人之外，我們也代表丹麥、挪威和歐洲數學學會向你致意。非常感謝你！∞

本文出處

本訪談進行於 2011 年 5 月 25 日，地點在奧斯陸。本文原刊登於歐洲數學學會的 *EMS Newsletter*（81）Sep. 2011，也曾刊登於美國數學學會的 *Notices of the AMS*（59）2012 No.3。本刊感謝歐洲數學學會授權與翻譯。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

延伸閱讀

- 〈米爾諾：與一位數學傳奇的對話〉（John Milnor: A Conversation with a Mathematical Legend）https://plus.maths.org/content/conversation-john-milnor
- 這是米爾諾於 2014 年在參加首爾的國際數學家大會期間的一段訪談紀錄。https://www.simonsfoundation.org/2011/04/28/john-w-milnor/ 這是米爾諾約 3 小時的「微分拓樸」演講影片，於 1965 年由美國數學協會（Mathematical Association of America，MAA）所錄製。

米爾諾與妻子麥克德芙（Dusa McDuff）、挪威國王哈洛德五世（King Harald）以及挪威教育與研究部長阿斯蘭德（Tora Aasland）於阿貝爾獎晚宴。（Kyrre Lien 攝）