

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

運用最佳化輪胎力量分配於前輪轉向/後輪驅動車輛
之運動控制



Motion Control of FWS/RWD Vehicle using Optimum Tire
Force Distribution Method

研究生：王俊傑

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國一〇一年六月

運用最佳化輪胎力量分配於前輪轉向/後輪驅動車輛
之運動控制

Motion Control of FWS/RWD Vehicle using Optimum Tire Force Distribution
Method

研究生：王俊傑

指導教授：蕭得聖 博士

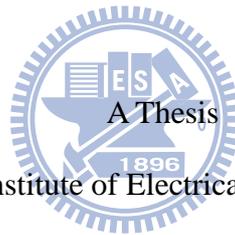
Student : Chun-Chieh Wang

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文



Submitted to Institute of Electrical Control Engineering

College of Electrical Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Electrical Control Engineering

June 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一〇一年六月

運用最佳化輪胎力量分配於前輪轉向/後輪驅動車輛 之運動控制

學生：王俊傑

指導教授：蕭得聖 博士

國立交通大學電控工程研究所

摘要

汽車從發明至今已經成為人類生活的一部份，近年來越來越多的國內外車廠致力於各種先進車輛控制系統的研發，不管是使用何種控制方法以及所應用於的車輛驅動與操作模式，這些系統都正朝著人性化、安全性與環保性的目標前進。

本研究考量主動式安全性問題，利用最佳化輪胎與路面間摩擦力分配方法提供一個針對一般傳統車輛驅動模式(前輪轉向、後輪驅動)的運動控制系統。控制系統架構分為三層：上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法、下層控制器。當駕駛員下達轉向命令時，上層控制器會計算出參考軌跡並演算出車輛所需總縱向合力、總側向合力以及橫擺力矩總合使車輛跟隨此參考軌跡。最佳化演算法把這些總合力、力矩分配至各個輪胎。接著下層控制器考慮到輪胎動態的非線性與不確定特性進而計算出各輪胎所需扭矩以達其期望摩擦力。最後本研究透過模擬在轉向與車道變換的駕駛情況下控制器控制的結果以驗證其效用。

未來隨著前輪轉向、前輪驅動車輛漸趨盛行，在本研究的控制架構下僅需把最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法中由車輛模型引起的機構限制作修改調整，便得以將所設計的控制系統應用於此類車輛。

Motion Control of FWS/RWD Vehicle using Optimum Tire Force Distribution Method

Student : Chun-Chieh Wang

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

Institute of Electrical Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

This paper presents a motion control scheme for a front-wheel-steering/rear-wheel-driving (FWS/RWD) vehicle using the optimum tire force distribution method. The proposed control system is divided into three layers: the upper controller, the optimum tire force distribution algorithm, and the lower controller. When the driver commands the vehicle, the upper controller computes the total desired longitudinal tire force, lateral tire force, and the desired yaw moment which allow the vehicle to follow the given reference trajectory. Then the desired forces and moments are optimally distributed to the four wheels, and the lower controller compensates for the nonlinear and uncertain characteristics of the tire dynamics to generate the desired forces. Finally, simulations are carried out to verify the effectiveness of the proposed control scheme.

In the future, with the front-wheel-steering/front-wheel-driving vehicle is becoming popular, we could just modify the physical constraints caused by the vehicle model in the optimum tire force distribution algorithm. Then the designed controller of this study can be applied to such vehicles.

致謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，不僅以踏實的研究態度為榜樣，更循循善誘使我了解在研究中該如何面對問題、解決問題以及分析問題，讓我能夠順利完成碩士論文的研究。

本論文的完成另外亦得感謝我的口試委員徐保羅教授與陳宗麟教授。因為有各位老師在口試中給的建議及方向，使得本論文能夠更完整而嚴謹。

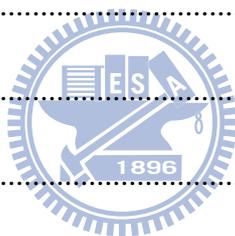
兩年裡的日子，感謝永洲、翊熏學長不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在我迷惘時為我解惑，也感謝志偉同學、柏俊同學、昌謀同學與彥良同學的共同砥礪。璟沅、仲謙與維民學弟的加油與鼓勵，也讓我備感溫馨。

最後我要感謝永遠支持我的家人，有他們的支持使我在求學的階段能夠一路堅持下去，所以在此我要將此論文獻給我的家人，我的父母。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	ix
第一章、緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	3
1.3 研究貢獻	4
1.4 論文架構	5
第二章、相關研究	6
2.1 四輪轉向控制相關研究	6
2.2 直接橫擺力矩控制相關研究	9
2.3 最佳化輪胎摩擦力分配相關研究	11
第三章、車輛系統模型	14
3.1 車輛動態模型	14
3.2 輪胎模型	18
第四章、控制器設計	20
4.1 上層控制器	22



4.1.1 車輛參考模型	22
4.1.2 車輛縱向速度、車身側滑角與橫擺角速度控制器	24
4.2 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配	28
4.2.1 可控變數、成本函數、限制條件	29
4.2.2 最佳化問題求解	33
4.2.3 後輪側向力即時估側	39
4.3 下層控制器	44
4.3.1 縱向力估測	45
4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器	45
4.3.3 側向最佳化前輪轉向角控制器	51
4.4 分析上層控制器之控制輸入誤差 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值	53
第五章、模擬與結果討論	59
5.1 J-turn	61
5.2 Single-lane change	72
5.3 相關控制器控制結果比較	77
第六章、結論與未來展望	84
6.1 結論	84
6.2 未來工作	85
參考文獻	86

圖目錄

圖 1.1 控制系統流程方塊圖	3
圖 2.1 腳踏車模型	6
圖 2.2 後輪轉角前饋控制	7
圖 2.3 後輪轉角回饋控制	8
圖 2.4 解耦合控制系統	8
圖 2.5 DYC 控制系統方塊圖，擷取自[6]	10
圖 2.6 控制系統方塊圖，擷取自[22]	11
圖 3.1 輪胎自由體俯視圖	14
圖 3.2 車輛自由體俯視圖	15
圖 3.3 輪胎轉動自由體圖	16
圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖	17
圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圖	19
圖 4.1 系統架構圖	21
圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[15]	23
圖 4.3 轉向角對應 \mathbf{A} 矩陣條件數	42
圖 4.4 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖	50
圖 4.5 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、	50
圖 4.6 “magic formula”與”Dugoff’s tire model”兩輪胎模型對輪胎側滑角作圖	55
圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change)	59
圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令	62
圖 5.3 模擬一之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	62
圖 5.4 模擬一之前輪側向力最佳化分配與實際結果	62
圖 5.5 模擬一之後輪側向力估測與實際結果	63
圖 5.6 模擬一之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果	63
圖 5.7 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	64
圖 5.8 側向摩擦力與正向力關係圖($\mu = 0.85$): Magic formula 輪胎模型(右)、Dugoff’s 輪胎模型(左)	64

圖 5.9 模擬一之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制	65
圖 5.10 模擬一之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右).....	65
圖 5.11 模擬一之最佳化力分配中縱向力分配限制	66
圖 5.12 模擬一之最佳化力分配中側向力分配限制	66
圖 5.13 模擬一之下層最佳化輪胎轉向角分配限制	66
圖 5.14 模擬二之駕駛者轉向命令	68
圖 5.15 模擬二之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	68
圖 5.16 模擬二之前輪側向力最佳化分配與實際結果	68
圖 5.17 模擬二之後輪側向力估測與實際結果	69
圖 5.18 模擬二之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果	69
圖 5.19 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	69
圖 5.20 模擬二之上層控制器所計算控制輸入 M (橫擺力矩)總和	70
圖 5.21 模擬二之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制	71
圖 5.22 模擬二之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、期望與實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右)	71
圖 5.23 模擬二之最佳化力分配中縱向力分配限制	71
圖 5.24 模擬二之最佳化力分配中側向力分配限制	72
圖 5.25 模擬二之下層最佳化輪胎轉向角分配限制	72
圖 5.26 模擬三之駕駛者轉向命令	73
圖 5.27 模擬三之縱向力最佳化分配、估測與實際結果	73
圖 5.28 模擬三之前輪側向力最佳化分配與實際結果	74
圖 5.29 模擬三之後輪側向力估測與實際結果	74
圖 5.30 模擬三之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果	74
圖 5.31 模擬三之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果	75
圖 5.32 模擬三之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制	75
圖 5.33 模擬三之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右).....	75
圖 5.34 模擬三之最佳化力分配中縱向力分配限制	76

圖 5.35 模擬三之最佳化力分配中側向力分配限制	76
圖 5.36 模擬三之下層最佳化輪胎轉向角分配限制	76
圖 5.37 模擬四之駕駛者轉向命令	78
圖 5.38 模擬四之控制車輛橫擺角速度比較圖	78
圖 5.39 模擬四之控制車輛質心側滑角比較圖	79
圖 5.40 模擬四之控制車輛縱向速度比較圖	79
圖 5.41 模擬四之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	80
圖 5.42 模擬五之駕駛者轉向命令	81
圖 5.43 模擬五之控制車輛橫擺角速度比較圖	81
圖 5.44 模擬五之控制車輛質心側滑角比較圖	82
圖 5.45 模擬五之控制車輛縱向速度比較圖	82
圖 5.46 模擬五之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖	83



表 5.1 模擬中所使用的車輛參數	60
表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數	61
表 5.3 兩種 DYC 控制型式之權重因子值[9]	77

符號表

r	: 橫擺角速度
V_x	: 車輛質心縱向速度
V_y	: 車輛質心側向速度
β	: 車輛質心側滑角
a_x	: 車輛質心縱向加速度
a_y	: 車輛質心側向加速度
g	: 重力加速度
M_z	: 車輛橫擺力矩
I_z	: 橫擺角轉動慣量
m	: 車體質量
m_s	: 車體懸載質量(sprung mass)
h_s	: 車體懸載質量之質心與地面的高度
t_f	: 車輛前輪輪距
t_r	: 車輛後輪輪距
l_f	: 車體質心到前輪軸的距離
l_r	: 車體質心到後輪軸的距離
l	: 前輪軸到後輪軸的距離
δ	: 實際車輪轉向角
δ_d	: 期望車輪轉向角
δ'	: 前一取樣時間實際車輪轉向角
δ'_d	: 前一取樣時間期望車輪轉向角
ω	: 輪胎轉動角速度
v	: 輪胎前進速度



- I_w : 輪胎轉動慣量
 R_w : 輪胎等效半徑
 r_i : 輪胎半徑
 λ : 輪胎縱向滑動比
 α : 輪胎側滑角
 σ : 組合滑動(combined slip)
 σ_x : 縱向理論滑動
 σ_y : 側向理論滑動
 T_m : 輪胎扭矩
 F_x : 平行車身之縱向摩擦力
 F_y : 垂直車身之側向摩擦力
 F_{xd} : 分配之平行車身縱向摩擦力參考值
 F_{yd} : 分配之垂直車身側向摩擦力參考值
 F_a : 平行胎面之縱向摩擦力
 F_b : 垂直胎面之側向摩擦力
 F_{ad} : 分配之平行胎面縱向摩擦力參考值
 F_{bd} : 分配之垂直胎面側向摩擦力參考值
 F_{a0} : “Magic formula” 輪胎模型純縱向滑動之縱向摩擦力
 F_{b0} : “Magic formula” 輪胎模型純側向側滑之側向摩擦力
 F_a' : 前一取樣時間平行胎面之縱向摩擦力
 F_b' : 前一取樣時間垂直胎面之側向摩擦力
 \hat{F}_a : 平行胎面之縱向摩擦力估測值
 F_{ad}' : 前一取樣時間分配之縱向摩擦力參考值
 F_{bd}' : 前一取樣時間分配之側向摩擦力參考值
 F_a^{Dug} : Dugoff's 輪胎模型之縱向摩擦力
 F_b^{Dug} : Dugoff's 輪胎模型之側向摩擦力



C_x^{Dug} : Dugoff's 輪胎模型之縱向剛度

C_y^{Dug} : Dugoff's 輪胎模型之縱向(轉向)剛度

F_z : 輪胎正向力

F_{z0} : 車輛等速直線行駛時輪胎正向力

ε_a : 兩取樣時間分配之縱向摩擦力最大變化量

ε_b : 兩取樣時間分配之側向摩擦力最大變化量

ε_δ : 兩取樣時間分配之轉向角最大變化量

$B_{x,y}$: 輪胎模型參數

$C_{x,y}$: 輪胎模型參數

$D_{x,y}$: 輪胎模型參數

$E_{x,y}$: 輪胎模型參數

r_{ref} : 橫擺角速度參考值

β_{ref} : 車輛質心側滑角參考值

$V_{x\text{ref}}$: 車輛質心縱向速度參考值



X : 上層控制器計算所需縱向合力

Y : 上層控制器計算所需側向合力

M : 上層控制器計算所需橫擺力矩總和

$S_{x,y,z}$: 上層順滑模態控制器之順滑平面

S_a : 下層順滑模態控制器之順滑平面

μ : 路面摩擦力係數

C_i : 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配之成本函數第 i 個輪胎權重參數

α_d : 反輪胎模型計算之輪胎側滑角參考值

第一章、緒論

1.1 研究背景

隨著整個地球村越來越熱絡的交通網，汽車對人類生活的重要性日益提高，儼然已成為現代人生活的一部份。安全性則是當今汽車學最重要的議題之一，打從第一輛汽車問世迄今，車禍等意外事故層出不窮，為了保護車輛駕駛者的行車安全，使其獲得保障，車輛安全系統已經是汽車設計工業重要的一個環節。

車輛安全系統分為主動式安全和被動式安全。主動式安全與被動式安全的差別在於主動式安全是指車輛發生撞擊、打滑等危險之前所啟動的輔助裝置，這些裝置在車輛接近失控時便以各種方式介入駕駛操控，希望利用機械及電子裝置，保持車輛的操控狀態，常見的如防鎖死煞車系統(ABS)；被動式安全則是指車輛已經失控的情況下，對於乘坐人員進行被動的保護作用，希望利用結構上的導引與潰縮，盡量吸收撞擊的力量，確保車內乘員的安全，典型的例子就是安全帶。本研究討論的為主動式安全，在像 ABS 這類的控制系統中，雖然在緊急情況下避免輪胎鎖死使方向盤維持其操控性，但在快速的轉向輸入下，駕駛者不全然能掌握並維持好車輛動態。

本研究裡考慮到車輛行進時若遇到緊急情況，駕駛者不僅難以即時操控方向盤來調整車輛行駛路徑更無法去確保每個輪胎是否將會打滑失控，故希望藉由所設計的控制器對於車輛的三個方向運動動態(縱向、側向、橫擺)進行控制，以確保車輛行進軌跡，且希望獲得輪胎與路面間產生的摩擦力資訊，來掌握好各輪胎運動動態。每個輪胎所產生的摩擦力是有最大值的，為其正向力與路面摩擦係數乘積，當輪胎摩擦力到達其最大值後(亦稱之為飽和)，表示控制器已無多餘空間作控制，反應到車輛動態在緊急情況下對駕駛者是危險不利的。所以為了避免輪胎飽和的情況，我們控制器使用了最佳化輪胎與路面間摩擦力分配的控制策略，而使輪胎與路面之摩擦力遠離飽和點即為最佳化的訴求。

在本實驗室中已有相關研究並設計出針對四輪獨立驅動車(4-wheel-independent-steering)的車輛運動控制器，不過由於所參考的四輪驅動車模型是四輪獨立轉向、獨立驅動，控制自由度大且實際上此類車輛並不普及。本研究希望基於目前多數傳統車輛模型：前輪轉向、後輪驅動(front-wheel-steering/rear-wheel-driving) 進而設計出車輛運動控制器。

車輛轉向的穩定性控制已經有很多學者做這方面的研究，且提出不同的控制策略；像是四輪轉向(Four-wheel steering：4WS)控制[1][2][3]、差動式煞車(Differential brake)轉向控制[4]、直接橫擺力矩控制(Direct yaw moment control：DYC)[5][6][8]，以及最佳化輪胎摩擦力分配(Optimum tire force distribution)控制方法[18]等等，都有不錯的研究成果。本研究所使用的控制方法如上述為最佳化輪胎摩擦力分配，優點顧名思義就是每個輪胎所產生的摩擦力都是經由所考慮的最佳化問題最佳化產生的，但此方法延伸的困難點就在於如何控制車輛輪胎之力矩與轉向角，使其產生控制器所計算出的最佳摩擦力。

一般車輛在道路上行駛，路面的狀況會直接影響到車輛輪胎與路面間的受力，而輪胎與路面間的受力又會影響到車輛的動態，所以如果可以估測車輛輪胎與路面間摩擦力，控制器可以利用此資訊更有效的控制輪胎動態，讓車輛在不同的路面狀況下都能保持安全與穩定地行駛。車輛在作轉向時，有效平均分配車輛輪胎與路面間摩擦力作控制，保持轉向的穩定安全；此外，控制器若能即時得知此時輪胎與路面間摩擦力大小，也可以控制輪胎扭力或轉角避免輪胎鎖死或打滑。因此，汽車若具有估測路面摩擦力的系統，判斷路面與輪胎間的摩擦力，回授設計控制器作控制，將有助於控制車輛的行駛動態。

總結本研究將基於目前多數傳統車輛後驅的模型(前輪轉向、後輪驅動)，致力於如何將估測的摩擦力回授設計控制器，並且建立車輛運動控制系統，包含車輛縱向速度、車身質心側滑角，以及橫擺角速度三個方向動態的穩定控制，透過最佳化輪胎摩擦力的分配更有效且安全的控制車輛的行駛。

1.2 研究目的

本研究目的在於設計車輛運動控制系統，針對車輛的三個方向運動動態(縱向速度、質心側滑角與橫擺角速度)作控制，使車輛能跟隨給定的參考動態，進而確保其行駛軌跡。研究中控制器可分為三大部分：上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配和下層縱向摩擦力回授穩健控制器、最佳化輪胎轉向角控制器。上層控制器計算出車輛維持行駛路徑所需的縱向、側向合力以及橫擺力矩的總和，然後經由最佳化分配出車輛四個輪胎與路面間所需要產生的縱向摩擦力與兩前輪側向摩擦力，透過最佳化的目的在使各輪胎遠離飽和點，其中後輪側向摩擦力部分因後輪無法轉向(轉向角恆為零)，並不能作轉向來控制，故需設計控制器以估側後輪側向摩擦力；下層控制器，控制輪胎力矩大小和車輪的轉向角度，使得輪胎和路面間產生最佳化分配出來的摩擦力，如圖 1.1 流程說明。



圖 1.1 控制系統流程方塊圖

1.3 研究貢獻

本研究考慮到後驅(前輪轉向、後輪獨立驅動、四輪獨立剎車)車輛系統，設計出的車輛運動控制系統，包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法、後輪側向力即時估測、下層縱向摩擦力回授穩健控制器與最佳化輪胎轉向角控制器。

對於多數最佳化問題常以疊代法得出數值解，本研究最佳化力分配演算法部分致力於求得最佳化之解析解，使得控制器得以應用於即時控制系統(real-time control system)。而一般傳統控制器對輪胎模型的假設為線性輪胎模型，沒有考慮輪胎的非線性特性，故在車輛側向加速度較大時，會因為輪胎非線性的特性，使得輪胎飽和，造成控制器不再能保證車輛側向與橫擺運動的穩定。本研究設計的下層控制器有考慮輪胎非線性之特性，在控制器中假設一非線性輪胎模型，並考慮其動態以及與真實輪胎間模型不確定性(Model uncertainty)的問題，設計控制策略避免輪胎鎖死或打滑的情況發生，進而提升車輛運動控制的穩定性。

此外，若在緊急情況下，一般駕駛者通常無法輕易地自行操控車輛修正行駛路徑，故此時必須藉由控制器來控制車輛動態跟隨給定的參考動態(縱向速度、質心側滑角與橫擺角速度)，由這些參考動態會反應出一條參考軌跡，使車輛行駛於安全的路徑。然而在緊急狀況下，駕駛者會下達較大的轉向命令，車輛側向加速度也較大，一般傳統控制器將無法保證車輛側向與橫擺運動的穩定，而本研究設計的控制器則依然可以控制車輛跟隨給定的參考路徑。

1.4 論文架構

論文各章節的編排如下

第一章 緒論：描述研究背景、目的與貢獻。

第二章 相關研究：介紹各種不同車輛轉向控制的控制方法，然後簡介本研究使用的控制方法。

第三章 車輛系統模型：本研究使用的車輛模型為一個考慮車輛縱向、側向速度和橫擺角速度運動的動態模型；車輛驅動方式為前輪轉向、後輪驅動。

第四章 控制器設計：包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配、後輪側向力即時估側、下層縱向摩擦力回授穩健控制器與最佳化輪胎轉向角控制器設計。

第五章 模擬與結果討論：模擬各種駕駛狀況下控制器控制的結果，並且和其他控制器控制的結果作比較。

第六章 結論與未來展望：總結本研究並提出未來能更深入發展的方向。



第二章、相關研究

近年來有許多學者提出不同的控制策略，來提升車輛轉向的操控性與穩定性，像是四輪轉向控制、差動式煞車轉向控制、直接橫擺力矩控制、最佳化輪胎摩擦力分配控制等等。其中四輪轉向控制是以前後輪轉向角來控制車輛側向運動，不過四輪轉向車並不常見，而差動式煞車轉向控制與直接橫擺力矩控制都是藉由輪胎與路面間之縱向力對車輛產生橫擺力矩控制車輛的動態，最佳化力分配則是強調對於所設計的成本函數進行最佳化以分配出各輪胎縱向力與側向力來達成車輛動態控制，本章節將會針對四輪轉向控制、直接橫擺力矩控制以及最佳化摩擦力分配控制加以探討分析。

2.1 四輪轉向控制相關研究

從 1980 年代開始，四輪轉向控制就被視為能提升車輛駕駛性的控制策略，相關的研究和控制器設計方法都陸陸續續被提出。四輪轉向控制設計一般是基於輪胎側向力與輪胎側滑角有一線性比例關係存在，此關係只存在於當車輛側向加速度較小時。對車輛動態模型的描述為兩個自由度的腳踏車模型(Bicycle model)，如圖 2.1。

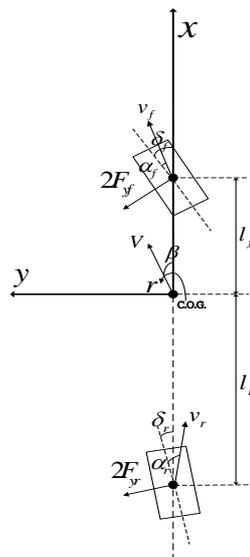


圖 2.1 腳踏車模型

；C.O.G.為質心位置； V 、 β 、 r 分別為質心速度、質心側滑角、橫擺角速度； v_f 、 v_r 為前、後輪前進速度； l_f 、 l_r 為車體質心到前、後輪軸的距離。

忽略車輛俯仰(Pitch)與側傾(Roll)的動態，並假設前、後輪轉角(δ_f 、 δ_r)皆為小角度，車輛以一定速度行駛， y 方向力平衡可由下式表示：

$$mV(\dot{\beta} + r) = 2F_{yf} + 2F_{yr} \quad (2.1)$$

；其中 m 為車體質量。而當前、後輪胎側滑角(α_f 、 α_r)很小時，前、後輪側向力(F_{yf} 、 F_{yr})可由(2.2)(2.3)式線性關係式表示。

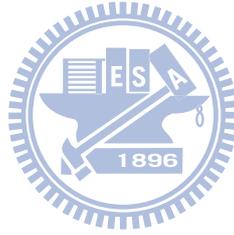
$$F_{yf} = C_f \alpha_f \quad (2.2)$$

$$F_{yr} = C_r \alpha_r \quad (2.3)$$

； C_f 、 C_r 為前、後輪轉向剛度(Cornering stiffness)， α_f 、 α_r 關係式如下：

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{V_y + r l_f}{V_x} \quad (2.4)$$

$$\alpha_r = \delta_r - \frac{V_y - r l_r}{V_x} \quad (2.5)$$



Yoshimi Furukawa et al.將4WS控制策略大略分成兩種：前饋(Feed-forward)補償(圖2.2)與回饋(Feedback)補償(圖2.3)。

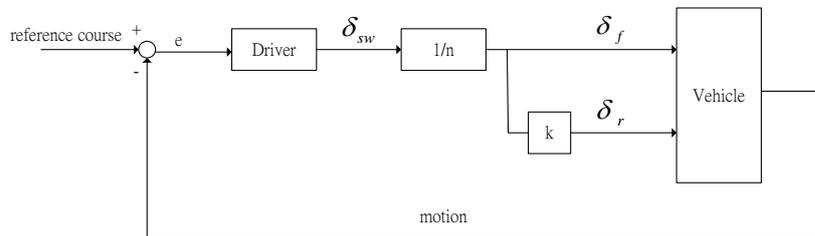


圖 2.2 後輪轉角前饋控制

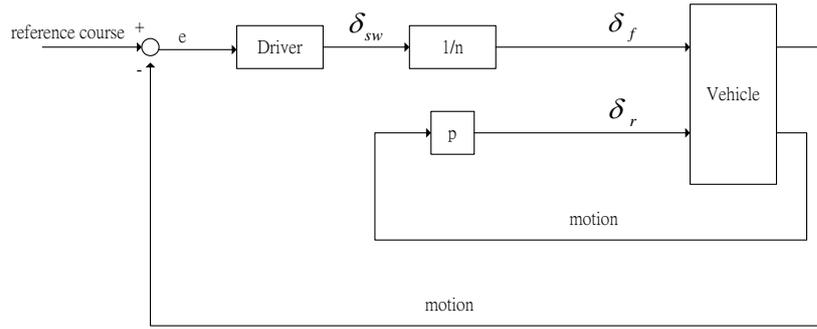


圖 2.3 後輪轉角回饋控制

且提到 4WS 減小質心側滑角的控制器設計，前饋補償控制器如圖 2.2，設計比例控制器 k ：

$$k = \frac{-l_r - \frac{ml_f}{C_r(l_f + l_r)}V_x^2}{l_f + \frac{ml_r}{C_f(l_f + l_r)}V_x^2} \quad (2.6)$$

可以控制使得車輛穩態質心側滑角為零。

Jürgen Ackermann 提出一去除橫擺角速度(Yaw rate)對前輪側滑角影響的解耦合控制策略，如(2.7~9)式，圖 2.4。

$$\dot{\delta}_f = w_f - r \quad (2.7)$$

$$w_f = k_s (a_{fref} - a_f) + \frac{1}{V} a_f \quad (2.8)$$

$$\delta_r = \left(k_D - \frac{l}{V} \right) r + w_f \quad (2.9)$$

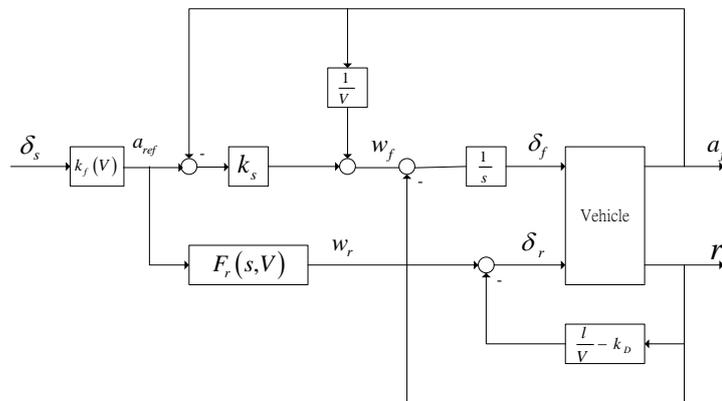


圖 2.4 解耦合控制系統

此控制策略設計使駕駛者只需控制車輛前輪軸側向加速度(a_f)， a_f 對後輪轉向變為不可控(Uncontrollable)。

V.Nikzad. S. and M. Naraghi 在中提到兩種 4WS 控制架構：單轉向控制(Single Steering Control)與雙轉向控制(Dual Steering Control)。單轉向控制前輪轉角由駕駛者控制，只有後輪轉角是由控制器控制，所以控制器只能控制選擇控制車輛橫擺角速度或側向速度其中之一的狀態，不過好處就是控制器的實現與設計較為容易；雙轉向控制則是控制器可以控制前、後輪轉角，可以控制車輛橫擺角速度與側向速度。

2.2 直接橫擺力矩控制相關研究

DYC 的研究開始於 1990 年代，Shibahata et al.[5]提出了一種控制方法：“ β -Method”，且探討質心側滑角對由前、後輪側向力產生的橫擺力矩改變之影響。指出當車輛維持一同心圓轉向時，橫擺力矩若由不平衡的輪胎側向力產生會造成車輛縱向加速或減速。

直接橫擺力矩控制是靠車輛左右兩側輪胎縱向力差來產生橫擺力矩達到控制之目的，大致被分為兩種控制型式：質心側滑角型式(Side-slip type)、橫擺角速度型式(Yaw rate type)。Masato Abe 在[6]提出設計順滑模態控制器來跟隨 2DOF 線性車輛模型的質心側滑角響應，從順滑條件以及車輛動態方程式(2.10)與(2.11)式，設計出橫擺力矩控制輸入。

$$mV(\dot{\beta} + r) = 2F_{yf} + 2F_{yr} \quad (2.10)$$

$$I_z \dot{r} = 2l_f F_{yf} - 2l_r F_{yr} + M_z \quad (2.11)$$

； F_{yf} 、 F_{yr} 為前、後輪側向力； M_z 為其控制輸入，設計會和前、後輪側向力及其對輪胎側滑角偏微之斜率有關，故有假設一非線性輪胎模型用來計算，控制架構圖如圖 2.5。

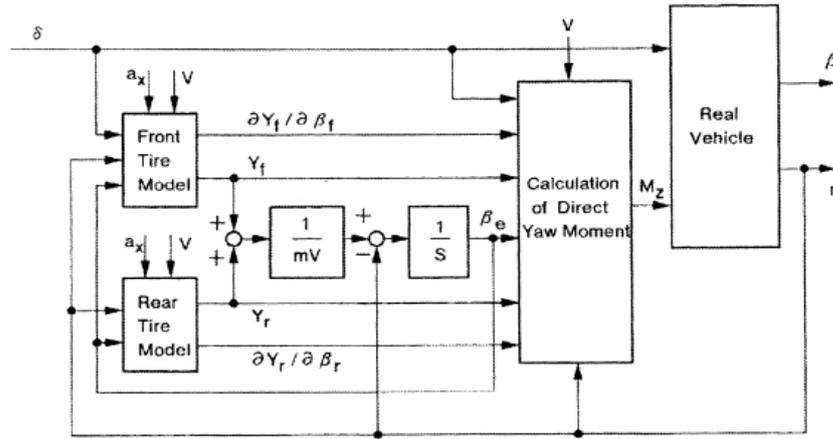


圖 2.5 DYC 控制系統方塊圖，擷取自[6]

P. Raksincharoens et al.[7]利用 DYC 控制策略控制車輛跟隨其設計所需的橫擺角速度，橫擺力矩控制輸入是由後輪左、右側縱向力的差產生，如(2.12)式。

$$M = \frac{d}{2}(-F_{xrl} + F_{xrr}) \quad (2.12)$$

所需的M是由所需橫擺角速度透過橫擺角速度對橫擺力矩的反轉移函數計算而得， F_{xrl} 為左後輪產生縱向力、 F_{xrr} 為右後輪產生縱向力。

E. Esmazadeh et al.[8]提出分析線性二次最佳化問題(LQ problem)求解 DYC 控制輸入，跟隨所需的橫擺角速度。M. Mirzaei[9]為了維持車輛的動態，跟隨所需的橫擺角速度與質心側滑角，設計一線性二次最佳化問題，求解最小之橫擺力矩控制輸入以達到控制目的。其成本函數定為(2.13)式。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[w_b (\beta - \beta_d)^2 + w_r (r - r_d)^2 + w_u M_z^2 \right] dt \quad (2.13)$$

；其中 w_b 、 w_r 和 w_u 為權重因子，代表其對應項之重要性； M_z 為控制輸入。增加 w_u 之權重可以讓 M_z 越小，但相對的會使橫擺角速度和質心側滑角的跟隨誤差(Tracking error)增大；此外，控制策略是設計來跟隨橫擺角速度和質心側滑角，故可以輕易地藉由改變 w_b 或 w_r 為零，實現不同控制型式的 DYC 控制，如：實現橫擺角速度型式則將 w_b 選定為零， $w_r = 0$ 則為質心側滑角型式。

K. Nam et al.[22]研究不僅以 M_z 為控制輸入更加入了對前輪轉向角 δ_f 的控制，以適應性前饋補償來增加控制器對車輛參數的穩健性並以回饋補償解耦合分別對控制輸入進

行控制，使車輛動態跟隨給定的質心側滑角與橫擺角速度，控制架構如圖 2.6。

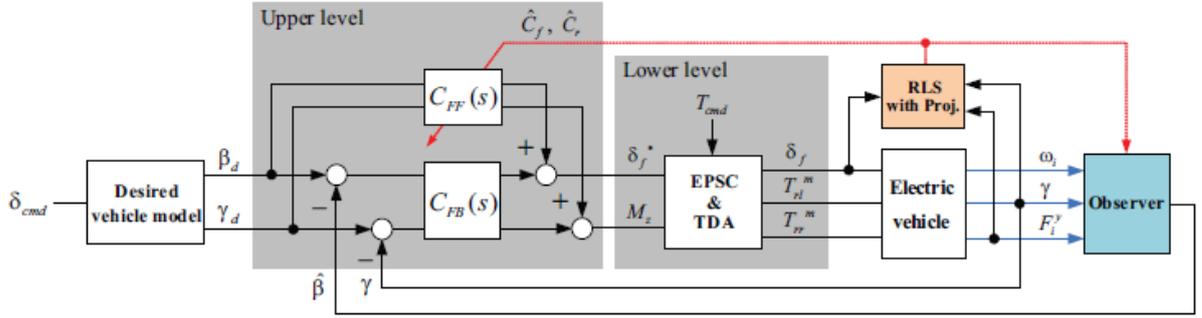


圖 2.6 控制系統方塊圖，擷取自[22]

$$\text{前饋補償控制器：} C_{FF}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.14)$$

；此為基於車輛動態模型的反矩陣($\begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_f \\ M_z \end{bmatrix}$)， δ_f 為前輪轉向角、

M_z 為輪胎縱向力產生的橫擺力矩合。

$$\text{回饋補償控制器：} C_{FB}(s) = \begin{bmatrix} C_{\beta}(s) & \rho_1(s)C_{\gamma}(s) \\ \rho_2(s)C_{\beta}(s) & C_{\gamma}(s) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

； $C_{\beta}(s)$ 與 $C_{\gamma}(s)$ 屬於PI補償控制器； $\rho_1(s) = -G_{11}(s)^{-1}G_{12}(s)$ 、 $\rho_2(s) = -G_{22}(s)^{-1}G_{21}(s)$ 。

2.3 最佳化輪胎摩擦力分配相關研究

相較於前面四輪轉向控制以及直接橫擺力矩控制部分，力分配是屬於較近期的研究。

O. Mokhiamar et al.[18]基於四輪轉向車提出了對車輛質心側滑角與橫擺角速度的動態控制方法，先以參考模型根據駕駛者轉向輸入計算出質心側滑角與橫擺角速度兩參考值，並利用順滑模態控制理論計算出車輛跟隨給定動態參考值所需總側向力以及橫擺力矩總和，最後即使用上述限制以最佳化力分配方法考慮到成本函數如(2.16)式，最佳化分配出各輪胎所需產生的縱向力以及側向力。

$$J = \sum_{i=1}^4 C_i \frac{F_{ai}^2 + F_{bi}^2}{F_{zi}^2} \quad (2.16)$$

； C_i 為權重； F_{ai} 與 F_{bi} 分別為輪胎縱向力與側向力， F_{zi} 則為各輪胎正向力。

不過當計算出各輪胎期望縱向力與側向力後，並沒有進一步探討如何使輪胎實際摩擦力達成此目標，再者此研究所考慮的車輛為四輪轉向車，在四個輪胎都可獨立轉向且驅動的情況下使最佳化力分配的限制大為下降。考慮到實際上四輪獨立轉向車並不普及，本研究希望參考利用最佳化摩擦力分配控制方法，設計出得以應用於目前常見後驅車輛（前輪轉向、後輪驅動）的運動控制器。然而這樣的的最佳化力分配問題必須加入前輪轉向角阿克曼幾何限制與前輪所分配縱向力須小於等於零的限制（因後輪驅動關係，前輪只能以剎車產生反向扭矩），而且後輪側向力無法控制，亦無法量測得知，但卻會影響車輛動態，使得最佳化力分配問題更加複雜，目前文獻上尚未有方法能解決此最佳化問題。

此外，上述其他相關研究中，四輪轉向控制可以直接地改變車輪轉角，影響輪胎側滑角及輪胎與路面間產生的側向力，控制車輛的側向運動，在控制器設計與車輛動態的描述上較為容易。車輛動態可被描述為線性腳踏車模型，控制器也可設計簡單的 P、PI 控制器，即可提升車輛駕駛的穩定性。然而，就如先前所提到的：四輪轉向控制設計一般是基於輪胎側向力與輪胎側滑角有一線性比例關係存在，而這關係僅作用於車輛側向加速度小的情況下。在車輛側向加速度較大時，四輪轉向控制會因為輪胎非線性的特性，使輪胎側向力飽和，此時側向力與側滑角不再是線性關係，且輪胎正向力對側向力的影響也會增加，因此控制器改變車輪轉角不再能使輪胎與路面間產生正比於輪胎側滑角之側向力，造成控制器不再能保證車輛側向與橫擺運動的穩定。

直接橫擺力矩控制利用左、右側輪胎與路面間產生之縱向力的差，所造成的橫擺力矩控制車輛的動態，所需的橫擺力矩是藉由分配左、右側輪胎縱向力來產生。好處是在輪胎摩擦力圓限制內，輪胎縱向力的產生，較不受車輛側向動態的影響，所需的縱向力可直接由所需產生的橫擺力矩計算而得，故在車輛側向加速度較大的駕駛情況下，考慮輪胎非線性特性，DYC 控制策略會比 4WS 控制來得更能提升車輛的操控性與安全性。

不過，由於 DYC 控制是去調整控制左右側輪胎縱向力之差，而沒有直接地控制輪胎側向力，所以對車輛側向運動的控制效能會有所降低。再者，因為輪胎縱向力和側向力存在著摩擦力圓限制的關係，DYC 控制很難去決定每個輪胎所需的縱向力和側向力，以達到控制車輛所需的側向合力與橫擺力矩，像是在[6]就提出需利用一適當的輪胎模型，先藉由輪胎側滑角計算對應的側向力與側向輪胎模型的斜率(Cornering power)，再去計算控制所需的橫擺力矩輸入，所以在縱向力分配決定上比較困難。

在本研究中將控制架構設計分成上層控制器、最佳化力分配與下層控制器，上層控制器計算所需的縱向合力、側向合力與橫擺力矩，使車輛的動態跟隨給定的參考軌跡；最佳化摩擦力分配將上層控制器所需之力量適當地分配給每個輪胎，其中需考慮前輪阿克曼角限制、各輪胎與路面間產生的摩擦力物理限制與後輪側向力之影響；下層控制器則考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎力矩與轉向角產生所需的輪胎摩擦力。在車輛側向加速度較大時，相較於 4WS 更能夠提升車輛駕駛的穩定性，而且又能改善 DYC 對車輛側向運動控制的不足。



第三章、車輛系統模型

本章節將介紹本研究所使用的車輛系統模型，此車輛模型與一般傳統車輛一樣為前輪轉向、後輪驅動模式，不同的地方在於此車輛模型後輪為獨立驅動且四輪具獨立煞車系統，共有七個自由度的車輛模型和一個結合縱向力與側向力摩擦力圓關係的“Magic formula”輪胎模型。七個自由度包括：車輛縱向、側向速度運動、橫擺角速度動態，以及四個輪胎的轉動動態。

3.1 車輛動態模型

影響車輛的動態，大部分取決於輪胎與路面間接觸所產生的摩擦力，輪胎自由體俯視圖，如圖 3.1：

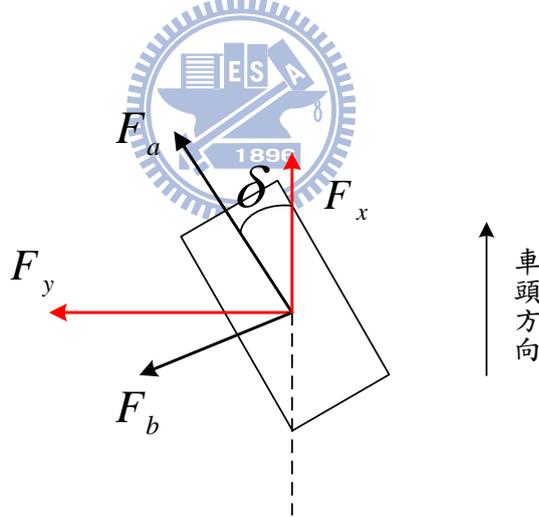


圖 3.1 輪胎自由體俯視圖

F_a 為平行胎面之縱向摩擦力， F_b 為垂直胎面之側向摩擦力； δ 為車輪轉向角。依照向量的概念，將 F_a 和 F_b 分解成平行車身的力 F_x 與垂直車身的力 F_y ，如下：

$$\begin{aligned} F_x &= F_a \cos \delta - F_b \sin \delta \\ F_y &= F_a \sin \delta + F_b \cos \delta \end{aligned} \tag{3.1}$$

忽略車身的側傾(Roll)與俯仰(Pitch)運動及車輛行駛間空氣阻力或外界額外的擾動的影響，假設車輛所受的外力與橫擺力矩皆由輪胎與路面間摩擦力所造成。輪胎與路面

間摩擦力影響車輛動態自由體俯視圖，如圖 3.2 所示。利用牛頓第二運動定律和尤拉運動方程式推導得知車輛動態方程式，表示如(3.2~3.4)式：

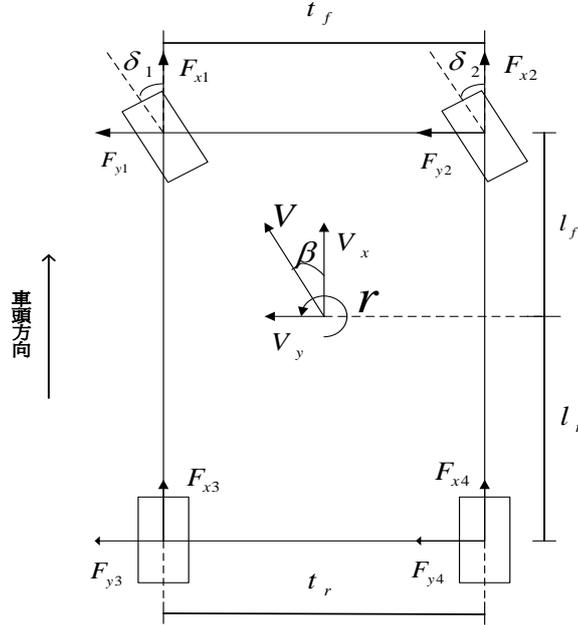


圖 3.2 車輛自由體俯視圖

$$ma_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = (F_{a1} \cos(\delta_1) - F_{b1} \sin(\delta_1)) + (F_{a2} \cos(\delta_2) - F_{b2} \sin(\delta_2)) + F_{a3} + F_{a4} \quad (3.2)$$

$$ma_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = (F_{a1} \sin(\delta_1) + F_{b1} \cos(\delta_1)) + (F_{a2} \sin(\delta_2) + F_{b2} \cos(\delta_2)) + F_{b3} + F_{b4} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} I_z \dot{r} &= -F_{x1} \frac{t_f}{2} + F_{x2} \frac{t_f}{2} - F_{x3} \frac{t_r}{2} + F_{x4} \frac{t_r}{2} + F_{y1} l_f + F_{y2} l_f - (F_{y3} + F_{y4}) l_r \\ &= -(F_{a1} \cos(\delta_1) - F_{b1} \sin(\delta_1)) \frac{t_f}{2} + (F_{a2} \cos(\delta_2) - F_{b2} \sin(\delta_2)) \frac{t_f}{2} - F_{a3} \frac{t_r}{2} + F_{a4} \frac{t_r}{2} \\ &\quad + (F_{a1} \sin(\delta_1) + F_{b1} \cos(\delta_1)) l_f + (F_{a2} \sin(\delta_2) + F_{b2} \cos(\delta_2)) l_f - (F_{b3} + F_{b4}) l_r \end{aligned} \quad (3.4)$$

；其中車輛縱向加速度(\$a_x\$)和側向加速度(\$a_y\$)，如(3.5)和(3.6)式：

$$a_x = \dot{V}_x - rV_y \quad (3.5)$$

$$a_y = \dot{V}_y + rV_x \quad (3.6)$$

$\sum_{i=1}^4 F_{xi}$ 、 $\sum_{i=1}^4 F_{yi}$ 和 $\sum M_z$ 為作用於車輛動態的縱向合力、側向合力和橫擺力矩總和。 m 和 I_z 為車體質量和橫擺角轉動慣量。 V_x 、 V_y 和 r 分別表示車輛質心縱向速度、側向速度和橫擺角速度； β 為車體質心側滑角。 t_f 為車輛前輪輪距， t_r 為後輪輪距， l_f 為車體質心到前輪軸的距離， l_r 為車體質心到後輪軸的距離。 δ_i 為各個輪胎轉向角，我們定義逆時針轉

向角為正，反之為負。而在此模型中前輪轉向角具有阿克曼角限制，如(3.7)式：

$$\cot \delta_2 - \cot \delta_1 = \frac{t_f}{l_f + l_r} \quad (3.7)$$

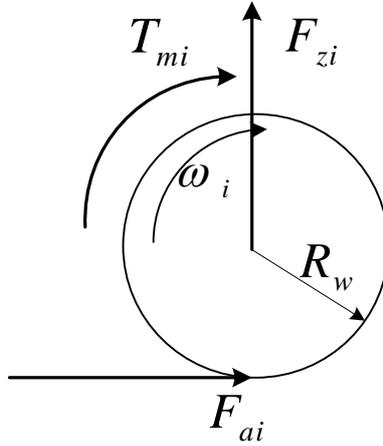


圖 3.3 輪胎轉動自由體圖

輪胎動態方面，利用圖 3.3 的輪胎轉動自由體圖，以力矩平衡可推導出輪胎旋轉動態方程式，如 3.8 式：

$$I_w \dot{\omega}_i = -R_w F_{ai} + T_{mi} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.8)$$

；其中 I_w 為輪胎轉動慣量， $\dot{\omega}_i$ 為第 i 個輪胎的轉動角加速度， R_w 為輪胎等效半徑， T_{mi} 為對第 i 個輪胎施加的力矩之和。

輪胎與路面間摩擦力作用下造成輪胎縱向滑動與側滑，輪胎縱向滑動比(Slip ratio)定義如(3.9)式：

$$\lambda_i = \frac{R_w \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{\max\{R_w \omega_i, v_i \cos \alpha_i\}} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.9)$$

； v_i 表示為第 i 個輪胎的前進速度，表示如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\left(V_x - \frac{t_f}{2} r\right)^2 + \left(V_y + l_f r\right)^2} \\ v_2 &= \sqrt{\left(V_x + \frac{t_f}{2} r\right)^2 + \left(V_y + l_f r\right)^2} \\ v_3 &= \sqrt{\left(V_x - \frac{t_r}{2} r\right)^2 + \left(V_y - l_r r\right)^2} \\ v_4 &= \sqrt{\left(V_x + \frac{t_r}{2} r\right)^2 + \left(V_y - l_r r\right)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

而輪胎側滑角(Slip angle: α_i)為輪胎轉動方向與速度方向之間的夾角，如(3.11)

式，

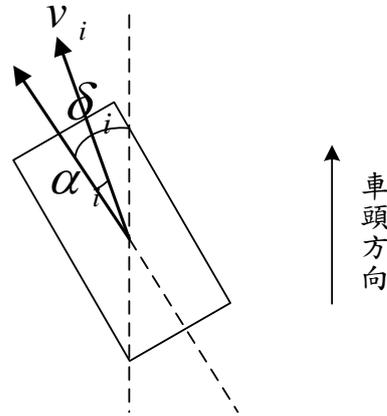


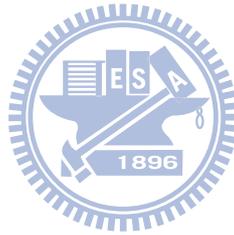
圖 3.4 輪胎側滑角和前進速度示意圖

$$\alpha_1 = \delta_1 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x - \frac{t_f}{2} r} \right)$$

$$\alpha_2 = \delta_2 - \tan^{-1} \left(\frac{V_y + l_f r}{V_x + \frac{t_f}{2} r} \right)$$

$$\alpha_3 = -\tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x - \frac{t_r}{2} r} \right)$$

$$\alpha_4 = -\tan^{-1} \left(\frac{V_y - l_r r}{V_x + \frac{t_r}{2} r} \right)$$



(3.11)

考慮到車輛縱向加速度及側向加速度對車體重量轉移所造成的影響，輪胎的正向力可以由(3.12)式表示：

$$\begin{aligned}
F_{z1} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_r h_s}{t_f l} \\
F_{z2} &= \frac{mgl_r}{2l} - \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_r h_s}{t_f l} \\
F_{z3} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} - \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l} \\
F_{z4} &= \frac{mgl_f}{2l} + \frac{m_s a_x h_s}{2l} + \frac{m_s a_y l_f h_s}{t_r l}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

； l 為前輪軸到後輪軸的距離， m_s 為車體懸載質量(Sprung-mass)， h_s 為車體懸載質量之質心與地面的高度， g 為重力加速度。

3.2 輪胎模型

輪胎與路面間產生的摩擦力會直接影響到車輛動態的運動。本研究中所使用的輪胎模型為 Pacejka[10]所提出的“Magic formula”，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)即是利用此非線性的模型來描述。在此非線性的輪胎模型純縱向滑動 F_{a0} (pure accelerating or braking)會與縱向滑動比(Slip ratio)有一非線性關係，純側向側滑 F_{b0} (pure cornering)則與側滑角(Slip angle)存在一非線性關係，且都會受到輪胎所受之正向力 F_z 的影響。此模型如(3.13)與(3.14)式表示：

$$F_{a0} = D_x \sin \left\{ C_x \tan^{-1} \left[B_x (1 - E_x) \lambda + (E_x / B_x) \tan^{-1} (B_x \lambda) \right] \right\} \tag{3.13}$$

$$F_{b0} = D_y \sin \left\{ C_y \tan^{-1} \left[B_y (1 - E_y) \alpha + (E_y / B_y) \tan^{-1} (B_y \alpha) \right] \right\} \tag{3.14}$$

；其中 λ 為輪胎滑動比、 α 為輪胎側滑角， $B_{x,y}$ 、 $C_{x,y}$ 、 $D_{x,y}$ 、 $E_{x,y}$ 為輪胎參數。

當考慮輪胎動態同時發生縱向滑動和側向側滑時，(3.1)式中平行胎面的力(F_a)與垂直胎面的力(F_b)將表示如下：

$$F_a = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma} \right) F_{a0}(\sigma) \tag{3.15}$$

$$F_b = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right) F_{b0}(\sigma) \tag{3.16}$$

； σ 為組合滑動(Combined slip)， σ_x 、 σ_y 和 λ 、 α 關係如(3.17)式：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\lambda}{1+|\lambda|} \\ \sigma_y &= \tan \alpha \frac{1}{1+|\lambda|} \\ \sigma &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\end{aligned}\tag{3.17}$$

在不同的側滑角下，結合縱向力與側向力的非線性輪胎模型， F_a 與 F_b 摩擦力圓關係，如圖3.5。摩擦力圓就是描述輪胎在同時轉向與加減速時，縱向力與側向力間的關係，依照摩擦力的定理，任何作用在輪胎上的縱向力與側向力都必定滿足摩擦力圓的限制，就是說輪胎與地面間接觸的水平與垂直方向合力，都只會落在摩擦力圓內。

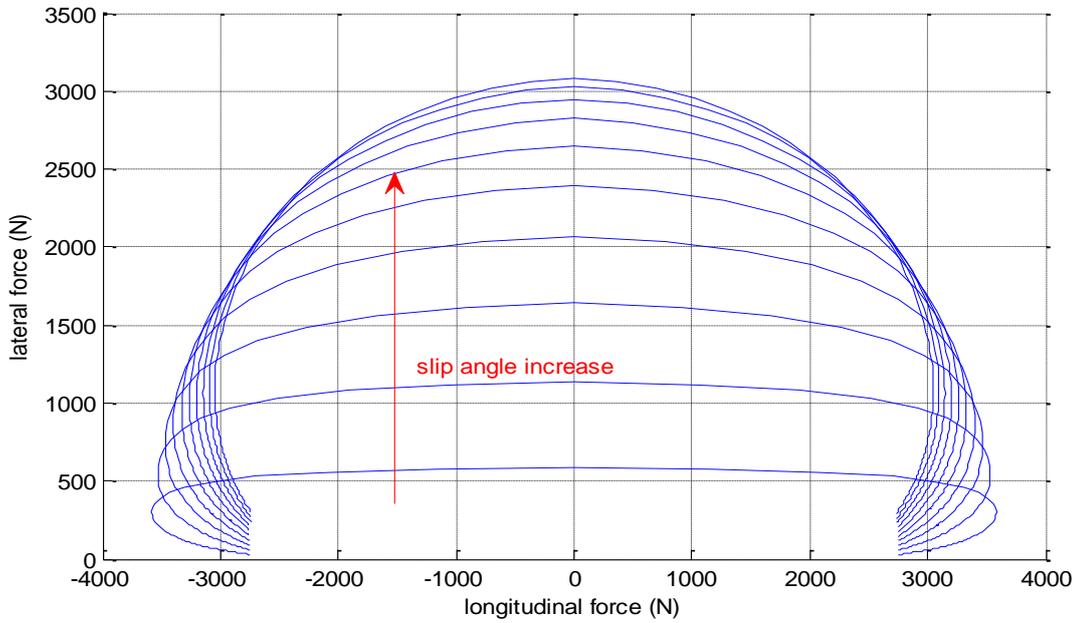


圖 3.5 結合縱向力與側向力摩擦力圓

綜合以上分析與推導，把車輛動態模型與輪胎模型結合寫成一非線性動態方程式，如(3.18)式，其中輸入為 δ_j ， $j = 1, 2$ 與 T_{mi} ， $i = 1, \dots, 4$ 。

$$\begin{aligned}\bar{X} &= [r, V_x, V_y, \omega_1, \dots, \omega_4]^T \\ \dot{\bar{X}} &= f(\bar{X}, \delta_{1,2}, T_{m1,2,3,4})\end{aligned}\tag{3.18}$$

第四章、控制器設計

本章節將介紹本研究的控制器設計，包含上層控制器、最佳化輪胎與路面間摩擦力分配、後輪側向力估測器、下層縱向摩擦力回授穩健控制器和最佳化前輪轉向角控制器。

上層控制器部分會介紹線性車輛參考模型，並根據車輛運動時物理限制對其響應(Model response)作物理極值的限制，設計順滑模態控制器(Sliding mode controller)作軌跡跟隨(Tracking error)的控制[11]，計算出車輛所需的縱向、側向合力與橫擺力矩的總和；最佳化輪胎與路面間摩擦力分配部分將介紹成本函數(Cost function)的設計概念，利用卡羅需—庫恩—塔克條件(Karush-Kuhn-Tucker conditions)求解非線性規劃問題(Nonlinear programming)[12]，以得到最小化成本函數之解析解，分配出輪胎與路面間摩擦力，其中考慮到前輪阿克曼幾何角(如(3.7)式)與輪胎摩擦力圓等限制。而後輪因無法轉向，輪胎側向力無法控制，故需設計後輪側向力估測器以估側其值並加以利用。

下層控制器部分，分別介紹輪胎縱向摩擦力回授控制與最佳化前輪轉向角控制。在縱向摩擦力控制部分，以回授縱向力估測的結果來取代所需實際輪胎縱向力回授值，設計順滑模態控制器控制輪胎扭力，使輪胎與路面間產生上層所分配的縱向摩擦力。而最佳化轉向角控制則是利用 inverse Dugoff's tire model 側向模型將最佳化摩擦力分配產生之前輪側向力期望值轉換成前輪轉向角期望值，再以另一成本函數搭配阿克曼角限制求得最佳化前輪轉向角，此時輪胎與路面間所產生的側向摩擦力和分配的側向力會因為輪胎模型的不確定性(Model uncertainty)有誤差，這部分將由上層控制器的設計來補償。所謂的輪胎模型不確定性，意即在設計車輛控制器時我們並不會知道真實車輛的輪胎模型為何，故在本研究選擇設計控制器時假設輪胎模型為 Dugoff's tire model，而模擬時實際車輛輪胎模型為 magic formula(如第三章車輛模型所介紹)，以此設計出針對輪胎模型不確定性所屬的穩健控制器。

在第二章相關研究中討論的其他控制器設計，大部分的控制器主要是著重於單一層

控制器架構的設計，計算出控制車輛跟隨參考值所需的側向合力和橫擺力矩總和，然後直接控制車輛的轉角或者直接當作控制輸入控制車輛動態，但皆假設實際能夠產生所需的合力與力矩，並沒有考慮到輪胎的動態，造成四輪轉向控制實際上在較大的車輛側向加速度下會無法有效地作控制，控制的範圍受到限制；而直接橫擺力矩控制則是沒有利用輪胎側向力來作控制，所以對車輛側向運動控制上會不夠準確。因此，本研究將控制架構分為上、下層控制器：利用上層控制器跟隨車輛縱向速度、質心側滑角與橫擺角速度參考值，透過最佳化分配將輪胎摩擦力圓的限制以及前輪轉向角具阿克曼角限制等考慮進去，分配出四個輪胎所需之摩擦力，在下層控制器中考慮輪胎動態，控制跟隨所需的摩擦力。在此控制架構下，改善了四輪轉向在車輛側向加速度大時對車輛控制的不穩定問題，以及彌補了直接橫擺力矩控制對車輛側向運動控制的不足。整個控制系統架構圖，如圖 4.1。

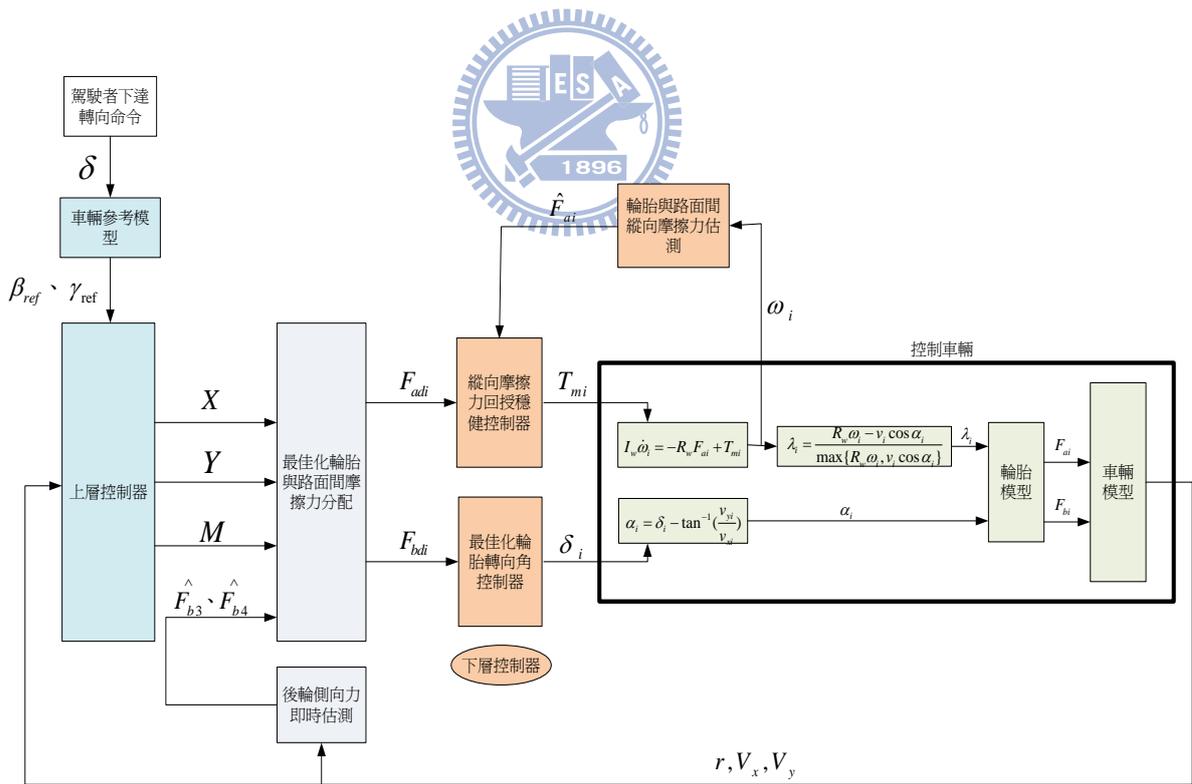


圖 4.1 系統架構圖

4.1 上層控制器

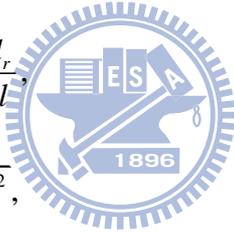
4.1.1 車輛參考模型

車輛參考模型是基於 Ellis[13]所提出的兩個自由度線性車輛響應，車速維持定速前進，前輪轉向。車身側滑角(Slide-slip angle)與橫擺角速度(Yaw rate)對轉向角度 δ 的響應如(4.1)和(4.2)式。

$$\frac{\beta}{\delta}(s) = G_{\delta\beta}(0) \frac{1 + T_\beta s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (4.1)$$

$$\frac{r}{\delta}(s) = G_{\delta r}(0) \frac{1}{1 + t_e s} \quad (4.2)$$

；其中 $G_{\delta\beta}(0) = \frac{1 - \frac{m}{2l} \frac{l_f}{K_r} V^2}{1 + AV^2} \frac{l_r}{l}$



$$\omega_n = \frac{2l}{V} \sqrt{\frac{K_f K_r}{m I_z}} \sqrt{1 + AV^2},$$

$$\zeta = \frac{m(l_f^2 K_f + l_r^2 K_r) + I_z(K_f + K_r)}{2l \sqrt{m I_z K_f K_r} (1 + AV^2)},$$

$$T_\beta = \frac{I_z V}{2l_r K_r} \frac{1}{1 - \frac{m}{2l} \frac{l_f}{K_r} V^2},$$

$$G_{\delta r}(0) = \frac{1}{1 + AV^2} \frac{V}{l},$$

$$A = -\frac{m}{2l^2} \frac{l_f K_f - l_r K_r}{K_f K_r}.$$

橫擺角速度響應近似為一階系統，是表示響應為中性轉向(Neutral steer)的特性， t_e 為響應時間[14]； K_f 與 K_r 分別為前後輪輪胎轉向剛度。

線性的參考車輛模型沒有考慮到輪胎特性之非線性的影響，所以當把非線性輪胎特

性考慮進去時，參考車輛的車身側滑角與橫擺角速度的極值都會受到物理限制影響[15]。車體質心速度(V_{CoG})會影響車身側滑角極值限制，車身側滑角最大限制和車體質心速度關係式，如(4.3)式，圖 4.2。

$$\beta_{\max} = 10^{\circ} - 7^{\circ} \cdot \frac{V_{CoG}^2}{(40m/s)^2} \quad (4.3)$$

側向加速度(a_y)的極值限制則是會與路面摩擦力係數有關；理論上，車輛作轉向運動最大可以產生 9.81 倍路面摩擦力係數大小的側向加速度，例如：路面摩擦力係數為 1 時，側向加速度極值可以為 $9.81m/s^2$ ，而當車身側滑角不為零時，最大側向加速度則調整為 $8m/s^2$ ，故最大側向加速度與摩擦力係數關係可表示如(4.4)式。

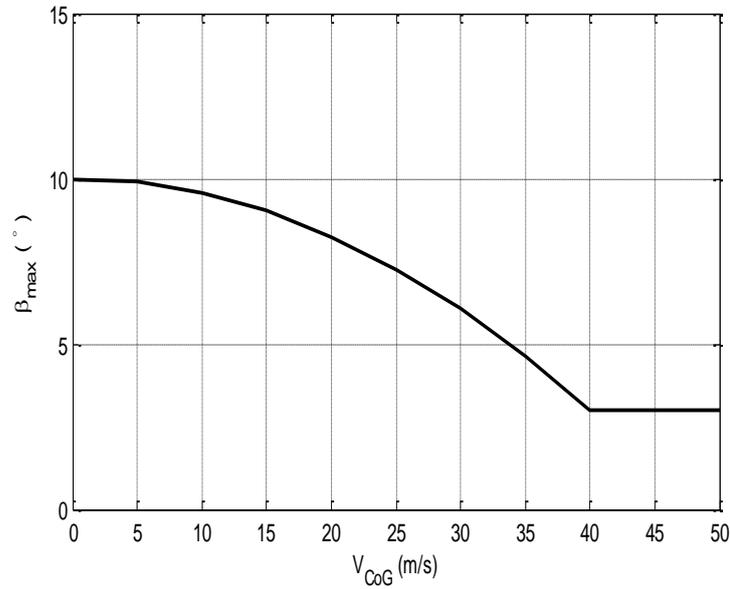


圖 4.2 最大車身側滑角與質心速度關係圖[15]

$$a_{y\max} = \mu_s \cdot 8m/s^2 \quad (4.4)$$

利用(3.6)式， a_y 與 r 的關係式可以得知橫擺角速度的最大值為(4.5)式。

$$r_{\max} = \frac{a_{y\max}}{V_x} - \dot{V}_y \quad (4.5)$$

因此，車輛參考模型加入考慮車身側滑角與橫擺角速度物理限制，將車身側滑角與橫擺角速度之參考值改成(4.6)與(4.7)式：

$$\beta_{ref} = \begin{cases} \beta & , |\beta| \leq \beta_{max} \\ \pm \beta_{max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.6)$$

$$r_{ref} = \begin{cases} r & , |r| \leq r_{max} \\ \pm r_{max} & , otherwise \end{cases} \quad (4.7)$$

在小角度轉向和較小的側向加速度運動下，參考車輛模型為兩個自由度線性車輛響應；而在大角度轉向和較大的側向加速度下，參考車輛模型則將會受到物理限制於極值。

縱向速度參考值部分，本論文假設為常數，其值由駕駛者油門踏板的角度來決定，故設定 $\dot{V}_{xref} = 0$ 。

4.1.2 車輛縱向速度、車身側滑角與橫擺角速度控制器

回顧(3.2)、(3.3)與(3.4)式，縱向、側向合力與橫擺力矩總和影響車輛縱向、側向與橫擺角速度的動態，在上層控制器使用了順滑模態控制理論，設計了三個順滑平面(Sliding surface)，計算控制車輛跟隨參考車輛模型的響應所需的縱向、側向合力與橫擺角轉動力矩總和。將(3.2)、(3.3)與(3.4)式重新表示如下：

$$m(\dot{V}_x - rV_y) = X + \Delta X \quad (4.8)$$

$$m(\dot{V}_y + rV_x) = Y + \Delta Y \quad (4.9)$$

$$I_z \dot{r} = M + \Delta M \quad (4.10)$$

；X、Y和M為上層控制器輸入，計算出所需的縱向、側向合力與橫擺力矩總和。 ΔX 、 ΔY 和 ΔM 為未知的變動量，來自於下層控制器控制後結果與上層控制器計算結果之間的誤差。假設其變動範圍分別為： $|\Delta X| \leq \Delta X_{max}$ 、 $|\Delta Y| \leq \Delta Y_{max}$ 以及 $|\Delta M| \leq \Delta M_{max}$ 。

縱向速度控制，設計一順滑平面為 S_X ，如(4.11)式。

$$S_X = V_x - V_{xref} = 0 \quad (4.11)$$

需滿足迫近條件(Approaching condition)：

$$\dot{S}_x S_x < -\eta_1 |S_x| \quad , \text{ while } S_x \neq 0 \quad (4.12)$$

；其中 $\eta_1 > 0$ 。

從(4.8)式移項整理可以得知

$$\dot{V}_x = \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y \quad (4.13)$$

再將(4.13)代入(4.12)式：

$$\begin{aligned} & (\dot{V}_x - \dot{V}_{xref}) S_x \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y - \dot{V}_{xref} \right\} S_x < -\eta_1 |S_x| \end{aligned} \quad (4.14)$$

由前述式子，設計控制輸入X為

$$X = m(-rV_y + \dot{V}_{xref}) - k_1 \text{sign}(S_x) \quad (4.15)$$

；其中 $k_1 > \Delta X_{\max}$ 。

將(4.15)代入(4.14)式證明滿足迫近條件。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{m}(X + \Delta X) + rV_y - \dot{V}_{xref} \right\} S_x \\ \Rightarrow & \left(-rV_y + \dot{V}_{xref} - \frac{k_1}{m} \text{sign}(S_x) + \frac{\Delta X}{m} + rV_y - \dot{V}_{xref} \right) S_x \\ & = - \left(\frac{k_1}{m} - \frac{\Delta X}{m} \text{sign}(S_x) \right) |S_x| \\ & \leq - \left(\frac{k_1}{m} - \frac{\Delta X_{\max}}{m} \right) |S_x| \\ & < -\eta_1 |S_x| \end{aligned} \quad (4.16)$$

；其中 $\frac{(k_1 - \Delta X_{\max})}{m} > \eta_1 > 0$ 。

相同地，車身側滑角控制與橫擺角速度控制，分別設計順滑平面： S_Y 和 S_M ，如(4.17)

和(4.18)式。

$$S_Y = \beta - \beta_{ref} = 0 \quad (4.17)$$

$$S_M = r - r_{ref} = 0 \quad (4.18)$$

皆需滿足迫近條件：

$$\dot{S}_Y S_Y < -\eta_2 |S_Y| \quad , \text{while } S_Y \neq 0 \quad (4.19)$$

$$\dot{S}_M S_M < -\eta_3 |S_M| \quad , \text{while } S_M \neq 0 \quad (4.20)$$

；其中 η_2 、 $\eta_3 > 0$ 。

縱向車速若近似於定速，則可將(4.9)式表示成

$$mV_x (\dot{\beta} + r) = Y + \Delta Y \quad (4.21)$$

移項整理得(4.22)式。

$$\dot{\beta} = \frac{(Y + \Delta Y)}{mV_x} - r \quad (4.22)$$

設計控制輸入Y為

$$Y = mV_x (r + \dot{\beta}_{ref}) - k_2 \text{sign}(S_Y) \quad (4.23)$$

；其中 $k_2 > \Delta Y_{\max}$ 。

將(4.22)及(4.23)代入(4.19)式證明滿足迫近條件。



$$\begin{aligned} & (\dot{\beta} - \dot{\beta}_{ref}) S_Y \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{(Y + \Delta Y)}{mV_x} - r - \dot{\beta}_{ref} \right\} S_Y \\ = & \left(r + \dot{\beta}_{ref} - \frac{k_2}{mV_x} \text{sign}(S_Y) + \frac{\Delta Y}{mV_x} - r - \dot{\beta}_{ref} \right) S_Y \\ = & - \left(\frac{k_2}{mV_x} - \frac{\Delta Y}{mV_x} \text{sign}(S_Y) \right) |S_Y| \\ \leq & - \left(\frac{k_2}{mV_x} - \frac{\Delta Y_{\max}}{mV_x} \right) |S_Y| \\ < & -\eta_2 |S_Y| \end{aligned} \quad (4.24)$$

；其中 $\frac{(k_2 - \Delta Y_{\max})}{mV_x} > \eta_2 > 0$ 。

橫擺角加速度則可從(4.10)式得知，如(4.25)式。

$$\dot{i} = \frac{(M + \Delta M)}{I_z} \quad (4.25)$$

控制輸入M設計為

$$M = I_z \dot{r}_{ref} - k_3 \text{sign}(S_M) \quad (4.26)$$

；其中 $k_3 > \Delta M_{\max}$ 。

將(4.25)及(4.26)代入(4.20)式證明滿足迫近條件。

$$\begin{aligned} & (\dot{r} - \dot{r}_{ref}) S_M \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{(M + \Delta M)}{I_z} - \dot{r}_{ref} \right\} S_M \\ = & \left(\dot{r}_{ref} - \frac{k_3}{I_z} \text{sign}(S_M) + \frac{\Delta M}{I_z} - \dot{r}_{ref} \right) S_M \\ = & - \left(\frac{k_3}{I_z} - \frac{\Delta M}{I_z} \text{sign}(S_M) \right) |S_M| \\ \leq & - \left(\frac{k_3}{I_z} - \frac{\Delta M_{\max}}{I_z} \right) |S_M| \\ < & -\eta_3 |S_M| \end{aligned} \quad (4.27)$$

；其中 $\frac{(k_3 - \Delta M_{\max})}{I_z} > \eta_3 > 0$ 。



最後利用 Lyapunov 原理[11]來保證前述上層控制器之穩定性，選取 Lyapunov 函數為

$$V = \frac{1}{2} S_X^2 + \frac{1}{2} S_Y^2 + \frac{1}{2} S_M^2 \quad (4.28)$$

V會大於等於零，且為一正定函數。接著，Lyapunov 函數對時間t做一次微分，可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_X \dot{S}_X + S_Y \dot{S}_Y + S_M \dot{S}_M \\ &\leq -\eta_1 |S_X| + (-\eta_2 |S_Y|) + (-\eta_3 |S_M|) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

明顯地可得 $\dot{V} < 0$ ，且為一負定函數，故V為一個 Lyapunov 函數，系統為漸進穩定 (Asymptotically stable)。

在上層控制器之控制輸入X、Y和M，(4.15)、(4.23)和(4.26)式中皆使用了一個理想的切換函數 $\text{sign}(S_{X,Y,M})$ ，此函數會使系統產生切跳(chattering)現象，為了改善此現象，將用順滑層的概念來取代順滑面[16]，以 $\text{sat}(S_{X,Y,M}, \epsilon_{X,Y,M})$ 來取代 $\text{sign}(S_{X,Y,M})$ ，如(4.30)式。

$$\text{sat}(S_{X,Y,M}, \varepsilon_{X,Y,M}) = \begin{cases} 1 & S_{X,Y,M} > \varepsilon_{X,Y,M} \\ S_{X,Y,M} / \varepsilon_{X,Y,M} & |S_{X,Y,M}| \leq \varepsilon_{X,Y,M} \\ -1 & S_{X,Y,M} < -\varepsilon_{X,Y,M} \end{cases} \quad (4.30)$$

因此，控制法被修正為

$$X = m(-rV_y + \dot{V}_{xref}) - k_1 \text{sat}(S_X, \varepsilon_X) \quad (4.31)$$

$$Y = mV_x(r + \dot{\beta}_{ref}) - k_2 \text{sat}(S_Y, \varepsilon_Y) \quad (4.32)$$

$$M = I_z \dot{r}_{ref} - k_3 \text{sat}(S_M, \varepsilon_M) \quad (4.33)$$

上述中 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 的取決會在後面做更進一步的討論；而控制器在實現上會需要回授車輛縱向、側向速度、橫擺角速度以及質心側滑角。實際可以利用全球定位系統(GPS)[21]來判斷質心的位置與移動速度，橫擺角速度可以用陀螺儀量測，而質心側滑角實際上無法用感測器量測得知，會需要借助估測的方法獲得，像是利用卡爾曼濾波器(Kalman filter)估測[17]。本研究中將這些感測器可以提供的資訊當作已知。

4.2 最佳化輪胎與路面間摩擦力分配

上層控制器計算出車輛總縱向合力、側向合力與橫擺力矩總合之後，接下來需要把這些總合力更進一步最佳化分配至各個輪胎，在此我們最佳化的目的是使各輪胎遠離摩擦力圓(意即飽和點)。過程中，本研究致力於找出問題的解析解而非數值解，為的是使此控制器能運用在即時控制系統(real-time control system)上面，此也為本研究重點之一。而在探討一個最佳化問題時須先說明最佳化之可控變數、成本函數與限制條件，底下將一一介紹。

4.2.1 可控變數、成本函數、限制條件

車輛行駛時，每個輪胎所產生的摩擦力都可以分解為縱向力與側向力，縱向力方面可以給予扭力來進行控制，側向力部分則運用輪胎轉向角來控制。考慮到車輛模型為前輪轉向後輪驅動關係，後輪側向力因無法以轉向作控制(轉向角恆為零)，故無法成為可控變數。在此設定可控變數為四個輪胎的縱向力與兩前輪側向力 $[F_{ad1} F_{ad2} F_{ad3} F_{ad4} F_{bd1} F_{bd2}]$ ，目標分配出此六個力並將其設計為控制輸入。

而最佳化輪胎與路面間摩擦力分配的成本函數(Cost function)之設計與選擇是有很多種形式，也很難明確地去說明如何選擇成本函數會是最有效率的輪胎摩擦力分配，故本小節中並沒有探討不同成本函數選擇之優劣，而是使用輪胎摩擦力圓的概念設計[18]。輪胎與路面間縱向摩擦力與側向摩擦力之間有摩擦力圓關係存在，會受到路面摩擦力係數(μ)乘以輪胎正向力(F_z)影響其限制範圍，故會希望最佳化分配出的輪胎摩擦力能夠在摩擦力圓限制內，且能夠是最小的控制輸入，其目的是希望所分配之摩擦力可使輪胎盡量遠離摩擦力圓。當輪胎遠離了摩擦力圓，間接避免輪胎摩擦力完全作用在輪胎縱向或側向上，此現象確保駕駛者在緊急情況下仍擁有車輛加減速以及轉向的能力，而非使車身因失控往切線速度方向滑動。

理論上，在面對後輪側向力不可控制部分，後輪側向力會是由可控變數

$[F_{ad1} F_{ad2} F_{ad3} F_{ad4} F_{bd1} F_{bd2}]$ 所組成的函數，簡單表示如(4.34)式。

$$\begin{aligned} F_{b3} &= F_1(F_{ad1}, F_{ad2}, F_{ad3}, F_{ad4}, F_{bd1}, F_{bd2}) \\ F_{b4} &= F_2(F_{ad1}, F_{ad2}, F_{ad3}, F_{ad4}, F_{bd1}, F_{bd2}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

以這樣條件下所設計出的成本函數則會表示如下：

$$J = C_1 \frac{F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2}{(uF_{z01})^2} + C_2 \frac{F_{ad2}^2 + F_{bd2}^2}{(uF_{z02})^2} + C_3 \frac{F_{ad3}^2 + F_{ad4}^2}{(uF_{z03})^2} + C_4 \frac{F_{ad4}^2 + F_{bd2}^2}{(uF_{z04})^2} \quad (4.35)$$

； $F_{z01\sim4}$ 為車輛等速直線行駛時四個輪胎的正向力，分別表示如下：

$$F_{z_{01,2}} = \frac{mgl_r}{2l} \quad (4.36)$$

$$F_{z_{03,4}} = \frac{mgl_f}{2l}$$

$C_{1\sim 4}$ 為權重參數(Weighting coefficient)，適當的選定調整可以提高車輛控制的表現，參數選定如下：

$$C_i = \frac{F_{z_{0i}}}{F_{z_i}}, i=1\sim 4 \quad (4.37)$$

F_{z_i} 為輪胎正向力，回顧(3.11)式，車輛縱向加速度及側向加速度會造成車體重量轉移。

如此整個最佳化問題會因此變為非常複雜難以去分析更難以求出最佳化解析解，故考慮到實際控制器是以離散時間方式實現，我們選擇將後輪側向力以估側的方式代入並假設在此一取樣時間下估側值為常數與可控變數 $[F_{ad1} F_{ad2} F_{ad3} F_{ad4} F_{bd1} F_{bd2}]$ 不相依來處理問題。

因此設計成本函數如(4.38)式。

$$J = C_1 \frac{F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2}{(uF_{z_{01}})^2} + C_2 \frac{F_{ad2}^2 + F_{bd2}^2}{(uF_{z_{02}})^2} + C_3 \frac{F_{ad3}^2 + \hat{F}_{b3}^2}{(uF_{z_{03}})^2} + C_4 \frac{F_{ad4}^2 + \hat{F}_{b4}^2}{(uF_{z_{04}})^2} \quad (4.38)$$

； $F_{ad1\sim 4}$ 和 $F_{bd1\sim 2}$ 即為所要分配的六個可控變數，分別為輪胎平行胎面與垂直胎面之摩擦力。 \hat{F}_{b3} 和 \hat{F}_{b4} 為後輪側向力估測值，將在下一小節作介紹。 μ 為路面摩擦力係數，在本研究設計中皆假設為一般柏油路面狀況($\mu = 0.85$)。

由(4.36)式 C_i 權重參數的選定，可以明顯地說明當某顆輪胎正向力因車體重量轉移變大時，摩擦力圓關係限制放寬，其權重變小，即意味著最佳化分配時分配的縱向力與側向力可以分配得較大， C_i 權重參數是隨著車輛動態作變動調整。

成本函數中的六個可控變數($F_{ad1\sim 4}$ 和 $F_{bd1\sim 2}$)，在假設車輛模型為前輪轉向後輪驅動的情況下，必須滿足的等式與不等式限制條件(Equality and inequality constraints)有：

分配出四個輪胎平行車身之摩擦力的總和必須和上層車輛縱向速度控制器計算出所需的縱向合力(X)相等：

$$\begin{aligned}
X &= F_{xd1} + F_{xd2} + F_{xd3} + F_{xd4} \\
&= (F_{ad1} \cos(\delta_1) - F_{bd1} \sin(\delta_1)) + (F_{ad2} \cos(\delta_2) - F_{bd2} \sin(\delta_2)) + F_{ad3} + F_{ad4}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

； $\delta_i, i=1\sim 4$ 表輪胎轉向角。

四個輪胎垂直車身之摩擦力的總和必須和上層側滑角控制器計算出的側向合力(Y)相等：

$$\begin{aligned}
Y &= F_{yd1} + F_{yd2} + \hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4} \\
&= (F_{ad1} \sin(\delta_1) + F_{bd1} \cos(\delta_1)) + (F_{ad2} \sin(\delta_2) + F_{bd2} \cos(\delta_2)) + \hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

；其中 \hat{F}_{b3} 和 \hat{F}_{b4} 一樣為後輪側向力估測值。

由四個輪胎平行車身之摩擦力與垂直車身之摩擦力所產生的橫擺力矩和也必須等於上層橫擺角速度控制器計算的橫擺力矩總和(M)：

$$\begin{aligned}
M &= -F_{xd1} \frac{t_f}{2} + F_{xd2} \frac{t_f}{2} - F_{xd3} \frac{t_r}{2} + F_{xd4} \frac{t_r}{2} + F_{yd1} l_f + F_{yd2} l_f - (\hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4}) l_r \\
&= -(F_{ad1} \cos(\delta_1) - F_{bd1} \sin(\delta_1)) \frac{t_f}{2} + (F_{ad2} \cos(\delta_2) - F_{bd2} \sin(\delta_2)) \frac{t_f}{2} - F_{ad3} \frac{t_r}{2} + F_{ad4} \frac{t_r}{2} \\
&\quad + (F_{ad1} \sin(\delta_1) + F_{bd1} \cos(\delta_1)) l_f + (F_{ad2} \sin(\delta_2) + F_{bd2} \cos(\delta_2)) l_f - (\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4}) l_r
\end{aligned} \tag{4.41}$$

評估上層控制器 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值所需的限制(將在4.4小節介紹)，如下：

$$|F_{adi} - F'_{adi}| \leq \varepsilon_a \quad i=1,2 \tag{4.42}$$

$$|F_{bdi} - F'_{bdi}| \leq \varepsilon_b \quad i=1,2 \tag{4.43}$$

； F'_{adi} 與 F'_{bdi} 為前一取樣時間所分配出的摩擦力。 ε_a 和 ε_b 為控制器所設定的變化範圍。

此外，每個輪胎所受之摩擦力也必須要滿足摩擦力圓的限制，表示如下：

$$F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2 - (uF_{z1})^2 \leq 0$$

$$F_{ad2}^2 + F_{bd2}^2 - (uF_{z2})^2 \leq 0$$

$$F_{ad3}^2 + \hat{F}_{b3}^2 - (uF_{z3})^2 \leq 0 \tag{4.44}$$

$$F_{ad4}^2 + \hat{F}_{b4}^2 - (\mu F_{z4})^2 \leq 0$$

在本研究所使用的車輛模型為前輪轉向、後輪驅動模型，故前輪並無正向驅動扭力，只能有煞車產生的負向驅動扭力，限制表示如下：

$$\begin{aligned} F_{ad1} &\leq 0 \\ F_{ad2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

如上，前輪轉向在第三章車輛模型所介紹的，前輪轉向角具有阿克曼角限制：

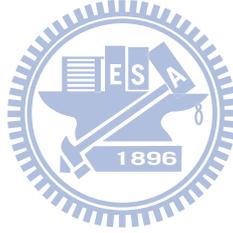
$$\cot \delta_2 - \cot \delta_1 = \frac{t_f}{l_f + l_r}$$

而此條件式不同上面其他限制條件在於並無可控變數直接反映在限制條件上，故我們引入 Dugoff's 側向輪胎模型：

$$F_b^{Dug} = C_y^{Dug} \frac{\tan(\alpha)}{1 + |\lambda|} f(\kappa)$$

$$; f(\kappa) = \begin{cases} 1 & , \kappa \geq 1 \\ \kappa(2 - \kappa) & , \kappa < 1 \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\mu F_z (1 - |\lambda|)}{2 \sqrt{C_x^{Dug} \lambda^2 + C_y^{Dug} t a \alpha^2}}$$



； C_x^{Dug} 與 C_y^{Dug} 為輪胎縱向剛度(longitudinal stiffness)與轉向剛度(cornering stiffness)； κ 指定 Dugoff's 輪胎模型的作用區間， $\kappa \geq 1$ 時，輪胎作用於線性區域。

；其中將 $\tan(\alpha)$ 以側滑角 $\tan(\alpha_1)$ 代入整理得以下：

$$\tan \alpha_1 = \tan\left(\delta_1 - \tan^{-1} \frac{Vy + r \cdot l_f}{Vx - r \cdot \frac{t_f}{2}}\right) = \frac{\tan(\delta_1) - \tan\left(\tan^{-1} \frac{Vy + r \cdot l_f}{Vx - r \cdot \frac{t_f}{2}}\right)}{1 + \tan(\delta_1) \tan\left(\tan^{-1} \frac{Vy + r \cdot l_f}{Vx - r \cdot \frac{t_f}{2}}\right)} = \frac{\tan(\delta_1) - \frac{Vy + r \cdot l_f}{Vx - r \cdot \frac{t_f}{2}}}{1 + \tan(\delta_1) \cdot \frac{Vy + r \cdot l_f}{Vx - r \cdot \frac{t_f}{2}}}$$

$\tan \alpha_2$ 同上，接著可將 F_{bd1} 與 F_{bd2} 表示成 $\tan \delta_1$ 和 $\tan \delta_2$ 的函數，經過反函數表示如下：

$$F_{bd1} = C_y^{Dug} \frac{\tan(\alpha_1)}{1 + |\lambda_1|} f(\kappa) = F(\tan \delta_1) \rightarrow \tan \delta_1 = F^{-1}(F_{bd1})$$

$$F_{bd2} = C_y^{Dug} \frac{\tan(\alpha_2)}{1+|\lambda_2|} f(\kappa) = F(\tan \delta_2) \rightarrow \tan \delta_2 = F^{-1}(F_{bd2})$$

並把阿克曼角公式整理成 tan 函數型式：

$$\cot \delta_2 - \cot \delta_1 = \frac{t_f}{l_f + l_r} \rightarrow \frac{\tan \delta_1 - \tan \delta_2}{\tan \delta_2 \cdot \tan \delta_1} = \frac{t_f}{l_f + l_r}$$

$$\text{令 } G(F_{bd1}, F_{bd2}) = \frac{F^{-1}(F_{bd1}) - F^{-1}(F_{bd2})}{F^{-1}(F_{bd1}) \cdot F^{-1}(F_{bd2})} - \frac{t_f}{l_f + l_r} = 0 \quad (4.46)$$

(4.46)式將阿克曼角限制轉為可控變數 F_{bd1} 與 F_{bd2} 的限制條件，最佳化輪胎力量必須滿足此條件。

4.2.2 最佳化問題求解

介紹完成本函數(4.38)式與其變數限制條件(4.39~46)式，接下來目的就是希望最小化成本函數。在對於任何的最佳化問題，若目標函數(成本函數)與限制函數皆可微分，求得之最佳解必需滿足 KKT 條件[12]；而在目標函數 $f_0(x)$ 為凸函數(convex function)，且不等式限制函數 $f_i(x)$ 為凸函數，等式限制函數 $h_i(x)$ 為仿射函數(affine function)的情況下，若任何一組解 \tilde{x} 、 $\tilde{\lambda}$ 、 \tilde{v} 滿足底下 KKT 條件(如(4.47~51)式)，則 \tilde{x} 為此最佳化問題之最佳解。

$$f_i(\tilde{x}) \leq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.47)$$

$$h_i(\tilde{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, p \quad (4.48)$$

$$\tilde{\lambda}_i \geq 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.49)$$

$$\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.50)$$

$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, m \quad (4.51)$$

利用到以上這個充要條件，我們希望藉由使目標函數為凸函數、不等式限制函數為凸函數及等式限制函數為仿射函數進而從 KKT 條件裡找出最佳解析解：

$$f_0(x) = C_1 \frac{F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2}{(uF_{z_01})^2} + C_2 \frac{F_{ad2}^2 + F_{bd2}^2}{(uF_{z_02})^2} + C_3 \frac{F_{ad3}^2 + \hat{F}_{b3}^2}{(uF_{z_03})^2} + C_4 \frac{F_{ad4}^2 + \hat{F}_{b4}^2}{(uF_{z_04})^2}$$

$$f_i(x) = F_{adi} - F_{adi}' - \varepsilon_a \leq 0, i=1,2$$

$$f_{i+2}(x) = F_{adi}' - F_{adi} - \varepsilon_a \leq 0, i=1,2$$

$$f_{i+4}(x) = F_{bdi} - F_{bdi}' - \varepsilon_b \leq 0, i=1,2$$

$$f_{i+6}(x) = F_{bdi}' - F_{bdi} - \varepsilon_b \leq 0, i=1,2$$

$$f_9(x) = F_{ad1} \leq 0$$

$$f_{10}(x) = F_{ad2} \leq 0$$

$$f_{11}(x) = F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2 - (uF_{z1})^2 \leq 0$$

$$f_{12}(x) = F_{ad2}^2 + F_{bd2}^2 - (uF_{z2})^2 \leq 0$$

$$f_{13}(x) = F_{ad3}^2 + \hat{F}_{b3}^2 - (uF_{z3})^2 \leq 0$$

$$f_{14}(x) = F_{ad4}^2 + \hat{F}_{b4}^2 - (uF_{z4})^2 \leq 0$$



以上不管是目標函數以及不等式限制條件原本就都已經屬於凸函數了。考慮到 (4.39~41) 式等式限制條件並非仿射函數，原因在於轉向角 δ_i 是受此一取樣時間可控變數影響，也就是由可控變數所組成的函式。將其轉向角以前一取樣時間取代當已知，使等式限制條件變為仿射函數：

$$\begin{aligned} h_1(x) &= X = F_{xd1} + F_{xd2} + F_{xd3} + F_{xd4} \\ &= (F_{ad1} \cos(\delta_1') - F_{bd1} \sin(\delta_1')) + (F_{ad2} \cos(\delta_2') - F_{bd2} \sin(\delta_2')) + F_{ad3} + F_{ad4} \end{aligned}$$

； δ_i' 表前一取樣時間的輪胎轉向角。

$$\begin{aligned}
h_2(x) &= Y = F_{yd1} + F_{yd2} + \hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4} \\
&= (F_{ad1} \sin(\delta'_1) + F_{bd1} \cos(\delta'_1)) + (F_{ad2} \sin(\delta'_2) + F_{bd2} \cos(\delta'_2)) + \hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4} \\
h_3(x) &= M = -F_{xd1} \frac{t_f}{2} + F_{xd2} \frac{t_f}{2} - F_{xd3} \frac{t_r}{2} + F_{xd4} \frac{t_r}{2} + F_{yd1} l_f + F_{yd2} l_f - (\hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4}) l_r \\
&= -(F_{ad1} \cos(\delta'_1) - F_{bd1} \sin(\delta'_1)) \frac{t_f}{2} + (F_{ad2} \cos(\delta'_2) - F_{bd2} \sin(\delta'_2)) \frac{t_f}{2} - F_{ad3} \frac{t_r}{2} + F_{ad4} \frac{t_r}{2} \\
&\quad + (F_{ad1} \sin(\delta'_1) + F_{bd1} \cos(\delta'_1)) l_f + (F_{ad2} \sin(\delta'_2) + F_{bd2} \cos(\delta'_2)) l_f - (\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4}) l_r
\end{aligned}$$

而(4.46)式則可見 G 函式為 F_{bd1} 與 F_{bd2} 組成的非線性函數，為了讓其亦為仿射函數，

再將 G 函式以前一時刻側向力 F_{bd1}' 和 F_{bd2}' 作一階泰勒展開式作為近似得到如(4.46)式：

$$\begin{aligned}
G(F_{bd1}, F_{bd2}) &= G(F'_{bd1}, F'_{bd2}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \\ \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \end{bmatrix} \bigg|_{\delta=\delta'} \cdot \begin{bmatrix} F_{bd1} - F'_{bd1} \\ F_{bd2} - F'_{bd2} \end{bmatrix} + e \\
&\approx G(F'_{bd1}, F'_{bd2}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \\ \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \end{bmatrix} \bigg|_{\delta=\delta'} \cdot \begin{bmatrix} F_{bd1} - F'_{bd1} \\ F_{bd2} - F'_{bd2} \end{bmatrix} \\
&= G(F'_{bd1}, F'_{bd2}) + \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \bigg|_{\delta=\delta'_1} (F_{bd1} - F'_{bd1}) + \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \bigg|_{\delta=\delta'_2} (F_{bd2} - F'_{bd2}) \\
\Rightarrow h_4(x) &= \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \bigg|_{\delta=\delta'_1} F_{bd1} + \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \bigg|_{\delta=\delta'_2} F_{bd2} + G(F'_{bd1}, F'_{bd2}) - \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \bigg|_{\delta=\delta'_1} F'_{bd1} - \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \bigg|_{\delta=\delta'_2} F'_{bd2} = 0 \\
; e &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial F_{bd1}^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial F_{bd2}^2} \end{bmatrix} \bigg|_{\delta=\delta_c} \cdot \begin{bmatrix} (F_{bd1} - F'_{bd1})^2 \\ (F_{bd2} - F'_{bd2})^2 \end{bmatrix} + \frac{\partial^2 G}{\partial F_{bd1} \partial F_{bd2}} \bigg|_{\delta=\delta_c} \cdot (F_{bd1} - F'_{bd1})(F_{bd2} - F'_{bd2}), \delta_c \in (\delta, \delta')
\end{aligned}$$

如此以 F_{bd1} 、 F_{bd2} 組成的仿射函數關係來近似滿足前輪阿克曼角限制。

原本複雜無解析解的最佳化問題(4.35)、(4.39~46)經上述過程近似為一目標函數與不等式限制函數皆為凸函數，而等式限制函數則為仿射函數之最佳化問題。故只要找到一組解滿足 KKT 條件，此解即為最佳解。但此近似之最佳解未能完全滿足上層控制器之需求(4.39~41)，為避免因此造成車輛軌跡追蹤之誤差，上層控制器須有足夠的穩健邊

界(robustness margin)以確保控制目標之達成。有關上層控制器的穩健邊界分析將於 4.4 節探討，而以下將陳述如何利用 KKT 條件找出此近似最佳化問題的解析解。

$$\text{首先整理 KKT 條件為矩陣型式：} \begin{cases} [h_1(\tilde{x}) \ h_2(\tilde{x}) \ h_3(\tilde{x}) \ h_4(\tilde{x})]^T = A\tilde{x} - b = 0 \\ \nabla [h_1(\tilde{x}) \ h_2(\tilde{x}) \ h_3(\tilde{x}) \ h_4(\tilde{x})]^T = A^T \\ f_0(\tilde{x}) = \tilde{x}^T Q\tilde{x} + q \\ \nabla f_0(\tilde{x}) = 2Q\tilde{x} \end{cases}$$

$$; \tilde{x} = [F_{ad1} \ F_{ad2} \ F_{ad3} \ F_{ad4} \ F_{bd1} \ F_{bd2}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\delta'_1) & \cos(\delta'_2) & 1 & 1 & -\sin(\delta'_1) & -\sin(\delta'_2) \\ \sin(\delta'_1) & \sin(\delta'_2) & 0 & 0 & \cos(\delta'_1) & \cos(\delta'_2) \\ \sin(\delta'_1)l_f - \cos(\delta'_1)\frac{t_f}{2} & \sin(\delta'_2)l_f + \cos(\delta'_2)\frac{t_f}{2} & -\frac{t_r}{2} & \frac{t_r}{2} & \cos(\delta'_1)l_f + \sin(\delta'_1)\frac{t_f}{2} & \cos(\delta'_2)l_f - \sin(\delta'_2)\frac{t_f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \right|_{\delta=\delta'_1} & \left. \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \right|_{\delta=\delta'_2} \end{bmatrix}$$

$$b = \left[X \ Y - \hat{F}_{b3} - \hat{F}_{b4} \ M \ -G(F'_{bd1}, F'_{bd2}) + \left. \frac{\partial G}{\partial F_{bd1}} \right|_{\delta=\delta'_1} F'_{bd1} + \left. \frac{\partial G}{\partial F_{bd2}} \right|_{\delta=\delta'_2} F'_{bd2} \right]^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

假設 $\tilde{\lambda}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, 14 \quad \rightarrow$ 滿足 KKT 條件(4.49)、(4.50)

$$\text{解} \begin{cases} h_i(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \quad (\because \tilde{\lambda}_i = 0) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{滿足 KKT 條件(4.48)、(4.51)}$$

最後求出的解 \tilde{x} 代回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立(滿足 KKT 條件(4.47))，若成立則 \tilde{x} 為所求最

佳解。不成立則非最佳解，表示一開始所假設 $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = 1, \dots, 14$ 有誤，重新假設討論。

$$\text{Case1 : } f_1(x) = F_{ad1} - F'_{ad1} - \varepsilon_a > 0$$

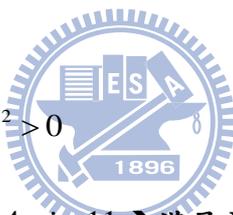
假設 $f_1(x) = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = 2, \dots, 14$ → 滿足 KKT 條件(4.50)

$$\text{解} \begin{cases} f_1(\tilde{x}) = 0 \\ h_i(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \end{cases} , \text{得 } \tilde{x}、\tilde{\lambda}_i、\tilde{v}_i。$$

若 $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ 且把 \tilde{x} 代回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立，成立 → 滿足 KKT 條件(4.47~49)、(4.51)

則 \tilde{x} 為最佳解。

$f_i(x) > 0$, $i = 2, \dots, 10$ 處理方式同上。



$$\text{case 2 : } f_{11}(x) = F_{ad1}^2 + F_{bd1}^2 - (uF_{z1})^2 > 0$$

假設 $f_{11}(x) = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_i = 0$, $i = 1, \dots, 14$, $i \neq 11$ → 滿足 KKT 條件(4.50)

考慮後輪驅動，在此再令 F_{ad1} 為零求解， F_{bd1} 取跟前一取樣時間的 F'_{bd1} 同號

$$\text{解} \begin{cases} f_{11}(\tilde{x}) = 0 \\ h_i(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \end{cases} , \text{得 } \tilde{x}、\tilde{\lambda}_i、\tilde{v}_i。$$

若 $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ 且把 \tilde{x} 代回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立，成立 → 滿足 KKT 條件(4.47~49)、(4.51)

則 \tilde{x} 為最佳解。

$f_{12}(x) > 0$ 處理方式同上。

$$\text{case 3 : } f_{13}(x) = F_{ad3}^2 + \hat{F}_{b3}^2 - (uF_{z3})^2 > 0$$

假設 $f_{13}(x) = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_i = 0$ ， $i = 1, \dots, 14$ ， $i \neq 13 \rightarrow$ 滿足 KKT 條件(4.50)

F_{ad3} 取跟前一取樣時間的 F_{ad3}^i 同號

$$\text{解} \begin{cases} f_{13}(\tilde{x}) = 0 \\ h_i(\tilde{x}) = 0 \\ \nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \tilde{v}_i \nabla h_i(\tilde{x}) = 0 \end{cases}, \text{得 } \tilde{x}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{v}_i。$$

若 $\tilde{\lambda}_i \geq 0$ 且把 \tilde{x} 代回驗證 $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ 是否成立，成立 \rightarrow 滿足 KKT 條件(4.47~49)、(4.51)

則 \tilde{x} 為最佳解。

$f_{14}(x) > 0$ 處理方式同上。

以上為演算法流程，若依舊是無法解出一組滿足 KKT 條件最佳解的情況發生，將會是因為上層控制器計算之所需縱向、側向合力與橫擺力矩總和限制，與其他不等式或等式限制條件無法同時滿足，所以若以車輛行駛的安全性作為優先考量，會希望車輛能夠維持原有的橫擺角速度與側向運動，故此時會將原本上層控制器的三條等式限制(4.39~41)保留剩下側向合力和橫擺力矩總和兩條等式限制(4.40~41)必需滿足，再一次作最佳化分配。

總結此小節，完成將上層控制器所計算出的總縱向力(X)、側向力(Y)和橫擺力矩總和(M)最佳化的分配至各個輪胎。以一些近似與化簡並利用 KKT 條件求得出最佳化問題解析解，得以使控制器應用於即時控制系統，不過在 $h_{1-3}(x)$ 的轉向角近似中，將會使分配出來的摩擦力與上層控制器計算出的控制輸入(X、Y、M)產生誤差，此部分將由 4.4 小節介紹，我們將會計算出誤差範圍，並回授至上層控制器作補償來確保控制器工作。而 $h_4(x)$ 式中以一階泰勒展開作近似也會導致前輪阿克曼角限制不盡滿足，這部分會在下層控制器作控制來讓車輛前輪轉向角符合此限制規範。

另一方面考慮到前輪轉向、前輪驅動車輛模型，在這裡僅需把上面(4.45)式限制修改成後輪並無正向驅動扭力，只能有煞車產生的負向驅動扭力，反應到後輪縱向力限制表示如下，其餘演算法流程同上即可使此控制架構應用於此類車輛。

$$\begin{aligned} F_{ad3} &\leq 0 \\ F_{ad4} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.2.3 後輪側向力即時估側

如前一小節所提，在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配時，因後輪側向力不可控制，我們選擇估測其值並將其當作常數引入最佳化問題。此小節將介紹本研究所使用的後輪側向力估測方法。

利用第三章車輛模型介紹(3.2~3.4)三式，如下：

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} \\ &= (F_{a1} \cos \delta_1 - F_{b1} \sin \delta_1) + (F_{a2} \cos \delta_2 - F_{b2} \sin \delta_2) + F_{a3} + F_{a4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ma_y &= F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} \\ &= (F_{a1} \sin \delta_1 + F_{b1} \cos \delta_1) + (F_{a2} \sin \delta_2 + F_{b2} \cos \delta_2) + F_{b3} + F_{b4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z \dot{r} &= (F_{y1} + F_{y2})l_f - (F_{y3} + F_{y4})l_r + (F_{x2} - F_{x1})\frac{t_f}{2} + (F_{x4} - F_{x3})\frac{t_r}{2} \\ &= (F_{a1} \sin \delta_1 + F_{b1} \cos \delta_1 + F_{a2} \sin \delta_2 + F_{b2} \cos \delta_2)l_f - (F_{b3} + F_{b4})l_r + \\ &\quad + (F_{a2} \cos \delta_2 - F_{b2} \sin \delta_2 - F_{a1} \cos \delta_1 + F_{b1} \sin \delta_1)\frac{t_f}{2} + (F_{a4} - F_{a3})\frac{t_r}{2} \end{aligned}$$

；當中 a_x 、 a_y 與 \dot{r} 是可以利用加速規和陀螺儀等儀器量測得知，這裡當已知運用，轉向角 δ_i 方面一樣以前一取樣時間 δ_i' 代替也當已知。而在控制器裡， F_{adi} 為分配出的縱向力，可說是期望的縱向力；式子中的 F_{ai} 則為實際上反應在輪胎上縱向力，兩者之間的差異誤差取決於下層控制器對縱向力的控制能力，在此假設兩者誤差近似零，也就是下層控制器對縱向力的控制能力相當精準，如(4.52)式。

$$F_{ai} \cong F_{adi} \quad (4.52)$$

將上述三條車輛運動方程式中已知項整理移向至等式左邊，如(4.53~4.55)式：

$$-(ma_x - F_{ad1} \cos \delta_1' - F_{ad2} \cos \delta_2' - F_{ad3} - F_{ad4}) = F_{b1} \sin \delta_1' + F_{b2} \sin \delta_2' \quad (4.53)$$

$$ma_y - F_{ad1} \sin \delta'_1 - F_{ad2} \sin \delta'_2 = F_{b1} \cos \delta'_1 + F_{b2} \cos \delta'_2 + F_{b3} + F_{b4} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} I_z \dot{r} - (F_{ad1} \sin \delta'_1 + F_{ad2} \sin \delta'_2) l_f - (F_{ad2} \cos \delta'_2 - F_{ad1} \cos \delta'_1) \frac{t_f}{2} - (F_{ad4} - F_{ad3}) \frac{t_r}{2} \\ = (F_{b1} \cos \delta'_1 + F_{b2} \cos \delta'_2) l_f - (F_{b3} + F_{b4}) l_r + (-F_{b2} \sin \delta'_2 + F_{b1} \sin \delta'_1) \frac{t_f}{2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

並以矩陣型式表式之，如(4.56)式：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{b} \quad (4.56)$$

$$\text{； 其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \delta'_1 & \sin \delta'_2 & 0 & 0 \\ \cos \delta'_1 & \cos \delta'_2 & 1 & 1 \\ \cos \delta'_1 \cdot l_f + \sin \delta'_1 \cdot \frac{t_f}{2} & \cos \delta'_2 \cdot l_f - \sin \delta'_2 \cdot \frac{t_f}{2} & -l_r & -l_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = [F_{b1} \quad F_{b2} \quad F_{b3} \quad F_{b4}]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_x \quad b_y \quad b_M]^T$$

$$\text{； } b_x = -(ma_x - F_{ad1} \cos \delta'_1 - F_{ad2} \cos \delta'_2 - F_{ad3} - F_{ad4})$$

$$b_y = ma_y - F_{ad1} \sin \delta'_1 - F_{ad2} \sin \delta'_2$$

$$b_M = I_z \dot{r} - (F_{ad1} \sin \delta'_1 + F_{ad2} \sin \delta'_2) l_f - (F_{ad2} \cos \delta'_2 - F_{ad1} \cos \delta'_1) \frac{t_f}{2} - (F_{ad4} - F_{ad3}) \frac{t_r}{2}$$

由於 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{b}$ 式中未知項(四個)比有效方程式(三條)多，無法求解；但經觀察發現 \mathbf{A} 矩陣中第三四行為線性相依，故可將之化簡如下式：

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{b}} \quad (4.57)$$

$$\text{； 其中 } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sin \delta'_1 & \sin \delta'_2 & 0 \\ \cos \delta'_1 & \cos \delta'_2 & 1 \\ \cos \delta'_1 \cdot l_f + \sin \delta'_1 \cdot \frac{t_f}{2} & \cos \delta'_2 \cdot l_f - \sin \delta'_2 \cdot \frac{t_f}{2} & -l_r \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{e}} = [F_{b1} \quad F_{b2} \quad F_{b3} \quad F_{b4}]^T$$

矩陣 $\bar{\mathbf{A}}$ 的元素與轉向角 δ 相關，可以發現當轉向角很小時，矩陣中第一二行會接近線性相依，此造成 $\bar{\mathbf{A}}$ 接近一奇異矩陣，解出較偏差的解，所以在轉向角很小時要分開討論。

在轉向角大的情況下，我們利用高斯消去法證明，因為矩陣 $\bar{\mathbf{A}}$ 的元素中 δ_1 與 δ_2 具有阿克曼角關係使得 $\bar{\mathbf{A}}$ 並非滿秩(秩數為二)，故無法求解，所以改為考慮 δ_1 與 δ_2 相等(前輪轉向角量測值和除以二)求解。在 $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{b}$ 式中左右兩邊同乘 $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$ 即可得 $F_{b3} + F_{b4}$ 值，並稱之為簡化車輛模型的解。

而在轉向角為小角度的情況下，假設 $\sin \theta \approx 0$ 、 $\cos \theta \approx 1$ ，(4.57)式可再化簡如(4.58)式：

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{b} \tag{4.58}$$

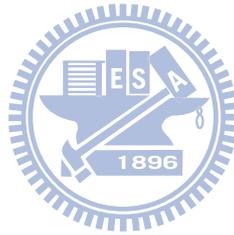
$$\text{；其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ lf & -lr \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = [F_{b1} + F_{b2} \quad F_{b3} + F_{b4}]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_y \quad b_M]^T$$

$$\text{； } b_y = ma_y$$

$$b_M = M_z - (F_{a2} - F_{a1}) \frac{t_f}{2} - (F_{a4} - F_{a3}) \frac{t_r}{2}$$



若再假設車輛前後輪軸寬度為零，就可以發現此狀況下與簡化的腳踏車模型相似，同樣在 $\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{b}$ 式中左右兩邊同乘 \mathbf{A}^{-1} 即可得 $F_{b3} + F_{b4}$ 值。

以上分為簡化車輛與腳踏車兩個模型解，而為了避免模型切換時的不連續現象，我們裡用到 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣的條件數(condition number)作為切換依據，條件數的定義(如(4.59)式)為一矩陣之最大奇異值與最小奇異值比值，越大表示矩陣越接近奇異矩陣，不易求解，反之則容易得到解答。

$$\kappa(\bar{\mathbf{A}}) = \frac{\sqrt{\sigma_{\max}^2(\bar{\mathbf{A}})}}{\sqrt{\sigma_{\min}^2(\bar{\mathbf{A}})}} = \frac{|\sigma_{\max}|}{|\sigma_{\min}|} \quad (4.59)$$

； σ 為 $\bar{\mathbf{A}}$ 的奇異值(singular value)。

將轉向角與 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣的條件數作圖，如下圖：

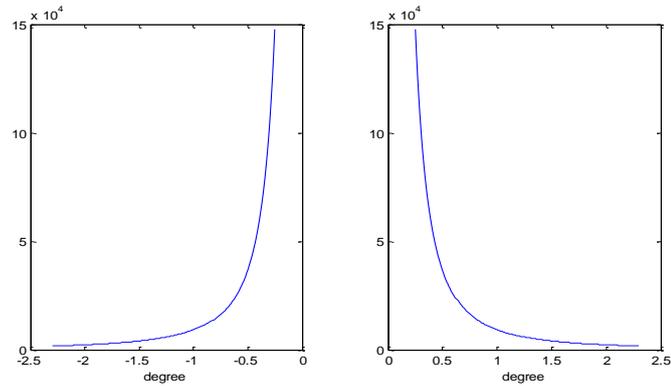


圖 4.3 轉向角對應 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣條件數

當車輛轉向角很小時， $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣的條件數很大，隨著轉向角的遞增，條件數會遞減趨緩，故在此假設兩個權重，一個是隨轉向角改變的 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣條件數，另一個為固定角度下的 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣條件數，以此權重的選擇來決定比較相信簡化車輛模型(轉向角大)的解，或是相信腳踏車模型(轉向角小)的解，如(4.60~61)兩式。

$$g_1 = \frac{1}{\kappa(\bar{\mathbf{A}})} \quad (4.60)$$

$$g_2 = \frac{1}{\kappa(\bar{\mathbf{A}}_{(\delta=\text{constant})})} \quad (4.61)$$

並將上述兩式正規化(normalize)，如下式：

$$g_1' = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \quad (4.62)$$

$$g_2' = \frac{g_2}{g_1 + g_2} \quad (4.63)$$

所求車輛後輪側向力和為(4.64)式：

$$F_{b3} + F_{b4} = g_1' \bar{e}(3) + g_2' \tilde{e}(2) \quad (4.64)$$

；其中 $\bar{\mathbf{e}} = [F_{b1} \quad F_{b2} \quad F_{b3} + F_{b4}]^T$

$$\tilde{\mathbf{e}} = [F_{b1} + F_{b2} \quad F_{b3} + F_{b4}]^T$$

式中 g_1' 與 g_2' 為正規化(normalize)後的權重，權重 g_1' 的值會隨著轉向角的不同而變化，當轉向角越小時， $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣的條件數越大， g_1' 權重的值越小；反之轉向角越大， $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣的條件數越小， g_1' 權重值就越大。而拿來做比較的權重 g_2' 選在 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣固定轉向角三度的地方，此假設當轉向角遠大於三度時， g_1' 會接近於一， g_2' 接近零，也就是說在大角度的情況下選擇較為相信簡化車輛模型的解，反之小角度情況則較相信腳踏車模型的解。

(4.64)式只能估測出後輪側向力之和，為求出後輪個別之側向力，我們考慮在控制器設計時所假設的輪胎模型(Dugoff's tire model)。利用 Dugoff's 側向輪胎模型可得出四個輪胎各別側向力 F_{bi}^{Dug} , $i=1...4$

$$F_b^{Dug} = C_y^{Dug} \frac{\tan(\alpha)}{1+|\lambda|} f(\kappa) ; f(\kappa) = \begin{cases} 1, & \kappa \geq 1 \\ \kappa(2-\kappa), & \kappa < 1 \end{cases}, \kappa = \frac{\mu F_z (1-|\lambda|)}{2\sqrt{C_x^{Dug2} \lambda^2 + C_y^{Dug2} \tan^2 \alpha}}$$

；當中將一些需由輪胎動態感測器量測(如：側滑角(α)、滑動比(λ))回授給控制器的部分當已知運用。

利用(4.64)式可以得到實際後輪側向力和： $F_{b3} + F_{b4}$ ，其與 Dugoff 輪胎模型之差異乃因輪胎模型不確定性所產生。定義 $e_3 + e_4$ 如下

$$e_3 + e_4 = (F_{b3} + F_{b4}) - (F_{b3}^{Dug} + F_{b4}^{Dug}) \quad (4.65)$$

假設後兩輪側向力因模型不準確性因素(model uncertainty)產生的誤差大約相等，故兩輪胎誤差各占一半，則估測之後輪側向力為：

$$\hat{F}_{b3} = F_{b3}^{Dug} + \frac{e_3 + e_4}{2} \quad (4.66)$$

$$\hat{F}_{b4} = F_{b4}^{Dug} + \frac{e_3 + e_4}{2} \quad (4.67)$$

總結此小節由上述方法計算出的後輪側向力模型不準確誤差可能經由下列因素影響其準確度：

1. 下層縱向力控制誤差：計算時我們假設縱向力控制精準而把四輪縱向力當已知帶入期望縱向力。
2. 前輪轉向角 δ_1 與 δ_2 相等：在大角度的簡化車輛模型中，因加入阿克曼角限制會使矩陣 $\bar{\mathbf{A}}$ 秩數下降，所以假設前輪轉向角相等來計算。
3. 將誤差總和 $e_3 + e_4$ 平分：估測出後兩輪側向力。

後輪側向力估測的誤差亦會造成最佳化輪胎力量分配問題中的限制條件

(4.39~41,44)與實際情況有差異。在 4.4 節中將分析此誤差之影響，並在上層控制器選擇適當的控制增益以補償此誤差。

4.3 下層控制器



在 4.2 節最佳化輪胎與路面間摩擦力分配，分配出四個輪胎和路面間所應該產生的縱向力與兩個前輪側向力，本小節將設計下層控制器控制輪胎的扭力與轉向角，改變輪胎動態，使輪胎與路面間產生此摩擦力分配之結果。

實際上控制車輛的輪胎模型是未知的，在第三章討論的”Magic formula”輪胎模型，在本研究中是用以模擬當作真實的輪胎模型，而在下層控制器內一樣假設非線性輪胎模型：Dugoff’s 輪胎模型[19]，如(4.68)式，做為控制器內名義輪胎模型(Nominal tire model)，因為 Dugoff’s 輪胎模型包含較少的參數(C_x^{Dug} 、 C_y^{Dug})，計算上亦比較容易，所以利用此模型之線性及非線性的特性，於縱向力回授控制。

$$F_a^{Dug} = C_x^{Dug} \frac{\lambda}{1-|\lambda|} f(\kappa)$$

$$F_b^{Dug} = C_y^{Dug} \frac{\tan(\alpha)}{1-|\lambda|} f(\kappa)$$
(4.68)

$$; f(\kappa) = \begin{cases} 1 & , \kappa \geq 1 \\ \kappa(2-\kappa) & , \kappa < 1 \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\mu F_z (1 - |\lambda|)}{2\sqrt{C_x^D u^2 \lambda^2 + C_y^D i^2 \ell a n \dot{\alpha}}}$$

4.3.1 縱向力估測

回顧(3.8)式，輪胎旋轉動態方程式，假設式中施加於輪胎的力矩和(T_{mi})和輪胎轉動角速度(ω_i)都可以獲得，將此式移項整理後，並將輪胎等效半徑(R_w)用未形變前的輪胎半徑(r_i)代入，可得(4.69)式。

$$F_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \dot{\omega}_i}{r_i} \quad (4.69)$$

；其中轉動角加速度($\dot{\omega}_i$)項，可以透過角速度項差分得知。 ω_i^+ 為此刻時間點的輪胎轉動角速度， ω_i^- 前一刻時間點的輪胎轉動角速度， Δt 為取樣時間，則輪胎轉動角加速度可以用(4.65)式近似：

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \quad (4.70)$$

再將(4.70)式代入(4.69)式即可得到縱向力估測方程式：

$$\hat{F}_{ai} = \frac{T_{mi} - I_w \left(\frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \right)}{r_i} \quad (4.71)$$

本研究中將會利用(4.71)式縱向力估測的結果，回授至下層縱向力控制器，控制輪胎動態。

4.3.2 縱向摩擦力回授穩健控制器

控制器中假設實際的輪胎模型縱向摩擦力為：Dugoff's 輪胎模型(F_a^{Dug})加上一未知項(F_a^* ：Uncertainty term)。控制器目的是希望輪胎與路面間產生上層控制器分配期望之摩擦力(F_{ad})，故設計順滑模態控制器做縱向力軌跡跟隨控制，計算控制輸入扭矩(T_m)，控制輪胎的動態。

設計一順滑平面，如(4.72)式。

$$S_a = F_a - F_{ad} = 0 \quad (4.72)$$

；其中若 $|F_{ad}| > \mu F_z$ ，則會將 $|F_{ad}|$ 限制於 μF_z ，目的是希望跟隨的參考值 $|F_{ad}|$ 不會超過最大縱向摩擦力 μF_z ； μ 為路面摩擦力係數。

需滿足迫近條件(Approaching condition)：

$$\dot{S}_a S_a < -\eta_4 |S_a| \quad , \text{ while } S_a \neq 0 \quad (4.73)$$

；其中 $\eta_4 > 0$ 。

回顧(4.68)式，Dugoff's 輪胎模型，將縱向力(F_a^{Dug})對時間 t 做一次微分：

$$\dot{F}_a^{Dug} = \begin{cases} C_x^{Dug} \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ C_x^{Dug} \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \kappa(2-\kappa) \dot{\lambda} + 2C_x^{Dug} \frac{\lambda}{1-|\lambda|} (1-\kappa) \dot{\kappa} & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.74)$$

κ 計算如(4.75)式。

$$\dot{\kappa} = \frac{\dot{F}_z}{F_z} \kappa - \frac{1}{1-|\lambda|} \kappa \dot{\lambda} \text{sign}(\lambda) - \kappa \frac{C_x^{Dug2} \lambda \dot{\lambda} + C_y^{Dug2} \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x^{Dug2} \lambda^2 + C_y^{Dug2} \tan^2 \alpha} \quad (4.75)$$

將(4.75)式代入(4.74)式，重新整理為

$$\dot{F}_a^{Dug} = \begin{cases} C_x^{Dug} \frac{1}{(1-|\lambda|)^2} \dot{\lambda} & , \kappa \geq 1 \\ \frac{C_x^{Dug}}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x^{Dug2} (1-\kappa) \lambda^2}{C_x^{Dug2} \lambda^2 + C_y^{Dug2} \tan^2 \alpha} \right] \dot{\lambda} \\ + 2C_x^{Dug} \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa (1-\kappa) \left(\frac{F_z}{\dot{F}_z} - \frac{C_y^{Dug2} \tan \alpha \sec^2 \alpha \dot{\alpha}}{C_x^{Dug2} \lambda^2 + C_y^{Dug2} \tan^2 \alpha} \right) & , \kappa < 1 \end{cases} \quad (4.76)$$

再將(4.76)式整理表示為

$$\dot{F}_a^{Dug} = g_\lambda^{Dug} \dot{\lambda} + g_0^{Dug} \quad (4.77)$$

； g_λ^{Dug} 為 F_a^{Dug} 對 λ 偏微，且

$\kappa \geq 1$:

$$g_{\lambda}^{Dug} = \frac{C_x^{Dug}}{(1-|\lambda|)^2} > 0,$$

$$g_0^{Dug} = 0$$

$\kappa < 1$:

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^{Dug} &= \frac{C_x^{Dug}}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - \frac{2(1-\kappa)|\lambda|}{1-|\lambda|} - \frac{2C_x^{Dug^2}(1-\kappa)\lambda^2}{C_x^{Dug^2}\lambda^2 + C_y^{Dug^2}\tan^2\alpha} \right] \\ &\geq \frac{C_x^{Dug}}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{2-\kappa}{1-|\lambda|} - 2(1-\kappa)\left(\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|} + 1\right) \right] \\ &= \frac{C_x^{Dug}}{1-|\lambda|} \kappa \left[\frac{\kappa}{1-|\lambda|} \right] \\ &= \frac{C_x^{Dug} \kappa^2}{(1-|\lambda|)^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$g_0^{Dug} = 2C_x^{Dug} \frac{\lambda}{1-|\lambda|} \kappa(1-\kappa) \left(\frac{\dot{F}_z}{F_z} - \frac{C_y^{Dug^2} \tan\alpha \sec^2\alpha \dot{\alpha}}{C_x^{Dug^2}\lambda^2 + C_y^{Dug^2}\tan^2\alpha} \right)$$

故可以將先前假設實際的輪胎模型縱向摩擦力對時間t做一次微分表示為(4.79)式。

$$\dot{F}_a = (g_{\lambda}^{Dug} + g_{\lambda}^*) \dot{\lambda} + g_0^{Dug} \quad (4.79)$$

； g_{λ}^* 假設為未知項對 λ 偏微的結果。

當車輪在加速時($\lambda > 0$)，將(3.9)式對時間t做一次微分，且利用輪胎旋轉動態方程式

(3.8)得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{r_i \omega_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i) - v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i)}{(r_i \omega_i)^2} \\ &= -\frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} + \left(1 - \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{r_i \omega_i}\right) \frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i} \\ &= \frac{(1-\lambda_i)}{\omega_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w}\right) - \frac{(\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{r_i \omega_i} \\ &= \frac{(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \end{aligned} \quad (4.80)$$

；其中不考慮輪胎形變量，故由輪胎未形變時半徑 r_i 代入； v_{ai} 為輪胎前進速度之平行胎面分量。

同樣地，車輪在煞車減速時($\lambda < 0$)得

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i &= \frac{v_i \cos \alpha_i \cdot (r_i \dot{\omega}_i) - r_i \omega_i \cdot (\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i)}{(v_i \cos \alpha_i)^2} \\
&= \frac{r_i \dot{\omega}_i}{v_i \cos \alpha_i} - \left(1 + \frac{r_i \omega_i - v_i \cos \alpha_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \\
&= \frac{r_i}{v_i \cos \alpha_i} \left(\frac{T_{mi} - r_i F_{ai}}{I_w}\right) - (1 + \lambda_i) \left(\frac{\dot{v}_i \cos \alpha_i - v_i \sin \alpha_i \dot{\alpha}_i}{v_i \cos \alpha_i}\right) \\
&= \frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

將(4.79~81)式代入(4.73)式，必須滿足此迫近條件。

$$\begin{aligned}
& (\dot{F}_a - \dot{F}_{ad}) S_a \\
\Rightarrow & \left((g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \dot{\lambda} + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right) S_a < -\eta_4 |S_a| \\
\Rightarrow & \begin{cases} \left((g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{(1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i (1 - \lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right) S_a < -\eta_4 |S_a|, \lambda > 0 \\ \left((g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right) S_a < -\eta_4 |S_a|, \lambda < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

假設 $g_\lambda^* \geq (-1 + \theta) g_\lambda^{Dug}$, $0 < \theta \leq 0.5$ 及輪胎初始滑動比落於輪胎線性區域：

$\lambda(0) \in [-\lambda^*, \lambda^*]$, $F_a(\lambda^*) = \mu F_z$ ，則設計控制輸入 T_{mi} 為：

$\lambda > 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w \dot{v}_{ai}}{r_i (1 - \lambda_i)} + \frac{1}{g_\lambda^{Dug}} \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) - \rho \frac{I_w \omega_i}{(1 - \lambda_i)} \text{sign}(S_a) \tag{4.83}$$

$\lambda < 0$:

$$T_{mi} = r_i F_{ad} + \frac{I_w (1 + \lambda_i) \dot{v}_{ai}}{r_i} + \frac{1}{g_\lambda^{Dug}} \frac{I_w v_{ai}}{r_i} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) - \rho \frac{I_w v_{ai}}{r_i} \text{sign}(S_a)$$

；其中 ρ 為(4.84)所示：

$$\rho = \frac{1}{g_\lambda^{Dug}} \left(\frac{1 - \theta}{\theta} |(-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) \tag{4.84}$$

； $k_4 > 0$ 。

將(4.83)與(4.84)式代入(4.82)式證明滿足迫近條件。

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} T_{mi} - \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} F_{ai} - \frac{\dot{v}_{ai}}{r_i \omega_i} \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
\Rightarrow & \left\{ (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g_\lambda^{Dug}} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
= & - (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \left\{ \rho (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \text{sign}(S_a) - \frac{g_\lambda^*}{g_\lambda^{Dug}} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) \right\} S_a \\
= & - (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 \\
& - \left\{ \frac{(g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*)}{g_\lambda^{Dug}} \left(\frac{1-\theta}{\theta} |(-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g_\lambda^*}{g_\lambda^{Dug}} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\
\leq & -\theta g_\lambda^{Dug} \frac{r_i(1-\lambda_i)}{I_w \omega_i} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\
< & -\eta_4 |S_a|
\end{aligned}$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i}{I_w v_{ai}} T_{mi} - \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} F_{ai} - \frac{(1+\lambda_i)\dot{v}_{ai}}{v_{ai}} \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
\Rightarrow & \left\{ (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \left[\frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} (F_{ad} - F_{ai}) + \frac{1}{g_\lambda^{Dug}} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) - \rho \text{sign}(S_a) \right] + g_0^{Dug} - \dot{F}_{ad} \right\} S_a \\
= & - (g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*) \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 \\
& - \left\{ \frac{(g_\lambda^{Dug} + g_\lambda^*)}{g_\lambda^{Dug}} \left(\frac{1-\theta}{\theta} |(-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad})| + k_4 \right) - \frac{g_\lambda^*}{g_\lambda^{Dug}} (-g_0^{Dug} + \dot{F}_{ad}) \text{sign}(S_a) \right\} |S_a| \\
\leq & -\theta g_\lambda^{Dug} \frac{r_i^2}{I_w v_{ai}} S_a^2 - \theta k_4 |S_a| \\
< & -\eta_4 |S_a|
\end{aligned} \tag{4.85}$$

; 其中 $\eta_4 > \theta k_4 > 0$

在一般真實輪胎模型縱向滑動比對摩擦力關係，輪胎線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為正，輪胎非線性區縱向力對縱向滑動比偏微斜率為負，產生最大縱向力值時斜率為零，如圖 4.4。

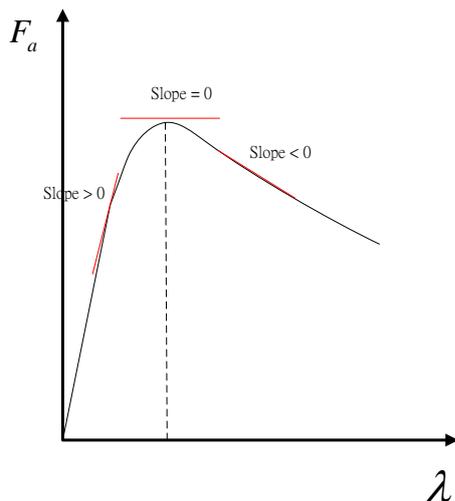


圖 4.4 縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖

在控制器中我們對未知項 g_λ^* 做的假設： $g_\lambda^* \geq (-1 + \theta)g_\lambda^{Dug}$, $0 < \theta \leq 0.5$ ，將縱向力控制器控制範圍限制於一般輪胎的線性區域，且輪胎縱向力對滑動比偏微斜率 $(g_\lambda^* + g_\lambda^{Dug})$ 大於 θg_λ^{Dug} ，如圖 4.5，左圖為本研究中模擬的真實輪胎模型，紅色線部分即為控制器假設下控制的範圍，隨著 θ 的遞減可以將控制範圍往最大縱向摩擦力延伸，不過若 θ 選定太小將會影響順滑模態控制器切跳時增益過大；右圖為控制器內假設的 Dugoff's 輪胎模型縱向力對滑動比偏微斜率乘於不同 θ 值與“Magic formula”比較。

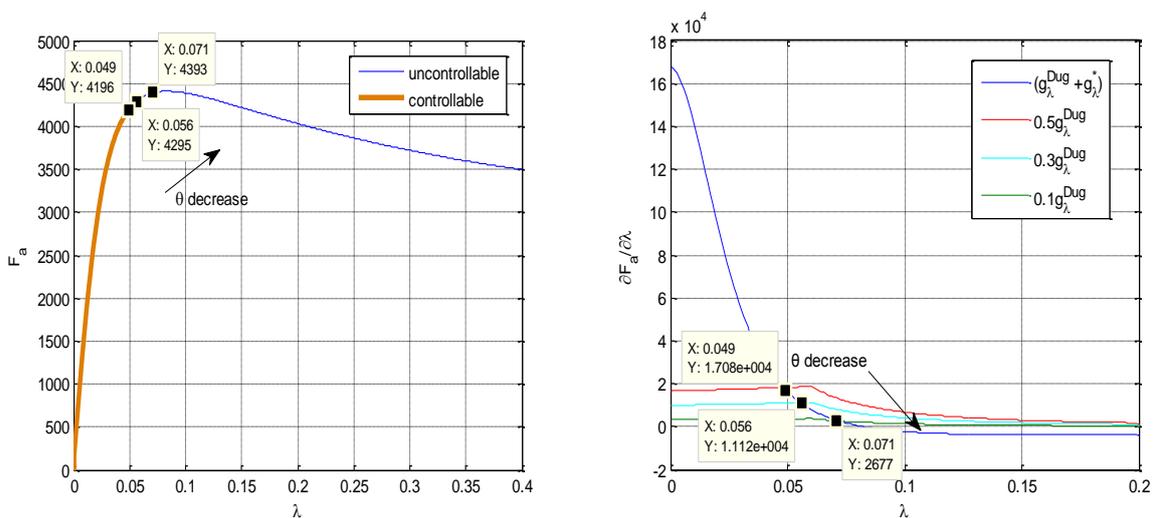


圖 4.5 “Magic formula”縱向滑動比與最大縱向摩擦力關係圖(左)、輪胎縱向力對滑動比偏微斜率 $(g_\lambda^* + g_\lambda^{Dug})$ 與 θg_λ^{Dug} 比較圖(右)

4.3.3 側向最佳化前輪轉向角控制器

不同於縱向部分有估測縱向力回授作控制，側向力部分因無理想估測結果所以控制器採開迴路的方式設計。在上一小節中，縱向摩擦力回授穩健控制器計算出各個輪胎需產生的扭矩(T_{mi})，以達到在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法中所計算出的各個輪胎期望縱向力(F_{adi})。此小節則將利用輪胎轉向角的控制，使前輪輪胎產生期望的側向力(F_{bdi})並使其轉向角符合阿克曼角限制。

回顧(4.46)式，我們以 F_{bd1} 、 F_{bd2} 組成的仿射函數關係式來近似以滿足前輪阿克曼角限制，最後並最佳化分配出各輪胎期望摩擦力 $[F_{ad1} F_{ad2} F_{ad3} F_{ad4} F_{bd1} F_{bd2}]$ 。這裡以側向力之 Dugoff's 反輪胎模型(如(4.86)式)[20]將 F_{bd1} 、 F_{bd2} 轉換成所期望的輪胎側滑角。

$$\alpha_{di} = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{F_{bdi}}{C_y^{Dug}}\right) & , \kappa \geq 1 \\ \tan^{-1}\left[\frac{(\mu F_z)^2}{4C_y^{Dug}(\text{sign}(F_{bdi})\mu F_z - F_{bdi})}\right] & , \kappa < 1 \end{cases}, i=1,2 \quad (4.86)$$

再經由側滑角與轉向角的轉換關係式，將期望的側滑角轉換成期望轉向角：

$$\delta_{d1} = \alpha_{d1} + \tan^{-1} \frac{V_y + rl_f}{V_x - r \frac{t_f}{2}} \quad (4.87)$$

$$\delta_{d2} = \alpha_{d2} + \tan^{-1} \frac{V_y + rl_f}{V_x + r \frac{t_f}{2}} \quad (4.88)$$

；其中車輛動態 V_x 、 V_y 、 r 部分我們當已知運用。

因在最佳化摩擦力分配中(4.44)式以泰勒展開式近似求解，可知此兩前輪期望轉向角結果並不會完全符合阿克曼角限制。在此要產生輪胎真正轉向角(必定要符合阿克曼角限制)，所以同樣考慮以最佳化的方式求解得出輪胎轉向角。

成本函數設計如下：

$$J = (\cot \delta_1 - \cot \delta_{d1})^2 + (\cot \delta_2 - \cot \delta_{d2})^2 \quad (4.89)$$

； δ_{d1} 、 δ_{d2} 為上述利用 Dugoff's 反輪胎模型求得出前輪期望轉向角。

並以 $\cot \delta_{d1}$ 、 $\cot \delta_{d2}$ 當可控變數，因可使阿克曼限制條件變為一條簡單的仿射函數，如下：

$$\cot \delta_2 - \cot \delta_1 = \frac{t_f}{l_f + l_r} \quad (4.90)$$

除了上列限制條件外，還有一個限制條件：

$$|\delta_i - \delta_i'| \leq \varepsilon_\delta \quad (4.91)$$

； δ_i 與 δ_i' 分別為此一取樣時間和前一取樣時間下輪胎轉向角。 ε_δ 為控制器所設定之變化範圍。此式與(4.42~43)三式皆為評估上層控制器 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值所需的限制，在下一小節將會介紹。

如同解最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法，利用 Lagrange Multiplier 先求最佳化解析解：

$$\text{令 } F = J(\cot \delta_1, \cot \delta_2) + \lambda g(\cot \delta_1, \cot \delta_2) \quad (4.92)$$

$$\text{； } J \text{ 為成本函數。 } g(\cot \delta_1, \cot \delta_2) = \cot \delta_2 - \cot \delta_1 - \frac{t_f}{l_f + l_r} = 0$$

將 F 對兩可控變數 $\cot \delta_{d1}$ 、 $\cot \delta_{d2}$ 與 λ 偏微等於零，得

$$\frac{\partial F}{\partial \cot \delta_1} = 2(\cot \delta_1 - \cot \delta_{d1}) - \lambda = 0 \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \cot \delta_2} = 2(\cot \delta_2 - \cot \delta_{d2}) + \lambda = 0 \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \cot \delta_2 - \cot \delta_1 - \frac{t_f}{l_f + l_r} = 0 \quad (4.95)$$

並以上列三條聯立方程式，求得

$$\left\{ \begin{array}{l} \cot \delta_1 = (\cot \delta_{d1} + \cot \delta_{d2} - \frac{t_f}{l_f + l_r}) / 2 \\ \cot \delta_2 = (\cot \delta_{d1} + \cot \delta_{d2} + \frac{t_f}{l_f + l_r}) / 2 \\ \lambda = \cot \delta_{d2} - \cot \delta_{d1} - \frac{t_f}{l_f + l_r} \end{array} \right.$$

對於 $\cot \delta$ 這個函數在 δ 為 ± 90 度的範圍內與 δ 為一對一，故直接以 \cot^{-1} 反函數求得輪胎轉向角

$$\delta_1 = \cot^{-1}(\cot \delta_1) \quad (4.96)$$

$$\delta_2 = \cot^{-1}(\cot \delta_2) \quad (4.97)$$

最後將得出的解析解代入驗證不等式是否成立，若成立則為最佳解析解，反之重新假設，演算流程：

代入不等式發現 $\delta_1 - \delta_1' > \varepsilon_\delta$ ，令 $\delta_1 - \delta_1' = \varepsilon_\delta \rightarrow \delta_1 = \varepsilon_\delta + \delta_1'$ ，並將 δ_2 以阿克曼角公式推導出： $\delta_2 = \cot^{-1}(\frac{t_f}{l_f + l_r} + \cot \delta_1)$ ，再代入驗證 $|\delta_2 - \delta_2'| \leq \varepsilon_\delta$ 是否成立，若亦無法成立一樣令

$\delta_2 = \varepsilon_\delta + \delta_2'$ ，並將 δ_1 以阿克曼角公式推導出： $\delta_1 = \cot^{-1}(\cot \delta_2 - \frac{t_f}{l_f + l_r})$ 。

經過這二次疊代演算後即可得到一組符合阿克曼角限制的前輪轉向角並且滿足分析上層控制器控制輸入誤差所需限制(4.91)式。

4.4 分析上層控制器之控制輸入誤差 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值

此小節將分析算出 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值，以設計使上層控制器之三平滑平面收斂。在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配以及下層最佳化輪胎轉向角控制當中已加入限制(4.42~43)與(4.91)式：

$$\begin{cases} |F_{adi} - F_{adi}'| \leq \varepsilon_a \Rightarrow |F_{adi}| \leq |F_{adi}'| + \varepsilon_a \\ |F_{bdi} - F_{bdi}'| \leq \varepsilon_b \Rightarrow |F_{bdi}| \leq |F_{bdi}'| + \varepsilon_b, i=1,2 \\ |\delta_i - \delta_i'| \leq \varepsilon_\delta \end{cases}$$

並利用泰勒展開式 $\begin{cases} \cos \delta = \cos \delta' - \sin \delta_c (\delta - \delta') \\ \sin \delta = \sin \delta' + \cos \delta_c (\delta - \delta') \end{cases}$, $\delta_c \in (\delta, \delta')$ 來做下列運算。

實際的車輛縱向動態，如第三章車輛模型介紹所提(3.2)式

$$ma_x = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} = (F_{a1} \cos \delta_1 - F_{b1} \sin \delta_1) + (F_{a2} \cos \delta_2 - F_{b2} \sin \delta_2) + F_{a3} + F_{a4}$$

上層控制器所計算的控制輸入項(X)最佳化分配於四個輪胎，如(4.39)式

$$\begin{aligned} X &= F_{xd1} + F_{xd2} + F_{xd3} + F_{xd4} \\ &= (F_{ad1} \cos(\delta_1') - F_{bd1} \sin(\delta_1')) + (F_{ad2} \cos(\delta_2') - F_{bd2} \sin(\delta_2')) + F_{ad3} + F_{ad4} \end{aligned}$$

如同先前的假設下層控制器縱向部分控制精準，誤差極小忽略： $F_{ai} \approx F_{adi}$, $i=1, \dots, 4$

我們可以計算出上層控制器計算之X與實際反應在車輛動態上的總縱向力(ma_x)誤差如下：

$$\begin{aligned} |X - ma_x| &= |F_{ad1}(\cos \delta_1' - \cos \delta_1) + F_{ad2}(\cos \delta_2' - \cos \delta_2) + (F_{b1} \sin \delta_1 - F_{bd1} \sin \delta_1') \\ &\quad + (F_{b2} \sin \delta_2 - F_{bd2} \sin \delta_2')| \\ &\leq |F_{ad1}(\cos \delta_1' - \cos \delta_1)| + |F_{ad2}(\cos \delta_2' - \cos \delta_2)| + |F_{b1} \sin \delta_1 - F_{bd1} \sin \delta_1'| \\ &\quad + |F_{b2} \sin \delta_2 - F_{bd2} \sin \delta_2'| \\ &\leq |F_{ad1}| |\cos \delta_1' - \cos \delta_1| + |F_{ad2}| |\cos \delta_2' - \cos \delta_2| + |F_{b1} - F_{bd1}| |\sin \delta_1| \\ &\quad + |F_{bd1}| |\sin \delta_1 - \sin \delta_1'| + |F_{b2} - F_{bd2}| |\sin \delta_2| + |F_{bd2}| |\sin \delta_2 - \sin \delta_2'| \\ &\leq (|F_{ad1}'| + \varepsilon_a) |\sin \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| + (|F_{ad2}'| + \varepsilon_a) |\sin \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| \\ &\quad + |F_{b1} - F_{bd1}| |\sin \delta_1' + \cos \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| + (|F_{bd1}'| + \varepsilon_b) |\cos \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| \\ &\quad + |F_{b2} - F_{bd2}| |\sin \delta_2' + \cos \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| + (|F_{bd2}'| + \varepsilon_b) |\cos \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| \\ &\leq (|F_{ad1}'| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + (|F_{ad2}'| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + |F_{b1} - F_{bd1}| (|\sin \delta_1'| + \varepsilon_\delta) \\ &\quad + (|F_{bd1}'| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta + |F_{b2} - F_{bd2}| (|\sin \delta_2'| + \varepsilon_\delta) \\ &\quad + (|F_{bd2}'| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta \end{aligned} \tag{4.98}$$

； F_{ad1}' 、 F_{ad2}' 、 F_{bd1}' 、 F_{bd2}' 為前一取樣時間控制器所分配出的輪胎縱向力與側向力。 ε_a 、

ε_b 、 ε_δ 為控制器設定之參數。 δ_1' 、 δ_2' 為前一取樣時間前輪輪胎轉向角。 $|F_{b1} - F_{bd1}|$ 、

$|F_{b2} - F_{bd2}|$ 的選取考慮到實際與控制器裡假設的輪胎模型分別為 magic formula 與

Dugoff's tire model，直接將此兩模型對輪胎側滑角變化作圖，找出側向力誤差最大值如

下圖：

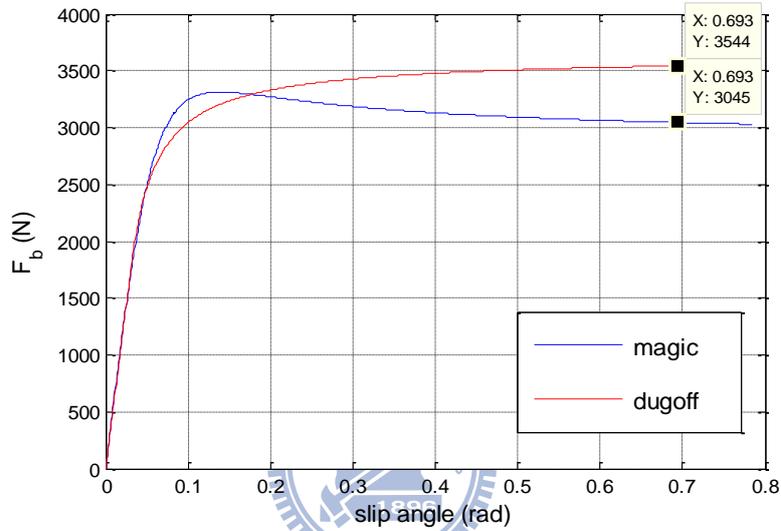


圖 4.6 “magic formula”與“Dugoff's tire model”兩輪胎模型對輪胎側滑角作圖

決定為 $|F_{bdi} - F_{bi}| \leq 500(N)$, $i = 1, 2$ 。

除了縱向動態，車輛側向與橫擺動態方面也一樣分析，實際的車輛側向動態，如(3.3)

式

$$ma_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = (F_{a1} \sin(\delta_1) + F_{b1} \cos(\delta_1)) + (F_{a2} \sin(\delta_2) + F_{b2} \cos(\delta_2)) + F_{b3} + F_{b4}$$

上層控制器所計算的控制輸入項(Y)最佳化分配於四個輪胎，如(4.40)式

$$\begin{aligned} Y &= F_{yd1} + F_{yd2} + \hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4} \\ &= (F_{ad1} \sin(\delta_1') + F_{bd1} \cos(\delta_1')) + (F_{ad2} \sin(\delta_2') + F_{bd2} \cos(\delta_2')) + \hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4} \end{aligned}$$

計算 Y 與實際反應在車輛動態上的總側向力(ma_y)誤差：

$$\begin{aligned}
|Y - ma_y| &= |F_{ad1}(\sin \delta_1' - \sin \delta_1) + F_{ad2}(\sin \delta_2' - \sin \delta_2) + (F_{bd1} \cos \delta_1' - F_{b1} \cos \delta_1) \\
&\quad + (F_{bd2} \cos \delta_2' - F_{b2} \cos \delta_2) + [(\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4}) - (F_{b3} + F_{b4})]| \\
&\leq |F_{ad1}(\sin \delta_1' - \sin \delta_1)| + |F_{ad2}(\sin \delta_2' - \sin \delta_2)| + |F_{bd1} \cos \delta_1' - F_{b1} \cos \delta_1| \\
&\quad + |F_{bd2} \cos \delta_2' - F_{b2} \cos \delta_2| + |(F_{b3}' + F_{b4}') - (F_{b3} + F_{b4})| \\
&\leq |F_{ad1}| |\sin \delta_1' - \sin \delta_1| + |F_{ad2}| |\sin \delta_2' - \sin \delta_2| + |F_{bd1}| |\cos \delta_1' - \cos \delta_1| \\
&\quad + |\cos \delta_1| |F_{bd1} - F_{b1}| + |F_{bd2}| |\cos \delta_2' - \cos \delta_2| + |\cos \delta_2| |F_{bd2} - F_{b2}| \\
&\quad + |(F_{b3}' + F_{b4}') - (F_{b3} + F_{b4})| \\
&\leq (|F_{ad1}'| + \varepsilon_a) |\cos \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| + (|F_{ad2}'| + \varepsilon_a) |\cos \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| \\
&\quad + (|F_{bd1}'| + \varepsilon_b) |\sin \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| + |\cos \delta_1' - \sin \delta_{c1}(\delta_1 - \delta_1')| |F_{bd1} - F_{b1}| \\
&\quad + (|F_{bd2}'| + \varepsilon_b) |\sin \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| + |\cos \delta_2' - \sin \delta_{c2}(\delta_2 - \delta_2')| |F_{bd2} - F_{b2}| + 2C_y \varepsilon_\delta \\
&\leq (|F_{ad1}'| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + (|F_{ad2}'| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + (|F_{bd1}'| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta \\
&\quad + (|\cos \delta_1'| + \varepsilon_\delta) |F_{bd1} - F_{b1}| + (|F_{bd2}'| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta \\
&\quad + (|\cos \delta_2'| + \varepsilon_\delta) |F_{bd2} - F_{b2}| + 2C_y \varepsilon_\delta
\end{aligned} \tag{4.99}$$

；在後輪側向力估測演算法中，我們利用到的車身動態資訊是屬於前一個取樣時間，故

實際上估測出來的後輪側向力和是前一取樣時間的： $\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4} \cong F_{b3}' + F_{b4}'$

F_{b3}', F_{b4}' 分別為前一取樣時間後輪實際側向力。

$$; |(F_{b3}' + F_{b4}') - (F_{b3} + F_{b4})| = \left| (F_{b3}' + F_{b4}') - (F_{b3}' + F_{b4}' + \frac{\partial(F_{b3} + F_{b4})}{\partial \delta} \Big|_{\delta=\delta_c} (\delta - \delta')) \right| \leq 2C_y \varepsilon_\delta$$

C_y 為輪胎轉向剛度。

實際的車輛橫擺動態，如(3.4)式

$$\begin{aligned}
I_z \dot{r} &= -F_{x1} \frac{t_f}{2} + F_{x2} \frac{t_f}{2} - F_{x3} \frac{t_r}{2} + F_{x4} \frac{t_r}{2} + F_{y1} l_f + F_{y2} l_f - (F_{y3} + F_{y4}) l_r \\
&= -(F_{a1} \cos(\delta_1) - F_{b1} \sin(\delta_1)) \frac{t_f}{2} + (F_{a2} \cos(\delta_2) - F_{b2} \sin(\delta_2)) \frac{t_f}{2} - F_{a3} \frac{t_r}{2} + F_{a4} \frac{t_r}{2} \\
&\quad + (F_{a1} \sin(\delta_1) + F_{b1} \cos(\delta_1)) l_f + (F_{a2} \sin(\delta_2) + F_{b2} \cos(\delta_2)) l_f - (F_{b3} + F_{b4}) l_r
\end{aligned}$$

上層控制器所計算的控制輸入項(M)最佳化分配於四個輪胎，如(4.41)式

$$\begin{aligned}
M &= -F_{xd1} \frac{t_f}{2} + F_{xd2} \frac{t_f}{2} - F_{xd3} \frac{t_r}{2} + F_{xd4} \frac{t_r}{2} + F_{yd1} l_f + F_{yd2} l_f - (\hat{F}_{y3} + \hat{F}_{y4}) l_r \\
&= -(F_{ad1} \cos(\delta'_1) - F_{bd1} \sin(\delta'_1)) \frac{t_f}{2} + (F_{ad2} \cos(\delta'_2) - F_{bd2} \sin(\delta'_2)) \frac{t_f}{2} - F_{ad3} \frac{t_r}{2} + F_{ad4} \frac{t_r}{2} \\
&\quad + (F_{ad1} \sin(\delta'_1) + F_{bd1} \cos(\delta'_1)) l_f + (F_{ad2} \sin(\delta'_2) + F_{bd2} \cos(\delta'_2)) l_f - (\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4}) l_r
\end{aligned}$$

計算 M 與實際反應在車輛動態上的總橫擺力矩($I_z \dot{r}$)誤差：

$$\begin{aligned}
|M - I_z \dot{r}| &= \left| F_{ad1} \frac{t_f}{2} (\cos \delta_1 - \cos \delta'_1) + \frac{t_f}{2} (F_{bd1} \sin \delta'_1 - F_{b1} \sin \delta_1) + F_{ad2} \frac{t_f}{2} (\cos \delta'_2 - \cos \delta_2) \right. \\
&\quad + \frac{t_f}{2} (F_{b2} \sin \delta_2 - F_{bd2} \sin \delta'_2) + F_{ad1} l_f (\sin \delta'_1 - \sin \delta_1) + l_f (F_{bd1} \cos \delta'_1 - F_{b1} \cos \delta_1) \\
&\quad \left. + F_{ad2} l_f (\sin \delta'_2 - \sin \delta_2) + l_f (F_{bd2} \cos \delta'_2 - F_{b2} \cos \delta_2) + l_r [(F_{b3} + F_{b4}) - (F_{b3}' + F_{b4}')] \right| \\
&\leq \frac{t_f}{2} |F_{ad1}| |\cos \delta_1 - \cos \delta'_1| + \frac{t_f}{2} |F_{bd1}| |\sin \delta'_1 - \sin \delta_1| + \frac{t_f}{2} |F_{bd1} - F_{b1}| |\sin \delta_1| \\
&\quad + \frac{t_f}{2} |F_{ad2}| |\cos \delta'_2 - \cos \delta_2| + \frac{t_f}{2} |F_{b2} - F_{bd2}| |\sin \delta_2| + \frac{t_f}{2} |F_{bd2}| |\sin \delta_2 - \sin \delta'_2| \\
&\quad + l_f |F_{ad1}| |\sin \delta'_1 - \sin \delta_1| + l_f |F_{bd1}| |\cos \delta'_1 - \cos \delta_1| + l_f |F_{bd1} - F_{b1}| |\cos \delta_1| \\
&\quad + l_f |F_{ad2}| |\sin \delta'_2 - \sin \delta_2| + l_f |F_{bd2}| |\cos \delta'_2 - \cos \delta_2| + l_f |F_{bd2} - F_{b2}| |\cos \delta_2| \\
&\quad + l_r |(F_{b3} + F_{b4}) - (F_{b3}' + F_{b4}')| \\
&\leq \frac{t_f}{2} (|F_{ad1}| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + \frac{t_f}{2} (|F_{bd1}| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta + \frac{t_f}{2} |F_{bd1} - F_{b1}| (|\sin \delta_1| + \varepsilon_\delta) + \frac{t_f}{2} (|F_{ad2}| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta \\
&\quad + \frac{t_f}{2} |F_{b2} - F_{bd2}| (|\sin \delta_2| + \varepsilon_\delta) + \frac{t_f}{2} (|F_{bd2}| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta + l_f (|F_{ad1}| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta + l_f (|F_{bd1}| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta \\
&\quad + l_f |F_{bd1} - F_{b1}| (|\cos \delta_1| + \varepsilon_\delta) + l_f (|F_{ad2}| + \varepsilon_a) \varepsilon_\delta \\
&\quad + l_f (|F_{bd2}| + \varepsilon_b) \varepsilon_\delta + l_f |F_{bd2} - F_{b2}| (|\cos \delta_2| + \varepsilon_\delta) + 2l_r C_y \varepsilon_\delta
\end{aligned} \tag{4.100}$$

在實際控制器中，我們的控制器參數設定 $\varepsilon_a = 30(N)$ 、 $\varepsilon_b = 30(N)$ 、 $\varepsilon_\delta = 3 \times 10^{-4}(\text{rad})$ ，而在某些緊急情況下(如橫擺角速度參考值達其物理限制)，上層控制器的控制輸入會產生極大的變化量，可能會造成控制系統崩潰。故當縱向速度參考值、車輛質心側滑角參考值以及車輛質心橫擺角速度達其物理限制的那一取樣時間，會選取更寬鬆值以承受上層控制器控制輸入產生的變化量： $\varepsilon_a = 3000(N)$ 、 $\varepsilon_b = 3000(N)$ 、 $\varepsilon_\delta = 3 \times 10^{-2}(\text{rad})$

總結此小節，在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配中， F_{adi} 和 F_{bdi} 為力分配的可控變數，故 $|F_{adi} - F_{adi}'| \leq \varepsilon_a$ 與 $|F_{bdi} - F_{bdi}'| \leq \varepsilon_b$ 直接當作其不等式限制；而 δ_i 為實際轉向角，是

下層側向控制器的控制輸入，所以 $|\delta_i - \delta_i'| \leq \varepsilon_\delta$ 加入其不等式限制。經過以上分析能計算出上層控制器的誤差範圍 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} ，得以用來補償並決定設計上層控制器時利用順滑模態控制理論所需的參數以保證其收斂性。在 ε_a 、 ε_b 、 ε_δ 選取方面，若選取值過大，所計算出的誤差範圍 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 也會越大，使上層控制器控制輸入(X、Y、M)切跳現象變劇烈且控制輸入本身增加，反應到車身動態表示縱向、側向加速度以及橫擺角加速度變大。



第五章、模擬與結果討論

此章節將利用第三章所介紹之車輛系統模型模擬本研究中控制器所控制的車輛，會模擬比較常見的駕駛情況，如轉向(J-turn)與車道變換(Single-lane change)，模擬情境則偏向於車輛行駛時遇到緊急狀況的反應，此狀況下一般駕駛者較不易自行修正車輛行駛的路徑，所以藉由車輛運動控制器來控制車輛行駛於安全的行駛。路徑模擬結果最後會與 Mirzaei[9]提出的直接橫擺力矩控制策略與 Kanghyun Nam[22]所提出的控制結果做比較。

轉向即是車輛直線行駛中在一段時間內將方向盤轉到固定的角度，讓車輛繞著一同心圓行進；車道變換為車輛在道路行駛時，將車輛從原本的车道切換到隔壁車道。行駛路徑示意圖如下：

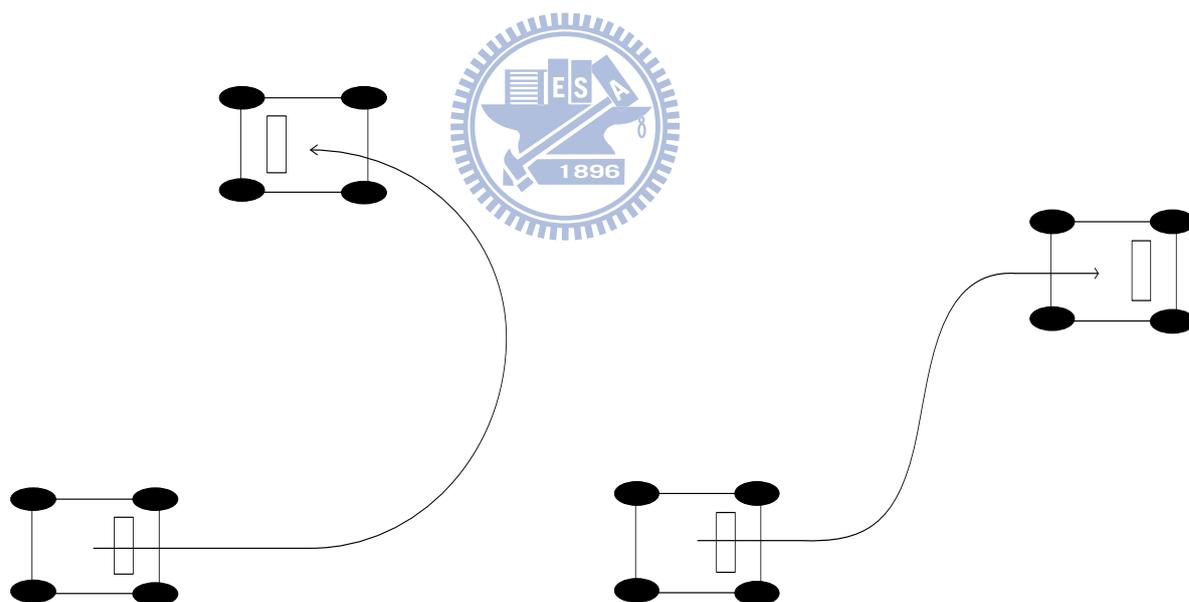


圖 5.1 車輛行駛路徑示意圖 (左: J-turn, 右: Single-lane change)

模擬時所使用的車輛參數與”Magic formula”輪胎模型參數[10]，如表 5.1 與表 5.2。模擬的控制車輛限制其輪胎轉向角 δ 的範圍為 ± 45 度之間。模擬中控制器內假設的路面摩擦力係數 $\mu = 0.85$ ；控制車輛縱向速度的順滑層(Sliding layer) ϵ_x 選定為0.1、質心側滑角

的順滑層 ε_Y 選定為0.001、橫擺角速度的順滑層 ε_M 選定為0.03；下層控制器控制跟隨所需縱向力的順滑層選定為1；分析上層控制器的誤差範圍 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 所需參數 ε_a 選定為30、 ε_b 選定為30、 ε_δ 選定為 3×10^{-4} ；路面狀況模擬在一般柏油路($\mu = 0.85$)。

模擬中 F_{a1} 表示車輛左前輪平行胎面之縱向摩擦力、 F_{a2} 為右前輪縱向力、 F_{a3} 為左後輪縱向力、 F_{a4} 為右後輪縱向力； F_{b1} 表示車輛左前輪垂直胎面之側向摩擦力、 F_{b2} 為右前輪側向力、 F_{b3} 為左後輪側向力、 F_{b4} 為右後輪側向力。

參數	符號	數值	單位
車體質量	m	1740	kg
車體集中質量	m_s	1600	kg
車體集中質量之質心高度	h_s	0.6	m
車體質心到前輪軸的距離	l_f	1.05	m
車體質心到後輪軸的距離	l_r	1.4	m
車輛前輪輪距	t_f	1.45	m
車輛後輪輪距	t_r	1.65	m
橫擺轉動慣量	I_z	3214	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
輪胎等效半徑	r_i	0.306	m
輪胎轉動慣量	I_w	2.03	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

表 5.1 模擬中所使用的車輛參數

參數	符號	數值
縱向輪胎係數	B_x	$\frac{-4.96 \times 10^{-5} F_z^2 + 0.026 F_z}{C_x D_x e^{6.9 \times 10^{-5} F_z}}$
縱向輪胎係數	C_x	1.65

縱向輪胎係數	D_x	$-2.13 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.144 F_z$
縱向輪胎係數	E_x	$-6 \times 10^{-9} F_z^2 + 5.6 \times 10^{-5} F_z + 0.486$
側向輪胎係數	B_y	$\frac{1078 \sin \left(1.82 \tan^{-1} (2.08 \times 10^{-4} F_z) \right)}{C_y D_y}$
側向輪胎係數	C_y	1.3
側向輪胎係數	D_y	$-2.2 \times 10^{-5} F_z^2 + 1.001 F_z$
側向輪胎係數	E_y	$-3.54 \times 10^{-4} F_z + 0.707$

表 5.2 模擬中所使用的”Magic formula”輪胎模型參數

5.1 J-turn

考慮到一般車輛在道路上遇到緊急情況下作的轉向反應，本小節在轉向模擬部分主要是以不同轉向角輸入(小角度與大角度)的駕駛情況下，呈現控制器控制的結果。模擬一與模擬二分別對兩種不同的轉向角度駕駛做控制，模擬一為 4 度轉向，車輛在穩態時的側向加速度較小(3.7 m/sec^2)，控制器能控制車輛維持等速轉向，且橫擺角速度與質心側滑角皆有跟隨參考值，如圖 5.6。圖 5.3 表示縱向力最佳化分配結果與縱向力估測結果，可以發現皆與實際值相符，並觀察出車輛以左側輪產生的縱向力與右側輪產生的縱向力反向來提供橫擺運動所需的橫擺力矩，右前輪因為前輪無驅動力，僅能以剎車產生反向的縱向力，故在此維持縱向力為零。圖 5.4 為前輪側向力最佳化分配的結果，右側輪胎分配到比較多的側向力，是因為轉向時車體重量轉移，使右側輪胎正向力較大，所以輪胎與路面間可以分配較多側向力以維持車輛側向動態運動。圖 5.7 為車輛於地表座標上所行駛的質心參考路徑與車輛控制結果。而由於輪胎側向力與側滑角之間的非線性關係會受到輪胎的正向力的影響，如圖 5.8，故影響下層輪胎側滑角控制器所假設的 Dugoff's 輪胎模型和實際輪胎模型之間的差異，造成在相同輪胎側滑角下輪胎實際產生的側向力與所需側向力會有誤差，我們稱此現象為模型不準確因素(model uncertainty)。

模擬一：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 4 度的 J-turn 命令並於 1 秒後轉達 4 度，且 V_x 維持等速。

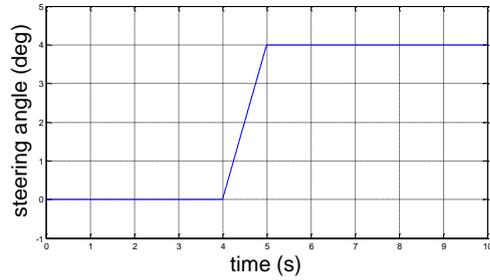


圖 5.2 模擬一之駕駛者轉向命令

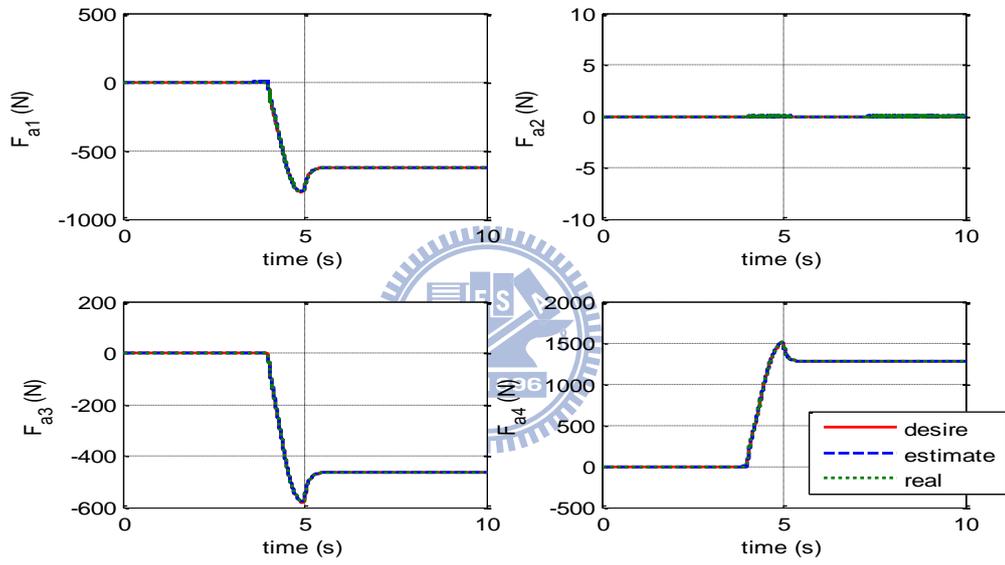


圖 5.3 模擬一之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

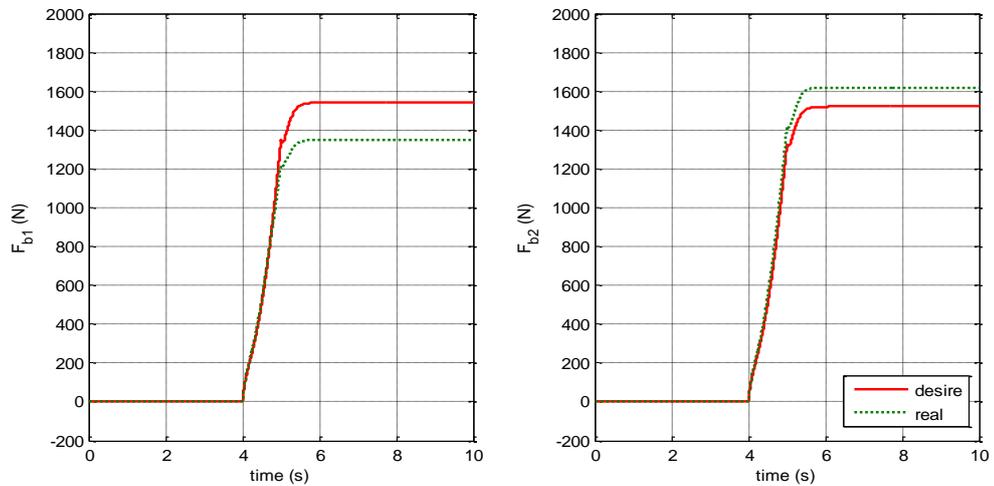


圖 5.4 模擬一之前輪側向力最佳化分配與實際結果

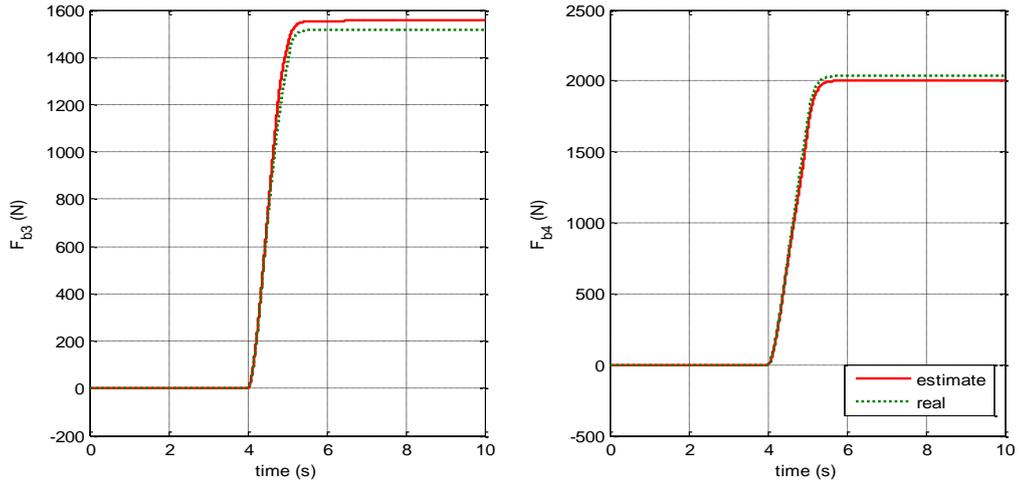


圖 5.5 模擬一之後輪側向力估測與實際結果

圖 5.5 為後輪側向力估測與實際結果，可以發現估測值與實際值誤差皆在 3% 以下，此結果驗證我們在估測後輪側向力時所做的假設(式 4.61~4.62)，表示此假設有相當程度的貼近實際情況。

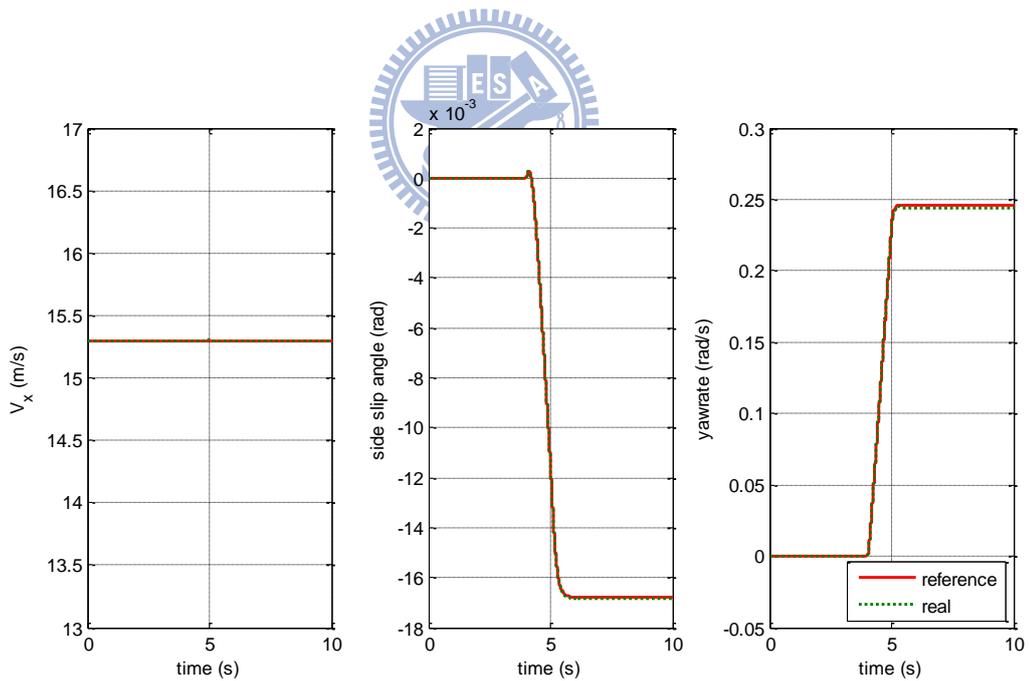


圖 5.6 模擬一之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

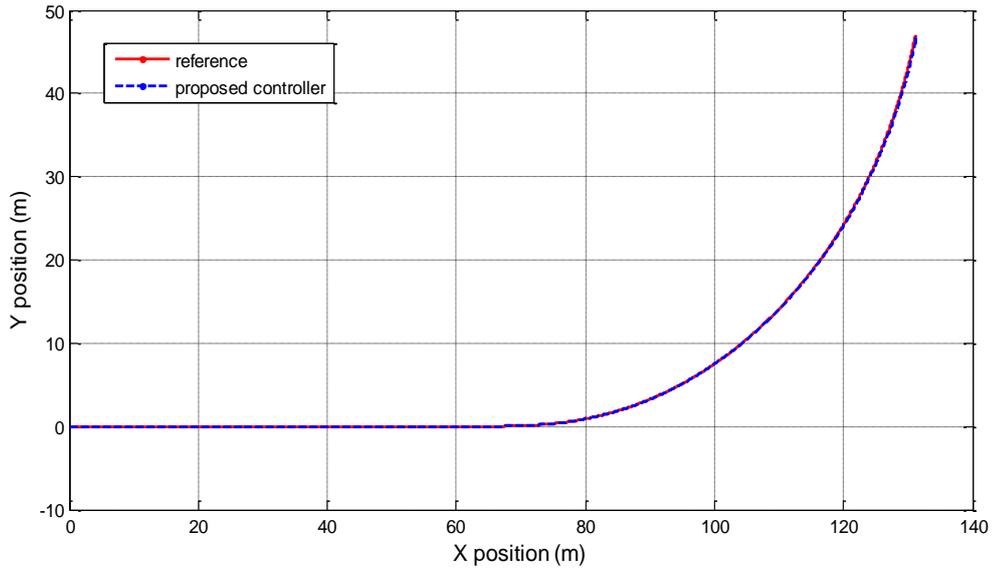


圖 5.7 模擬一之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

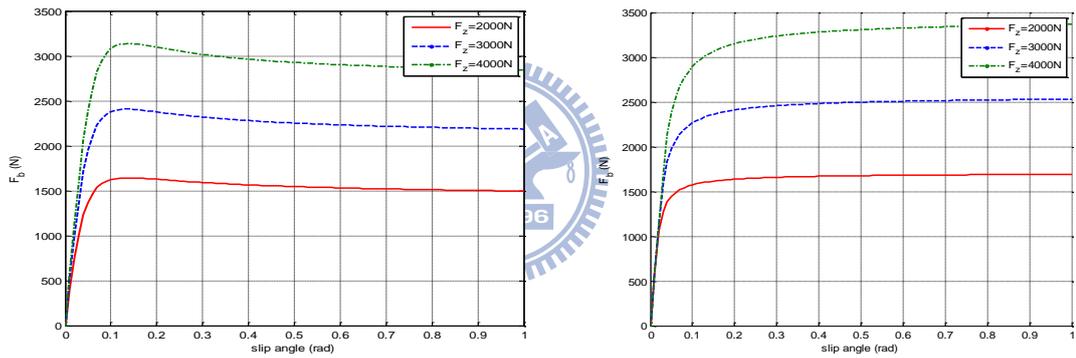


圖 5.8 側向摩擦力與正向力關係圖($\mu = 0.85$)：Magic formula 輪胎模型(左)、Dugoff's 輪胎模型(右)

在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法以及最佳化輪胎轉向角控制器中，最佳化問題都有所屬的限制條件，接下來的模擬圖將驗證每個限制條件是否達成其要求。圖 5.9 為最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制(如(4.44)式)，由上而下分別為左前輪、右前輪、左後輪與右後輪，觀察圖形在任何時刻皆小於零滿足限制條件。值得注意的是原本式子中僅針對所分配的摩擦力給予的限制，但實際上反應在車輛身上的輪胎縱向力與側向力會和分配力有誤差(例如模型不準確等因素)，所以實際輪胎運動時的摩擦力圓限制仍無法確切保證。

圖 5.10(左)表示最佳化力分配的兩個前輪側向力經過 inverse Dugoff 輪胎模型所產

生的期望轉向角與經過下層最佳化輪胎轉向角控制後的實際車輛前輪轉向角比較圖；圖 5. 10(右)表示車輛前輪轉向角的阿克曼角幾何限制，根據(3.7)式並代入實際車輛參數可以得到如下：

$$\cot \delta_2 - \cot \delta_1 = \frac{t_f}{l_f + l_r} = \frac{1.45}{1.05 + 1.4} = 0.5918$$

表示此限制在實際控制車輛中有達成。

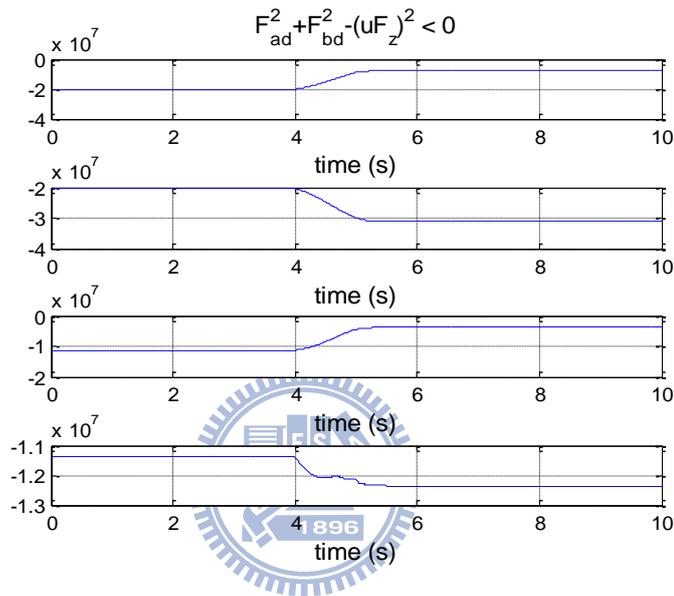


圖 5.9 模擬一之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制

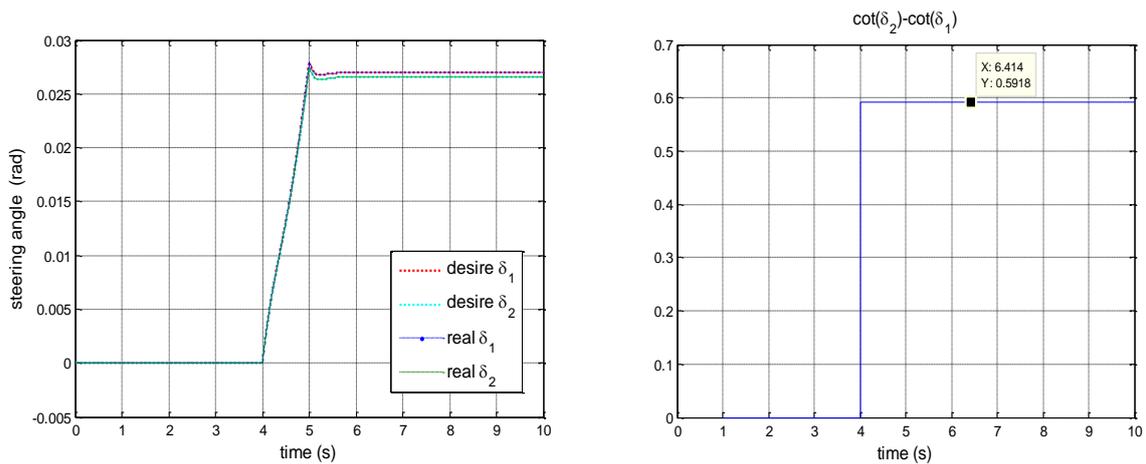


圖 5.10 模擬一之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右)

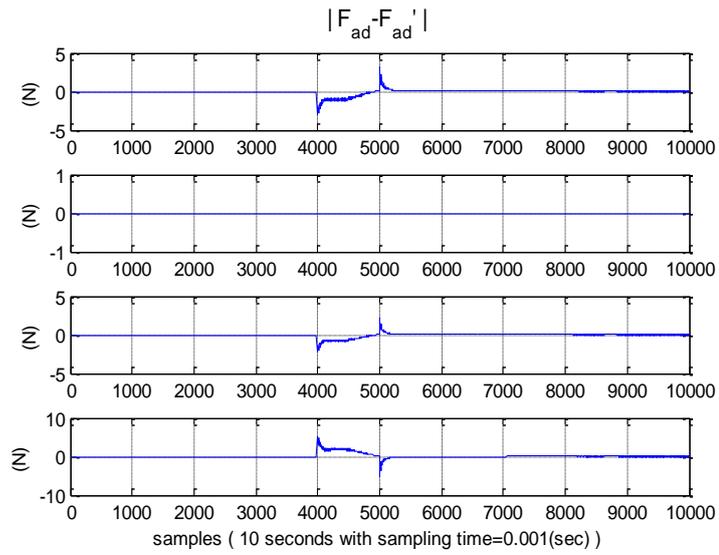


圖 5.11 模擬一之最佳化力分配中縱向力分配限制

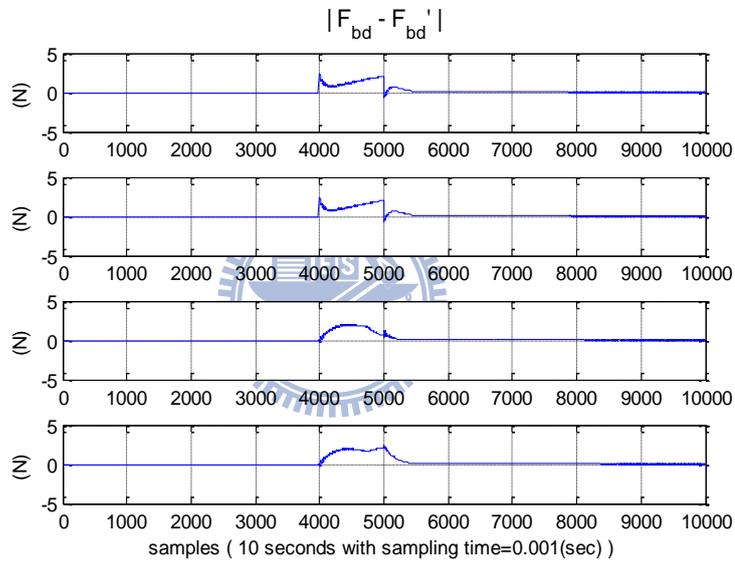


圖 5.12 模擬一之最佳化力分配中側向力分配限制

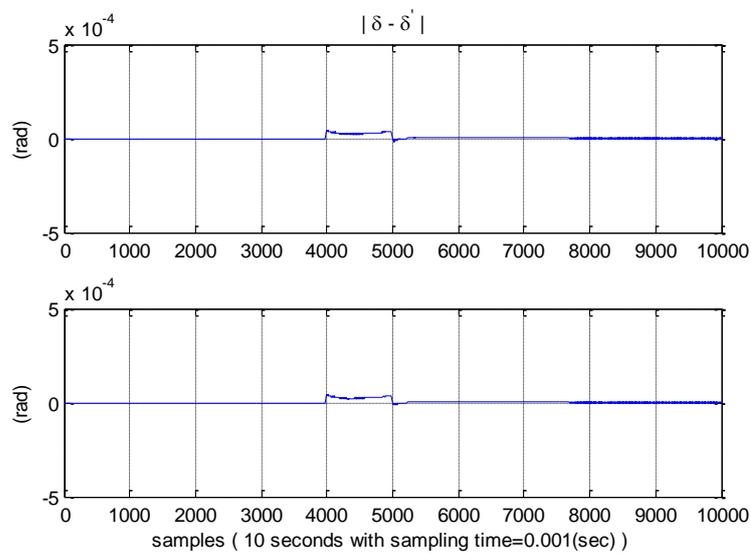


圖 5.13 模擬一之下層最佳化輪胎轉向角分配限制

圖 5.11 與圖 5.12 表示在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配中的限制條件：兩取樣時間所分配出的縱向力與側向力變化量必須要小於某一定值。圖 5.13 則為下層最佳化輪胎轉向角控制中限制條件：兩取樣時間所產生的實際車輛前輪轉向角變化量也必須小於某一定值。

模擬二中試著輸入更大的轉向命令，藉此來觀察車輛的動態響應。圖 5.14 為駕駛者轉向命令，以一秒的時間由 0 度轉到 10 度模擬出緊急情況。圖 5.15 為縱向力的最佳化分配、估側以及實際結果比較、圖 5.16 為前輪側向力最佳化分配與實際結果。可以明顯觀察出與模擬一不同的是這些圖都有峰值(peak)現象，原因在於產生峰值的此一時刻線性參考模型橫擺角速度的響應超過橫擺角速度最大之物理限制：(4.5)式，當控制器將橫擺角速度參考值限制在其最大值(模擬中將最大值限制於 $\pm 0.4183 \text{ rad/s}$)時，會造成上層控制器所計算出的控制輸入 M (橫擺力矩總合)劇烈下降如圖 5.20，使最佳化力分配結果急遽變化。圖 5.17 表示後輪側向力估測與實際結果，在前面 4.4 小節分析當中，有引用到此近似： $\hat{F}_{b3} + \hat{F}_{b4} \cong F_{b3}' + F_{b4}'$ ，也就是後輪側向力和估測值近似前一取樣時間後輪側向力和實際值。為驗證此近似觀察模擬一的圖 5.5 可以發現確實十分逼近，但模擬二卻有所誤差，原因在於估測後輪側向力演算法中，當面對前輪轉向角大時，我們為了避免演算法求不出解，忽略掉阿克曼角幾何限制，改使用前輪轉向角相等進行運算求解。

模擬結果一樣藉由左右兩側輪胎產生的縱向力反向來提供相當的橫擺力矩，而兩前輪都有符合(4.45)式，只有煞車產生的負向驅動扭力；側向力方面，可以發現各個輪胎分配的側向力皆比模擬一 4 度轉向輸入來得大以維持較大車輛側向加速度運動，使車輛到達穩態後側向加速度來到 6.4 m/sec^2 。圖 5.18 與圖 5.19 則可清楚看出在此模擬緊急情況下控制車輛成功跟隨參考值與參考行駛路徑。

模擬二：車輛以初速 $V_x = 15.3 \text{ m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 10 度的 J-turn 命令並於 1 秒後轉達 10 度，且 V_x 維持等速。

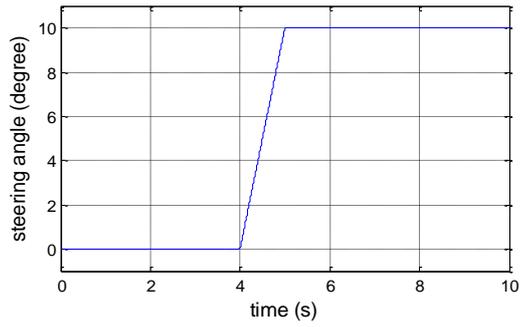


圖 5.14 模擬二之駕駛者轉向命令

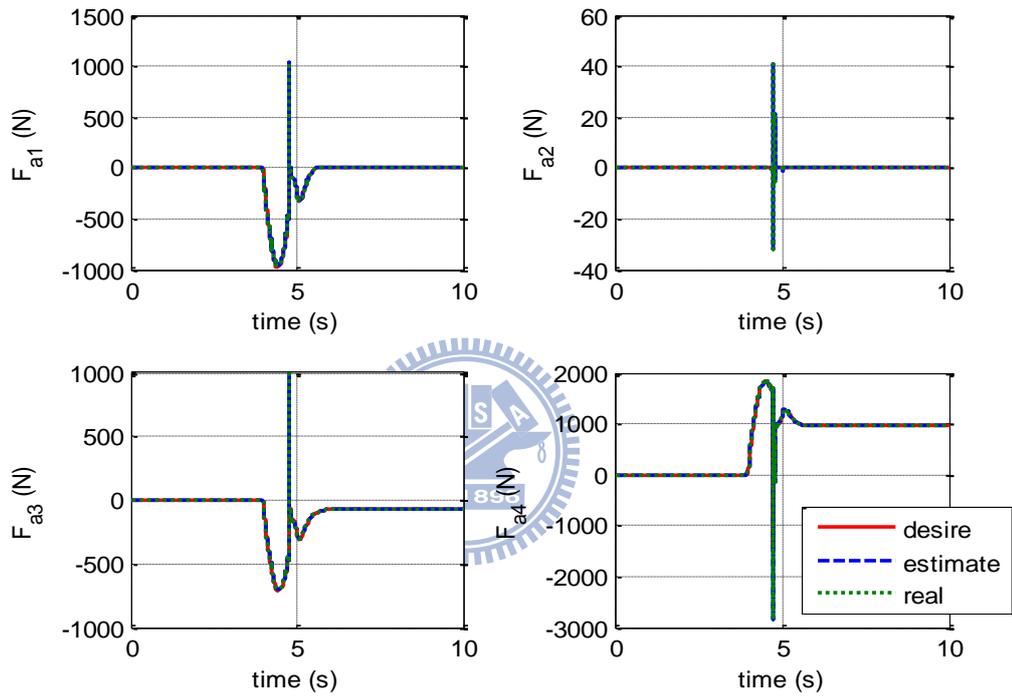


圖 5.15 模擬二之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

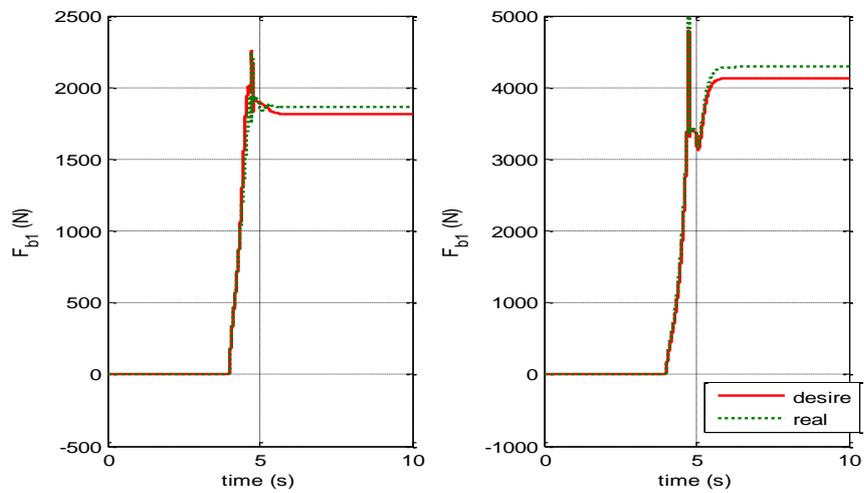


圖 5.16 模擬二之前輪側向力最佳化分配與實際結果

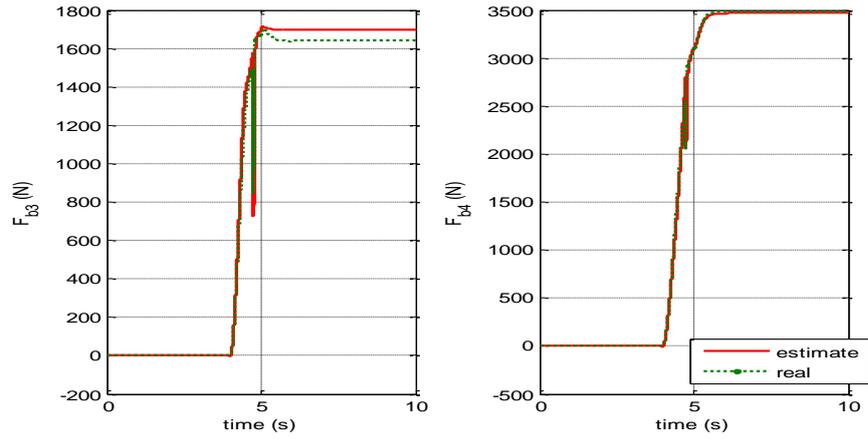


圖 5.17 模擬二之後輪側向力估測與實際結果

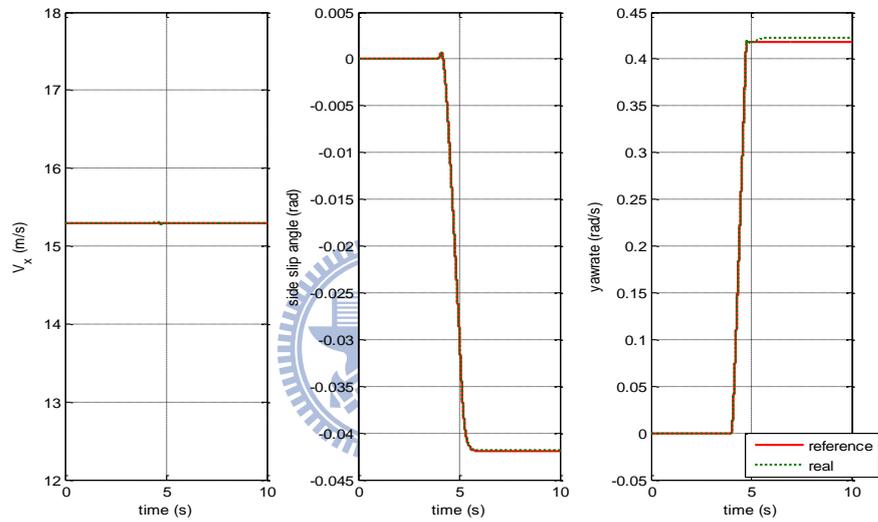


圖 5.18 模擬二之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

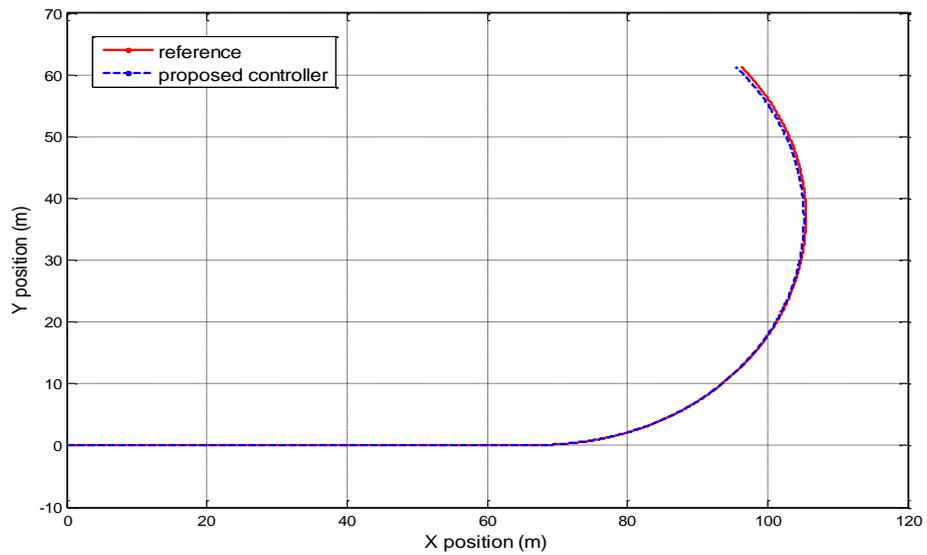


圖 5.19 模擬二之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

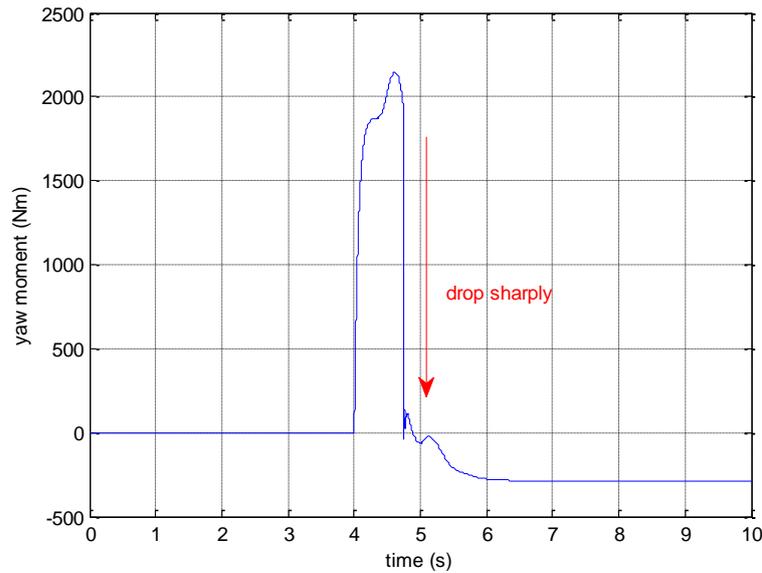


圖 5.20 模擬二之上層控制器所計算控制輸入 M (橫擺力矩)總和

一樣為了瞭解控制器內各個限制條件是否符合，我們以模擬圖一一檢視，圖 5.21 表示最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制，在最佳化力分配下的輪胎縱向力與側向力皆讓輪胎保持在摩擦力圓內尚未飽和，但因車輛向左緊急轉彎使車身質心質量大量向右側偏移導致左側輪能提供的最大摩擦力下降，由圖明顯看出左側輪胎皆已接近飽和狀態。圖 5.22 表示兩前輪實際轉向角並滿足阿克曼角幾何限制，觀察發現雖然原本的期望轉向角就已經相當程度貼近實際輪胎轉向角(左圖)，但反應在阿克曼角幾何限制上(右圖)卻有不小的差距，原因在於(4.46)式中以一階泰勒展開式來近似阿克曼角幾何限制是有一定誤差的，這也是下層最佳化輪胎轉向角控制器存在的必要性，以確保實際輪胎前輪轉向角滿足此阿克曼角幾何限制。圖 5.23、圖 5.24 與圖 5.25 則分別為最佳化力分配中縱向力、側向力分配限制和最佳化輪胎轉向角控制中轉向角分配限制，並在峰值產生的時刻條件放寬以確保滿足限制，有了這些限制的滿足才可以分析出上層控制器的誤差範圍 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} (如 4.4 小節所述)，進而根據其誤差範圍設計使上層控制器中三個順滑平面得以收斂。

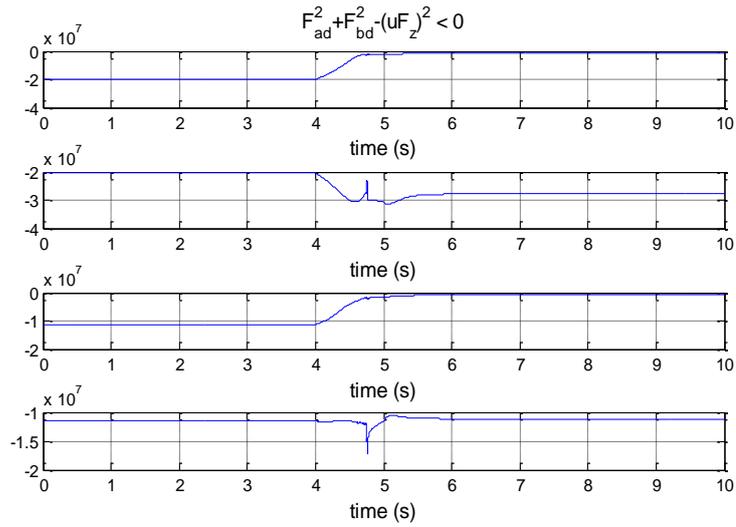


圖 5.21 模擬二之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制

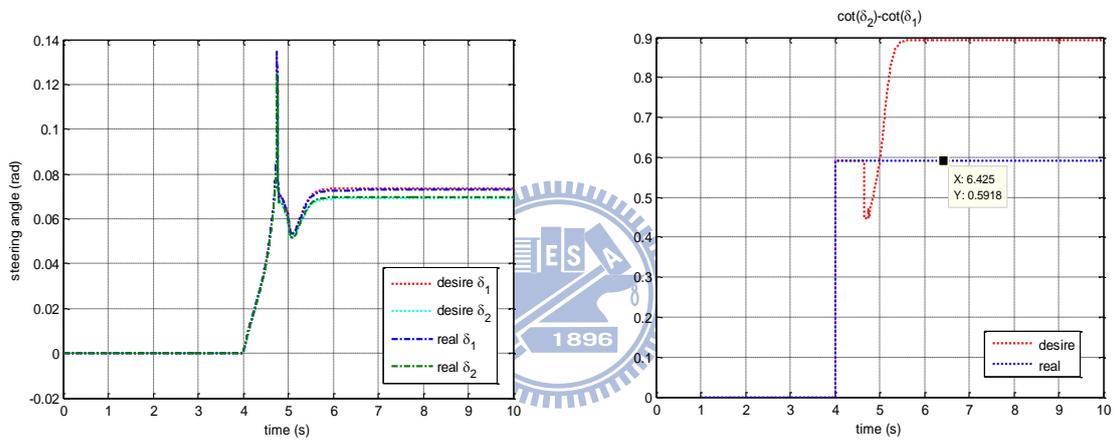


圖 5.22 模擬二之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、期望與實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右)

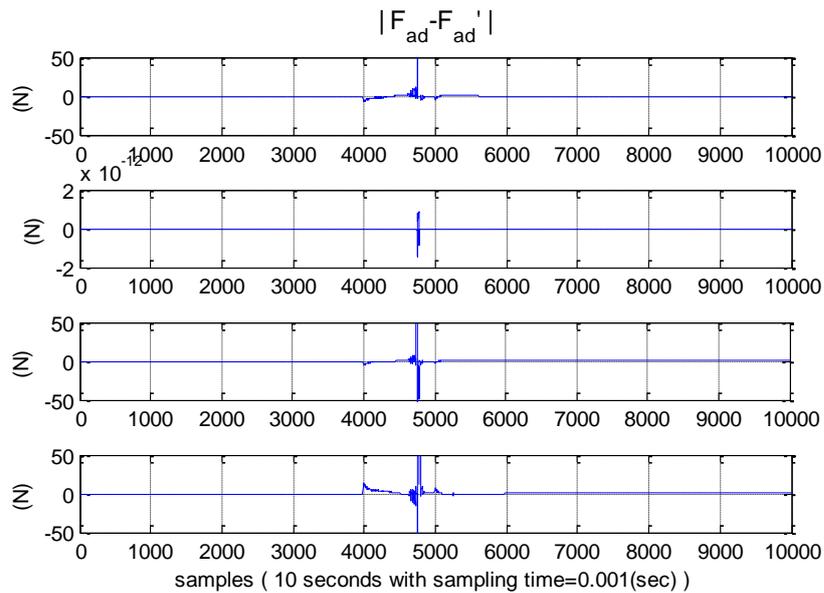


圖 5.23 模擬二之最佳化力分配中縱向力分配限制

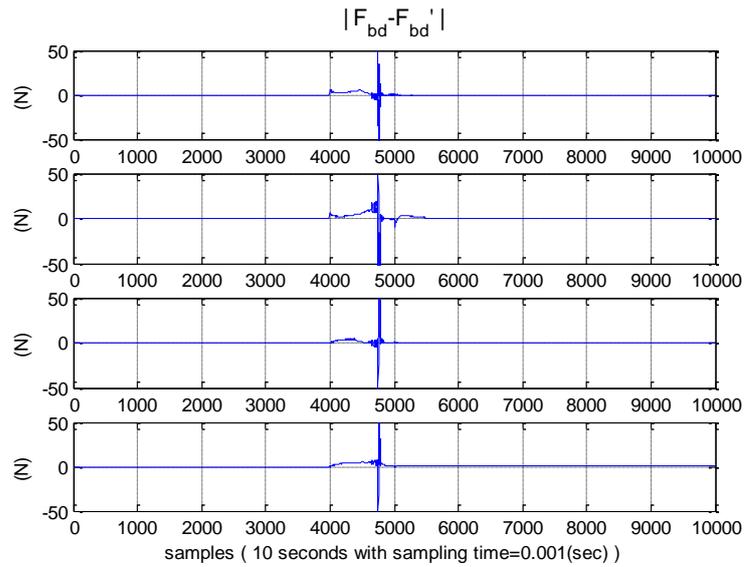


圖 5.24 模擬二之最佳化力分配中側向力分配限制

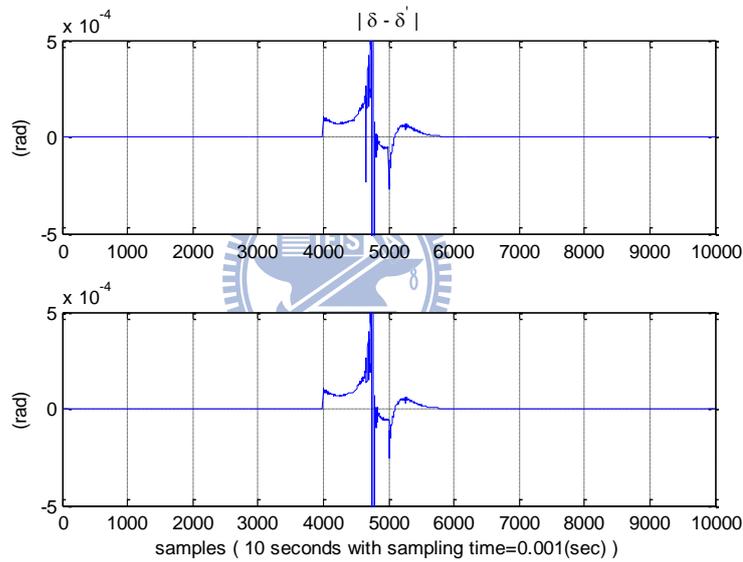


圖 5.25 模擬二之下層最佳化輪胎轉向角分配限制

5.2 Single-lane change

變換車道是車輛行駛最常遇到的狀況之一，本小節將在變換車道模擬部分模擬變換一個車道的駕駛情況。從模擬一到模擬三，可以發現所設計的控制器在輪胎縱向力方面控制相當精確(圖 5.27)，不管是估測縱向力以及實際上控制產生的縱向力都與最佳化分配值近似，原因在於我們設計時利用估側縱向力回授法來作控制，閉迴路的設計加上估

側法相當準確使下層控制器對縱向力控制表現相當優異；反觀側向力部分，少了側向力估測結果的回授讓下層控制器對側向力的控制屬於開迴路控制，加上模型不準確因素，造就了如圖 5.28 模擬結果，實際輪胎側向力與最佳化分配側向力存在部份誤差，而這些誤差都包含在 4.4 小節分析的上層控制器之控制輸入誤差 ΔX_{\max} 、 ΔY_{\max} 、 ΔM_{\max} 三值中，最後由上層控制器控制補償。除了從圖 5.30、圖 5.31 可看出控制器對車輛控制使車輛動態跟隨給定的參考值外，其他像控制器本身的一些限制條件也都和模擬一以及模擬二一樣符合(圖 5.32~36)。

模擬三：車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者進行車道變換，且 V_x 維持等速，於 6 秒時完成車道轉換。

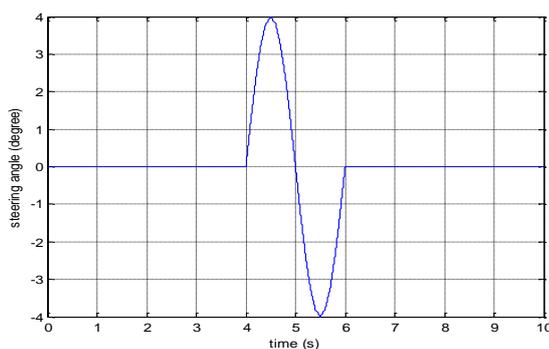


圖 5.26 模擬三之駕駛者轉向命令

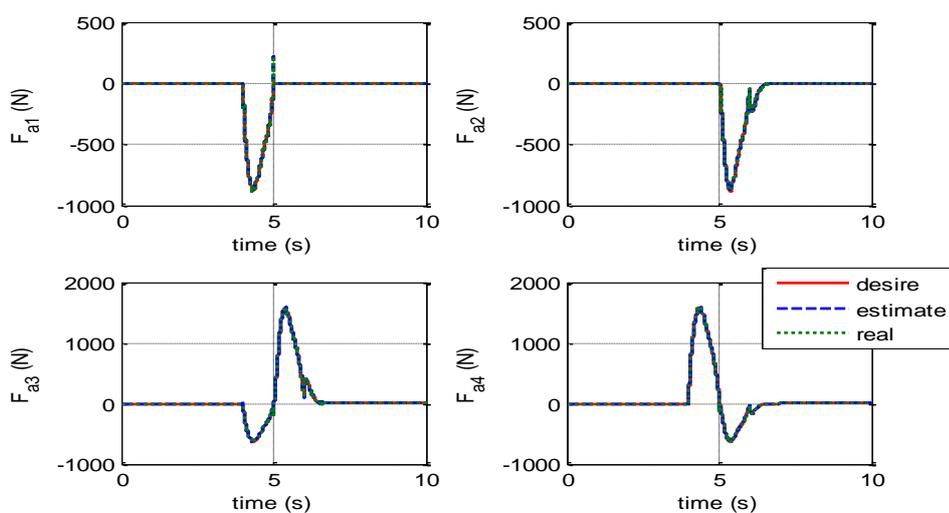


圖 5.27 模擬三之縱向力最佳化分配、估測與實際結果

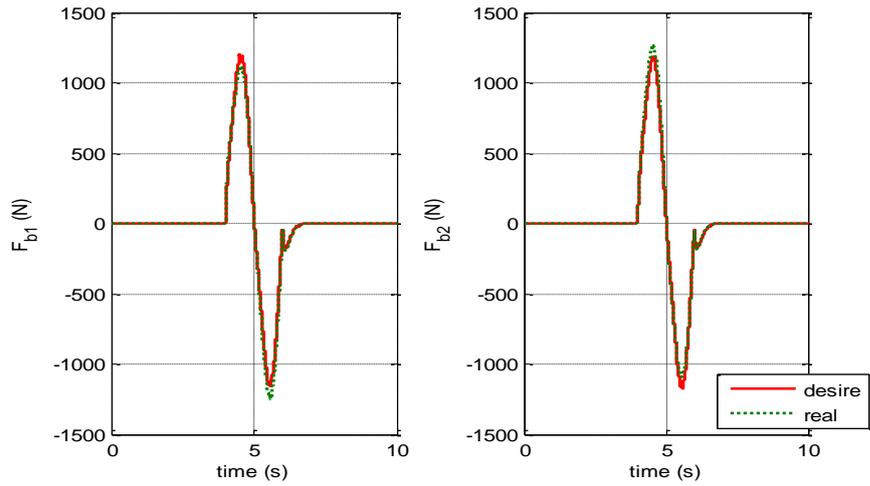


圖 5.28 模擬三之前輪側向力最佳化分配與實際結果

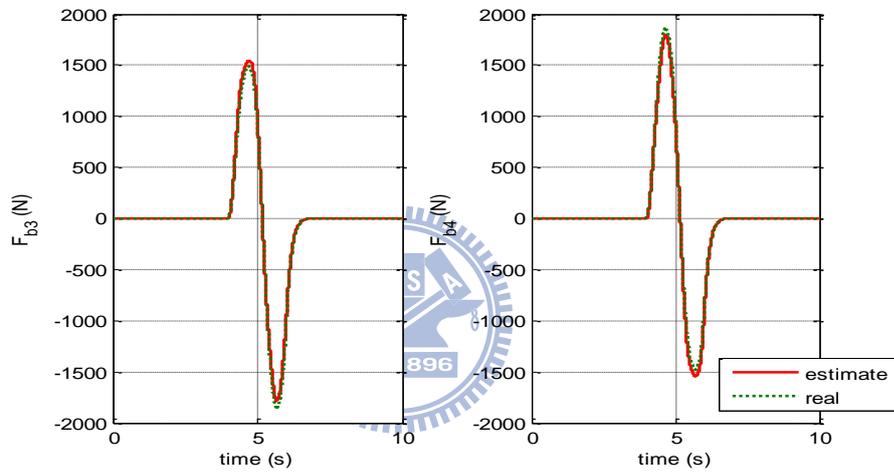


圖 5.29 模擬三之後輪側向力估測與實際結果

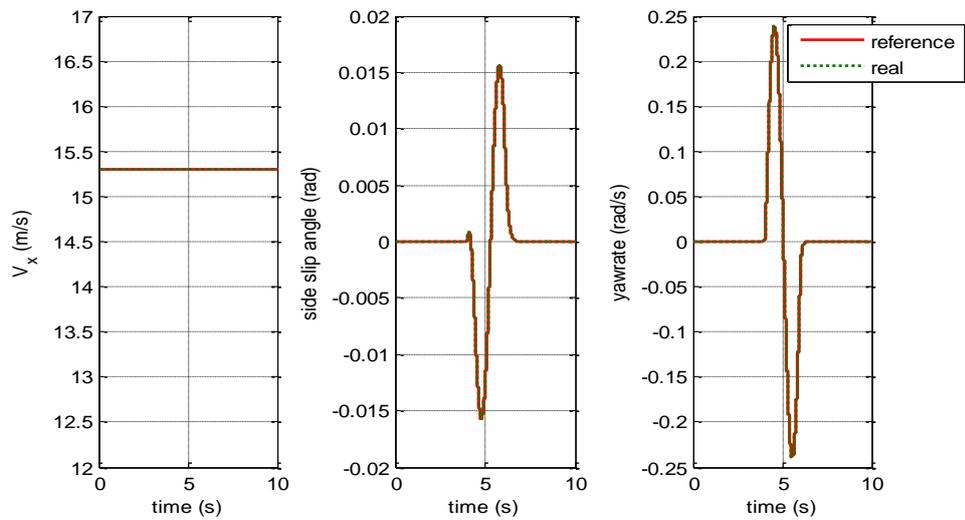


圖 5.30 模擬三之車速(左)、質心側滑角(中)、橫擺角速度(右)參考值與車輛控制結果

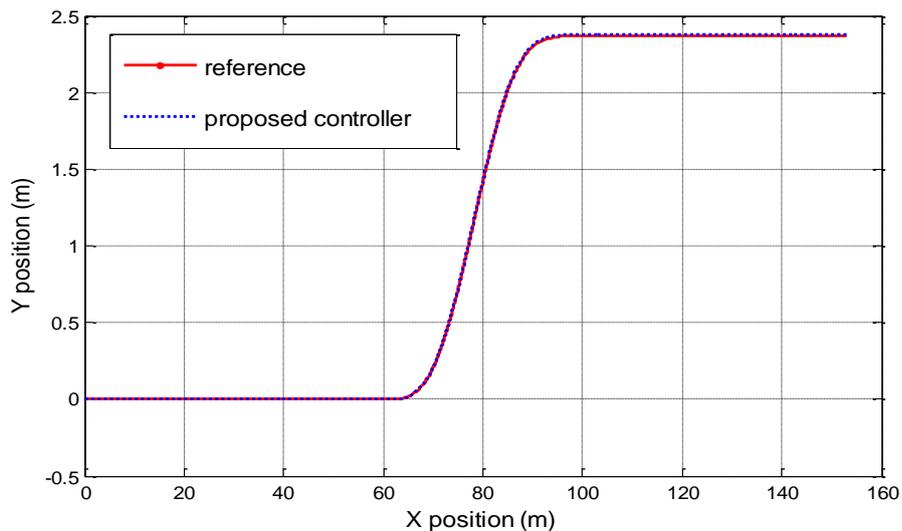


圖 5.31 模擬三之車輛於地表座標上所行駛的參考路徑與車輛控制結果

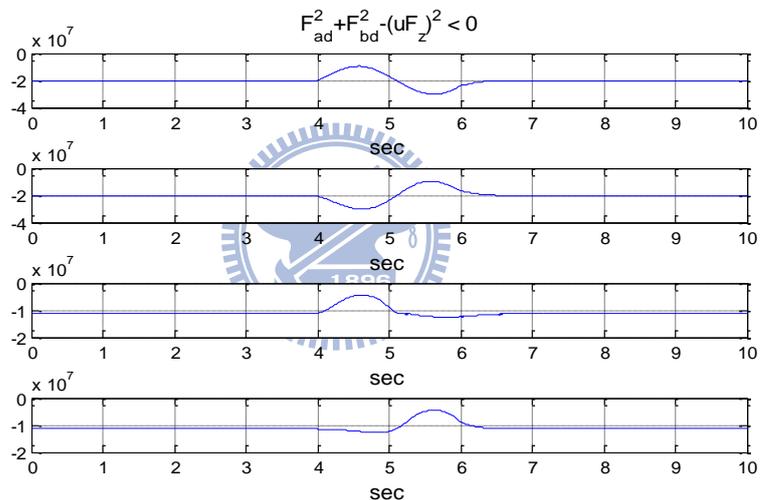


圖 5.32 模擬三之最佳化力分配之輪胎摩擦力圓限制

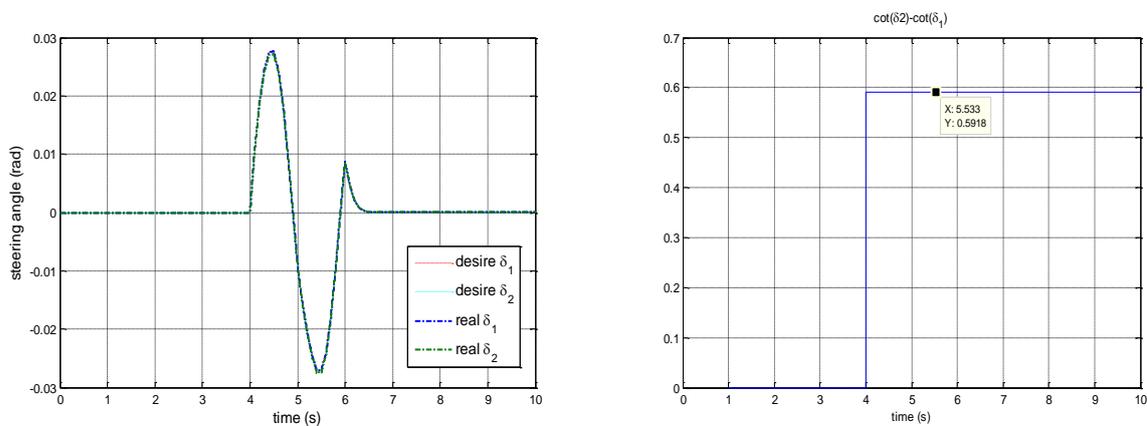


圖 5.33 模擬三之最佳化力分配前輪側向力通過 inverse Dugoff 函數的轉向角與經過下層最佳化轉向角控制產生實際轉向角(左)、實際輪胎轉向角之阿克曼角限制(右)

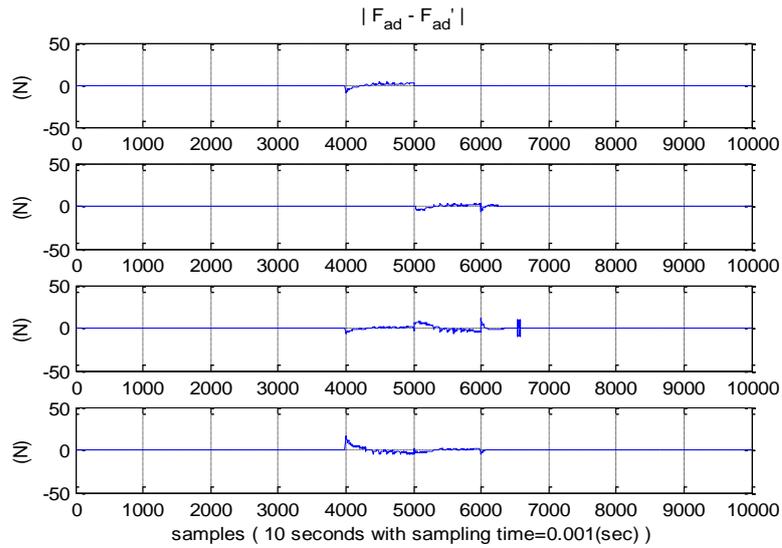


圖 5.34 模擬三之最佳化力分配中縱向力分配限制

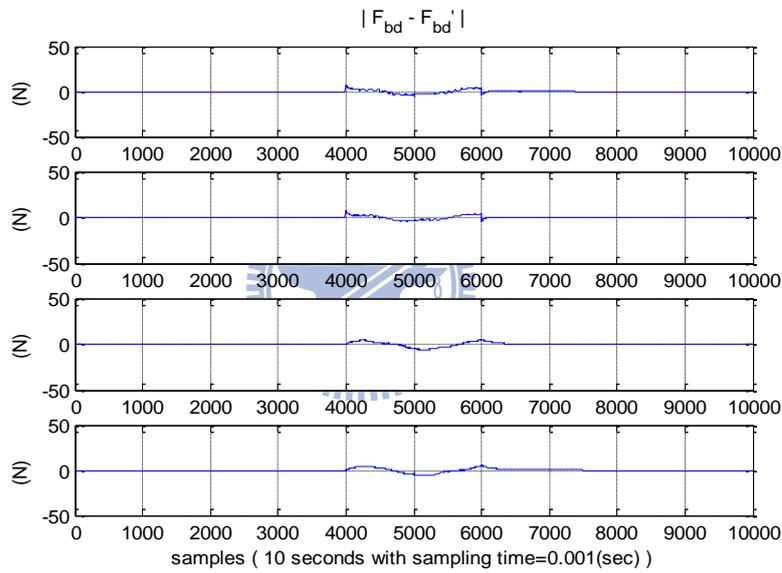


圖 5.35 模擬三之最佳化力分配中側向力分配限制

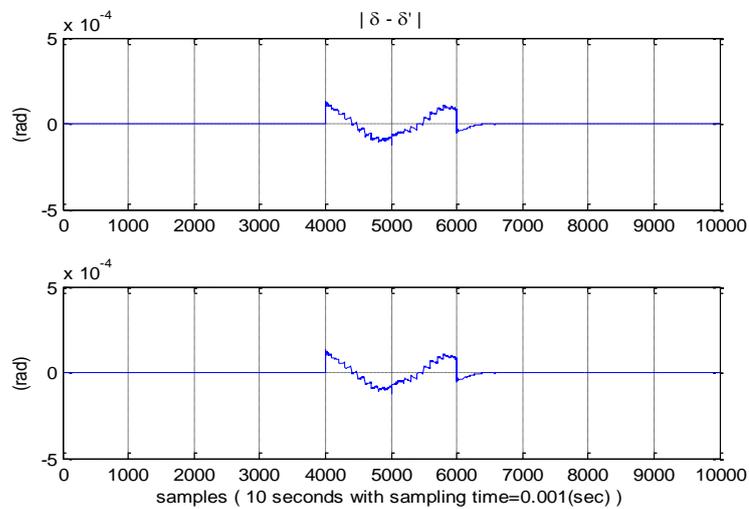


圖 5.36 模擬三之下層最佳化輪胎轉向角分配限制

5.3 相關控制器控制結果比較

相關控制器控制結果比較部分，基於所考慮的車輛模型為前輪轉向、後輪驅動，將與 Mirzaei[9]和 Nam[22] 所各別提出來的直接橫擺力矩(DYC)控制策略作比較(簡稱分別為 M-DYC 與 N-DYC)。在 M-DYC 架構中只設計車輛橫擺力矩為控制輸入，並考慮兩種控制形式(side-slip type、yaw rate type)的權重因子如表 5.3 所示(使用於 2.13 式)；N-DYC 則進一步將前輪轉向角也設計為控制輸入，針對車輛的質心側滑角與橫擺角速度作一併控制，此方法也與本研究較為相似。除了以上控制器，也加入當車輛無任何控制器狀況下所反應出的運動動態作比較。在無控制器下車輛前輪轉向角為駕駛者轉向命令輸入，而車輛輪胎扭矩輸入為定值。

模擬四為小角度 4 度轉向輸入，圖 5.38 表示控制車輛橫擺角速度比較圖，可以看出本研究控制器與 N-DYC 控制器都表現相當好，而 M-DYC(yawrate type)雖也是以控制車輛橫擺角速度為目的但因車輛質心側滑角已偏差太大影響其車輛側向運動使控制效益不彰。圖 5.39 為控制車輛質心側滑角比較圖，同樣在本研究控制器與 N-DYC 控制器表現較好，不過可以看到的是 N-DYC 控制器在暫態響應上並沒有本研究控制器來的快速精準；M-DYC(side-slip type)則在穩態響應下誤差越來越大，一樣因其車輛側向運動(橫擺角速度)並無完全控制好。圖 5.40 表示控制車輛縱向速度比較圖，在這部分只有本研究控制器有考慮設計到，故可清楚看出唯本研究控制器使車輛縱向速度維持參考值也就是定速的情況下前進。

Weighting factors	w_r	w_b	w_u
Side-slip control type	0	10^3	10^{-7}
Yaw rate control type	1	0	10^{-9}

表 5.3 兩種 DYC 控制型式之權重因子值[9]

模擬四：

同模擬一，車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 4 度的 J-turn 命令。

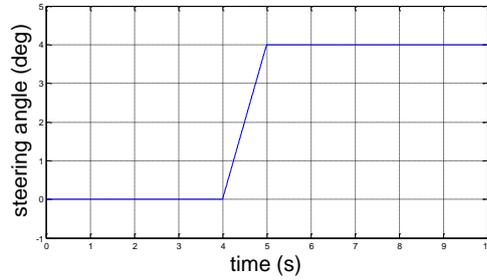


圖 5.37 模擬四之駕駛者轉向命令

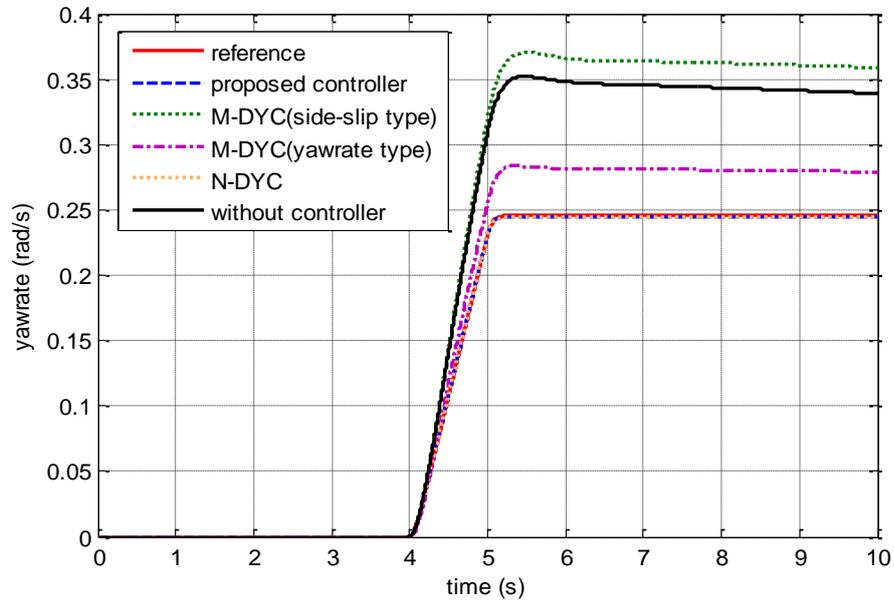


圖 5.38 模擬四之控制車輛橫擺角速度比較圖

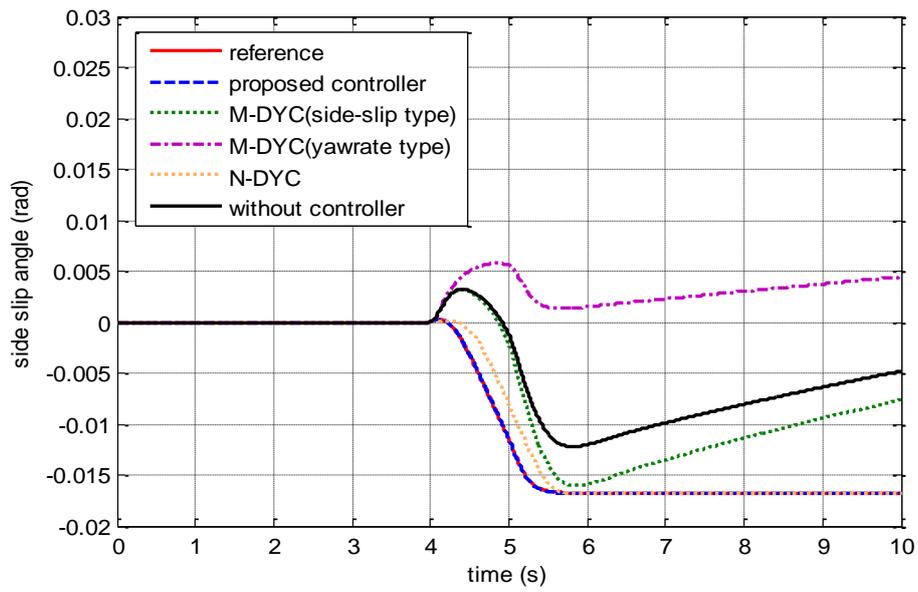


圖 5.39 模擬四之控制車輛質心側滑角比較圖

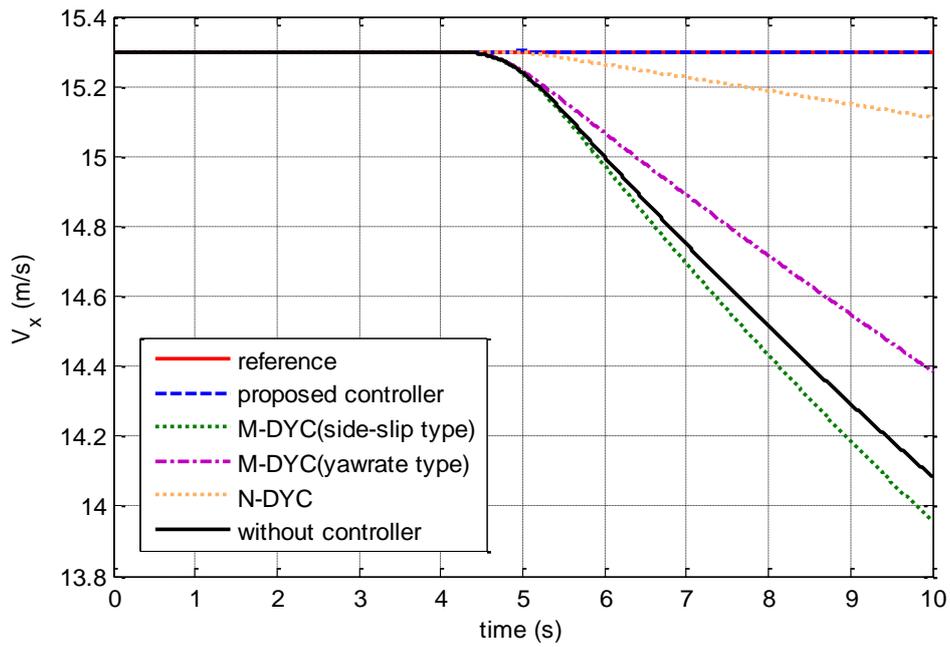


圖 5.40 模擬四之控制車輛縱向速度比較圖

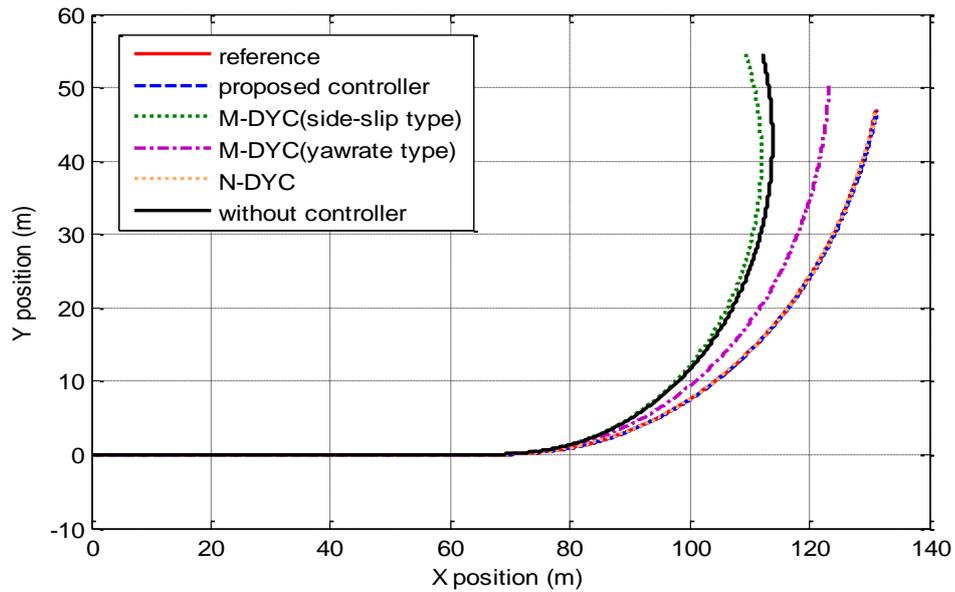


圖 5.41 模擬四之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

圖 5.41 為控制車輛於地表座標上所行駛路徑質心軌跡比較圖，而車輛的質心軌跡是由車輛橫擺角速度、質心側滑角以及縱向速度所影響構成的。總結在車輛小角度轉向輸入上，此模擬表現出本研究控制器在車輛三個方向的動態(縱向、側向與橫擺)都控制精準，使控制車輛沿著給定的參考軌跡行駛。

在模擬五中我們試著以更大轉向輸入(10度)來觀察並比較控制器對車輛動態控制狀況。在轉向角 10 度的轉向命令下，線性參考模型橫擺角速度的響應會超過橫擺角速度最大之物理限制(如 4.5 式)同模擬二所提，故橫擺角速度參考值會限制在其最大值。圖 5.43 表示控制車輛橫擺角速度比較，可觀察出 M-DYC(side-slip type) 控制結果不甚理想。而圖 5.44 為控制車輛質心側滑角比較，除了發現 M-DYC(yawrate type)控制不佳外，M-DYC(side-slip type)仍處在暫態響應尚未進入穩態響應。圖 5.46 則為控制車輛於地表座標上質心軌跡比較圖，本研究控制器在橫擺角速度最大限制下，仍能夠使車輛質心軌跡跟隨參考路徑。

模擬五：

同模擬二，車輛以初速 $V_x = 15.3\text{m/s}$ 直線前進，4 秒時駕駛者下達進行車輪轉向角為 10 度的 J-turn 命令。

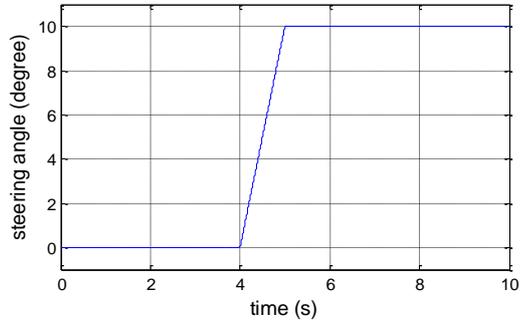


圖 5.42 模擬五之駕駛者轉向命令

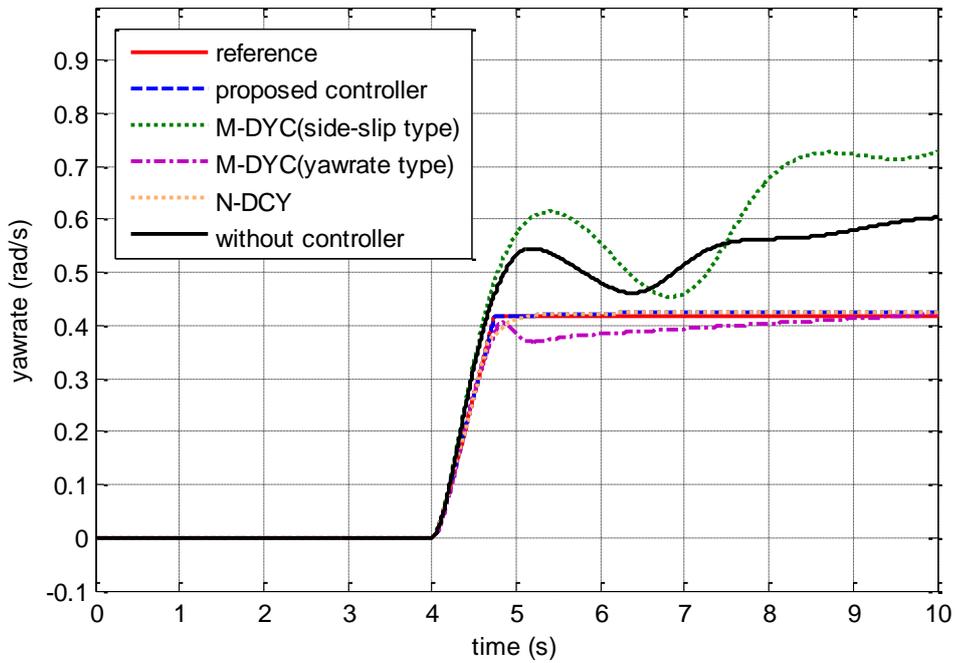


圖 5.43 模擬五之控制車輛橫擺角速度比較圖

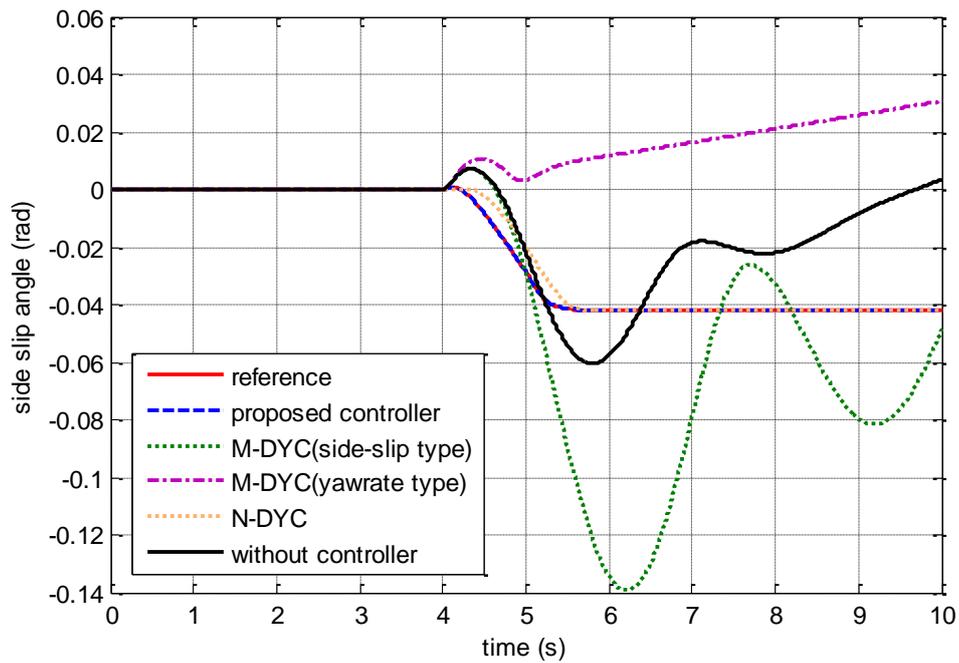


圖 5.44 模擬五之控制車輛質心側滑角比較圖

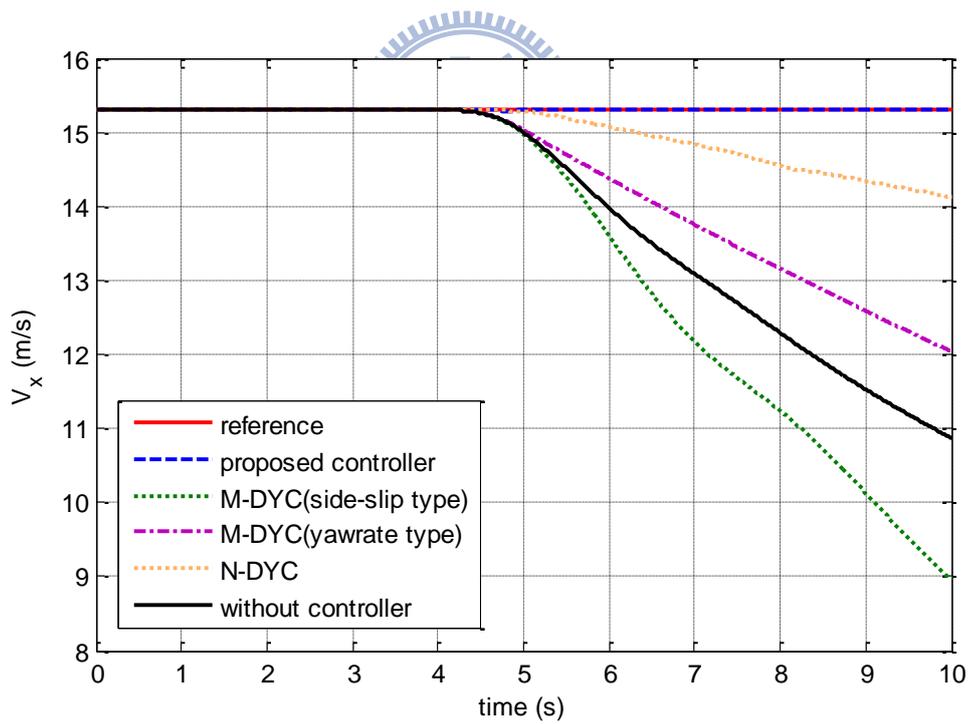


圖 5.45 模擬五之控制車輛縱向速度比較圖

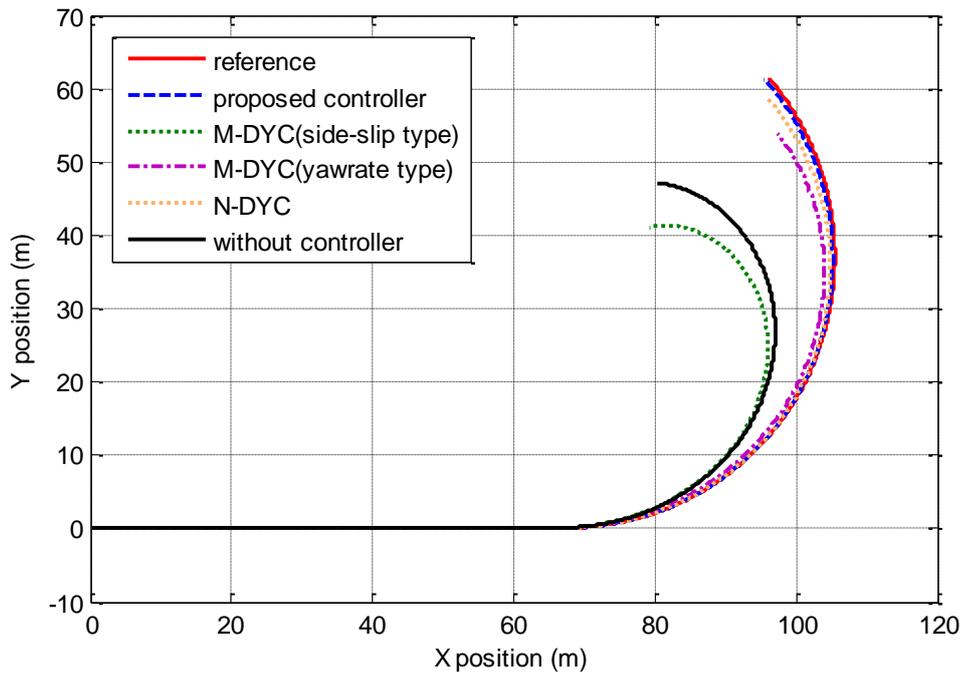


圖 5.46 模擬五之控制車輛於地表座標上所行駛路徑比較圖

總結控制器模擬比較分析部分，N-DYC 控制器與本研究控制器都有針對車輛側向動態(質心側滑角與橫擺角速度)作控制，並在模擬上反應其控制成效。本研究控制器的優勢在於車輛縱向動態方面仍有設計並作控制，並在車輛動態控制中利用最佳化輪胎與路面間摩擦力分配使輪胎遠離摩擦力圓飽和區，且下層控制器考慮到輪胎不準確性作設計，整體模擬不僅在暫態響應或穩態響應都表現相當優異。

第六章、結論與未來展望

6.1 結論

本研究針對一般傳統車輛(前輪轉向、後輪驅動)設計上、下層控制器控制架構，控制車輛縱向、側向與橫擺運動。上層控制器計算使車輛動態跟隨給定的參考軌跡所需的縱向合力、側向合力與橫擺力矩總和，透過後輪側向力即時估測與最佳化輪胎與路面間摩擦力分配，其中考慮到車輛模型的機構限制(如前輪分配縱向力因無驅動能力不能大於零、前輪轉向角具阿克曼角幾何限制)與輪胎物理限制(摩擦力圓限制)等，適當地將上層控制器所需之力量分配給每個輪胎，之後再由下層輪胎縱向摩擦力回授控制與最佳化輪胎轉向角控制器，考慮輪胎的非線性特性，藉由控制輪胎力矩與轉向角產生所需的輪胎摩擦力。除此之外在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配演算法中得到的是一組解析解，使控制器得以應用於即時控制系統(real-time control system)。

未來，隨著前置前驅(前輪轉向、前輪驅動)車輛漸漸廣泛，我們僅需要在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配這個區塊把限制條件(由車輛模型引起的機構限制)作修改調整，便得以將所設計的控制器應用於此類車輛。

在第五章模擬了常見的駕駛情況，包括轉向與車道變換，模擬結果可以看出控制器在不同大小的轉向命令與側向加速度下，對車輛的縱向、側向與橫擺運動都有不錯的控制，上層控制器計算所需之力量也藉由最佳化輪胎與路面間摩擦力分配適當地分配至每個輪胎；下層縱向力控制器控制輪胎扭矩使輪胎與路面間產生所需之縱向力，而雖然輪胎側滑角在同一輪胎側滑角下輪胎實際產生的側向力和所需之側向力之間有誤差存在，藉由上層控制器穩健性設計，仍使車輛的動態可跟隨給定的參考軌跡。模擬中也有和直接橫擺力矩控制做比較，由比較結果可以看出在車輛側向加速度大時，本研究設計的控制器在縱向、側向與橫擺運動皆有比較好的控制結果。

6.2 未來工作

未來工作分成以下幾點陳述：

一、成本函數的選擇，在本研究是針對輪胎摩擦力圓的限制來設計，之後也可以朝節能等方向的形式來設計表現。

二、摩擦力係數部分目前只有當已知常數運用，但對於實際車輛行駛於路面時，輪胎與路面間的摩擦力係數是會隨著路面狀態而有所改變的。未來可以著眼於摩擦力係數的估測部分，在最佳化輪胎與路面間摩擦力分配若可以利用摩擦力係數估測結果的資訊，將可以做更有效率的分配。

三、下層控制器中，縱向力控制部分有使用到縱向力估測回授值來設計控制器，但對於側向力控制部分，因無理想的估測結果並以開迴路的形式設計出最佳化轉向角控制器，未來若能準確的估測出輪胎側向力，即可利用到估測結果回授資訊並重新設計為閉迴路控制器。

四、在本研究中忽略了車身的側傾(Roll)與俯仰(Pitch)運動的影響，對於質心位置較高的休旅車，高速下或者大角度的轉向容易造成側翻，上層控制器可以考慮加入車身的側傾與俯仰對橫擺運動動態影響，或在順滑平面設計上加入側傾或俯仰運動的平衡點，設計控制上層輸入跟隨給定的參考值。

五、未來實驗驗證部分，初期會以建構單一個輪胎動態實驗平台(Quarter car model)與模擬軟體模擬的車輛動態整合成一個 Hardware-in-the-loop 的實驗環境，驗證下層控制器控制的結果；之後進展到實車驗證，上層控制器會需要回授車輛的縱向、側向速度和橫擺角速度，以及需要估測車輛質心側滑角，就如第四章所提到的：車輛縱向與側向速度可以利用全球定位系統(GPS)[21]來判斷質心的位置與移動速度；用陀螺儀來量測橫擺角速度；質心側滑角可借助一些估測方法估測，所以這些都是控制器在實車驗證上會需要考慮如何獲得的資訊。

參考文獻

- [1] Y. Furukawa, N. Yuhara, S. Sano, H. Takeda and Y. Matsushita, "A Review of Four-Wheel Steering Studies from the Viewpoint of Vehicle Dynamics and Control," *Vehicle System Dynamics*, 18, pp. 151-186, 1989.
- [2] J. Ackermann, "Robust Decoupling, Ideal Steering Dynamics and Yaw Stabilization of 4WS Cars," *Automatica*, vol. 30, no. 11, pp.1761-1768, 1994.
- [3] V.Nikzad. S. and M. Naraghi, "Model Reference Tracking Control of A 4WS Vehicle Using Single and Dual Steering Strategies," *SAE 2002 Transactions, Journal of Passenger Cars : Mechanical Systems*, no. 2002-01-1590, pp.1841-1851.
- [4] T. Pilutti, G. Ulsoy and D. Hrovat, "Vehicle steering intervention through differential braking," *Journal of Dynamics Systems Measurement and Control Transactions of the ASME*, vol. 120, Issue:3, pp. 314-321, Sep. 1998.
- [5] Y. Shibahata, K. Shimada and T. Tomari, "Improvement of Vehicle Maneuverability by Direct Yaw Moment Control," *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, pp. 456-481, 1993.
- [6] M. abe, "Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety: from four-wheel steering to direct yaw moment control," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, vol. 213, Part K, pp. 87-101, June 1999.
- [7] P. Raksincharoensak, M. Nagai and M. Shino, "Lane keeping control strategy with direct yaw moment control input by considering dynamics of electric vehicle," *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, pp. 192-201, 2006.
- [8] E. Esmailzadeh, A. Goodarzi, G.R. Vossoughi, "Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling," *Mechatronics*, vol. 13, pp. 659-675, 2003.
- [9] M. Mirzaei, "A new strategy for minimum usage of external yaw moment in vehicle dynamic control system," *Transportation Research Part C*, vol. 18, pp. 213-224, 2010.
- [10] E. Bakker, L. Nyborg and H.B. Pacejka, "Tyre Modeling for Use in Vehicle Dynamics

Studies,” SAE 870421., 1987.

[11] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.

[12] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, New York: Cambridge University Press, 2004.

[13] J. R. Ellis, *Vehicle dynamics*, London, United Kingdom: London Business Book Limited, 1969.

[14] O. Mokhiamar and M. Abe, “Effects of model response on model following type of combined lateral force and yaw moment control performance for active vehicle handling safety,” *JSAE*, vol. 23, pp. 473-480, Oct. 2002.

[15] U. Kiencke and L. Nielsen, *Automotive Control Systems*, 2nd ed. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, ch. 10.

[16] J. J. E. Slotine and S. S. Sastry, “Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators,” *Int. J. Control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983

[17] C. Geng, L. Mostefai and Y. Hori, “A Hybrid-like Observer of Body Slip Angle for Electric Vehicle Stability Control: Fuzzy Logic and Kalman Filter Approach,” *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference(VPPC)*, Harbin, China, Sep. 2008, pp. 1-6.

[18] O. Mokhiamar and M. Abe, “How the four wheels should share force in an optimum cooperative chassis control,” *Control Engineering Practice*, vol. 14, pp. 295-304, Mar. 2006.

[19] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, New York: Springer-Verlag, 2006.

[20] J. Ahmadi, A. Khaki-Sedigh and M. Kabganian, “Adaptive Vehicle Lateral-Plane Motion Control Using Optimal Tire Friction Forces With Saturation Limits Considerations,” *IEEE Transaction on Vehicle Technology*, vol. 58, no. 8, pp. 4098-4107, OCT. 2009.

[21] J.-O. Hahn, R. Rajamani, and L. Alexander, “GPS-Based Real-Time Identification of Tire-Road Friction Coefficient,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 3, 2002, pp.331-343.

[22] K. Nam, H. Fujimoto, and Y. Hori, “Lateral Stability Control of In-wheel-motor-driven

Electric Vehicles Based on Sideslip Angle Estimation Using Lateral Tire Force Sensors,”
IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. pp, no. 99, pp.1, 2012.

