

國立交通大學
機械工程學系
博士論文

應用在高黏性牛頓及非牛頓流體混合之
層流攪拌器性能參數分析與流場計算
Numerical Investigations of the Mixing Flows in
Laminar Type Agitators for Newtonian and
non-Newtonian Fluids

研 究 生：胡育昌
指導教授：崔燕勇 教授

中 華 民 國 一 百 年 七 月

應用在高黏性牛頓及非牛頓流體混合之層流攪拌器
性能參數分析與流場之計算

Numerical Investigations of the Mixing Flows in Laminar Type
Agitators for Newtonian and non-Newtonian Fluids

研 究 生：胡育昌

Student: Yu-Chang Hu

指導教授：崔燕勇

Advisor: Yeng-Yung Tsui

國立交通大學
機械工程學系
博士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

In

Mechanical Engineering

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 一 百 年 七 月

應用在高黏性牛頓及非牛頓流體混合之層流攪拌器 性能參數分析與流場計算

學生：胡育昌

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系博士班

摘 要

本文旨在應用計算流體力學(CFD)研究螺桿攪拌器與螺帶攪拌器內流體速度場與濃度場，以及攪拌器幾何尺寸(槽直徑、葉片螺距、葉片間隙、葉片寬度)對攪拌器性能參數(功率消耗、循環流量、混合效率、混合時間)的影響，同時也研究流體性質(牛頓流體與非牛頓流體)對攪拌器性能的影響，最後根據上述的結果得出最佳攪拌器幾何尺寸，以及攪拌器性能與尺寸關係式。



由於攪拌器攪拌的流體具有高黏性，本研究使用三維不可壓縮層流來模擬攪拌器內流場，計算網格為三維非結構性網格，計算方法為有限體積法。由於攪拌器葉片等轉速轉動使流場具有週期性的變動，因此假設流場為擬似穩態，為葉片旋轉至某一位置的瞬時狀態，並採用多重參考座標系，將葉片旋轉掃過的區域定為旋轉座標系，此區以外的區域定為靜止座標系，解完擬似穩態速度場再解非穩態濃度場以求得混合時間。牛頓流體選用的是葡萄糖漿，非牛頓流體則是使用”修正 Herschel-Bulkley” 模式來模擬三仙膠(具降伏應力的偽塑性流體)的流變學性質。

經研究後得知，當螺桿攪拌器攪拌牛頓流體葡萄糖漿時，尺寸在

$D/d=2.0$, $S/d=1.5$, $C/d=0.1$ 時有最佳攪拌效率；攪拌降伏偽塑性流體三仙膠時，螺距在 $S/d=1.0$ 時有最佳攪拌效率，但效率較攪拌牛頓流體時差。而螺帶攪拌器攪拌牛頓流體葡萄糖漿時，尺寸在 $W/d=0.25$, $S/d=0.7$, $C/d=0.06$ 時有最佳攪拌效率；攪拌降伏偽塑性流體三仙膠時，螺距在 $S/d=1.0$ 時有最佳攪拌效率，而且效率較攪拌牛頓流體時佳。最後我們並得到一個適用在較大範圍的功率數(N_p^*)與幾何參數(W/d , S/d , C/d)的關係式。



Numerical Investigations of the Flows in Laminar Type Agitators for Newtonian or non-Newtonian Fluids

Student: Yu-Chang Hu

Advisor: Dr. Yeng-Yung Tsui

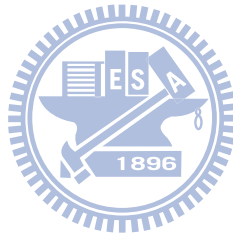
Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The purpose of this paper was to study the 3D flow field in the mixing of Newtonian or non-Newtonian fluids with high viscosity in laminar flow region for screw impellers and helical ribbon impellers, which is analyzed using a computational fluid dynamics method. The velocity field is assumed to be in a quasi-steady state. The multiple reference frames were employed to model the rotation of impellers. The momentum and continuity equations were solved using finite volume method with unstructured grids. The glucose syrup was used as Newtonian fluid. The rheology of xanthan gum solution, a pseudoplastic fluid with yield stress, was approximated using the Herschel-Bulkley model. After the flow field was calculated, the unsteady-state concentration equation was solved to determine mixing time.

The effects of impeller geometry (tank diameter, impeller pitch, impeller clearance, and impeller blade width) and fluid rheology on power consumption, circulation flow rate, mixing efficiency, and mixing time were also investigated. The optimum values of D/d (tank diameter to impeller diameter), S/d (impeller pitch to impeller diameter), C/d (impeller clearance to impeller diameter), W/d (impeller width to impeller diameter) ratios were determined on the minimum mixing time and power consumption can be expressed as functions of these ratios.

For the mixing of Newtonian fluids by screw impeller with draught tube, the optimum sizes are $D/d=2.0$, $S/d=1.5$, and $C/d=0.1$. While xanthan gum solution, a pseudoplastic fluid with yield stress, was mixed, the optimum screw impeller pitch is $S/d=1.0$. Helical ribbon impeller has optimum sizes $W/d=0.25$, $S/d=0.7$, and $C/d=0.06$ when mixing Newtonian fluids, and $S/d=1.0$ when mixing xanthan gum.



誌謝

感謝指導老師崔燕勇教授在我博士班、碩士班以及大四，這麼長一段時間的細心指導，我在交大讀書加一加總共也有十幾年的時間，有 8 成的時是待在計算流力實驗室，對交大對工五館對 307 實驗室也產生了深厚的感情，敝人資質駑鈍才會花了這麼久的時間完成學業，所幸有老師時時提點給予方向，一直在背後推著我向前，老師做研究的認真態度，對每個細節都要求的仔仔細細，相信也不是所有老師都做得到，還記得每次 meeting 老師一張圖一張圖仔細的看，論文也是一行一行的改，讓做學生的我真的是戰戰兢兢但也不得不佩服老師的耐心，相信對我往後工作上一定也影響很大，再多的感謝也抵不上老師付出的萬分之一，再次謝謝老師您的教導還有包容了。



再來就是感謝這麼多年來陪伴我的學長學弟，有你們我在實驗室跑程式的日子才不孤單，添成學長、孝平學長謝謝你們在我程式有不懂的地方指點我，傳慰孤將軍也感謝你平時的關照，認識您真是奇妙的緣分，學弟們實在太多了感謝不完，看著你們一屆屆加入實驗室又畢業離開實驗室，終於我也要離開了，感謝最後一年陪伴我的仕文、信宏、大慶、子翔、胤男、義政，祝你們早日順利畢業。

最後要感謝我的爸媽，感謝你們這麼多年的養育，沒有你們就沒有今日的我，當你們的小孩真的很幸福，今後我會好好工作孝順你們。

目 錄

摘 要	i
ABSTRACT	iii
誌 謝	v
目 錄	vi
表目錄	xi
圖目錄	xii
符號說明	xvii
一、緒論	1
1.1 簡介	1
1.1.1 攪拌	1
1.1.2 流體運動	3
1.1.2.1 總體流動	3
1.1.2.2 紊流渦流及剪切運動	4
1.1.3 混合程度	5
1.1.3.1 均勻度	5
1.1.3.2 分隔強度(偏差度)	6
1.1.3.3 分隔尺度	6
1.1.4 攪拌物質與工作流體	7
1.1.4.1 低黏度流體的混合	7
1.1.4.2 高黏度流體的混合	8
1.1.4.3 非均相液滴、氣泡、固體顆粒的混合	8
1.1.5 非牛頓流體的種類	9
1.1.5.1 非時間相關流體(time-independent fluid)	10
(1) 賓漢膠體(Bingham plastics)	10
(2) 降伏偽塑性流體(yield pseudoplastic fluid)	10
(3) 降伏膨性流體(yield dilatant fluid)	11

(4) 偽塑性流體(pseudoplastic fluid).....	11
(5) 膨性流體(dilatant fluid).....	11
1.1.5.2 時間相關流體(time-dependent fluid)	12
(1) 搖溶性流體(thixotropic fluid).....	12
(2) 抗流變流體(rheopectic fluid).....	12
1.1.5.3 黏彈性流體(viscoelastic fluid).....	13
1.1.6 攪拌器簡介.....	13
1.1.6.1 斜葉渦輪攪拌器(pitched-blade turbine).....	13
1.1.6.2 圓盤直葉渦輪攪拌器(Disc turbine).....	14
1.1.6.3 螺桿攪拌器(screw impeller).....	14
1.1.6.4 螺帶攪拌器(helical ribbon impeller).....	15
1.1.7 攪拌器的選擇.....	16
1.1.8 攪拌器的設計.....	17
1.1.8.1 循環數.....	17
1.1.8.2 功率數.....	18
1.1.8.3 混合能量數.....	19
1.1.8.4 混合時間數.....	20
1.1.8.5 循環時間數.....	20
1.2 文獻回顧.....	21
1.2.1 混合程度指標.....	21
1.2.2 量測混合時間與循環時間的實驗方法.....	23
1.2.3 不同攪拌器的混合效率.....	27
1.2.4 螺桿攪拌器.....	28
1.2.4.1 混合時間.....	28
1.2.4.2 循環時間與循環流量.....	29
1.2.4.3 功率消耗.....	31
1.2.4.4 混合能量與混合效率.....	32

1.2.5 螺帶攪拌器	33
1.2.5.1 混合時間	33
1.2.5.2 循環時間與循環流量	35
1.2.5.3 功率消耗	37
1.2.6 CFD 方法在攪拌器的應用	38
1.3 研究目的	40
二、數學模式	41
2.1 簡介	41
2.2 基本假設	41
2.3 多重參考座標系統御方程式	42
2.4 無因次化多重參考座標系統御方程式	45
2.5 邊界條件	46
2.6 非牛頓流體無因次化統御方程式	46
三、數值方法	49
3.1 簡介	49
3.2 動量差分方程式	49
3.2.1 對流項	50
3.2.2 擴散項	51
3.2.3 源項	52
3.2.4 動量差分方程式	52
3.3 壓力修正差分方程式	53
3.3.1 速度-壓力耦合關係式與面上質量流率	53
3.3.2 壓力修正差分方程式	54
3.3.3 壓力、速度與質量流率之修正	55
3.4 濃度差分方程式	56
3.5 壁面剪應力與壁面壓力	57
3.5.1 壁面剪應力	57

3.5.2 壁面壓力	57
3.6 多重參考座標系介面修正方程式	58
3.6.1 多重參考座標系介面位置	59
3.6.2 旋轉座標系介面	59
3.6.3 靜止座標系介面	60
3.7 非牛頓流體流變學性質模式(修正 Hershel-Bulkley 模式)	61
3.8 SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) 法	61
3.9 參數設定	62
四、結果與討論	64
4.1 簡介	64
4.2 螺桿攪拌器	65
4.2.1 網格的建立	66
4.2.2 網格數目測試、葉片厚度測試與計算方法準確度測試	67
4.2.3 攪拌槽直徑的影響	68
4.2.4 旋轉軸直徑的影響	75
4.2.5 葉片螺距的影響	76
4.2.6 葉片與套筒間隙的影響	82
4.2.7 導流套筒的影響	83
4.2.8 流體流變學性質的影響	84
4.3 螺帶攪拌器	86
4.3.1 網格數目測試與計算準確度測試	87
4.3.2 螺帶攪拌器流場結構	88
4.3.3 葉片寬度的影響	89
4.3.4 葉片螺距的影響	93
4.3.5 葉片與槽壁間隙的影響	96
4.3.6 流體流變學性質的影響	98

4.4 非牛頓流體攪拌器計算的準確度測試.....	99
五、 結論.....	102
六、 參考文獻.....	106
簡歷.....	194
發表論文.....	195



表目錄

表 3.1 三仙膠溶液流變學性質.....	111
表 4.1 不同網格數目的循環數 K_Q 與功率數 N_p^* 之比較.....	111
表 4.2 不同葉片厚度的循環數 K_Q 與功率數 N_p^* 與實驗之比較.....	111
表 4.3 基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器性能之比較.....	111
表 4.4 不同網格數目的功率數 N_p^* 與循環數 K_Q 之比較.....	112
表 4.5 不同螺距與間隙的功率數 N_p^* 與實驗之比較.....	112
表 4.6 基準尺寸與最佳尺寸螺帶攪拌器性能之比較.....	112



圖目錄

圖 1.1 各類型攪拌器:(a)螺旋槳式; (b)錨式; (c)斜葉渦輪式; (d)圓盤直 葉渦輪式; (e)螺桿式; (f)螺帶式.....	113
圖 1.2 流體分類.....	114
圖 1.3 流體軸向速度.....	115
圖 1.4 量測混合時間的物質濃度變化.....	116
圖 2.1 旋轉座標系與靜止座標系區域:(a)螺桿攪拌器; (b)螺帶攪拌器	117
圖 3.1 任意形狀控制體積之面向量 \vec{s}_f 及主格點 P、相鄰格點 C 與面 f 間向 量 $\vec{\delta}_{PC}$, $\vec{\delta}_{Pf}$, $\vec{\delta}_{Cf}$ 標示圖.....	118
圖 3.2 壁面剪應力 $\vec{\tau}_w$ 、法向量 \vec{s}_w 、單位法向量 \vec{n} 、主格點 P 與壁面 w 垂直 距離 δ_n 、速度差向量 $\delta\vec{V}_w^*$ 、速度差垂直分量 $\delta\vec{V}_w^{*\perp}$ 、速度差平行分量 $\delta\vec{V}_w^{*\parallel}$ 標示圖.....	119
圖 3.3 多重參考座標系介面修正:(a)旋轉座標系介面; (b)靜止座標系介 面.....	120
圖 3.4 Herschel-Bulkley 模式與修正 Herschel-Bulkley 模式示意圖...	121
圖 3.5 網格編號、網格面編號、網格節點編號、邊界編號示意圖.....	122
圖 3.6 計算流程圖.....	123
圖 4.1 區塊的劃分.....	124
圖 4.2 計算網格.....	125
圖 4.3 螺桿攪拌器流場基本形態.....	126
圖 4.4 不同葉片厚度及雷諾數與實驗量測軸向速度 V_z 之比較.....	127
圖 4.5 螺桿攪拌器 $D=1.69d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	128
圖 4.6 螺桿攪拌器 $D=2.75d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	129
圖 4.7 螺桿攪拌器 $D=5.0d$ 時在不同圓周方向位置的速場.....	130
圖 4.8 不同 D/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $D=1.69d$; (b) $D=2.3d$; (c) $D=2.75d$; (d) $D=3.67d$; (e) $D=5.0d$	131
圖 4.9 $D=1.69d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	132

圖 4.10 $D=2.75d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	133
圖 4.11 $D=5.0d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	134
圖 4.12 螺桿攪拌器性能參數:(a)循環數； (b)功率數； (c)能量數； (d)混合時間數隨槽直徑與葉片直徑比 D/d 的變化.....	135
圖 4.13 螺桿攪拌器葉片流道示意圖.....	136
圖 4.14 不同 d_s/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $d_s=0.05d$; (b) $d_s=0.254d$; (c) $d_s=0.5d$; (d) $d_s=0.65d$; (e) $d_s=0.95d$	137
圖 4.15 螺桿攪拌器性能參數:(a)循環數； (b)功率數； (c)能量數隨軸直 徑與葉片直徑比 d_s/d 的變化.....	138
圖 4.16 在套筒內不同 d_s/d 值攪拌器的流體圓周方向速度的徑向分佈...	139
圖 4.17 螺桿攪拌器 $S=0.33d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	140
圖 4.18 螺桿攪拌器 $S=1.5d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	141
圖 4.19 螺桿攪拌器 $S=7.5d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	142
圖 4.20 不同 S/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $S=0.33d$; (b) $S=0.6d$; (c) $S=1.0d$; (d) $S=3.0d$; (e) $S=7.5d$	143
圖 4.21 $S=0.33d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	144
圖 4.22 $S=1.5d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	145
圖 4.23 $S=7.5d$ 時螺桿攪拌器混合過程.....	146
圖 4.24 螺桿攪拌器性能參數: (a)循環數； (b)功率數； (c)能量數； (d)混合時間數隨螺距與葉片直徑比 S/d 的變化.....	147
圖 4.25 螺桿攪拌器葉片流道與受力分佈示意圖.....	148
圖 4.26 螺距與流道角度對螺桿攪拌器流量大小與受力情形的影響.....	149
圖 4.27 螺桿攪拌器性能最佳化.....	150
圖 4.28 基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器液體混合過程中濃度隨旋轉圈數的 變化.....	151
圖 4.29 基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器液體混合過程中偏差度隨旋轉圈數	

的變化.....	152
圖 4.30 基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器液體混合過程中濃度分佈變化..	153
圖 4.31 不同 C/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $C=0.001d$; (b) $C=0.01d$; (c) $C=0.025d$; (d) $C=0.05d$; (e) $C=0.1d$	154
圖 4.32 螺桿攪拌器葉片與套筒間隙對流量大小的影響.....	155
圖 4.33 螺桿攪拌器性能參數: (a)循環數; (b)功率數; (c)能量數隨間隙與葉片直徑比 C/d 的變化.....	156
圖 4.34 無套筒螺桿攪拌器 $D=1.69d$ 時在不同圓周方向位置的速度場...	157
圖 4.35 無套筒螺桿攪拌器 $D=2.75d$ 時在不同圓周方向位置的速度場...	158
圖 4.36 無套筒螺桿攪拌器 $D=5.0d$ 時在不同圓周方向位置的速度場.....	159
圖 4.37 不同 D/d 值的無套筒螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $D=1.69d$; (b) $D=2.3d$; (c) $D=2.75d$; (d) $D=3.67d$; (e) $D=5.0d$	160
圖 4.38 有套筒與無套筒螺桿攪拌器性能參數: (a)循環數; (b)功率數; (c)能量數隨槽直徑與葉片直徑比 D/d 的變化.....	161
圖 4.39 有套筒與無套筒螺桿攪拌器流體軸向速度的徑向分佈.....	162
圖 4.40 無套筒螺桿攪拌器流體循環中心隨槽直徑與葉片直徑比 D/d 的變化	163
圖 4.41 流體流變學性質對攪拌器性能的影響.....	164
圖 4.42 螺帶攪拌器計算網格.....	165
圖 4.43 螺帶攪拌器流場結構.....	166
圖 4.44 螺帶攪拌器 $r=0.45d$ 圓柱面上的壓力分佈.....	167
圖 4.45 螺帶攪拌器流道示意圖.....	168
圖 4.46 螺帶攪拌器 $W=0.025d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	169
圖 4.47 螺帶攪拌器 $W=0.2d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	170

圖 4.48 螺帶攪拌器 $W=0.45d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	171
圖 4.49 不同 W/d 值的螺帶攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $W=0.025d$; (b) $W=0.1d$; (c) $W=0.2d$; (d) $W=0.25d$; (e) $W=0.45d$	172
圖 4.50 $W=0.025d$ 時螺帶攪拌器混合過程	173
圖 4.51 $W=0.2d$ 時螺帶攪拌器混合過程	174
圖 4.52 $W=0.45d$ 時螺帶攪拌器混合過程	175
圖 4.53 螺帶攪拌器性能參數: (a) 功率數; (b) 循環數; (c) 能量數; (d) 混合時間數隨葉片寬度與葉片直徑比 W/d 的變化	176
圖 4.54 螺帶攪拌器 $S=0.33d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	177
圖 4.55 螺帶攪拌器 $S=0.7d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	178
圖 4.56 螺帶攪拌器 $S=4.0d$ 時在不同圓周方向位置的速度場(動畫截圖)	179
圖 4.57 不同 S/d 值的螺帶攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $S=0.33d$; (b) $S=0.7d$; (c) $S=1.0d$; (d) $S=2.0d$; (e) $S=4.0d$	180
圖 4.58 $S=0.33d$ 時螺帶攪拌器混合過程	181
圖 4.59 $S=0.7d$ 時螺帶攪拌器混合過程	182
圖 4.60 $S=4.0d$ 時螺帶攪拌器混合過程	183
圖 4.61 螺帶攪拌器性能參數: (a) 功率數; (b) 循環數; (c) 能量數; (d) 混合時間數隨葉片螺距與葉片直徑比 S/d 的變化	184
圖 4.62 不同 C/d 值的螺帶攪拌器流場的流線與壓力分佈: (a) $C=0.005d$; (b) $C=0.0105d$; (c) $C=0.02d$; (d) $C=0.06d$; (e) $C=0.1d$	185
圖 4.63 螺帶攪拌器性能參數: (a) 功率數; (b) 循環數; (c) 能量數隨葉片-槽壁間隙與葉片直徑比 C/d 的變化	186
圖 4.64 基準尺寸與最佳尺寸螺帶攪拌器液體混合過程中濃度隨旋轉圈數的變化	187
圖 4.65 基準尺寸與最佳尺寸螺帶攪拌器液體混合過程中偏差度隨旋轉圈	

數.....	188
圖 4.66 基準尺寸與最佳尺寸螺帶攪拌器液體混合過程中濃度分佈變化..	189
圖 4.67 流體流變學性質對螺帶攪拌器性能參數: (a)功率數; (b)循環數; (c)能量數隨葉片螺距與葉片直徑比 S/d 的影響.....	190
圖 4.68 螺帶攪拌器牛頓與非牛頓流體軸向速度的徑向分佈.....	191
圖 4.69 不同轉速下螺帶攪拌器對牛頓與非牛頓流體扭矩.....	192
圖 4.70 不同雷諾數下螺帶攪拌器對牛頓與非牛頓流體的功率數.....	193



符號說明

符號	定義
A_p, A_c	主格點係數矩陣, 相鄰格點係數矩陣
c, c^*, \bar{c}	濃度, 無因次化濃度, 平均濃度
c_A, \bar{c}_A, c_i	樣品 A 濃度, 樣品 A 平均濃度, 樣品 i 濃度
C	攪拌器葉片間隙
d, d_s, d_t	攪拌器葉片直徑, 攪拌器中心軸直徑, 攪拌器套筒直徑
\bar{d}	由 \bar{S}_f 定義在 δ_{PC} 方向上的向量
D	攪拌槽直徑
D_{ij}	剪應變率張量
D_{AB}	濃度擴散係數
E	混合能量數
f_p	權重因子
$f(c)$	機率密度
F_f^c, F_f^d	對流通量, 擴散通量
h, h_t, h_i	攪拌器葉片高度, 套筒高度, 攪拌器葉片距槽底或槽頂間隙
H	攪拌槽高度
i	攪拌器葉片數目
I, \bar{I}	均勻度, 平均均勻度



L	樣品數目
K	稠度係數
K_c, K_m, K_Q	循環時間數, 混合時間數, 循環數
K_s	Metzner-Otto 比例常數
m	流體特性指標
\dot{m}_f^*	無因次質量流率
M	攪拌器扭矩
n	攪拌器轉速
$N_P, N_{P,f}, N_{P,p}$	功率數, 摩擦力功率數, 壓力功率數
$N_P^*, N_{P,f}^*, N_{P,p}^*$	功率數($N_P^* = N_P \cdot Re$), 摩擦力功率數, 壓力功率數
p	壓力
P	攪拌器功率消耗
q, q_d, q_p	循環流量, 拖曳流量, 壓力流量
\vec{q}_Φ^*	源項
Q_d, Q_e, Q_l	循環流量, 主循環流量, 主循環與次循環間交換流量
Re, Re_a	雷諾數, 表觀雷諾數
R_0, R_s, R_v	軸向速度為零的位置, 攪拌軸的位置, 攪拌槽壁的位置
\vec{r}	位置向量
s	濃度標準差

S, s_i	攪拌器葉片螺距, 攪拌器葉片圈數
Sc	史密特數
\vec{S}_f	控容面法向量
S_ϕ	源項
t	攪拌器葉片厚度
t_c, t_m	循環時間, 混合時間
v, \vec{V}_g	速度, 網格速度
V_A, V_B, V_{tot}	樣品 A 體積, 樣品 B 體積, 攪拌槽流體體積
$V_c, V_t, \vec{V}_w, \vec{V}_z$	平行流道方速度, 垂直流道速度, 壁面速度, 軸向速度
x	粒子位置
W	攪拌器葉片寬度

希臘符號

α, α_0	偏差絕對值, 初始偏差絕對值
α_ϕ	鬆弛因子
γ	二階上風差分混合比例
$\dot{\gamma}$	剪應變率
Γ	$1/Re$
$\vec{\delta}_{pf}, \vec{\delta}_{cf}, \vec{\delta}_{pc}$	主格點 p 到面 f 向量, 相鄰格點 C 到面 f 向量, P 到 C 向量
Δ	偏差度

Δt^*	無因次時間間距
Δv	控制體積
η	黏滯係數
μ	流體黏度
ρ	密度
σ^2, σ_0^2	標準偏差值, 初始標準偏差值
τ_y	降伏應力
$\bar{\tau}_w$	壁面剪應力
ϕ	攪拌葉片傾斜角度
Φ^*	無因次速度分量
$\bar{\Omega}$	葉片旋轉角速度
下標	
C	相鄰格點
f	網格面
P	主格點
w	壁面
0	初始值
$\perp, //$	垂直壁面, 平行壁面



上標

c	對流項
d	擴散項
$(n+1), (n)$	本次疊代值, 前次疊代值
$UD, 2ndUD$	上風差分, 二階上風差分
—	平均值
'	修正量
*	無因次化
**	修正後的值



一、緒論

1.1 簡介

本節介紹有關攪拌過程及攪拌器的基本概念、攪拌流場的物理現象、混合物質的種類與均勻度、攪拌器的選擇與設計等，各小節包括：1.1.1 節攪拌；1.1.2 節流體運動；1.1.3 節混合程度；1.1.4 節攪拌物質與工作流體；1.1.5 節非牛頓流體的種類；1.1.6 節攪拌器簡介；1.1.7 節攪拌器的選擇；1.1.8 節攪拌器設計。

1.1.1 攪拌

攪拌是利用外力如轉動攪拌器葉片對容器內的流體施加作用力，造成容器內不同位置的流體產生壓力變化，或是受到葉片剪切力的影響，使流體發生某種模式的循環流動。

攪拌被廣泛的應用在很多工業的製造過程中，在工業上經常會需要將不同原料進行混合加工製成一個新的產品，因此利用攪拌使原料進行混合。而材料混合的均勻程度，會影響到最後產品的品質，例如化妝品或保養品，是由許多不同成份的物質調配而成，如果混合不夠均勻，產品的品質就不好，消費者用起來便會感覺產品沒有產生應有的功效，或是效果強弱不一，甚至造成皮膚的傷害。另外，像是在建築工地常見的混泥土，它是由細砂與小石頭、水泥混合而成的，在混合過程中如果混合的不均勻，會直接影響建築物的強度，進而影響大眾的安全。其他還有很多產品也會在製造過

程中使用到混合，像是塗料、藥品、黏著劑、清潔用品、飲料、食品等等，其混合的均勻程度直接反應在產品的品質上，所以需要好的攪拌來幫助材料的混合均勻。除此之外，混合的均勻程度也會影響到化學反應進行速度的快慢，當物質進行化學反應時，必須要讓發生化學反應的物質互相接觸，化學反應才會進行，因此若不能讓物質均勻接觸，則反應會進行得十分緩慢，甚至有些物質沒有發生化學反應，反應不完全，例如烯烴加氫的催化反應。烯烴與氫在鉑、鈀等金屬催化劑下，可以生成烴，所以在加氫反應槽中，必須將氫氣通入反應槽並分散在液體中，假如氫氣無法分散均勻，化學反應就會不完全，因此需要攪拌液體與氫，使液體與氫混合均勻。攪拌除了幫助化學反應外，也可以提高熱交換的速率，當熱交換器內加裝混合裝置，可以使冷熱流體均勻混合或是受熱均勻，更快速的達到熱平衡。

由以上看來攪拌的目的與功用在：

- (1)使不同的物料混合分散均勻。
- (2)加速化學反應的進行。
- (3)提高物料加熱或散熱時的熱傳效率。
- (4)提高物料濃度擴散時的質傳速率。

所以總而言之攪拌就是用來幫助物理、化學過程的加速進行。

而混合依據被攪拌物料的相可分為以下四種：

(1)互溶液體間的混合

如製作與水互溶的溶液的稀釋液。

(2)不互溶液體間的乳化

如製作水包油乳化狀物的化妝水乳液。

(3)固體粒子在液體中的懸浮

如製作以顆粒狀分佈於樹脂溶液中的油漆顏料。

(4)氣體在液體中的分散

如製作發酵過程中需要加入氧的發酵液。

1.1.2 流體運動

流體在混合過程中會由攪拌器葉片攪動之後開始運動，若以運動尺度的大小來分類可以分為：**(1)大尺度的總體流動**;**(2)小尺度的紊流渦流及剪切運動**。

1.1.2.1 總體流動

總體流動指的是流體在攪拌槽內的循環流動，能夠使流體運動到攪拌槽內的各個部位，帶動攪拌槽內部的其他物料均勻分散在各處，其尺度涵蓋整個攪拌槽，因此屬於**大尺度運動**。總體流動愈強物料愈能均勻分散到攪拌槽的各個角落，如使固體顆粒均勻地懸浮於攪拌液中就需要強的總體流動。而總體流動的流量稱為**循環流量**，流量的計算方式會在之後介紹。總體流動的強弱端看**循環流量**的大小，流量愈大總體流動愈強。流體總體

流動的形式愈複雜愈能夠使物料混合，若是形成很單調的流動像是剛體旋轉(solid body rotation)，則對於物料混合的幫助就不大。

1.1.2.2 紊流渦流及剪切運動

紊流渦流指的是當攪拌槽內的流體流速過快，或雷諾數超過某一臨界值時，流體不再是分層的流動，使流體呈現大大小小不規則的旋渦運動。剪切運動則是因為流體之間的流速不同，產生了速度梯度，加上流體與流體之間有黏性，使局部的流體受到剪切力作用的影響而產生的延展變形運動。由於旋渦運動與剪切運動都是侷限在攪拌槽的局部位置，所以是屬於小尺度運動。靠著渦流運動與剪切運動可以使局部的流體延展變形甚至破裂分散為更小的流體團，也有助於分散不互溶的液滴或氣泡。所以運用攪拌使氣體在液體中分散或使不互溶的液體乳化需要強的渦流與剪切運動，而當流體經由攪拌器葉片攪動射出而擁有較高的流速時，較易產生強的渦流與剪切運動。

上述所提到的總體流動、紊流渦流與剪切運動，尺度大小雖然有所不同，但三者都還是屬於巨觀混合的觀察範圍，若是要進一步觀察到微觀混合，那就屬於分子擴散的部分了。在混合方面，如果最後要達到真正的均勻，那還是得靠分子擴散，不過攪拌所產生的總體流動、紊流渦流與剪切運動可以有效的加速分子擴散速率，因為當流體在攪拌槽內循環或是渦流及剪切運動產生的流體延展變形或破裂，都會增加分子擴散的機會與接觸

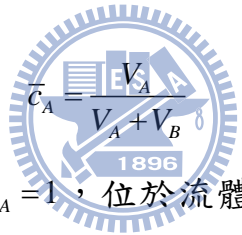
面積，使得物料更快的達到完全混合。

1.1.3 混合程度

攪拌最基本也是最重要的一個目的就是混合均勻，物料在經由攪拌器葉片攪拌之後，必須達到一定程度的均勻其攪拌才有意義，因此要如何評斷混合的均勻程度，通常可以用三種方式來評斷：(1)均勻度；(2)分隔強度(偏差度)；(3)分隔尺度。

1.1.3.1 均勻度

假設有兩種流體 A 與 B，分別取體積 V_A 與 V_B 置於攪拌槽內，則流體 A 的體積平均濃度分率 \bar{c}_A 為


$$\bar{c}_A = \frac{V_A}{V_A + V_B} \quad (1.1)$$

則一開始位於流體 A 處的 $c_A = 1$ ，位於流體 B 處的 $c_A = 0$ ，A 跟 B 交界處的 $c_A = 0.5$ 。經攪拌一段時間後，再於攪拌槽內各處取樣，若各樣品流體 A 的體積濃度分率 c_A 皆等於 \bar{c}_A ，則表示混合已經達到均勻；若是樣品濃度分率 c_A 不等於 \bar{c}_A 則表示混合還不夠均勻，當樣品濃度分率 c_A 與平均濃度分率 \bar{c}_A 愈不一致，則混合均勻度愈低。為了表示混合的均勻程度，可以定義一個樣品均勻度 I 來表示樣品濃度 c_A 與平均濃度 \bar{c}_A 的一致性：

$$\begin{cases} I = \frac{c_A}{\bar{c}_A} & , (c_A < \bar{c}_A) \\ I = \frac{1-c_A}{1-\bar{c}_A} & , (c_A > \bar{c}_A) \end{cases}, 0 \leq I \leq 1 \quad (1.2)$$

當 $I = 1$ 表示完全混合； $I = 0$ 則表示未混合。將 L 個樣品數的均勻度取平均值，

則可以得到平均均勻度 \bar{I}

$$\bar{I} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L I_i \quad (1.3)$$

可以用來表示整個混合液的均勻程度。

1.1.3.2 分隔強度(偏差度)

除了均勻度以外，還可以利用各小區域的濃度與平均濃度的差異來表示混合液的均勻程度，也就是所謂的分隔強度或是偏差度，當差異愈大表示溶液還未混合均勻，差異愈小則表示混合愈均勻。一般是使用標準差來表示偏差度，不過也可以使用偏差絕對值 α 來表示差異性：

$$\alpha = \sum_i |c_i - \bar{c}| \Delta v_i / v_{tot} \quad (1.4)$$

$\Delta v_i / v_{tot}$ 為濃度 c_i 的體積分率。假設在攪拌剛開始時攪拌槽內有兩團流體 A 與 B，A 的初始濃度 $c_A^0 = 1$ ，其體積分率 $v_A / v_{tot} = \bar{c}$ ，B 的初始濃度 $c_B^0 = 0$ ，其體積分率 $v_B / v_{tot} = (v_{tot} - v_A) / v_{tot} = (1 - \bar{c})$ ，則初始偏差絕對值 α_0 為

$$\alpha_0 = \sum_i |c_i^0 - \bar{c}| \Delta v_i / v_{tot} = |1 - \bar{c}| \bar{c} + |0 - \bar{c}| (1 - \bar{c}) = 2\bar{c}(1 - \bar{c}) \quad (1.5)$$

利用 α 與 α_0 可定義一個偏差度 Δ

$$\Delta = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\sum_i |c_i - \bar{c}| \Delta v_i}{2\bar{c}(1 - \bar{c})v_{tot}}, 0 \leq \Delta \leq 1 \quad (1.6)$$

當攪拌剛開始時 $\Delta = 1$ ，經過一段時間的混合，最後達到均勻時 $\Delta = 0$ 。

1.1.3.3 分隔尺度

對於非均相物質的混合液，如不互溶的液滴、氣泡、固體顆粒混合於某液體中，其混合程度只憑均勻度是無法準確評斷的，因為均勻度或偏差

度是會受到樣品尺寸的大小而改變，當取樣的樣品尺寸遠大於非均相物質尺寸的大小時，樣品尺寸對均勻度沒有太大的影響，但若是樣品尺寸小到接近非均相物質尺寸的大小時，就算實際上非均相物質已均勻分佈於液體中，樣品均勻度也會比總體均勻度來的低。因此對於非均相混合，必須利用液滴、氣泡、固體顆粒體積和直徑大小的分佈來表示其分隔尺度，才能真正反應其混合的程度。

1.1.4 攪拌物質與工作流體

對於不同物料的攪拌，能夠達到混合均勻的物理機制也有所不同。以下針對欲混合的物料類型，將攪拌內容物分為以下三種：(1)低黏度流體；(2)高黏度流體；(3)非均相液滴、氣泡、固體顆粒。

1.1.4.1 低黏度流體的混合

對於低黏度流體，由於黏度較低，流體較可以任意流動，容易產生較大的流量與流速，可以使流場達到紊流狀態，因此可以靠總體流動與紊流渦流或剪切運動來幫助混合。總體流動可將攪拌槽的流體先分成一些較大的流體團，並將這些大的流體團帶到攪拌槽的各處，接著再由渦流將大的流體團分割破裂為更小的流體團，渦流的大小就決定破裂所形成的流體團的大小，渦流愈小流體也就能被分割成愈小的流體團，有助於混合效果，而流場的紊流程度愈高，所形成的渦流愈強，尺寸愈小，數量也愈多，因此提高紊流程度，更能加快混合的速度。

1.1.4.2 高黏度流體的混合

對於高黏度流體，由於黏度較高，較不能任意流動，流動的速度也較慢，因此流場不易達到紊流狀態，只能以層流狀態來流動，所以無法靠渦流來幫助混合，只能依賴總體流動與剪切運動，因為在攪拌葉片附近有較高的剪切力，能夠將流體切割。為了達到較高的總體流動，會使用葉片直徑較大的攪拌器，如螺帶式、框式、錨式等攪拌器(圖 1.1)。除了流體的高黏度以外，很多在工業上使用的物料都是屬於非牛頓流體，而大部分這些非牛頓流體則具有剪薄性的特性，當流體流到攪拌器葉片附近時，由於具有較大的速度梯度產生強的剪切力，使得流體的黏度降低，流體可以變得較易流動，但是遠離葉片附近後，剪切力減弱，流體的黏度也就上升，又變得不易流動，使得混合更難以進行，因此也必須使用較大葉片直徑的攪拌器，使總體流動較大，以提供較均勻的剪切力場。

1.1.4.3 非均相液滴、氣泡、固體顆粒的混合

當兩種不互溶液體混合時，必定有其中一種液體被分散破裂為液滴，而另一種液體則包圍在外。液滴是具有明顯界面的液團，其表面張力使得界面的表面積盡量維持到最小，為了使大液滴分散為更小的液滴則必須靠渦流及剪切力來使液滴破裂，而表面張力則會阻止液滴產生變形擴大表面積，因此必須靠強的紊流渦流來克服這個表面張力，才有辦法使液滴變得愈小。另外除了大液滴會破裂成小液滴外，同時小液滴也會合併成大液滴，

當液滴靠近攪拌葉片附近時，紊流渦流較強，液滴分裂的速度較合併來得快，因此液滴尺寸較小，當液滴遠離葉片時，渦流變弱，則液滴合併速度大於分裂速度，尺寸就會比較大，為了改善這種情況，則必須盡量使攪拌槽內的渦流分佈均勻，另外在工業上也有添加**界面活性劑**來使分裂的小液滴不會再碰撞合併成大液滴。

氣泡的情況與液滴類似，不過氣液界面的表面張力要比液液界面的張力更大，因此須要更強的**渦流與剪切力**。另外氣泡與液體的**密度差異**較大，愈大的氣泡愈容易向上浮，使氣泡集中在攪拌槽頂端，甚至溢出液體表面，這時就需要強的**總體流動**能夠克服浮力，並帶動大氣泡流向攪拌槽其他部位。



當**固體顆粒團**投入液體中，首先液體要先進入顆粒團的空隙內取代空氣，接著再靠**渦流**將大的顆粒團打散為小的顆粒，不過顆粒尺寸固定，所以分散也有一定極限。另外與氣泡不同的是，大的顆粒團因為**重量較重**，會向下沉到攪拌槽底部，但是同樣也須要強的**總體流動**使大的顆粒團克服重力，離開槽底懸浮到攪拌液中。

1.1.5 非牛頓流體的種類

任何流體只要**黏度**不符合牛頓流體的特性，也就是**剪應力與剪應變率**比值不為一常數就可稱為**非牛頓流體**，例如：高分子聚合物溶液和高分子熔融物、顆粒懸浮液、乳液、黏彈性流體等。大致可以分為以下三類[1](圖

1.2)：(1)非時間相關流體;(2)時間相關流體;(3)黏彈性流體。

1.1.5.1 非時間相關流體(time-independent fluid)

非時間相關流體其流體表觀黏度(apparent viscosity)不會隨著施加剪應力期間的時間長短而改變，只跟某點的瞬時剪應變率有關，其中又可分為帶降伏應力流體與無降伏應力流體。當剪應力小於其降伏應力時，流體不會流動，幾乎可視為固體；一旦剪應力大於其降伏應力時，流體就開始流動，此種流體稱為帶降伏應力流體，總共有三種(圖 1.2)：(1)賓漢膠體；(2)降伏偽塑性流體；(3)降伏膨性流體。當流體被施加剪應力時流體即開始流動，不需超過某一特定值，則此種流體稱為無降伏應力流體，共有二種(圖 1.2)：(1)偽塑性流體；(2)膨性流體。所以非時間相關流體總共有五種，以下一一介紹：



(1)賓漢膠體(Bingham plastics)

當流體被施加的剪應力大於降伏應力之後，流體開始流動，其剪應力與剪應變率比呈一定值，也就是表觀黏度維持不變，如牛頓流體一般，稱為賓漢膠體，例如：牙膏、紙漿、巧克力漿、污泥等。

(2)降伏偽塑性流體(yield pseudoplastic fluid)

當流體被施加的剪應力大於降伏應力之後，流體開始流動，其剪應力增加幅度會隨著剪應變率增加而減少，也就是表觀黏度會隨著剪應變率增加而下降，此種流體稱為降伏偽塑性流體，例如：泥漿、三仙膠等。

(3)降伏膨性流體(yield dilatant fluid)

當流體被施加的剪應力大於降伏應力之後，流體開始流動，其剪應力增加幅度會隨著剪應變率增加而增加，也就是表觀黏度會隨著剪應變率增加而上升，此種流體稱為降伏膨性流體，一般較為罕見。

(4)偽塑性流體(pseudoplastic fluid)

如同上述(2)流體表觀黏度會隨剪應變率增加而下降，但無降伏應力，此種流體稱為偽塑性流體，又稱剪薄性流體(shear thinning fluid)，當剪應變率很小或很大時，流體表觀黏度會分別趨近極限值 μ_0 與 μ_∞ ，會造成黏度下降的原因則是因為當施加剪應力時，會破壞分子間的弱鍵結，或是高分子溶液及熔融物中的蜷曲分子被拉長，使得黏度下降，這種流體很常見包括：油漆、澱粉溶液、血液、洗碗精等。

(5)膨性流體(dilatant fluid)

如同上述(3)流體表觀黏度會隨著剪應變率增加而上升，但無降伏應力，此種流體稱為膨性流體，又稱剪稠性流體(shear thickening fluid)，剪應變率很小或很大時，流體表觀黏度會分別趨近極限值 μ_0 與 μ_∞ ，會造成黏度上升的原因則是因為當施加剪應力時，會使小分子顆粒結成大分子，使黏度上升，這種流體較少見包括：玉米漿、海砂等。

1.1.5.2 時間相關流體(time-dependent fluid)

時間相關流體其流體表觀黏度除了與某點的剪應變率有關外，還跟剪應力施加時間長短有關，可分為兩類(圖 1.2)：(1)搖溶性流體；(2)抗流變流體。

(1)搖溶性流體(thixotropic fluid)

當流體維持在某一剪應變率之下，其表觀黏度隨時間而減少，這種流體稱為搖溶性流體，而當剪應變率增加時，剪應力增加幅度與表觀黏度會如同偽塑性流體一樣下降，但是當剪應變率逐漸減少時，剪應力與表觀黏度不會沿著原曲線回復，而是低於原曲線，因此又稱為不可逆偽塑性流體(irreversible pseudoplastic fluid)，當維持某一剪應變率之下，隨著時間慢慢增加，表觀黏度會逐漸下降趨近一個定值 μ_0 ，這類流體包括：原油、番茄醬、不滴油漆等。

(2)抗流變流體(rheopectic fluid)

當流體維持在某一剪應變率之下，其表觀黏度隨時間而增加，這種流體稱為抗流變流體，而當剪應變率增加時，剪應力增加幅度與表觀黏度會如同膨性流體一樣上升，但是當剪應變率逐漸減少時，剪應力與表觀黏度不會沿著原曲線回復，而是高於原曲線，因此又稱為不可逆膨性流體(irreversible dilatant fluid)，當維持某一剪應變率之下，隨著時間慢慢增加，表觀黏度會逐漸上升趨近一個定值 μ_0 ，這類流體也較罕見包括：潤滑油、

石膏懸浮液等。

1.1.5.3 黏彈性流體(viscoelastic fluid)

對於高分子溶液或熔融物受到應力時，除了產生黏性使流體流動外，當應力消失時，其形變也會有部分回復，如同固體的彈性，因此稱為黏彈性流體。一些黏彈性流體特有的現象：**(1)**順時針攪拌中的流體，當停止攪拌後，流體會漸漸停止轉動，最後逆時針旋轉；**(2)**緩慢攪拌的流體，流體會攀附至攪拌棒上；**(3)**通過窄孔射出的流體，其液柱直徑會大於窄孔直徑；**(4)**向下傾倒的流體，當接觸到液面時會先反彈數次再融入液面；**(5)**當液柱被截斷後，上端流體會回彈容器內。這類流體包括：凝固汽油、瀝青、蛋白等。



1.1.6 攪拌器簡介

從以上可以得知，不同的混合物質對於攪拌物理機制的需求也不同，因此必須先分析需求，再選擇適合的攪拌器來攪拌，以下分別介紹幾種常見的攪拌器與適用的攪拌情況：**(1)**斜葉渦輪攪拌器；**(2)**圓盤直葉渦輪攪拌器；**(3)**螺桿攪拌器；**(4)**螺帶攪拌器。

1.1.6.1 斜葉渦輪攪拌器(pitched-blade turbine)

斜葉渦輪攪拌器(圖 1.1(c))，為數個平直葉片環繞於中心軸下端四周的攪拌裝置。葉片直徑約為攪拌槽直徑的 $1/4 \sim 1/2$ ，是屬於小葉片直徑且轉速較高的攪拌器，適用於攪拌低黏度流體。其葉片可以與水平面成一斜角，

斜角使攪拌器產生軸向噴流。流體由葉片底部斜下向外與水平面成一夾角射出，流體流到槽底與槽壁之後沿槽壁向上，再折回到軸心流入攪拌葉片，形成一個由下到上完整的一個大循環。由於葉片轉速較快，攪拌槽內部的流場可以到達紊流狀態，因此有強的紊流渦流及剪切力場，可以將流體分裂成小團。同時也有從下到上大的總體循環路徑與循環流量，適合用在上下調勻的混合或是使固體顆粒均勻懸浮的情況。

1.1.6.2 圓盤直葉渦輪攪拌器(Disc turbine)

圓盤直葉渦輪攪拌器(圖 1.1(d))，為數個垂直葉片插於中心軸底端圓盤四周的攪拌裝置。攪拌器葉片直徑約為攪拌槽直徑的 $1/3 \sim 1/2$ ，葉片直徑小且轉速高，可提供較高速的流場運動，適合用在低黏度流體的混合。由於垂直葉片旋轉的離心力，使流體產生很強的徑向噴流，流體由葉片外緣向外噴出，直到碰到攪拌槽外壁才分別流向槽頂與槽底，之後再流回葉片旋轉區，形成上下兩個大渦流。由於葉片轉速較高，流體流動的速度也較快，因此流場可以到達紊流狀態，可以產生強的渦流與剪切力，有利分裂流體團。不過因為強徑向噴流的關係，流體會形成上下兩個大循環，流體各自在兩個循環內流動，彼此無法流通，不利上下流體的混合。

1.1.6.3 螺桿攪拌器(screw impeller)

螺桿攪拌器(圖 1.1(e))，其螺旋型葉片緊貼於中心轉軸，因為葉片的直徑較小，轉速低，所以螺桿外通常加一導流套筒，可以產生較強的軸向循

環流，使流量增加，適合用來攪拌高黏度的流體。螺桿旋轉時會帶動套筒內的流體水平旋轉，同時產生軸向運動將流體擠出套筒外，使得流體流出套筒進入套筒與槽壁間的環狀區域。通過此環狀區域的流體通常只有軸向速度而沒有水平旋轉速度，最後流體會再流回套筒內，完成一個循環。當流體由套筒入口流至套筒出口時，由於螺桿的作用會使得壓力增加，產生一逆向壓力梯度，且因為葉片與套筒間存在間隙，所以會使得流體在此間隙產生迴流的現象，使流量降低。而且在間隙區域除了迴流以外，摩擦阻力也會造成馬達消耗功率，增加能量損失。

1.1.6.4 螺帶攪拌器(helical ribbon impeller)

螺帶攪拌器(圖 1.1(f))，葉片呈絲帶狀螺旋環繞中心軸，並未與中心軸緊密接合，只有另外由中心軸向外延伸的支桿與葉片相連，葉片與中心軸的間距遠大於葉片與槽壁的間距，所以葉片直徑很大，幾乎與攪拌槽直徑相當。因為葉片直徑較大，螺帶攪拌器並不像螺桿攪拌器需要導流套筒。當螺帶旋轉時，一方面帶動流體水平旋轉，一方面使得螺帶區的流體作軸向流動，接著再流入螺帶與軸之間的間隙，在此間隙中的流體軸向流動方向與螺帶區的流動方向相反。除了軸向流動外，流體也作徑向流動，在螺帶前方的流體，由外向內流向中心軸；在螺帶後方的流體則由中心向外流向槽壁，因此整個螺帶攪拌器內的流場呈複雜的 3-D 流動。因為螺帶攪拌器的轉速很低，流體流速較慢，流場並未達到紊流狀態，流場還是屬於層流

場。其大葉片直徑可以產生較強的總體流動，在葉片區有相對強的剪切力，適合用在高黏度流體的混合。

1.1.7 攪拌器的選擇

由於流體的種類，黏度的高低，以及被攪拌物質的相與攪拌目的的不同，沒有一種攪拌器可以適用在各種不同條件下的攪拌，因此能針對不同的情況選擇適當的拌器，才能有最好的攪拌結果與攪拌效率，以下說明一些條件下攪拌器的選擇：

對於低黏度均相液體的混合，可以說是最單純的攪拌過程，可以選用推進式或是渦輪式攪拌器，其循環能力強，動力消耗少是最適合的攪拌器。像對於液體的分散過程，則需要較強的剪切力與循環能力，圓盤直葉渦輪式攪拌器再搭配擋板就是最適合的攪拌器。而固體的懸浮過程，則不希望顆粒堆積在圓盤與擋板，並希望葉片上下方能互相混合，因此可使用斜葉渦輪式或彎葉渦輪式攪拌器。氣體的分散過程，斜葉渦輪式或彎葉渦輪式則不適用，使用圓盤渦輪式攪拌器，其圓盤可儲存氣體，可使分散過程較為平穩。另外像是結晶過程，小晶體結晶可使用小直徑高轉速攪拌器，如渦輪式攪拌器；大晶體結晶可使用大直徑低轉速攪拌器，如槳式攪拌器。至於高黏度液體的混合，則可使用錨式、框式、螺桿式、螺帶式攪拌器。

1.1.8 攪拌器的設計

一個好的攪拌器，除了能夠將攪拌物料混合均勻以外，還必須要考慮到工作效率、成本以及時間的考量，達到省時、低耗能、高效率、高品質。

因此攪拌器的設計有四個要點：

- (1)提高攪拌後的均勻度。
- (2)減少攪拌的時間。
- (3)降低攪拌消耗的功率。
- (4)提高攪拌葉片與攪拌物質間能量轉換的效率，以降低不必要的能量消耗。

所以我們必須先訂定一些量化的標準，才能評估攪拌器的性能，並作為設計攪拌器的參考依據，以下分別介紹幾個量化的性能參數：(1)循環數；(2)功率數；(3)混合能量數；(4)混合時間數；(5)循環時間數。

1.1.8.1 循環數

一般循環數的定義如下：

$$K_Q = \frac{Q_d}{nd^3} \quad (1.7)$$

$$Q_d = \frac{V_{tot}}{t_c} = 2\pi \int_{R_s}^{R_0} \bar{V}_z r dr = -2\pi \int_{R_0}^{R_s} \bar{V}_z r dr \quad (1.8)$$

其中 Q_d 為攪拌器內流體的體積流率也就是循環流量， \bar{V}_z 為流體軸向速度， R_0 為軸向速度等於 0 的位置(圖 1.3)，以螺桿攪拌器為例，由於攪拌器內的流量必須滿足質量守恆，因此流經導流套筒的體積流率必定與流過套筒與槽

壁間環狀區域的體積流率相同。所以不管是計算套筒內體積流率或是套筒外環狀區體積流率，都可以當作攪拌器循環流量。循環流量 Q_d 也可以利用攪拌槽內流體體積 Vol 除以循環時間 t_c ，循環時間會在下面作詳細說明。將1.8式的循環流量作無因次化，則可得到循環數(1.7式)，可作為攪拌器的流量指標。一般研究發現在低雷諾數下($Re < 40$)， N_Q 為一定值與雷諾數無關。

1.1.8.2 功率數

一般功率數的定義如下：

$$N_p = \frac{P}{\rho n^3 d^5} \quad (1.9)$$

其中 P 為驅動攪拌器葉片轉動所需要的功率消耗， N_p 可以分為兩部分：一個是抵抗作用在葉片上的壓力所產生的功率消耗 $N_{p,p}$ ；另一個是抵抗摩擦力作用在葉片與旋轉軸表面上的功率消耗 $N_{p,f}$ 。

$$N_p = N_{p,p} + N_{p,f} \quad (1.10)$$

因此上述的功率消耗(P)可用葉片上的壓力與摩擦力產生的扭矩(M)所消耗的功率來計算出

$$P = 2\pi n M \quad (1.11)$$

再將其無因次化可得功率數(1.9式)。

除了1.9式的定義外，功率數還可以根據黏度做另外一種定義：

$$N_p^* = \frac{P}{\mu n^2 d^3} \quad (1.12)$$

然而1.12式與1.9式之間的關係為：

$$N_p^* = N_p \cdot Re \quad (1.13)$$

一般研究中顯示，在低雷諾數下($Re < 40$) N_p 與雷諾數成反比，因此 N_p^* 在低雷諾數下為一定值，因此 N_p^* 常用來作為攪拌器功率消耗的指標。

1.1.8.3 混合能量數

為了估計攪拌器的**混合效率** Kuncewicz 等人[2]定義了一個無因次化的**混合能量**：

$$E = \frac{Pt_m}{\mu nd^3} \quad (1.14)$$

其中 t_m 為攪拌物質達到一定程度均勻的**混合時間**。而除了 t_m 以外，另外還有一個**循環時間** t_c 也可以代表攪拌快慢：

$$t_c = \frac{V_{tot}}{Q_d} \quad (1.15)$$

其中 V_{tot} 為攪拌槽內的流體體積，大約為 $\pi D^2 H / 4$ 。**循環時間** t_c 代表的是流體循環攪拌槽一次所花的時間。Carreau 等人[3]提出**混合時間** t_m 是**循環時間** t_c 的數倍的見解，因此可假設 $t_m = 4t_c$ 並將 1.15 式代入 1.14 式且結合 1.7 式與 1.12 式則可以產生另一種**混合能量數**的定義：

$$E = \pi \frac{N_p^*}{K_Q} \left(\frac{H}{D} \right) \left(\frac{D}{d} \right)^3 \quad (1.16)$$

其中要特別提到的是 N_p^* / K_Q 為**單位循環流量**所消耗的功率，可以看做是攪拌器葉片攪拌流體的**工作效率**，但是並不能純粹當作是總體攪拌槽的**混合效率**，因為由 1.16 式中的**混合能量數**(E)來看混合效率還跟攪拌器的幾何大小 (H, D, d) 有關，所以必須以**混合能量數**(E)來作為攪拌器混合效率的指標。

1.1.8.4 混合時間數

一般混合時間數的定義如下：

$$K_m = nt_m \quad (1.17)$$

K_m 所代表的意義是，使攪拌物質達到某一程度的均勻下，攪拌器所需要轉動的圈數。但是就算是相同尺寸的攪拌器， K_m 也會因為實驗量測法或是均勻定義的不同而受到影響(Delaplace 等人[4])。甚至量測位置的不同所得到的混合時間也不同，像是量測到流動很緩慢的位置，混合時間可能就會很長，還有染料注射的位置或方法的不同也同樣會影響量測到的混合時間。至於均勻定義可以使用前述的均勻度 \bar{I} 或是偏差度 Δ 來判斷是否達到均勻，而 Käppel[5]則是使用偏差度 Δ 到達 0.1 時所需要的時間做為混合時間。一般研究發現在低雷諾數下($Re < 40$)， K_m 為一定值與雷諾數無關。

1.1.8.5 循環時間數

一般循環時間數的定義如下：

$$K_c = nt_c \quad (1.18)$$

K_c 所代表的意義是，當物質循環整個攪拌槽一次，攪拌器所需要旋轉的圈數。循環時間可以透過不同的方法來得到(Delaplace 等人[4])，像是追蹤一個粒子以同方向通過一個參考面兩次所經過的時間，或是以探針偵測某一位置的訊號出現兩次峰值所經過的時間，也有先量測出軸向速度流量或壓力損失，再間接計算出循環時間。跟混合時間比較，循環時間的量測較為

客觀，所以不同實驗獲得的循環時間差異較小。一般研究發現在低雷諾數下($Re < 40$)， K_c 為一定值與雷諾數無關。

而以上這些攪拌器性能參數會受到特徵參數：攪拌器幾何尺寸($d, S, D, C, W \dots$ 等)、攪拌器轉速(n)、雷諾數(Re)、流體特性(m)的影響，所以要找出性能參數與這些特徵參數的關係式，才有助於設計高效能的攪拌器。這種關係式如：

$$N_p^* = f(d, S, D, C, W \dots) \quad (1.19)$$

最後再依據這些關係式滿足所要的需求(省時、低耗能、高效率、高品質)來選擇出最佳化的攪拌器。

1.2 文獻回顧

攪拌最重要的就是達到混合均勻，但是到底混合到什麼樣的程度才算均勻？又到底需要攪拌多久的時間才能真正混合？混合時間到底受到什麼因素的影響？有沒有辦法縮短？這些都是很重要的問題，可以從以下的文獻先做初步的了解。

1.2.1 混合程度指標

就像我們前述所說，必須先定出一些標準才能分辨混合的均勻程度，Villéon 等人[6]利用了濃度標準差 s ：

$$s = \frac{\sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (c_i - \bar{c})^2}}{\bar{c}} \quad (1.20)$$

s 的範圍是在 0~1 之間，當 $s=0$ 代表物質已經達到理想化的完全混合，當 $s=1$

則代表物質是互相分離的還未混合。理想化的攪拌是希望 s 可以在很短的時間降到零，但實際上 s 不可能完全降到零，所以當 s 值達到一水平值就可以看做是混合均勻。Käppel[7]在他的研究中則歸納了一系列的混合準則：

$$M_1 = s / \bar{c} \quad (1.21)$$

$$M_2 = \sigma_0 / s \quad (1.22)$$

$$M_3 = s / \sigma_0 \quad (1.23)$$

$$M_4 = s^2 / \sigma_0^2 \quad (1.24)$$

$$M_5 = 1 - s^2 / \sigma_0^2 \quad (1.25)$$

$$M_6 = s^2 / \sigma_0^2 - 1 \quad (1.26)$$

$$M_{14} = \sigma^2 / \sigma_0^2 \quad (1.27)$$

其中標準差 $s = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (c_i - \bar{c})^2}$ ，標準偏差值 $\sigma^2 = \int_0^1 (c - \bar{c})^2 f(c) dc$ ，初始標準偏差

值 $\sigma_0^2 = \bar{c}(1 - \bar{c})$ 。另外還有：

$$M_7 = s / \sigma_z \quad (1.28)$$

$$M_8 = \sigma_z / s \quad (1.29)$$

$$M_9 = s^2 / \sigma_z^2 \quad (1.30)$$

$$M_{10} = \frac{(\sigma_0 - s)}{(\sigma_0 - \sigma_z)} \quad (1.31)$$

$$M_{11} = \frac{(\sigma_0^2 - s^2)}{(\sigma_0^2 - \sigma_z^2)} \quad (1.32)$$

$$M_{12} = \frac{(\log \sigma_0 - \log s)}{(\log \sigma_0 - \log \sigma_z)} \quad (1.33)$$

$$M_{13} = \frac{(s^2 - \sigma_z^2)}{\bar{c}^2} \quad (1.34)$$

其中 $\sigma_z^2 = \frac{\bar{c}(1-\bar{c})}{V_s/\bar{v}}$ ， V_s/\bar{v} 表示樣品體積與分子體積的比值，因為樣品體積通常遠大於分子體積，所以 σ_z^2 是一個很小的值。前述有提到，理想的混合是希望 s^2 或 σ^2 可以降到零，但實際上不可能，因此 σ_z^2 可以看做是實際混合可以達到的最小值。也有使用偏差絕對值的：

$$M_{15} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |c_i - \bar{c}| \quad (1.35)$$

$$M_{16} = \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |c_i - \bar{c}|}{\bar{c}} \quad (1.36)$$

$$\Delta = \alpha / \alpha_0 \quad (1.37)$$

其中偏差絕對值 $\alpha = \int_0^1 |c - \bar{c}| f(c) dc$ ，初始偏差絕對值 $\alpha_0 = 2\bar{c}(1-\bar{c})$ 。Seichter[8]

則是用無因次化濃度 c^* ：

$$c^* = \frac{\bar{c} - c}{\bar{c} - c_0} \quad (1.38)$$

1.2.2 量測混合時間與循環時間的實驗方法

以上 1.20 式~1.38 式無論選擇哪一種都可以當作是均勻程度的標準，只不過是當標準不同得到的混合時間也會有些許差異，要選擇哪一種標準主要是配合實驗量測的便利性，就算是選擇同一種準則，其他造成量測混合時間不同的影響因素還很多，跟這些因素比起來均勻準則選擇的影響算

是較小的了。其他影響的因素像是實驗方法的選擇、樣品取樣的大小、探針的大小、探針的靈敏度、探針的位置、添加物的注射位置、添加物的注射方法、添加物的物理性質等。

1.2.1 節所列的均勻指標主要是用在混合不同濃度物質的樣品濃度變化，除了以樣品濃度的量測，來量測混合時間外，還可以利用其他一些物質性質的量測來得知混合時間。在 1.1.1 節中提到，攪拌除了可以幫助物質混合，使物質濃度均勻外，還可以幫助化學反應的進行或是加速熱交換使溫度達到平衡。因此除了物質濃度以外，我們可以利用混合不同其他性質的物質來得知混合時間(Delaplace 等人[4]，Käppel [7])，多種量測混合時間的方法如下：



(1)與不同濃度物質的混合

(2)與不同溫度物質的混合

(3)與不同導電率物質的混合

(4)與不同折射率物質的混合

(5)與染色物質的混合

(6)與發生去色化學反應物質的混合(酸鹼中和反應、氧化還原反應)

(7)與液體結晶粒子的混合

上述(1)~(4)的性質量測法是以探針固定在某一位置，來量測性質,像是濃度(圖 1.4)、溫度(Delaplace 等人[4])、導電率(Rieger 等人[9]，Dieulot 等

人[10])、**折射率**隨時間的變化。可以把從探針開始偵測到變化，到變化擾動的比例小到某一程度，如 5%，所經過的時間，當作**混合時間** τ_m 。從添加物質開始到探針偵測到變動的這一段時間則稱作**延遲時間** τ_{lag} 。這是因為所添加物質的位置離探針位置有一段距離，所以要先經過一段時間的攪拌，才可能會影響到探針附近的物質產生性質變化，因此這段時間並不計入混合時間。而性質隨時間的變化是呈現週期性的變動，所以可以把變動的一個週期當作是物質循環攪拌槽一次的**循環時間** τ_c 。利用探針量測的缺點是，因為探針只固定在一個位置，所以只能監控這個位置附近物質的性質變化，不能顯示出攪拌槽整體的變化，而探針也會影響到攪拌槽的流場，使流場產生擾動因此不利於低黏度流體的混合。

(5)的**染色法**混合時間量測早期是以肉眼觀察染色物質分散於攪拌槽的情形(Gray[11], Johnson[12], Coyle 等人[13], Carreau[14]等人, Käppel[15], Ryan[16]等人)，並以馬錶計錄混合時間，因此實驗的主觀成份較高誤差也較大。後來則使用光電元件來量測光源的穿透強度，當穿透的光源達到一個定值，代表量測位置的濃度也達到一個定值，則所需要的時間為混合時間。

(6)的**去色化學反應**分為兩種：一種是**酸鹼中和反應**(Hayes 等人[17])，通常是有色的鹼液與酸液混合，當物質達到中性後顏色也就消失；另外一種是**氧化還原反應**，一般是有色的加碘葡萄糖液與加硫代硫酸鈉葡萄糖液

混合($I_2 + 2Na_2S_2O_3 \rightleftharpoons 2NaI + Na_2S_4O_6$, Käppel[15])，當發生氧化還原反應時，顏色會消失。早期也是用肉眼觀察，後來使用攝影機，最後則是使用光電元件量測穿透光源的強度，當強度達到一個定值時，所需的時間為混合時間。酸鹼中和反應與氧化還原反應的差異在：**酸鹼中和反應**是當 pH 值達到一個臨界值才會變色，顏色在 pH 值低於臨界值或高於臨界值的變化並沒有深淺的差異，只有有色跟無色兩種；**氧化還原反應**則隨著濃度的不同、反應進行的多寡顏色會有深淺之分。

使用光電元件量測的好處是，不需用探針量測，不會干擾流場，也比肉眼觀測來得客觀，而且可以得到攪拌槽整體的性質的變化。壞處是對於不透光的流體則無法使用，像是高黏度的非牛頓流體。


(7)的**結晶粒子軌跡法**則是 Takahashi 等人[18][19]所使用的方法，他們將一些**液體結晶粒子**加入攪拌槽攪拌，利用平面光束照射攪拌槽，使光束照射到的粒子能被照相來觀測其流線軌跡，混合時間則是從開始放粒子到粒子流線軌跡無法被肉眼觀測出來為止，他們發現這種**結晶粒子軌跡法**對於幾何參數的影響比**去色化學反應法**還要敏感，也能夠很清楚的分辨出未混合均勻的區域是否還存在，因為只有被光束照射到的粒子能被觀測到，不會有去色化學反應法的顏色重疊的問題。

除了混合時間，量測循環時間也可以用來評估攪拌器的性能，循環時間指的是粒子在攪拌槽內完成一個循環所需要的時間，它可以透過追蹤懸

浮粒子的軌跡(Takahashi 等人[20]，Guérin 等人[21])，或是量測訊號響應的週期(Ryan 等人[16]，Hayes 等人[17]，Curran 等人[22]，Delalace 等人[4]，Dieulot 等人[10])，比起混合時間，循環時間的量測結果差異較小，標準較為一致。

1.2.3 不同攪拌器的混合效率

至於何種攪拌器的混合效率較高，很多文獻都有探討這個問題，Villéon 等人[6]利用 3 維有限元素法 POLY3D 軟體研究三種攪拌器：螺帶攪拌器、雙螺帶攪拌器、雙螺帶-螺桿攪拌器的混合效率。他們計算出攪拌槽 3 維的整體流場，利用 4 階時間步進 Runge-Kutta 法得出粒子軌跡：


$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(x(t')) dt' \quad (1.39)$$

並利用 1.20 式的標準差 S 做為攪拌槽整體的均勻程度，還有物質線長度的拉伸(length stretch 或是 Lyapunov exponent)以及剪應變率與渦度比的分散混合效率，來估計攪拌槽的混合效率。結果不論以哪一種混合效率研究，都發現雙螺帶攪拌器比螺帶攪拌器的混合效率好，而中心加裝螺桿的雙螺帶-螺桿攪拌器效率跟雙螺帶攪拌器的效率差不多，效率並沒有明顯增加。

Käppel[5]利用光學量測實驗法，研究了不同幾何尺寸的螺帶攪拌器、多節式斜葉攪拌器(MIG impeller)以及 sigma 揉麵攪拌器(sigma kneader)。他發現雙螺帶或螺帶攪拌器當槽直徑與葉片直徑比在 $1.02 \leq D/d \leq 1.1$ 範圍時，攪拌葉片與攪拌槽壁面間隙(c/d)愈大混合效率愈高，但是當雙螺帶攪拌器

的螺距 $S/d=0.5$ 時，間隙太大 ($c/d>0.03$) 時則混合效率變愈差。同樣的情況也發生在 MIG 攪拌器上，當 $c/d>0.03$ 時，混合效率變差。但是不管是雙螺帶或是螺帶攪拌器在選擇適當的 D/d 下，混合效果都比 MIG 攪拌器好，在 $D/d=1.1$ 時以雙螺帶攪拌器 $S/d=1$ 的混合效率最佳。

1.2.4 螺桿攪拌器

雖然螺桿攪拌器的葉片直徑不大，但是一旦加了導流套筒就可以產生強的次循環流，使流體從上到下從內到外循環於攪拌槽的各個角落，並且在套筒內可以產生高的剪切力，使流體拉長變形，有利混合(Gray [11])。

1.2.4.1 混合時間

混合時間指的是均勻度達到一定程度所需要的時間，除了受到攪拌器幾何尺寸及葉片轉速的影響外，還有很多因素會影響量測到的混合時間，像是：實驗方法；均勻度等級；探針數目與位置；填加物數量；流體流變學性質等，因此這些因素若是控制得不一致則會導致混合時間的不同(Seichter [8])。

文獻中也指出當雷諾數很小時 ($Re<20$)，混合時間數 K_m 為一常數(Seichter [8])：

$$K_m = \text{const} \quad (1.40)$$

由於攪拌器幾何尺寸的改變會造成探針位置的不同，而有不同程度的延遲時間(圖 1.4)，所以在扣除延遲時間後，混合時間數與攪拌器幾何尺寸有如下的關係(Seichter [8])：

$$K_m = 11.23 \left(\frac{D}{d}\right)^{2.27} \left(\frac{S}{d}\right)^{-0.98} \quad (1.41)$$

1.41 式適用的範圍為 $\text{Re} < 20, 1.59 \leq D/d \leq 3.37, 0.33 \leq S/d \leq 1.5,$, 在這個範圍
 $0.17 \leq d_s/d \leq 0.37, 1.37 \leq h/d \leq 1.5$

內 $\frac{D}{d}$ 愈大, $\frac{S}{d}$ 愈小, 其混合時間會變長。

1.2.4.2 循環時間與循環流量

螺桿攪拌器可以類比螺桿擠出器, 只不過雖然同樣使用的是螺桿, 前者的功能是希望在最小的壓力增加下得到最大流量, 後者是希望在小流量下得到大的壓力增加, 因此從前大部分的文獻都在利用已研究的螺桿擠出器(Paton[23], Carley[24])來類比分析螺桿攪拌器的流量。在套筒內的流動可以分為兩種: 拖曳流與壓力流。拖曳流是因為螺桿與套筒間的相對運動, 使得流體可以朝軸向正方向前進, 可以想像是兩平板運動, 其中一個平板不動, 另一個平板以螺桿轉速在運動, 也就是所謂的 Couette flow。壓力流則是因為螺桿與套筒運作時就像一個幫浦, 在套筒出口的壓力會提升, 這個逆壓會產生一個軸向逆方向的流動, 因為這流動是由壓力差所產生, 所以也就是所謂的 Poiseuille flow。所以總循環流量就可以由這兩種流動來表示:

$$q = q_d - q_p \quad (1.42)$$

其中, q_d 為拖曳流流量; q_p 為壓力流流量。

螺桿攪拌器的循環流量也可以透過計算套筒外與攪拌槽間的環狀通道流量來得知, 同時這個流量也與套筒內的流量相同:

$$Q_d = 2\pi \int_{R_s}^{R_0} \bar{V}_z r dr = -2\pi \int_{R_0}^{R_v} \bar{V}_z r dr \quad (1.43)$$

其中， R_0 為軸向速度 $\bar{V}_z = 0$ 的位置(圖 1.3)； R_s 為攪拌軸的位置； R_v 為攪拌器槽壁的位置。

很多文獻中指出，當雷諾數很小的時候($Re < 15$)也就是在潛流狀態下，循環數 K_Q 為一定值(Seichter [25], Sykora [26], Chavan [27])：

$$K_Q = const \quad (1.44)$$

循環流量也與攪拌器的尺寸有關，當 D/d 變大時，流道進出口的壓力差會降低，因此壓力流會減少，由 1.42 式來看，若是拖曳流不變，則整體的循環流量會上升。在 $1.59 \leq D/d \leq 3.37$, $0.33 \leq S/d \leq 1.5$ 的範圍內，當 $\frac{D}{d}$ 愈大， $\frac{S}{d}$ 愈大，其 K_Q 也愈大(Seichter [25])。

至於 Kunciewicz[2]的研究則是發現在 $\frac{S}{d} = 3$ 時， $K_Q = 0.46$ 為最大值，這是因為當 S/d 改變時有兩種相反的效應在互相影響： S/d 變大時，一方面螺距變大使流道寬度增加，流量增加；另一方面葉片圈數減少，流道長度變短，流量減少，因此有一個 K_Q 最大值會在某一個 S/d 出現。

循環時間 t_c 指的是攪拌流體循環攪拌槽一次的時間，可以透過追蹤粒子，或是量測濃度的變化週期(圖 1.4)，或者是利用循環流量(Seichter [25])來得出：

$$t_c = \frac{V_{tot}}{Q_d} \quad (1.45)$$

其中， V_{tot} 為攪拌槽體積。

1.2.4.3 功率消耗

螺桿攪拌器的功率消耗可以類比於螺桿擠出器，兩者的差別在於：螺桿擠出器的目的是要在最小的擠出流量下產生最大的壓差；螺桿攪拌器則是希望在最小的壓力增加下產生最大的流量(Seichter [28])。螺桿攪拌器的功率消耗 N_p^* 可以分為兩部分：

$$N_p^* = N_{p,f}^* + N_{p,p}^* \quad (1.46)$$

一部分是由拖曳流所產生的功率消耗 $N_{p,f}^*$ ，主要跟螺旋通道的深度與寬度有很大的關係，這部分可以藉由修正因子 F_z 修正螺桿擠出器的功率消耗而計算出螺桿攪拌器摩擦力功率消耗(Paton [23], Seichter [28])：

$$N_{p,f}^* = 2\pi^3 \left(\frac{h_t}{h} \right) \left(\frac{h}{d} \right) \left(\frac{d_t}{d} \right) \left[\left(\frac{d}{d_t - d_s} \right) \left(\frac{S - t}{S} \right) F_z (\cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi) + \left(\frac{d}{d_t - d} \right) \left(\frac{t}{S} \right) \right] \quad (1.47)$$

其中， h_t 為套筒高度； h 為葉片高度； d 為葉片直徑； d_t 為套筒直徑； d_s 為旋轉軸直徑； S 為螺距； t 為葉片厚度； ϕ 為葉片角度。另一部分則是由壓力流所產生的功率消耗 $N_{p,p}^*$ (Seichter [28]):

$$N_{p,p}^* = 25.9 \left(\frac{D}{d} \right)^{-4.39} \left(\frac{S}{d} \right)^{1.71} \left(\frac{d_s}{d} \right)^{-1.7} \left(\frac{h}{d} \right) \quad (1.48)$$

1.48 式適用的範圍為 $Re < 20$, $1.58 \leq D/d \leq 3.94$, $0.33 \leq S/d \leq 1.5$, $0.17 \leq d_s/d \leq 0.6$, $1.37 \leq h/d \leq 1.5$ 。從 1.48 式也

可以看出當 $\frac{D}{d}$ 愈小， $\frac{S}{d}$ 愈大， $\frac{d_s}{d}$ 愈小， $\frac{h}{d}$ 愈大，其 $N_{p,p}^*$ 也愈大。

另外拖曳流的功率消耗可以由計算攪拌槽內的熱能生成得出，而壓力

流的功率消耗則可以由零壓力增加下的最大流量與壓力增加量的乘積來算出，但是由於壓力增加較難量測，所以 Sykora[26]藉由套筒與攪拌槽壁間的環狀區域內流體的摩擦力損失來估計壓力流的功率消耗。

至於 Kuncewicz[2]則是使用計算流體力學的方法模擬二維攪拌器流場，忽略旋轉方向的流場變化，而在葉片旋轉區利用兩個經驗常數來代替形狀阻力跟摩擦阻力的作用，他得到功率數與幾何尺寸的關係如下：

$$N_p^* = 74.3(S_i)^{0.82} \left(\frac{S}{d}\right)^{0.25} \left(\frac{d_t-d}{2d_t}\right)^{-0.26} \quad (1.49)$$

其中， s_i 為葉片的圈數； $\left(\frac{d_t-d}{2d_t}\right)$ 則為套筒與槽壁間隙。1.49 式適用的範圍為 $1 \leq s_i \leq 4.5$, $2 \leq D/d \leq 3.4$, $0.33 \leq S/d \leq 1.5$ 。從上式可以看出 S/d 的改變同時也會改變 s_i ，當 S/d 變大時， s_i 會減少，使得 N_p^* 的最小值發生在 $1 \leq S/d \leq 1.5$ 。

很多文獻都指出，當 Re 很小的時候($Re < 20$)，功率數 N_p^* 為一定值

(Kuncewicz[2], Seichter [28])：

$$N_p^* = N_p \cdot Re = const \quad (1.50)$$

1.2.4.4 混合能量與混合效率

結合循環時間 τ_c 與功率消耗 P 可以做為攪拌器能量消耗 E 的一個指標

(Seichter [25])：

$$E = \frac{Pt_c^2}{\mu D^3} = \left(\frac{N_p^*}{K_Q^2}\right) \left(\frac{D}{d}\right)^3 \quad (1.51)$$

而在 $\frac{D}{d} \approx 2$, $\frac{S}{d} = 1$ 時有一個最小的能量消耗；在 $\frac{S}{d} < 0.75$ 時能量消耗則非常大不適合用來攪拌(Seichter [25])。

Kuncewicz[2]則是定義了另一種**能量數** E ：

$$E = \frac{Pt_m}{\mu nd^3} = \pi \left(\frac{N_p^*}{K_Q} \right) \left(\frac{H}{D} \right) \left(\frac{D}{d} \right)^3 \quad (1.52)$$

可以發現在 $\frac{D}{d}=1.9$ ， $\frac{S}{d}=1.5$ 時，分別有最小值。

1.2.5 螺帶攪拌器

有兩種效應會影響螺帶攪拌器的混合速率：第一種效應是位於攪拌器葉片與槽壁間隙的**流體剪切效應**，由於在葉片間隙的流體剪應變率很大，使得在間隙的流體可以很容易的被變形破碎而互相混合；第二種效應是間隙流體與非間隙流體的**交換效應**，是由螺帶葉片產生的軸向流循環所形成的，由於非間隙流體的剪應變率較小，若不能與間隙流體交換則混合較為困難，像是錨狀攪拌器雖然也有高剪應變率的區域，但是因為沒有軸向流循環來與低剪應變率區域的流體交換，使得混合效果很差。

1.2.5.1 混合時間

如同螺桿攪拌器，文獻中也指出當雷諾數很小時($Re < 40$)，**混合時間數** K_m 為一常數(Käppel[5],Takahashi 等人[18]，Delaplace 等人[4])。

Takahashi 等人[18]定出了一個混合時間的關係式：

$$\frac{1}{nt_m} = \sqrt{N_p \operatorname{Re} \left(\frac{d}{D} \right)^3} \frac{4}{\pi} \frac{Q_1}{nd^3} \frac{Q_e}{nd^3} \quad (1.53)$$

其中根號項代表間隙內剪應變率的量， Q_1 代表循環流量， Q_e 代表主循環與次循環之間的交換流量。從 1.53 式我們可以知道，循環流量的大小可以影

響混合時間的長短，但是循環快並不一定代表混合就快，因為還有其他的因素會影響混合，像是流體受到的剪切力的大小，還有主循環與次循環流體間交換的速率等。

影響混合時間長短的因素有很多像是葉片與槽壁間隙(C/d)、螺距(S/d)、葉片寬度(W/d)、葉片數目(i)等，還有間隙剪應力的流體形變效應以及循環流量的大小。Delaplace 等人[4]整理了許多關於螺帶攪拌器的文獻，發現當 C/d 很小的時候，混合時間是會增加(Käppel [5],Takahashi 等人[18])，因為在間隙產生的剪應力很大，使得在間隙的流體只有很強的切線向流動，而沒有軸向流動，無法與攪拌槽中心部位的流體進行混合，因此混合較慢，所以適當的增加間隙有助於減少混合時間，使間隙內的流體可以流出間隙與其他位置的流體交換，但是當間隙太大時混合時間又會上升，因為流體在攪拌槽上半部與下半部形成各自的循環。

而增加 S/d 有可能會降低也有可能會提高混合時間(Delaplace 等人[4],Takahashi[18])，因為當 S/d 增加有兩種相反的效應會同時出現，一方面使得流量增加，但是另一方面會使間隙的剪應力減少，兩種效應增加或減少的比例不同就會使混合時間降低或提高。像是在 C/d 很小的時候，當 S/d 增加時剪應力的減少比流量的增加來的大，所以混合時間會提高； C/d 較大的時候，當 S/d 增加時流量的增加比剪應力的減少來的大，所以混合時間會降低，但是隨著 S/d 的增加流量增加的幅度會愈來愈小，到達一個極限之

後流量就不再增加，因而使得混合時間快速提高。

Delaplace 等人[4],Takahashi 等人[18]也發現 W/d 的增加可以幫助降低混合時間，因為 W/d 的增加可以使軸向流量上升，使循環加快，但是當 W/d 增加到太大時混合時間會提高，因為在葉片區的軸向流動比起葉片跟軸心間的軸向流動強太多，反而不利混合。

對於葉片數目 i 對混合時間的影響在文獻中研究的很少，一般發現雙螺帶攪拌器($i=2$)的混合時間要比螺帶攪拌器($i=1$)的混合時間短(Käppel [5],Takahashi 等人[18])，因為雙螺帶攪拌器產生的軸向循環流量要比螺帶攪拌器的循環流量高。

Takahashi 等人[18]的研究中發現當幾何參數分別在 $C/d=0.06$ ， $S/d=0.9$ ， $W/d=0.15$ 時，混合過程最快。

在 Delaplace 等人[4]的研究中，當雷諾數很小的時候，混合時間數 K_m 是維持在一個定值附近， $Re < 60$ 時 $K_m = 67$ ，當 $Re > 60$ 時 K_m 就會隨著雷諾數下降。

1.2.5.2 循環時間與循環流量

上面提到過循環時間不必然等於混合時間(圖 1.4)，因為混合時間還受到很多因素的影響，所以不能只靠流量就斷定混合快慢。但是循環時間受到的影響就比較單純，因為循環時間是指一個粒子以同方向通過某一個平面兩次的間隔時間或是攪拌槽內流體某一週期性變動的性質變動一個週期

的時間(圖 1.4)。因此循環時間的長短跟流量的大小有絕對的關係，流量大循環自然就快，流量小循環就慢。循環時間與循環流量的關係可以用下列的式子來表示：

$$Q_d = \frac{\Delta V}{t_c} \quad (1.54)$$

其中 ΔV 為攪拌槽內的流體體積。

攪拌器的幾何尺寸同樣也會影響循環流量或循環時間，Delaplace 等人[4]整理的文獻中發現，當 C/d 小的時候攪拌器有較大的流量，循環時間較短，隨著 C/d 變大流量會變小，循環時間就變長。

S/d 的變大有助於流量的增加，因此循環時間下降，但是流量的增加有一個極限，當 $S/d = \pi$ 或是葉片與水平夾角 $\phi = 45^\circ$ 的時候，流量達到一個極限，之後流量就會下降，在 Takahashi 等人[18]的研究中在 $S/d < 2$ 的範圍內，循環時間是一直下降的，但下降的幅度漸漸趨緩。

W/d 的變大也有助於流量的增加，因此循環時間會縮短，但是流量的增加有一個極限，在 Takahashi 等人[18]的研究中在 $W/d = 0.15$ 的附近可以得到流量的最大值，在這之後流量就急速下降，循環時間也跟著上升。因為葉片太大使得葉片區的軸向流動太強，靠近軸心的軸向流動太弱，不利於主循環的流動。

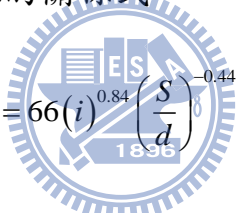
在 Delaplace 等人[4]的研究中，當雷諾數很小的時候，循環時間數 K_c 是維持在一個定值， $Re < 250$ 時 $K_c = 12.6$ ，當 $Re > 250$ 時 K_c 急速下降，到 $Re > 3000$

時又維持定值 $K_c = 1.15$ 。

1.2.5.3 功率消耗

一般研究攪拌器功率消耗都是量測在不同雷諾數 Re 下的功率數 N_p 變化，得知在低雷諾數的情況下 N_p 與 Re 成反比，兩者的乘積 $N_p^* = N_p Re$ 維持一定值，如 $Re < 60$ 時 $N_p^* = 315$ (Delaplace 等人 [4])， $Re < 30$ 時 $N_p^* = 300$ (Käppel [5])。

螺帶攪拌器的功率消耗也會受到幾何尺寸(葉片與槽壁間隙 C/d 、螺距 S/d 、葉片寬度 W/d 、葉片數目 i 等)的影響，Delaplace 與 Leuliet [29] 利用實驗結果整理出一個功率消耗的關係式：



$$N_p^* = 66(i)^{0.84} \left(\frac{S}{d}\right)^{-0.44} 0.5 \left(\frac{2C}{d}\right)^{-0.29} \left(\frac{1}{d}\right) \quad (1.55)$$

Käppel [5] 則量測了 12 種尺寸的螺帶攪拌器的功率消耗得到關係式：

$$N_p^* = 60(i)^{0.8} \left(\frac{S}{d}\right)^{-0.5} \left(\frac{C}{d}\right)^{-0.3} \quad (1.56)$$

1.56 式適用的範圍為 $H/d = 1.1$, $h/d = 1$, $W/d = 0.1$, $i = 1 \text{ and } 2$,
 $0.5 \leq S \leq 1$, $1.02 \leq D/d \leq 1.1$, $1 \leq Re \leq 30$

另外 Shekhar 與 Jayanti [30] 則將 Metzner-Otto 比例常數 K_s 吸收入原本用來估計牛頓流體的螺帶攪拌器功率數關係式，就可以結合牛頓流體與非牛頓流體的功率數關係式：

$$N_p \cdot Re_a = 100(i) \left(\frac{W}{d}\right) \left(\frac{S}{d \sin \phi}\right) \left(\frac{d_{avg}}{d}\right) \left(\frac{C}{D}\right)^{-0.5} = 100G(C/D)^{-0.5} \quad (1.57)$$

其中， Re_a 為表觀雷諾數 $Re_a = \rho n d^2 / K (K_s n)^{m-1}$ ， K 為稠度指標，他們選擇比

例常數 $K_s = 21.7$ ， i 為螺帶葉片數目， $S/\sin\phi$ 為螺帶葉片的有效長度，適用的範圍為 $0.1 < Re < 100$, $0.3 < m < 1.0$, $0.56 < G < 1.07$ 。但是他們發現對於太高的 G 值 N_p 的預測會過高，太小的 G 值則 N_p 的預測會過低，只有 G 值在 1 的附近時才較為準確，他們認為是因為將 G 對功率消耗的影響誤認為線性的關係，然而實際上並不是單純的線性關係，因此不管是葉片數目、葉片寬度、葉片螺距都還需要更多的研究，才能清楚它們對功率消耗的影響。

1.2.6 CFD 方法在攪拌器的應用

攪拌器性能與其幾何外型有很大的關係，除了上述利用實驗與經驗法則的方法來設計攪拌器以外，還可以利用 CFD 的方法來幫助攪拌器的設計，以下舉一些使用 CFD 方法應用在攪拌器上的研究：

Tanguy 等人[31]利用有限元素法模擬螺帶—螺桿攪拌器，他們使用的是單一旋轉座標系，並可以計算出循環時間與攪拌器扭矩。

Bertrand 等人[32]則是利用有限元素法模擬 second-order fluids 在螺帶攪拌器的流場。

Devals 等人[33]利用了 CFD 方法研究 Maxblend 攪拌器的流場特性，像是雷諾數或是葉片與槽底間隙對功率消耗、剪應變率分佈以及流場的影響。

Tanguy 等人[34]使用兩種旋轉座系模擬不同轉速的同心攪拌器，上層為螺帶攪拌器，下層為圓盤渦輪攪拌器(Rushton turbine)，模擬結果顯示上下兩層雙攪拌器的 pumping 效果比單一螺帶攪拌器好。

Thibault and Tanguy[35]模擬了不同轉速的同心雙攪拌器，內外分別為斜葉渦輪攪拌器與錨式攪拌器，並將計算所得的功率消耗與實驗做比對。

De la Villéon 等人[36]使用商業軟體 POLY3D 模擬三種攪拌器：單螺帶攪拌器，雙螺帶攪拌器，螺帶—螺桿攪拌器，結果顯示以雙螺帶攪拌器的混合效率最好。

Shekhar 和 Jayanti[30]使用 FLUENT 模擬偽塑性流體在螺帶攪拌器的流場，並顯示葉片外緣剪應變率與葉片轉速成正比，此正比常數與流體性質無關而與攪拌器幾何有關。

Rivera 等人[37]使用 POLY3D 模擬不同轉速同心雙攪拌器，內為圓盤渦輪攪拌器，外為錨式攪拌器，結果顯示不管是功率消耗、pumping 流率以及混合時間都是同向轉動要比反向轉動的混合效率好。

Ihejirika 和 Ein-Mozaffari[38]使用 FLUENT 多重參考座標系模擬偽塑性流體在螺帶攪拌器的流場，並與實驗數據還有關係式比較。

Parajapati 和 Ein-Mozaffari[39]使用 FLUENT 模擬偽塑性流體在錨式攪拌器的流場，結果顯示不管是功率消耗或是混合時間，四葉效率會比雙葉來得好。

Rahimi 等人[40]使用 FLUENT 模擬改良的螺帶攪拌器，其在中心軸與螺帶葉片的連接桿上安裝兩片 45° 的斜葉，結果顯示混合效率提高，但功率消耗也大幅增加。

1.3 研究目的

本研究旨在發展一套求解三維不可壓縮、層流、牛頓-非牛頓流體之攪拌器流場與濃度場計算程式，並用來研究螺桿攪拌器與螺帶攪拌器內流體速度場與濃度場，以及攪拌器幾何尺寸(槽直徑、葉片螺距、葉片間隙、葉片寬度)對攪拌器功率消耗、循環流量、混合效率、混合時間的影響，同時也研究流體性質(牛頓流體與非牛頓流體)對攪拌器性能的影響，最後根據上述的結果得出最佳攪拌器幾何尺寸，以及攪拌器性能與尺寸關係式。

由於攪拌器攪拌的流體具有高黏性，本研究使用三維不可壓縮層流來模擬攪拌器內流場，計算網格為三維非結構性網格，計算方法為有限體積法。由於攪拌器葉片等轉速轉動使流場具有週期性的變動，因此假設流場為擬似穩態，為葉片旋轉至某一位置的瞬時狀態，並採用多重參考座標系，將葉片旋轉掃過的區域定為旋轉座標系，此區以外的區域定為靜止座標系，解完擬似穩態速度場再解非穩態濃度場以求得混合時間。牛頓流體選用的是葡萄糖漿，非牛頓流體則是使用修正 Herschel-Bulkley 模式來模擬三仙膠(具降伏應力的偽塑性流體)的流變學性質。

二、數學模式

2.1 簡介

本章介紹用來模擬攪拌器流場所使用的數學模式包括：2.2 節基本假設；2.3 節多重參考座標系統御方程式；2.4 節無因次化多重參考座標系統御方程式；2.5 節邊界條件。

2.2 基本假設

因為有攪拌器葉片的旋轉，攪拌槽中的流體會被攪拌器旋轉所驅動，由於攪拌器葉片不斷往復周期的轉動，最終將使攪拌槽內形成週期性變化的流場。欲完全模擬此一過程，必須從靜止的起始狀態開始，經由多個旋轉週期的計算才能得到，如此需要極龐大的計算量，但由於在實際應用上，主要著眼於攪拌器的一些性能參數，此等性能參數可從**擬似穩態**的計算得到與實際情形相近的結果，但卻可節省大量的計算時間，因此本計劃主要以**擬似穩態**做為基本的假設。

所謂**擬似穩態**就是假設攪拌器維持在某一狀態下的瞬時流場為穩態流場，並以穩態的方程式來計算攪拌器內的瞬時流場，攪拌器葉片不會轉動而位移，是固定停留在某一位置，而只擁有旋轉速度。不過因為攪拌器葉片擁有旋轉速度，使得葉片附近會被葉片旋轉掃過的區域，與攪拌槽內其他區域，在流體運動的數學方程式上會產生本質上的不同，因此必須採用**多重參考座標系**來處理，這部分將會在 2.3 節中做更詳盡的討論。

除了**擬似穩態**的假設外，對於攪拌器流場我們還做以下之假設：(1)本研究之攪拌器內的工作流體為液體，所以模擬攪拌器流場為**連續流場**，流場沒有不連續、滑移流與分子運動的現象產生，而在流體濃度混合的模擬中，並未考慮分子濃度擴散；(2)本研究將模擬攪拌器的**三維流場**；(3)因為工作流體為液體，且攪拌器轉速低，因此流場沒有可壓縮的現象發生，因此攪拌器內的流場為**不可壓縮層流場**，其雷諾數的定義為：

$$Re = \frac{\rho n d^2}{\mu} \quad (2.1)$$

其中， ρ 是液體密度； n 是攪拌器轉速； d 是攪拌器葉片直徑； μ 是液體黏滯係數。文獻中顯示攪拌器內的流場大約在 $Re < 20$ 時為層流。(4)攪拌器在攪拌過程中可以控制整個攪拌槽內的溫度不會隨著攪拌器產生的熱而上升，因此在模擬攪拌器時，設定為**等溫流場**，不會因為溫度的改變產生浮力而影響流場的變化。(5)本研究攪拌器內的液體密度皆為相同，在模擬過程中保持定值**液體密度不變**，不計重力影響，不會影響流場與濃度擴散。(6)本研究會分別針對牛頓流體與非牛頓流體來模擬，所以攪拌器內液體的黏度有可能會隨著液體在流場內受到的剪應變率的不同而改變：若為牛頓流體則液體黏度為定值；若為非牛頓流體則液體黏度為剪應變率的函數。

2.3 多重參考座標系統御方程式

2.2 節中提到由於攪拌器葉片的旋轉，使得攪拌槽內有一部分的空間區域是隨著葉片作定轉速的旋轉，這個空間區域就是葉片所掃過的範圍，擁

有旋轉速度，而攪拌槽內其他葉片未掃過的空間區域則是靜止不動，所以在流體運動方程式的表現方式上就會有本質上的不同，因此在模擬攪拌器時，必須使用**多重參考座標系**，將攪拌器內的流場區域分為兩個部分來計算(圖 2.1)：一個就是隨葉片旋轉的區域，使用**旋轉座標系**，擁有旋轉速度；另一個就是固定不動的區域，使用**靜止座標系**，沒有旋轉速度。

另外要特別說明的是，在 2.2 節的基本假設中有提到，本研究假設攪拌器流場為**擬似穩態**，為攪拌過程的某一瞬時狀態，攪拌器葉片不會因為轉動而位移而是固定在某一位置，因此雖然在旋轉座標系內的點有旋轉速度，但是計算網格也不會隨著旋轉與變形，只擁有旋轉速度，如此其**多重參考座標系統**御方程式可寫成下列通式：

連續方程式

$$\nabla \cdot [\rho(\vec{V} - \vec{V}_g)] = 0 \quad (2.2)$$

動量方程式

$$\nabla \cdot [\rho(\vec{V} - \vec{V}_g)(\vec{V} - \vec{V}_g)] = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta D_{ij}) - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times (\vec{V} - \vec{V}_g) \quad (2.3)$$

在 2.3 式中等式右邊最後兩項分別代表旋轉產生的**離心力**與**科氏力**(Coriolis force)，此外， \vec{V}_g 為網格旋轉速度，在葉片旋轉區域內：

$$\vec{V}_g = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.4)$$

$\vec{\Omega} = 2\pi n \vec{k}$ 為攪拌器葉片的旋轉角速度， \vec{r} 為旋轉座標系內的點相對於軸心部位的位置向量；在靜止座標區域內： $\vec{V}_g = 0$ ，同時上面動量方程式中的**離心力**及**科氏力**設為零。另外在 2.3 式中動量方程式擴散項的 D_{ij} 代表剪應變率

張量：

$$D_{ij} = \left[\frac{\partial(V_i - V_{gi})}{\partial x_j} + \frac{\partial(V_j - V_{gj})}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

除此之外在 2.3 式中的黏滯係數 η 在牛頓流體中代表動黏度 (μ , dynamic viscosity)，一般可視為定值，但在非牛頓流體中，此係數不是定值，而是剪應變率 $\dot{\gamma}$ 的函數，然而對於非牛頓流體黏滯係數的近以方式有許多種模式 (Tanguy 等人 [34]，Neofytou 和 Drikakis [41]~Wang 等人 [48])，如：Power-Law 模式、Casson 模式、Quemada 模式、Prandtl-Eyring 模式、Powell-Eyring 模式、Hyperbolic Tangent 模式、Sisko 模式、Carreau 模式，在本研究我們預備採用下列的 **Herschel-Bulkley** 模式 (Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38]，Prajapati 和 Ein-Mozaffari [39]，Saeed 等人 [49])：

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{|\dot{\gamma}|} = \frac{\tau_y}{|\dot{\gamma}|} + K |\dot{\gamma}|^{m-1} \quad (2.6)$$

其中 $\dot{\gamma}$ 為剪應變率，其定義如下：

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}| &= \sqrt{\frac{1}{2} I_2} = \sqrt{\frac{1}{2} (D_{ij} D_{ji})} \\ &= [2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

在 2.6 式中， τ_y 為降伏應力： $\tau_y \neq 0$ 代表帶降伏應力， $\tau_y = 0$ 代表無降伏應力； K 為稠度係數； m 為流體特性指標： $m=1$ 代表牛頓流體， $m<1$ 代表具剪薄性 (shear thinning)，而 $m>1$ 代表具剪稠性 (shear thickening)。

本研究使用的非牛頓流體為降伏偽塑性流體，因此 $\tau_y \neq 0$ 且 $m<1$ 。

濃度方程式

在攪拌器性能探討中，上述的流場連續方程式與動量方程式可假設為擬似穩態，但在模擬兩液體的濃度混合時則需要考慮暫態的情況，因此為了模擬液體濃度混合的動態過程，需要使用如下的濃度傳輸方程式：

$$\frac{Dc}{Dt} = D_{AB} \nabla^2 c \quad (2.8)$$

此處 c 代表某一液體的濃度， D_{AB} 為液體間的濃度擴散係數。在求解液體濃度場分佈前必須先求得攪拌槽內的速度場分佈，再將此速度場代入此濃度方程式來求得液體濃度隨時間的變化情形。

2.4 無因次化多重參考座標系統御方程式

為了使分析更方便，在 2.4 節我們再將 2.3 節中的多重參考座標系統御方程式做無因次化的處理。首先先定義一些無因次化參數：

$$\begin{aligned} \nabla^* &= \nabla \cdot d, \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{nd}, \quad p^* = \frac{p}{\rho n^2 d^2}, \quad Re = \frac{\rho n d^2}{\eta}, \quad D_{ij}^* = \frac{D_{ij}}{n} \\ \vec{\Omega}^* &= \frac{\vec{\Omega}}{n}, \quad \vec{r}^* = \frac{\vec{r}}{d}, \quad c^* = \frac{(c - c_B)}{(c_A - c_B)}, \quad t^* = t \cdot n, \quad Sc = \frac{\eta}{\rho D_{AB}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

如此其無因次化多重參考座標系統御方程式經過整理可寫成下列通式：

連續方程式

$$\nabla^* \cdot [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)] = 0 \quad (2.10)$$

動量方程式

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)] \\ = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot (D_{ij}^*) - \vec{\Omega}^* \times (\vec{\Omega}^* \times \vec{r}^*) - 2\vec{\Omega}^* \times (\vec{V}^* - \vec{V}_g^*) \end{aligned} \quad (2.11)$$

濃度方程式

$$\frac{Dc^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re Sc} \nabla^2 c^* \quad (2.12)$$

2.5 邊界條件

為了使求得的速度場與濃度場較為準確，則必須要設定適當的邊界條件：**(1)**攪拌槽內液體的流動是因為攪拌器葉片的旋轉，所以**攪拌器中心軸與葉片的旋轉速度** $\bar{V}_w = \bar{\Omega} \times \bar{r}_w$ **(2)**攪拌槽槽壁、槽底和導流套筒皆為靜止不動，並且在 2.2 節中假設液體無滑移流現象，因此其速度為零， $\bar{V}_w = 0$ **(3)**攪拌液體表面設定為自由液面，因此其速度為：

$$\begin{cases} V_{w,\perp} = 0 \\ \nabla_{\perp} V_{w,\parallel} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

(4)所有邊界上的濃度皆假設其垂直邊界的濃度梯度為零：

$$\nabla_{\perp} c_w = 0 \quad (2.14)$$

2.6 非牛頓流體無因次化統御方程式

由於非牛頓流體的黏滯係數隨局部位置的剪應變率改變，因此我們同樣將非牛頓流體的統御方程式無因次化並做以下處理：

連續方程式

連續方程式同 2.10 式。

動量方程式

根據 2.11 式我們可以將動量方程式整理如下式：

$$\begin{aligned}
& \nabla^* \cdot [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)] \\
& = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re_L} \nabla^* \cdot (D_{ij}^*) - \vec{\Omega}^* \times (\vec{\Omega}^* \times \vec{r}^*) - 2\vec{\Omega}^* \times (\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中雷諾數 Re_L 為：

$$Re_L = \frac{\rho n d^2}{\eta(\dot{\gamma})} = \frac{\rho n d^2}{\eta(n\dot{\gamma}^*)} \tag{2.16}$$

根據 2.7 式我們可以將 2.16 式中的剪應變率 $\dot{\gamma}$ 用無因次化的剪應變率 $\dot{\gamma}^*$ 與轉速 n 的乘積取代：

$$\begin{aligned}
|\dot{\gamma}| &= \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[2\left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + 2\left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^2 + \left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{nd}{d}\right)^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right)^2 \right]^{1/2} \\
&= n \left[2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right)^2 \right]^{1/2} \\
&= n |\dot{\gamma}^*|
\end{aligned} \tag{2.17}$$

濃度方程式

根據 2.12 式我們可以將濃度方程式整理如下式：

$$\frac{Dc^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re_L Sc_L} \nabla^* \cdot \vec{c}^* = \frac{1}{Pe_L} \nabla^* \cdot \vec{c}^* \tag{2.18}$$

其中史密特數 Sc_L 為：

$$Sc_L = \frac{\eta(n\dot{\gamma}^*)}{\rho D_{AB}} \tag{2.19}$$

結合 2.16 式與 2.19 式可以得到佩克萊數 Pe_L ：

$$Pe_L = Re_L Sc_L = \frac{nd^2}{D_{AB}} \quad (2.20)$$

另外我們需要一個能夠顯示流場特性的雷諾數，在非牛頓流體使用的是表觀雷諾數 Re_a ，根據 2.6 式的 Herschel-Bulkley 模式與雷諾數的定義，我們可以得到：

$$Re_a = \frac{\rho nd^2}{\tau / \dot{\gamma}_{avg}} = \frac{\rho nd^2}{\tau / (K_s n)} = \frac{\rho nd^2 (K_s n)}{\tau_y + K (K_s n)^m} \quad (2.21)$$

其中 $\dot{\gamma}_{avg} = K_s n$ 為葉片尖端的平均剪應變率； K_s 稱為 Metzner-Otto 常數，是 $\dot{\gamma}_{avg}$ 與 n 的比值。



三、數值方法

3.1 簡介

本研究就是利用一套數學模式以及設定適當的假設與邊界條件來模擬攪拌槽流場及液體濃度混合，透過數值計算得出接近真實流場與濃度混合的情況，並且獲得相關資訊。不過要利用電腦做數值運算之前，必須先將第二章的無因次化多重參考座標系統御方程式與邊界條件做差分化的處理，因此本章即為方程式差分化與求解差分代數方程式的方法。

本章的數值方法為近年來本篇作者所發展的一套三維有限體積數值計算法，使用非結構性網格建立計算域，並結合多重參考座標系來處理旋轉葉片，已經成功運用在模擬斜葉渦輪攪拌器 (Tsui 等人[50]) 與圓盤斜葉渦輪攪拌器 (Tsui 等人[51])，本研究則繼續應用此套方法，本章各節包括：3.2 節動量差分方程式；3.3 節壓力修正差分方程式；3.4 節濃度差分方程式；3.5 節壁面剪應力與邊界壓力；3.6 節多重參考座標系介面修正方程式；3.7 節非牛頓流體流變學性質模式(修正 Hershel-Bulkley 模式)；3.8 節 SIMPLE 法。

3.2 動量差分方程式

根據 2.11 式動量方程式可以由以下通式來表示：

$$\nabla^* \cdot [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)\Phi^*] = \nabla^* \cdot (\Gamma \nabla^* \Phi^*) + \vec{q}_\Phi^* \quad (3.1)$$

Φ^* 為某一速度分量， $\Gamma=1/\text{Re}$ 。3.1 式中包含了三項，其中等式左邊代表動量方程式的對流項，等式右邊第一項為擴散項，等式右邊第二項則為源項。

3.1 節中提到本研究使用的是**有限體積法**，因此先將 3.1 式對**控制體積**做體積分：

$$\iiint_{\Delta v} \nabla^* \cdot [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)\Phi^*] dv = \iiint_{\Delta v} \nabla^* \cdot (\Gamma \nabla^* \Phi^*) dv + \iiint_{\Delta v} \vec{q}_\Phi^* dv \quad (3.2)$$

由於我們是使用**非結構性網格**方法，因此**控制體積**可以是任意形狀的多邊形(圖 3.1)。接著我們再使用**高斯散度定理**將對流項與擴散項由體積分轉化為面積分：

$$\iint_s [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)\Phi^*] \cdot d\vec{s} = \iint_s (\Gamma \nabla^* \Phi^*) \cdot d\vec{s} + \iiint_{\Delta v} \vec{q}_\Phi^* dv \quad (3.3)$$

接下來我們將分別在各小節中對此三項做差分處理。

3.2.1 對流項

對於 3.3 式中的對流項我們利用**均值定理**將面積分轉化為差分形式：

$$\iint_s [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)\Phi^*] \cdot d\vec{s} = \sum_{f=1}^n [(\vec{V}^* - \vec{V}_g^*) \cdot \vec{s}]_f \Phi_f^* = \sum_{f=1}^n \dot{m}_f^* \Phi_f^* = \sum_{f=1}^n F_f^c \quad (3.4)$$

3.4 式中的 f 為多邊形**控制體積**的 n 個面， F_f^c 為單一個面的**對流通量**， \dot{m}_f^* 則為其面上的**無因次質量流率**，對於某一個面 f (圖 3.1)，對流通量可以採用上風差分來計算。所謂**上風差分**，當流體流過面 f 時，若是由 P 流向 C 則 P 為上風點， $\Phi_f^* = \Phi_P^* + \nabla^* \Phi_P^* \cdot \vec{\delta}_{Pf}$ ， $\vec{\delta}_{Pf}$ 為 P 到 f 的向量；反之若是由 C 流向 P 則 C 為上風點， $\Phi_f^* = \Phi_C^* + \nabla^* \Phi_C^* \cdot \vec{\delta}_{Cf}$ ， $\vec{\delta}_{Cf}$ 則為 C 到 f 的向量。在此我們採用一

階上風差分與二階上風差分混合的方式來計算：

$$\begin{aligned}
 F_f^c &= \dot{m}_f^* \Phi_f^* = F_f^{UD} + \gamma F_f^{2nd\ UD} \\
 &= [\max(\dot{m}_f^*, 0) \Phi_p^* - \max(-\dot{m}_f^*, 0) \Phi_c^*] \\
 &\quad + \gamma [\max(\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* \Phi_p^* \cdot \vec{\delta}_{pf} - \max(-\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* \Phi_c^* \cdot \vec{\delta}_{cf}]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

γ 為二階上風差分的混合比例，乃是介於 0 到 1 之間的數值，在我們的計算中選擇的是 0.9。3.5 式中的第一項為一階上風差分將被置於差分方程式的係數矩陣中，第二項為二階上風差分則會置於差分方程式中的源項。

3.2.2 擴散項

對於 3.3 式中的擴散項我們利用均值定理將面積分轉化為差分形式：

$$\iint_s (\Gamma \nabla^* \Phi^*) \cdot d\vec{s} = \sum_{f=1}^n [\Gamma \nabla^* \Phi^* \cdot \vec{s}]_f = \sum_{f=1}^n F_f^d \tag{3.6}$$

F_f^d 為單一個面的**擴散通量**，對於擴散通量有許多的表示方法，但是這些方法通常由二維問題擴展至三維時需要重新推導，且其差分方程式會變的複雜許多，下面對於某一個面 f 的擴散通量，我們採用 **over-relaxed** 法來計算，則完全不需要考慮二維或三維：

$$F_f^d = [\Gamma \nabla^* \Phi^* \cdot \vec{s}]_f = \Gamma_f \nabla^* \Phi_f^* \cdot \vec{d} + \Gamma_f \nabla^* \Phi_f^* \cdot (\vec{s}_f - \vec{d}) \tag{3.7}$$

\vec{d} 為一與 P 到 C 同方向之向量可以透過向量 $\vec{\delta}_{PC}$ 與控容面向量 \vec{s}_f 來定義(圖

3.1)：

$$\vec{d} = \frac{|\vec{s}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{s}_f} \vec{\delta}_{PC} \tag{3.8}$$

將 3.8 式代入 3.7 式中則擴散通量可近似為：

$$F_f^d = \frac{\Gamma_f |\vec{s}_f|^2}{\delta_{PC} \cdot \vec{s}_f} (\Phi_C^* - \Phi_P^*) + \Gamma_f \nabla^* \Phi_f^* \cdot (\vec{s}_f - \vec{d}) \quad (3.9)$$

面上的梯度 $\nabla^* \Phi_f^*$ 則可由相鄰格點 P 到 C 的梯度值內插來近似：

$$\nabla^* \Phi_f^* = \overline{\nabla^* \Phi_f^*} = (1 - f_p) \nabla^* \Phi_P^* + f_p \nabla^* \Phi_C^* \quad (3.10)$$

其中 f_p 為權重因子。3.9 式中的第一項將被置於差分方程式的係數矩陣中，第二項是非正交網格所產生，則會置於差分方程式中的源項。

3.2.3 源項

3.3 式中的源項包含了壓力梯度、離心力和科氏力，

$\vec{q}_\Phi^* = -\nabla^* p^* - \vec{\Omega}^* \times (\vec{\Omega}^* \times \vec{r}^*) - 2\vec{\Omega}^* \times (\vec{V}^* - \vec{V}_g^*)$ ，將它對控制體積體積分後變為：

$$\iiint_{\Delta v} \vec{q}_\Phi^* dv = (\vec{q}_\Phi^* \cdot \vec{v})_P \quad (3.11)$$

而此 3.11 式也將會被放置於差分方程式中的源項。

3.2.4 動量差分方程式

將 3.5 式、3.9 式與 3.11 式中的各項整理至係數矩陣與源項後，可以得到

到下列的動量差分方程式：

$$A_P \Phi_P^* = \sum_{C=1}^n A_C \Phi_C^* + S_\Phi \quad (3.12)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} A_C = \max(-\dot{m}_f^*, 0) + \frac{\Gamma_f |\vec{s}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{s}_f}, \quad \Gamma_f = \frac{1}{\text{Re}_f} \\ A_P = \sum_{C=1}^n A_C \\ S_\Phi = - \sum_{f=1}^n \gamma [\max(\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* \Phi_P^* \cdot \vec{\delta}_{Pf} - \max(-\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* \Phi_C^* \cdot \vec{\delta}_{Cf}] \\ \quad + \sum_{f=1}^n [\Gamma_f \nabla^* \Phi_f^* \cdot (\vec{s}_f - \vec{d})] + (\vec{q}_\Phi^* \cdot \vec{v})_P \end{array} \right. \quad (3.13)$$

由於疊代過程中有時會振盪產生不穩定，為了使疊代更為穩定，則引入一個鬆弛因子 α_Φ (通常介於 0~1) 來使係數矩陣放大：

$$A'_P \Phi_P^{*(n+1)} = \sum_{C=1}^n A_C \Phi_C^{*(n+1)} + S_\Phi^{(n)} + (1 - \alpha_\Phi) A'_P \Phi_P^{*(n)} \quad (3.14)$$

其中 $A'_P = \frac{A_P}{\alpha_\Phi}$ ，(n+1) 表示本次疊代，(n) 表示上一次疊代。

3.3 壓力修正差分方程式

根據 **Partankar** 提出的 **SIMPLE** 法，可以由動量差分方程式找到速度與壓力的耦合關係式，然後求得面上質量流率，再使所有通過控容面的質量流率滿足質量守恆，可以得到一個壓力修正方程式，來求解壓力修正量，並修正出新的壓力、速度與質量流率能夠滿足連續方程式。以下就分別在各小節中詳述上述過程。

3.3.1 速度-壓力耦合關係式與面上質量流率

由 3.12 式可以知道，若把壓力梯度由 3.12 式中的源項中提出，再經過整理可以成為下列式子：

$$\vec{V}_P^* = \vec{H}_P^* - D_P \nabla^* p_P^* \quad (3.15)$$

其中 $D_P = \frac{\Delta v}{A_P}$ 。

同樣的在控容面 f 上也有這種關係：

$$\vec{V}_f^* = \vec{H}_f^* - D_f \nabla^* p_f^* \quad (3.16)$$

其中上標“ $\bar{}$ ”表示是由控容面相鄰格點 P 與 C 上的值內插而得，如此 3.16

式中的 \vec{H}_f^* 為：

$$\vec{H}_f^* = \vec{V}_f^* + D_f \nabla^* p_f^* \quad (3.17)$$

將 3.17 式代入 3.16 式則可得到控容面上速度-壓力耦合關係式：

$$\vec{V}_f^* = \vec{V}_f^* - (D_f \nabla^* p_f^* - D_f \nabla^* p_f^*) \quad (3.18)$$

接著由 3.18 式可以求得控容面 f 上的質量流率 \dot{m}_f^* ：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^* &= (\vec{V}_f^* - \vec{V}_{g,f}^*) \cdot \vec{s}_f = (\vec{V}_f^* - \vec{V}_{g,f}^*) \cdot \vec{s}_f - (D_f \nabla^* p_f^* - D_f \nabla^* p_f^*) \cdot \vec{s}_f \\ &\approx (\vec{V}_f^* - \vec{V}_{g,f}^*) \cdot \vec{s}_f - (D_f \nabla^* p_f^* - D_f \nabla^* p_f^*) \cdot \vec{d} \\ &= (\vec{V}_f^* - \vec{V}_{g,f}^*) \cdot \vec{s}_f - A_C^p [(p_C^* - p_P^*) - \nabla^* p_f^* \cdot \vec{\delta}_{PC}] \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $A_C^p = \frac{D_f |\vec{s}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{s}_f}$ 。

3.3.2 壓力修正差分方程式

如同 3.3.1 節 Partankar 也提出速度修正量與壓力修正量有下列關係：

$$\vec{V}_P^{*'} = -D_P \nabla^* p_P^{*'} \quad (3.20)$$

同樣的在控容面 f 也有這種關係：

$$\vec{V}_f^{*'} = -D_f \nabla^* p_f^{*'} \quad (3.21)$$

因此可由 3.21 式得到控容面上的質量流率修正量：

$$\begin{aligned}\dot{m}_f^{*'} &= \dot{m}_f^{**} - \dot{m}_f^* = \vec{V}_f^{*'} \cdot \vec{S}_f = -D_f \nabla^* p_f^{*'} \cdot \vec{S}_f = -D_f \nabla^* p_f^{*'} \cdot \vec{d} - D_f \nabla^* p_f^{*'} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \\ &= -A_C^p (p_C^{*'} - p_P^{*'}) - D_f \overline{\nabla^* p_f^{*'}} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})\end{aligned}\quad (3.22)$$

假設所有通過控容面的質量流率在修正後滿足質量守恆：

$$\sum_{f=1}^n \dot{m}_f^{**} = 0 \quad (3.23)$$

將 3.22 式代入 3.23 式則可以得到壓力修正差分方程式：

$$A_P^p p_P^{*'} = \sum_{C=1}^n A_C^p p_C^{*'} + S_{p1} + S_{p2} \quad (3.24)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} A_C^p = \frac{D_f |\vec{S}_f|^2}{\delta_{PC} \cdot \vec{S}_f} \\ A_P^p = \sum_{C=1}^n A_C^p \\ S_{p1} = \sum_{f=1}^n -\dot{m}_f^* \\ S_{p2} = \sum_{f=1}^n D_f \overline{\nabla^* p_f^{*'}} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.3.3 壓力、速度與質量流率之修正

在此必須特別提到，由於所使用的是非正交網格，在 3.24 式中的 S_{p2} 相當於使用非正交網格時座標轉換所產生的 **cross derivative** 項，代表位於角落的網格所產生的影響，然而在現今的非結構性網格的計算中，此項幾乎被忽略，但是從以往結構性網格計算的經驗中得知，若是忽略此項，在極

為扭曲的網格往往會造成疊代的不穩定，降低收斂效率，甚至嚴重時可能造成發散，因此我們使用 **prediction-correction** 方法來處理此項：

首先先將壓力修正分為兩個步驟，第一個步驟先只計算含有 S_{p1} 的壓力修正量 $p_1^{*'} :$

$$A_p^p p_{p1}^{*'} = \sum_{C=1}^n A_C^p p_{C1}^{*'} + S_{p1} \quad (3.26)$$

得到壓力修正量 $p_1^{*'}$ 後代入 3.25 式求得 S_{p2} ，再進行第二步驟計算含有 S_{p2} 的壓力修正量 $p_2^{*'}$ ：

$$A_p^p p_{p2}^{*'} = \sum_{C=1}^n A_C^p p_{C2}^{*'} + S_{p2} \quad (3.27)$$

解得壓力修正量 $p_2^{*'}$ 後，則壓力、速度與質量流率的修正為：

$$\begin{cases} p^{**} = p^* + p_1^{*' } + p_2^{*' } \\ \vec{V}^{**} = \vec{V}^* - D \nabla^* p_1^{*' } - D \nabla^* p_2^{*' } \\ \dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^* - A_C^p (p_{C1}^{*' } - p_{P1}^{*' }) - D_f \nabla^* p_{f2}^{*' } \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \end{cases} \quad (3.28)$$

3.4 濃度差分方程式

如同 3.2 節動量方程式的差分過程，濃度差分方程式可如下表示：

$$A_p^c c_p^* = \sum_{C=1}^n A_C^c c_C^* + S_c \quad (3.29)$$

其中

$$\begin{cases} A_C^c = \max(-\dot{m}_f^*, 0) + \frac{\Gamma_f |\vec{s}_f|^2}{\delta_{PC} \cdot \vec{s}_f}, & \Gamma_f = \frac{1}{Re_f S C_f} \\ A_P^c = \sum_{C=1}^n A_C^c + \frac{\Delta v_p}{\Delta t^*} \\ S_c = -\sum_{f=1}^n \gamma [\max(\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* C_P^* \cdot \vec{\delta}_{Pf} - \max(-\dot{m}_f^*, 0) \nabla^* C_C^* \cdot \vec{\delta}_{Cf}] \\ \quad + \sum_{f=1}^n [\Gamma_f \nabla^* C_f^* \cdot (\vec{s}_f - \vec{d})] + \frac{C_P^* \Delta v_p}{\Delta t^*} \end{cases} \quad (3.30)$$

3.5 壁面剪應力與壁面壓力

以下分別就壁面剪應力與壁面壓力的計算方法做介紹。

3.5.1 壁面剪應力

壁面剪應力使用下列公式來計算：

$$\vec{\tau}_w = \frac{\eta|\vec{s}_w|}{\delta_n} \delta\vec{V}_{w,\parallel}^* = \frac{\eta|\vec{s}_w|}{\delta_n} (\delta\vec{V}_w^* - \delta\vec{V}_{w,\perp}^*) \quad (3.31)$$

其中 δ_n 為壁面相鄰格點的中心到壁面的垂直距離(圖 3.2); $\delta\vec{V}_w^*$ 為壁面相鄰格點的速度與壁面速度的速度差，下標“ \parallel ”代表平行壁面分量，下標“ \perp ”

代表垂直壁面分量。 $\delta\vec{V}_{w,\perp}^*$ 的計算方式如下：

$$\begin{aligned} \delta\vec{V}_{w,\perp}^* &= (\delta\vec{V}_w^* \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= [(\delta u_w^* \vec{i} + \delta v_w^* \vec{j} + \delta w_w^* \vec{k}) \cdot (s_{w1} \vec{i} + s_{w2} \vec{j} + s_{w3} \vec{k})] (s_{w1} \vec{i} + s_{w2} \vec{j} + s_{w3} \vec{k}) \\ &= (\delta u_w^* s_{w1}^2 + \delta v_w^* s_{w1} s_{w2} + \delta w_w^* s_{w1} s_{w3}) \vec{i} \\ &\quad + (\delta u_w^* s_{w1} s_{w2} + \delta v_w^* s_{w2}^2 + \delta w_w^* s_{w2} s_{w3}) \vec{j} \\ &\quad + (\delta u_w^* s_{w1} s_{w3} + \delta v_w^* s_{w2} s_{w3} + \delta w_w^* s_{w3}^2) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中 $s_{w1} = \frac{s_{wx}}{|\vec{s}_w|}$ ， $s_{w2} = \frac{s_{wy}}{|\vec{s}_w|}$ ， $s_{w3} = \frac{s_{wz}}{|\vec{s}_w|}$ 。接著將 3.32 式代入 3.31 式可得到：

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_w &= \frac{\eta|\vec{s}_w|}{\delta_n} [\delta u_w^* (s_{w2}^2 + s_{w3}^2) - \delta v_w^* s_{w1} s_{w2} - \delta w_w^* s_{w1} s_{w3}] \vec{i} \\ &\quad + \frac{\eta|\vec{s}_w|}{\delta_n} [-\delta u_w^* s_{w1} s_{w2} + \delta v_w^* (s_{w1}^2 + s_{w3}^2) - \delta w_w^* s_{w2} s_{w3}] \vec{j} \\ &\quad + \frac{\eta|\vec{s}_w|}{\delta_n} [-\delta u_w^* s_{w1} s_{w3} - \delta v_w^* s_{w2} s_{w3} + \delta w_w^* (s_{w1}^2 + s_{w2}^2)] \vec{k} \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.5.2 壁面壓力

可由與壁面相鄰的格點壓力外插而得到壁面上壓力：

$$p_w^* = p_P^* + \nabla^* p_P^* \cdot \vec{\delta}_{PW} \quad (3.34)$$

將 3.34 式的 $\nabla^* p_p^*$ 做差分處理並將壁面壓力與其他面的壓力分開：

$$\nabla^* p_p^* = \frac{1}{\Delta v} \iiint_{\Delta v} \nabla^* p_p^* dv = \frac{1}{\Delta v} \iint_s p^* d\vec{s} = \frac{1}{\Delta v} \sum_{f=1}^n p_f^* \vec{s}_f = \frac{1}{\Delta v} \left(p_w^* \vec{s}_w + \sum_{f \neq w}^n p_f^* \vec{s}_f \right) \quad (3.35)$$

接著將 3.35 式代入 3.34 式則可得到壁面上的壓力為：

$$p_w^* = \left(p_p^* + \frac{1}{\Delta v} \sum_{f \neq w}^n p_f^* \vec{s}_f \cdot \vec{\delta}_{PW} \right) / \left(1 - \frac{1}{\Delta v} \vec{s}_w \cdot \vec{\delta}_{PW} \right) \quad (3.36)$$

3.6 多重參考座標系介面修正方程式

由於攪拌器葉片的旋轉，我們採用**多重參考座標系**來做為攪拌器流場統御方程式的座標系統，在隨葉片旋轉的區域使用**旋轉座標系**，在葉片旋轉以外固定不動的區域使用**靜止座標系**(圖 2.1)，因此在**旋轉座標系**內速度場與質量流率是屬於相對於葉片旋轉的**相對運動**所造成，而在**靜止座標系**內的速度場與質量流率則是**絕對運動**，然而當位於兩座標系的介面上時，同時既屬於**旋轉座標系**又屬於**靜止座標系**，既然在兩座標系內所使用的速度場與質量流率的運動方式有所不同，一旦在計算上使用到兩座標系的介面時就必須先判斷介面應該是屬於何種座標系，然後做若干修正以符合正確的座標系統，以下就**介面位置**與如何判斷介面的座標系統及修正介面動量差分方程式作介紹。

3.6.1 多重參考座標系介面位置

如圖 2.1 所示，旋轉座標系與靜止座標系的介面，可依攪拌器的種類及攪拌槽內空間大小的不同，選擇不同的位置。如**螺桿攪拌器**(圖 2.1a)，其葉片在套筒內旋轉，套筒為靜止，在套筒內液體有很強的圓周方向運動，在套筒外則多為軸向運動。因此套筒內幾乎全為**旋轉座標系**，其介面位置落在葉片與套筒間隙，只有在間隙的少部分空間為**靜止座標系**。若為**螺帶攪拌器**(圖 2.1b)，其葉片遠離軸心而貼近攪拌槽壁，因此在攪拌槽的外側液體有較強的圓周方向運動，軸心液體則多為軸向運動。所以在攪拌槽外側包含葉片的區域為**旋轉座標系**，軸心區域為**靜止座標系**。一般來說，介面位置不能選擇在速度變化過大的部位，必須在速度梯度較小的區域，因此螺帶攪拌器旋轉座標系與靜止座標系介面選擇在葉片與旋轉軸間空心區域一半大小的位置。另外也有文獻在葉片與攪拌槽壁間隙使用**靜止座標系**(Rahimi 等人[40])，而有三個座標系，但這不在本研究的討論範圍內。

3.6.2 旋轉座標系介面

當格點位於**旋轉座標系與靜止座標系介面**時，要判斷介面是屬於何種座標系，必須要由主格點的座標系統來決定：當主格點 P 屬於旋轉座標系時(圖 3.1(a))，介面就屬於**旋轉座標系**，因此 3.12 式中屬於靜止座標系($\bar{\Omega}^*=0$)的介面相鄰格點 C 的項就必須做修正，首先將屬於靜止座標系的項($c_{\bar{\Omega}^*=0}^*$)與其它項($c_{\bar{\Omega}^*=2\pi\vec{k}}^*$)分開，再來由於介面是屬於**旋轉座標系**，所以必須將位於

靜止座標系的絕對速度 Φ_C^* 改為相對速度 $(\Phi_C^* - \vec{V}_{gC}^*)$ ，整理可得：

$$\begin{aligned} A_P \Phi_P^* &= \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 2\pi\vec{k}}} A_C \Phi_C^* + \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 0}} A_C (\Phi_C^* - \vec{V}_{gC}^*) + S_\Phi \\ &= \sum_{C=1}^n A_C \Phi_C^* + S_\Phi' \end{aligned} \quad (3.37)$$

因此方程式中新的源項 S_Φ' 修正為：

$$S_\Phi' = S_\Phi - \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 0}} A_C \vec{V}_{gC}^* \quad (3.38)$$

其中 $\vec{V}_{gC}^* = 2\pi\vec{k} \times \vec{r}_C^*$ 。

3.6.3 靜止座標系介面

相似於 3.6.1 節，若是主格點 P 屬於靜止座標系(圖 3.3(b))，則介面屬於靜止座標系，而 3.12 式中屬於旋轉座標系($\vec{\Omega}^* = 2\pi\vec{k}$)的介面相鄰格點 C 的項則必須做修正，首先同樣將屬於旋轉座標系的項($C_{\vec{\Omega}^* = 2\pi\vec{k}}$)與其它項($C_{\vec{\Omega}^* = 0}$)分開，再來由於介面是屬於靜止座標系，所以必須將位於旋轉座標系的相對速度 Φ_C^* 改為絕對速度 $(\Phi_C^* + \vec{V}_{gC}^*)$ ，整理可得：

$$\begin{aligned} A_P \Phi_P^* &= \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 0}} A_C \Phi_C^* + \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 2\pi\vec{k}}} A_C (\Phi_C^* + \vec{V}_{gC}^*) + S_\Phi \\ &= \sum_{C=1}^n A_C \Phi_C^* + S_\Phi' \end{aligned} \quad (3.39)$$

而方程式中新的源項 S_Φ' 修正為：

$$S_\Phi' = S_\Phi + \sum_{C_{\vec{\Omega}^* = 2\pi\vec{k}}} A_C \vec{V}_{gC}^* \quad (3.40)$$

3.7 非牛頓流體流變學性質模式(修正 Hershel-Bulkley 模式)

由於本研究使用的非牛頓流體為非時間相關的降伏偽塑性流體，其表觀黏滯係數 $\eta(\dot{\gamma})$ 如同 2.6 式中所使用的 **Hershel-Bulkley 模式**所描述，黏度會隨剪應變率 $\dot{\gamma}$ 增大而降低，但是當 $\dot{\gamma}$ 很小的時候，流體黏度會相當大，使得計算過程不能收斂，因此我們使用修正 **Hershel-Bulkley 模式**(Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38]，Prajapati 和 Ein-Mozaffari [39]，Saeed 等人[49])：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta = \mu_0 & , \tau \leq \tau_y \\ \eta = \frac{\tau_y + K \left[|\dot{\gamma}|^m - \left(\frac{\tau_y}{\mu_0} \right)^m \right]}{|\dot{\gamma}|} & , \tau > \tau_y \end{array} \right. \quad (3.41)$$

如圖 3.4 所示藍線代表 2.6 式的 **Hershel-Bulkley 模式**；紅線代表 3.41 式的修正 **Hershel-Bulkley 模式**，當 $\tau \leq \tau_y$ 時，表觀黏滯係數 η 有一個極限值 μ_0 。

3.8 SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)

法

由於本研究使用的是非結構性網格，非結構性網格不像結構性網格以 i, j, k 來代表 x, y, z 方向的格點編號，而且格點前後的點可以用指標+1 或-1 的方式來表示，使用非結構性網格必須先把網格編號、網格面編號、網格節點編號及邊界編號給先定好(圖 3.5)，再將這些編號間以某些關係做適當連結，像是相鄰網格編號、相鄰面編號等，好處是網格可以任意形狀及任意排列，但是方程式所產生的矩陣系統則不成數個對角線的帶狀，因此一般使用的 TDMA 或是 Stone 的 SIP 法皆不能用來解非結構性網格產生的矩

陣，而點疊代雖然可以解此種矩陣，但缺點是收斂相當慢，因此我們採用 preconditioned conjugate gradient 法，動量差分方程式使用 BICG (Biconjugate Gradients)法，壓力修正差分方程式則使用 ICCG(Incomplete Cholesky Conjugate Gradients)法。

而本研究所使用的數值計算流程是 Partankar 提出的 SIMPLE 法，其計算流程如下(圖 3.6)：

- (1)給予初始速度 \bar{V}_0^* 與初始壓力 p_0^* 。
- (2)求解動量差分方程式得到速度 \bar{V}^* 。
- (3)利用速度 \bar{V}^* 計算面上的質量流率 m^* 。
- (4)求解壓力修正差分方程式得到壓力修正量 p^* 。
- (5)利用壓力修正量 p^* 修正得到新的壓力 p^{**} 、新速度 \bar{V}^{**} 與新質量流率 m^{**} 。
- (6)重覆(2)~(5)反覆疊代直到收斂為止。

以上可以得到擬似穩態的速度場，接著再

- (7)利用擬似穩態速度場 \bar{V}^* 求解暫態濃度方程式得到暫態濃度 c^*
- (8)當偏差度 $\Delta < 10^{-2}$ 就可以得到均勻濃度場 c^* 與混合時間

以上就是整個數值計算的過程。

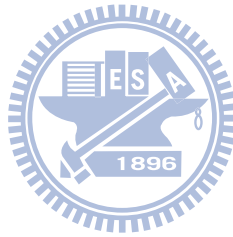
3.9 參數設定

在我們的計算中有些參數需要作設定：當流體為牛頓流體時，在螺桿攪拌器中設定雷諾數 $Re = 1.52$ (相當於 59rpm)，在螺帶攪拌器中則設定雷諾數

$Re = 5$ (相當於 30rpm)。

若流體為非牛頓流體，本研究使用的非牛頓流體為三仙膠溶液(xanthan gum solutions)，其流變學性質如表 3.1 所示(Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38]，Prajapati 和 Ein-Mozaffari [39]，Saeed 等人[49])。

另外當計算不同濃度流體的混合時間時，牛頓流體我們使用的是葡萄糖液，其濃度擴散係數 $D_{AB} = 6.73 \times 10^{-10} m^2/s$ ，史密特數 $Sc_L = 1.6 \times 10^7$ ，佩克萊數 $Pe_L = Re \cdot Sc_L$ ；若是非牛頓流體則使用三仙膠溶液，其濃度擴散係數 $D_{AB} = 1 \times 10^{-9} m^2/s$ ，佩克萊數 $Pe_L = \frac{nd^2}{D_{AB}}$ 。



四、結果與討論

4.1 簡介

攪拌器總類眾多：盤式斜葉、等間距式斜葉、螺旋槳式、錨式、螺桿式、螺帶式等，如同 1.1.6 節所介紹，各自用在不同領域。本研究所混合的流體主要是針對高黏性牛頓、非牛頓流體這一塊，所以攪拌器葉片的轉速不高，流體流速不快，雷諾數在 20 以下，屬於層流。由於流體的黏性很高阻力很大，為了驅動流體流動，葉片消耗的功率相當大，所以必須要能夠盡量減少不必要的功率消耗。而為了使被攪拌物質能夠混合均勻，流體的大範圍總體循環要很強，使物質能跟攪拌槽各角落的其他流體混合，小範圍的混合是靠攪拌器葉片附近產生強的剪切力，造成流體變形拉長，使流體跟流體間的分子擴散面積能夠增加，最後希望在最短的混合時間內使混合品質提高。能夠達到上述目的的攪拌器就是我們所要選擇的攪拌器，其中有兩種攪拌器最適合攪拌這種類型的流體：螺桿攪拌器；螺帶攪拌器。

評量攪拌器的好壞需要一個量化的標準，像是循環流量、功率消耗、混合效率、混合時間等。而攪拌器尺寸的不同就會影響攪拌器性能高低的不同，接下來我們就是要針對這兩種類型攪拌器的尺寸，研究其對攪拌器性能的影響，並找出一個最佳的攪拌器外型尺寸。本章包括：4.2 節螺桿攪拌器；4.3 節螺帶攪拌器。

4.2 螺桿攪拌器

螺桿攪拌器如同第一章所介紹，其攪拌器葉片直徑較小，會因為葉片與槽壁間隙過大而使混合效果不好，改善的方法除了將葉片中心軸偏心放置以外，另一個就是在葉片外加導流套筒，如此一來就可以縮小葉片與壁面間隙，使間隙不會太大。圖 2.1(a)所示為螺桿攪拌器與葉片之外的導流套筒基本外形示意圖，其基準型態的攪拌器尺寸和轉速描述如下：攪拌器葉片直徑 $d=126mm$ ，葉片螺距 $S=0.6d$ ，葉片高度 $h=1.5d$ ，中心軸直徑 $d_s=0.254d$ ，葉片寬度 $W=0.373d$ ，套筒直徑 $d_t=1.1d$ ，葉片與套筒間隙 $C=0.05d$ ，攪拌槽直徑與高度 $D=H=2.3d$ ，葉片距離攪拌槽槽頂或槽底間距 $h_1=0.4d$ ，攪拌器轉速則為 $n=59\text{ rpm}$ ，相當於雷諾數 $Re=1.52$ 。

會影響螺桿攪拌器性能的因素包括有：攪拌槽直徑與葉片直徑比 D/d ；軸直徑與葉片直徑比 d_s/d ；葉片寬度與葉片直徑比 W/d ；葉片螺距與葉片直徑比 S/d ；葉片一套筒間隙與葉片直徑比 C/d ；套筒的有無；流體的流變學性質等。

接下來為了進行螺桿攪拌器流場的模擬，我們首先得要依據攪拌器的尺寸，建立起一個三維非結構性網格，包括網格的三維座標、面法向量、邊界型態、相鄰網格資訊...等。在下一小節中會有詳細介紹：

4.2.1 網格的建立

為了要建立螺桿攪拌器的網格，我們首先將攪拌槽劃分為 80 個區塊，其中，徑向 r 根據其半徑由內到外分四等分：軸心到攪拌軸外緣、攪拌軸外緣到葉片外緣、葉片外緣到套筒、套筒到槽壁；圓周方向 θ 則每隔 180° 分一等分；軸方向 z 則根據高度分四區域：槽底到套筒底部、與葉片厚度同高的區域、套筒底部到套筒頂部間葉片厚度以外的區域、套筒頂部到槽頂，區塊的劃分如圖 4.1 所示。劃分好區塊後，再將攪拌軸與葉片所在的區塊排除，並將剩下區塊各自劃分合適數量的網格，必須要注意的是，區塊與區塊交界面上的網格數目要相同，最後再從第一個區塊開始依序編號到最後一個區塊的所有網格。除了網格編號以外，還有面編號、節點編號、邊界編號等，在區塊與區塊交界面上的面或節點若已經編號則不能再重覆編號。網格資訊包括有：網格中心與邊界中心的座標(x_c, y_c, z_c)、面中心的座標(x_f, y_f, z_f)、節點的座標(x_x, y_y, z_z)、網格的相鄰網格編號 inc 、網格的面編號 icf 、構成網格的節點編號 icv 、網格的面在相鄰網格的第幾面 $incf$ 、網格的體積 vol 、面的相鄰網格編號 ifc 、面與邊界的法向量(s_x, s_y, s_z)、面的權重因子 w_f 、邊界的相鄰網格編號 $ibdc$ 、邊界在相鄰網格的第幾面 $ibdf$ 、邊界類型 $ibdt$ 、邊界的相鄰網格到邊界的垂直距離 dn 、網格屬於旋轉座標或靜止座標 nrc 。建好的網格如圖 4.2 所示，剖開一部分的網格以便讓套筒與葉片的所在位置看得更清楚。

4.2.2 網格數目測試、葉片厚度測試與計算方法準確度測試

為了了解網格數目對攪拌器流場的影響，我們使用了四種不同數目的網格來測試：116,820，202,680，297,360，379,008。測試結果如表 4.1 所示：功率數隨著網格數目的增加由 287 上升到 301.6，但是網格數 297,360 與網格數 379,008 的功率數 N_p^* 相差只有 0.4%；循環數 K_Q 對網格數並不敏感，只有 0.196 與 0.193 這兩種變化，因此我們選擇 380,000 左右的網格做為我們計算網格的數目。

圖 4.3 顯示的是螺桿攪拌器流場的基本形態，流體在套筒內隨著葉片圓周方向旋轉，並順著葉片向下流出套筒，再由套筒與槽壁間的通道回到套筒上方，之後再流進套筒完成一整個循環。

另外由於葉片厚度在文獻中並未詳細記載，因此我們測試了 3 種葉片厚度來與文獻作比較： $t=1mm$ ， $5mm$ 與 $8mm$ 。同時為了確認計算方法的準確度，我們與 Seichter et al.[25], [28] 所做的實驗來比較，我們比較的是位於套筒與攪拌槽壁之間環狀區域及攪拌槽高度二分之一位置的軸向速度 V_z ，此處的液體幾乎沒有水平旋轉速度與徑向速度，是呈現接近完全發展流的拋物曲線(圖 4.3)。而我們總共模擬了三種轉速相當於三種雷諾數($Re=0.92$ ， 1.26 與 1.52) 的結果來與實驗比較，比較結果如(圖 4.4)所示。圖中顯示葉片厚度愈厚，通過套筒與槽壁間通道的流速愈慢，流量也就愈低，而當雷諾數愈高也就是轉速愈快時，通道流量也就愈高，因為流量與葉片轉速 n 成

正比，不過也可以看到，雖然流速提高但速度曲線仍然維持拋物線。

另外我們還比較了三種葉片厚度下循環數與功率數與實驗的差異，由於模擬的結果顯示，雷諾數 $Re=0.92$ 及 1.26 下的數據與 $Re=1.52$ 的數據差不多，因為循環數 K_Q 及功率數 N_p^* 在低雷諾數時與雷諾數大小無關，因此表 4.2 只顯示 $Re=1.52$ 時的數據。由表 4.2 可以看出，當葉片厚度 $8mm$ 時循環數的大小最接近實驗值，但是功率數卻比實驗值大太多，而 $5mm$ 下的功率數與實驗值較為接近，且循環數大約只比實驗值高了 8%，因此在之後的模擬我們選擇厚度 $5mm$ 相當於 $t=0.04d$ ，做為所模擬的攪拌器葉片厚度。


測試完網格數目與葉片厚度，接下來我們將會針對攪拌器的幾何尺寸，如：攪拌槽直徑、旋轉軸直徑、葉片寬度、葉片螺距、葉片與套筒間隙、導流套筒、流體流變學性質等，對於攪拌器性能的影響做研究。

4.2.3 攪拌槽直徑的影響

我們知道攪拌槽直徑大小的不同會影響攪拌器的性能，因此我們先將攪拌器其他尺寸固定在 $S=1.0d, C=0.05d, d_s=0.254d, h=1.5d$ ，再改變不同的攪拌槽直徑與葉片直徑比 D/d ，研究其對攪拌器性能的影響。

圖 4.5 顯示的是 $D=1.69d$ 時在不同圓周方向位置的螺桿攪拌器速度場，由左到右由上到下依序排列，圖中顏色顯示速度向量的大小。可以看到在葉片外緣附近其速度最大，在套筒內部因為流體受到葉片的作用力，速度也比套筒外的速度來的大。流體由套筒上方的入口流入，在受到葉片與套

筒間的相互作用後，便由套筒下方的出口流出，流出套筒的流體壓力相當大，在失去套筒與葉片的束縛後，流體往套筒與槽壁間流動，在失去葉片作用後，速度也減慢下來，最後靠流體壓力差通過此環狀區域。透過圖 4.5 這些截面讓我們知道，攪拌器流場絕對是三維，雖然不同截面的流場很類似，但還是有些許不同。另外當 $D=1.69d$ 時葉片大小很接近攪拌槽大小，在套筒內的流體空間相當大，而且流量很大。但是同樣的在套筒上下方與套筒外側空間就變小，流體流出套筒時流速迅速降低，同時也使得套筒與槽壁間流體的摩擦力就變大，也會造成套筒上下方的壓力差加大，減少流量，增加攪拌器功率消耗。



接下來我們繼續增加 D/d 值，使葉片直徑與槽直徑的差距加大，圖 4.6 顯示的是 $D=2.75d$ 時在不同圓周方向位置的螺桿攪拌器速度場。可以看出當 D/d 值增大，套筒進出口的速度是增加，因為套筒外的空間變大，使得套筒外流體的阻力降低，套筒進出口的壓差減少，功率消耗降低。但也由於空間變大，流體流到離葉片較遠處的攪拌槽角落及環狀區域內速度就很低。

當槽直徑與葉片直徑的比值增加到 $D/d=5.0$ 時(圖 4.7)，雖然流體受到套筒與槽壁的阻力很小，套筒進出口的壓差也不大，但是因為套筒外的空間相當的大，使得在套筒外的流體平均流速變得相當的低。

(圖 4.8)比較了不同 D/d 值的螺桿攪拌器流線與壓力分佈，流線可以很

清楚的顯示流體的流動方向。流體都是由套筒上方流入套筒，再經由葉片流道向下流動，並由套筒下方流出，之後再流向套筒外側的環狀區域沿著槽壁向上，最後再由槽上方流回套筒完成一個由上到下的循環。而壓力分佈則可以看到葉片兩側的壓力並不相同：在葉片下側是高壓區，承受了流體較大的壓力，葉片上側則相對於葉片下側有較低的壓力，流道中的壓力分佈就由高壓的葉片下側遞減到低壓的葉片上側；另外在套筒的上方也就是流道入口，壓力較低，而在套筒的下方也就是流道出口，壓力較高；在套筒與槽壁間的環狀區域則相反，壓力由通道下方的高壓慢慢變化到通道上方的低壓。由圖中也可以看出當 D/d 較小時，攪拌槽內的流場壓力是較高的，而且套筒下方與套筒上方之間的壓力差較大，在套筒與槽壁之間的區域壓力下降較快，變化較大，這是因為套筒外空間太小摩擦力太高而造成壓力損失；當 D/d 值變大後，套筒外的空間變大，摩擦力造成的壓力損失也就變小，同時也會降低功率消耗，提升流量；但是當 D/d 值超過一個限度後，壓力變化會趨於一致，而且因為套筒外的空間變得太大，分別在套筒上下方外緣會出現小迴流， D/d 值愈大迴流也愈大，這些迴流會使得混合效果變差，混合時間變長。

圖 4.9～圖 4.11 為三種 D/d 值的螺桿攪拌器混合過程，我們選擇混合的流體是葡萄糖漿，其對應的史密特數 $Sc = 1.6 \times 10^7$ ，我們模擬兩種濃度的葡萄糖漿混合，其中濃度 $c=1$ 的葡萄糖漿位於攪拌槽的上層，液體高度約為 $H/10$ ，

下層的液體則為濃度 $c=0$ 的葡萄糖漿，三種 D/d 值攪拌器液體平均濃度分別為 0.1185、0.1157、0.1283。圖中可以看到混合剛開始時攪拌槽內分為上下兩層，上層濃度 $c=1$ 顏色為紅色，下層濃度 $c=0$ 顏色為藍色，接著顯示的是葉片每轉動 10 圈的混合情況，直到混合達到均勻濃度顏色為淡藍色。在混合過程中，不斷有上層液體由套筒上方被吸入套筒中，接著在葉片流道中被拉長與下層液體進行濃度擴散混合，再接著由套筒下方流出循環到套筒的外側與下層流體繼續混合，經由不斷的拉長與循環，攪拌槽內的液體濃度就會愈來愈趨近於平均濃度。圖中可以看出當 $D=1.69d$ 時，液體混合相當快速，攪拌槽內的液體濃度很快地就達到了均勻；當 $D=2.75d$ 時，液體混合的時間就變長；而當 $D=5.0d$ 時，液體混合進行的相當緩慢，幾乎很難混合到均勻。因此可以知道當葉片直徑愈接近槽直徑，也就是 D/d 愈小，混合時間愈短，因為流量與葉片直徑成一定比例的關係，但是可以預知其功率消耗也相當大。

接下來我們將攪拌器性能對 D/d 值的變化與 Seichter et al.[25] 的實驗數據及 Kuncewicz et al.[2] 的數值計算結果作比較，我們除了比較維持旋轉軸直徑與葉片直徑比例 ($d_s = 0.254d$) 的結果外，另外也將旋轉軸直徑與攪拌槽直徑比例固定 ($d_s = 0.11D$) 的模擬結果一起比較。圖 4.12(a)~(d) 分別是循環數 K_Q (1.7 式)、功率數 N_p^* (1.12 式)、能量數 E (1.16 式) 及混合時間數 K_m (1.17 式) 隨 D/d 值的變化與文獻的比較。

我們先看維持旋轉軸直徑與葉片直徑比例($d_s = 0.254d$)的條件下所模擬的結果，在圖 4.12(a)中可以看到當 D/d 很小時，循環流量 K_Q 是很小的，因為當葉片直徑 d 接近槽直徑 D 大小時，代表套筒外與攪拌槽之間的環狀區域很窄，而摩擦力在這個區域產生很大的阻力，使得液體很難通過而造成很小的流量。但是當 D/d 逐漸變大時環狀區域跟著變大，阻力就變小了所以流量也就快速的增加，一直增加到 $D=2.3d$ 之後，套筒外的阻力幾乎不再改變， K_Q 也就不再增加維持在 0.35 左右。

從圖 4.12 (b)也可以看到 D/d 值對功率消耗 N_p^* 的影響，理論上當 $D/d=1$ 時也就是槽直徑與葉片直徑相同時，攪拌器有很大的阻力，並且不會有流量而有很大的壓力梯度，此時功率消耗非常的大，而圖中也顯示了跟理論同樣的結果。而隨著 D/d 的增大，阻力變小功率消耗也隨之迅速減少，一直到 $D>2.3d$ 之後， N_p^* 到達一個定值 225。這個變化也可以分別由壓力與摩擦力所產生的功率消耗 $N_{p,p}^*$ 與 $N_{p,f}^*$ 來看，而這兩者的變化剛好是相反的，當 $D<2.3d$ 時 $N_{p,p}^*$ 是隨著 D/d 增大而快速下降，因為當 D/d 增大時套筒外的阻力變小，流道進出口兩端的壓力梯度也變小，流體對葉片所產生的壓力就迅速減少；相反的 $N_{p,f}^*$ 則是緩慢上升，因為套筒外阻力變小，流量會增加，使得流體對套筒內葉片產生較大的摩擦力，但是因為流量增加的有限所以摩擦力上升幅度不大，當套筒外環狀區域夠大時，功率消耗絕大部分為摩擦力所造成，而摩擦力所消耗的功率大約是壓力消耗的三倍。

圖 4.13 顯示的是軸、葉片與套筒三者形成的流道示意圖，並且葉片與軸在套筒內的逆時針旋轉可以看作是套筒相對於葉片與軸的順時針轉動，這個轉動類似兩平板運動，也就是 Couette flow，使流體有水平旋轉的速度，水平速度又可以分為垂直流道分量與平行流道分量，這個垂直流道分量就使流道兩側葉片產生壓力差，受到流體衝擊的一側壓力較大，另一側壓力就較小；另外平行流道分量可使流體沿著流道方向流動，並在葉片與軸上產生摩擦力，這兩者分別對攪拌器產生功率消耗也就是 $N_{p,p}^*$ 與 $N_{p,f}^*$ 。而流體在流道出口的壓力會比進口的壓力大，因此會有逆向壓力梯度，使流體逆流道方向流動，也就是 Poiseuille flow，當這個逆向壓力梯度太大時會使流道流量下降，葉片壓力上升，摩擦力下降，這也就可以解釋為什麼當 D/d 過小時，流量很低且功率消耗很大。

圖 4.12(c)顯示攪拌器的混合能量 E 的變化，當 D/d 很小時混合能量 E 先是隨著 D/d 增加而下降，表示增加攪拌槽直徑與葉片直徑比可以增加攪拌效率，但是當 $D=2d$ 時混合能量會達到最低點，之後再增加 D/d 值則混合能量反倒上升，顯示當攪拌槽直徑與葉片直徑差距過大時會降低混合效率。要特別提到的是混合能量的最小值是在 $D=2d$ ，而並不是在 N_p^* 的最小值與 K_Q 最大值剛出現的 $D=2.3d$ ，這可以由 1.16 式來解釋，從 1.16 式我們可以看到混合能量 E 除了正比 N_p^*/K_Q 以外，也正比 $(D/d)^3$ ，因此混合能量除了跟功率消耗與循環流量有關外，也與單位葉片直徑的攪拌槽體積大小有關，

也就是說當單位葉片直徑的攪拌槽體積愈大，所需要的混合能量也愈多。

圖 4.12 (d)顯示的是混合時間數 K_m 隨 D/d 值的變化，可以看到當 D/d 值愈大，所需要的混合時間也愈多，這個關係可以由 1.14 式、1.16 式與 1.17 式看出：

$$K_m = \frac{\pi}{K_Q} \left(\frac{H}{D} \right) \left(\frac{D}{d} \right)^3 \quad (4.1)$$

由圖 4.12(a)知道當 D/d 大到一個程度的時候 K_Q 就不再增加，但是 $(D/d)^3$ 上升快速，因此隨著 D/d 值的增加， K_m 也就會愈大。

再來我們觀察旋轉軸直徑與攪拌槽直徑比例固定 ($d_s = 0.11D$) 所模擬的結果。當 $D/d < 2.3$ 時，循環流量及消耗功率與 $d_s = 0.254d$ 時的結果並沒有什麼不同，但若 $D/d > 2.3$ 之後，由於旋轉軸直徑與葉片直徑的比例增大，使得套筒內液體流動的空間變的太小，所以會造成 K_Q 的下降與 N_p^* 的上升。在 Kuncewicz et al.[2] 的計算結果中， K_Q 也同樣有下降的趨勢，但是與我們所模擬的結果不同的是 N_p^* 沒有上升反而持續下降，就理論上來說當旋轉軸直徑比例增大，套筒內空間減小，會在旋轉軸的表面產生較大的摩擦阻力，而使得攪拌器的功率消耗增加，所以會造成 N_p^* 的上升，這在下一小節旋轉軸直徑對 N_p^* 影響的研究中會更詳細探討。如同第一章所描述，Kuncewicz 等人[2]的計算使用二維流場的假設，並引進兩個阻力係數來模擬葉片所產生的作用力，並且阻力係數是在某種條件下測試得來，並非針對不同幾何的條件來量測不同的阻力係數，因此在他們的數值計算中所有阻力係數皆

相同，也許這樣的阻力係數在大的旋轉軸直徑比例下並不適合，所以造成 N_p^* 持續下降的結果。至於圖 4.12 中 $d_s = 0.11D$ 的模擬結果與 Seichter [25] 的實驗數據有些微的差距，可能是因為前述提到實驗所使用的攪拌器葉片厚度與導流套筒的厚度皆不詳細，並且模擬的設置也不可能百分之百的與實驗相同，因此才會有差距的產生。

4.2.4 旋轉軸直徑的影響

由於在研究攪拌槽直徑對攪拌器效能的影響中發現，當旋轉軸直徑與槽直徑比例固定時($d_s = 0.11D$)，若改變不同的 D/d 值，其軸直徑與葉片直徑比 d_s/d 也會跟著改變，若 d_s/d 過大會對攪拌器產生影響，因此我們特別研究旋轉軸直徑對攪拌器性能的影響，而將攪拌器其他尺寸固定在 $D = 2.3d, S = 1.0d, C = 0.05d, h = 1.5d$ 。

圖 4.14 顯示的是不同 d_s/d 值的螺桿攪拌器流場流線與壓力分佈，可以看到當 d_s/d 值逐漸加大時，套筒外的壓力變化逐漸緩和，但是套筒內的壓力變化卻逐漸加劇，葉片間的壓力下降快速，因為套筒內的流道空間逐漸縮小，而且葉片寬度也逐漸變小，使得套筒進出口的壓力差下降。另外當 $d_s = 0.95d$ 時，螺桿葉片寬度很小幾乎只像是一根圓柱而已，因此流量也很小，在攪拌槽上方與下方都可以看到有小迴流的產生。

圖 4.15 (a) 可以看到旋轉軸直徑對流量的影響， d_s/d 值的增大會造成循環流量的下降，這是由於套筒內液體流道的空間變窄，造成液體流動的阻

力變大，因此當軸直徑不斷增大則流量會迅速下降。

圖 4.15(b)可以觀察功率消耗的變化，起先當軸直徑與葉片直徑比不大時 N_p^* 大約維持定值，表示旋轉軸直徑大小對功率消耗的影響不大，但到了 $d_s = 0.6d$ 之後 N_p^* 就開始迅速上升，這是因為當軸直徑比例增大時，一方面使得旋轉軸表面的水平旋轉速度變大，但是另一方面卻使得旋轉軸與套筒之間的距離縮小，當距離太小時會導致旋轉軸與套筒之間的液體產生很大的速度梯度，造成很大的剪應力，並且因為旋轉軸表面積也增大，所以在旋轉軸表面有很大的摩擦力，圖 4.15 (b)中就可以看到由摩擦阻力所產生的功率消耗 $N_{p,f}^*$ 在 $d_s = 0.6d$ 之後就迅速增加，就是因為旋轉軸表面的摩擦阻力增大所造成。而這個在旋轉軸與套筒之間的流體圓周方向速度 V_θ 的變化可以參考圖 4.16，由圖中就可以很明顯的看出，當旋轉軸直徑比較大時，有較大的流體速度梯度。另外圖 4.15(b)中在攪拌器葉片上壓力產生的功率消耗 $N_{p,p}^*$ 幾乎維持不變，軸直徑比例對 $N_{p,p}^*$ 的影響不大，直到 $d_s = 0.8d$ 後才緩慢減少，這是因為旋轉軸直徑比例增加到使葉片的寬度太小，葉片表面積變得太少所造成。圖 4.15 (c)則顯示由於功率消耗的增加與循環流量的減少，使得混合能量 E 在 $d_s = 0.6d$ 之後迅速增加。

4.2.5 葉片螺距的影響

我們知道葉片螺距的不同會影響攪拌器的性能，因此我們先將攪拌器其他尺寸固定在 $D = 2.3d, C = 0.05d, d_s = 0.254d, h = 1.5d$ ，再改變不同的螺距與葉

片直徑比 S/d ，研究其對攪拌器性能的影響。

圖 4.17 顯示的是 $S=0.33d$ 時在不同圓周方向位置的螺桿攪拌器速度場，當 $S=0.33d$ 時葉片角度很小，葉片幾乎與水平面平行，在套筒內的流道寬度很窄，但整個流道的長度變長，使得流道變成窄長形，而因為葉片較為水平，使流體在流道內受到葉片與套筒拖曳的效果較大，葉片給予流體沿流道方向的速度分量也較多，但也因為流道變窄長，會受到較大的摩擦阻力使流量變小，同時也因為流量變小，在流出套筒外的流體速度也較慢。而螺距也代表葉片旋轉一圈流體沿流道下降的高度，因此當 $S=0.33d$ 時圖中可以看到，當葉片旋轉一圈流體下降的高度相當少，所以流體在套筒內要經過很長的時間才會流出套筒。



接下來我們繼續增加 S/d 值，使葉片螺距增大，圖 4.18 顯示的是 $S=1.5d$ 時在不同圓周方向位置的螺桿攪拌器速度場，可以看出當 S/d 值增大，流道的長度雖然變短，但寬度變大空間增加，使流量較大，流體速度增加，同時流出套筒外的流體速度也增加。圖中也可以看到，當 $S=1.5d$ 時葉片旋轉一圈流體也下降一個套筒的高度。

圖 4.19 則是 $S=7.5d$ 時在不同圓周方向位置的螺桿攪拌器速度場，當螺距大到這個程度時，葉片幾乎接近垂直，流道的寬度也幾乎快到葉片周長的大小，但同時流道長度相當短，流體受到葉片作用的時間很短，而且大部分為流道垂直方向的作用力，因此流量也很低。圖中可以看到當葉片旋

轉 $1/5$ 圈時，流體就從套筒上端下降到套筒下端，而在其他圓周方向位置的流體則沒有受到葉片的作用。

圖 4.20 比較了不同 S/d 值的螺桿攪拌器流線與壓力分佈，在套筒內葉片下方壓力較大，而葉片上方的壓力較小，圖中可以看到當 S/d 值很小時葉片兩側的壓力差較小，而且套筒內的壓力變化也較小，當 S/d 值逐漸增大時，葉片兩側的壓力差就變大，套筒內的壓力變化十分劇烈，同時套筒進出口的壓差也很大。當 $S > 1.5d$ 後，部分位置的流體沒有在葉片的上方或下方，而是在葉片前方與後方，在葉片轉動方向前方的流體壓力較大，在轉動方向後方的流體壓力較小。如圖 4.20 (i~l) 所示，套筒內左側為葉片轉動方向後方，右側則為前方，當 S/d 值愈來愈大時，圖中套筒右側截面離葉片愈來愈遠，壓力也就變得較低。另外圖中的流線也可以看出流體流動方向，基本上流體都是由套筒上方流入，經過葉片流道後由套筒下方流出，再由套筒與槽壁間環狀區域流動向上，之後再流回套筒。但是當 S/d 值很小時，因為流量較小，流體無法完全由下到上通過套筒外區域，流體上升到接近套筒上端高度時，便無法再繼續向上，在套筒上方外側會有迴流產生，是由葉片前端向套筒外流出，因為此處流體受到葉片前端的作用有較大的壓力；另外在套筒下方外側的迴流，則是由套筒外流向套筒內葉片後端，因為此處流體受到葉片後端的吸引有較低的壓力，這些迴流會阻礙流體從下到上的循環。當 S/d 值很大時在套筒內的右側，流體分別由套筒上端與下端流出，

這是因為流體不在葉片流道內，而是在葉片旋轉方向的前方，流體承受較大的壓力，又不在葉片範圍內，所以才會分別由套筒上端與下端流出，並在上端外側形成迴流。

圖 4.21～圖 4.23 為三種 S/d 值螺桿攪拌器的混合過程，可以看到當 $S=0.33d$ 時混合的時間最久，因為如同前述所說，攪拌器流量很低，套筒外流體流速很慢，而且套筒內流道很長，流體要經過較長的時間才能流出套筒，循環時間就會變長；當 $S=1.5d$ 時流量增加，混合過程較為迅速，流體很快就達到了均勻，混合時間較短；當 $S=7.5d$ 時攪拌器流量又降低，並且在套筒上端外側會有迴流，因此混合時間變長。

圖 4.24 是攪拌器性能參數隨 S/d 值的變化，圖 4.24(a) 為 S/d 值對循環數的影響，圖中可看出，當 S/d 值很小時流量也很小，因為流道窄長，摩擦力很高，接著隨著 S/d 值的增加流量快速上升，這是因為流道角度的增加，使得流道寬度變寬，摩擦力下降。流體流量一直上升到 $S=1.5d$ 時，達到最高值 $K_Q=0.376$ ，之後隨著 S/d 值的增加流量又逐漸減少，這是因為當流道角度增加時，流道長度也變短，使得流道內的液體體積也變少。

圖 4.24(b) 則是功率數隨 S/d 值的變化，可以看到當 S/d 值很小時，攪拌器功率相當大，主要是因為摩擦力所造成的。圖中可以看到 $N_{p,f}^*$ 相當的高，而壓力造成的 $N_{p,p}^*$ 則幾乎為 0，因為當 S/d 值很小時，葉片近乎水平，流體幾乎是受到葉片拖曳的作用而沒有壓力變化，又因為流道窄長，流道寬度

很小，摩擦面積很大，因此摩擦力很高。接著隨著 S/d 值的增加，流道寬度變寬，摩擦力也就下降，但同時因為葉片角度也增加，使得葉片承受更多的正向力，所以壓力上升，隨著 S/d 值的增加，壓力的影響也就愈來愈大，到 $S > 1.5d$ 之後，壓力的影響便超過摩擦力。但是當 S/d 大到一定程度時，壓力造成的功率消耗便不再上升維持在 $N_{p,p}^* = 226$ 左右，因為當 $S = \infty$ 時螺旋葉片也成了一片垂直平板，此時葉片承受的壓力達到最大值。

圖 4.24(c)與(d)則是螺桿攪拌器能量數與混合時間數隨 S/d 值的變化，前者表示螺桿攪拌器攪拌所需要消耗的能量，後者表示流體混合均勻所需要轉動的圈數，兩者都可以看到在 $S = 1.5d$ 時有最低值，表示效率最好。

圖 4.2 中也與文獻作比較，可以看到我們所模擬的結果與 Seichter[25] 的實驗結果相當吻合，另外在 K_Q 當 $S > 1.5d$ 時 Kuncewice 等人[2]的模擬結果是高出許多，在 N_p^* 則是當 $S > 1.5d$ 時會持續上升，這可能是跟他們的模擬是二維，且使用了兩個特定條件下的形狀與摩擦阻力係數，在 $S > 1.5d$ 時並不適當。

我們可以藉由圖 4.25 來解釋葉片流道的受力情形。圖 4.25 是將螺旋流道(圖 4.13)展開在一個平面上，並且為了使流道更簡單明瞭，實際上應該存在的葉片與套筒間隙在圖中則被忽略。如圖中所顯示，整個流道是平躺而非直立，流道的左右兩側相當於螺旋葉片的下緣與上緣，流道的上側相當於導流套筒壁面，下側則是旋轉軸軸面，前端相當於流道出口，後端則為

進口，而流道則與真正水平面夾傾斜角度 ϕ ，因此圖中流道長度 $L = h / \sin \phi$ 。

當葉片旋轉時會使流道內的液體流動，我們假設葉片是以速度 V_w 向右轉動，

但若以相對運動來看，也可以看作是上側的套筒壁面以速度 V_w 向左運動。

我們可以把 V_w 分為兩個分量：一個是沿著流道的分量 $V_c = V_w \cos \phi$ ；另一個是

垂直流道的分量 $V_t = V_w \sin \phi$ 。因此可以知道分量 V_c 的大小可以影響流道內液

體流量的大小，但是除了 V_c 以外，流量也會受到流道寬度截面積 $A_z \sin \alpha$ 的

影響，其中 A_z 為流道水平截面積。而流道角度 ϕ 對這兩個因子的影響卻相反，

可以參考圖 4.26，當流道角度 ϕ 很小時， V_c 很大但是 $A_z \sin \alpha$ 很小，相反的當

流道角度 ϕ 很大時， V_c 很小但是 $A_z \sin \alpha$ 很大，因此決定流道角度的螺距有一

個最佳值，可以使流量達到最大。



V_w 的分量除了會產生大小不同的流量外， V_c 與 V_t 還會影響到流道的壓力變化： V_c 使流道出口壓力 p_{out} 高於入口壓力 p_{in} ； V_t 則使流道左側葉片成為壓力端，右側葉片為吸入端，其壓力分別為 p_p 與 p_s 。除了流道的四周會產生壓力變化以外，壁面也會產生摩擦力，整個流道所受到的力會達成功平衡(圖 4.25)，如果考慮軸向的力平衡上述壓力與摩擦力會有如下關係：

$$(p_{out} - p_{in})A_z = (p_p - p_s)A_s \cos \phi - F_z \quad (4.1)$$

其中 A_z 為流道水平截面積， A_s 為流道兩側葉面的面積， F_z 為流道壁面摩擦力的軸向分量。由 4.2 式可以得知流道進出口也就是套筒上下兩端間的壓力變化與流道兩側間的壓力差是呈現一個線性的關係。

如同前述提到流道角度 ϕ 有一個最佳值，也就是螺距與葉片直徑比 S/d 有一個最佳值，4.2.3 節也提到槽直徑與葉片直徑比 D/d 也有一個最佳值，綜合兩者的影響可以看到如圖 4.27 所示，可以看到這個最佳值在 $D = 2.0d, S = 1.5d$ 。另外我們可以將這個最佳尺寸的攪拌器與基準尺寸的攪拌器的混合過程做個比較，圖 4.28 所示是這兩種攪拌器在混合液體時，某一固定位置的濃度變化，可以看到最佳尺寸攪拌器在此位置的濃度很快就達到穩定，比起基準尺寸攪拌器幾乎快上一倍。若是要比較攪拌器內整體的均勻性則可以用偏差度 Δ 來判斷，圖 4.29 所示即是偏差度隨攪拌器旋轉圈數的變化，同樣可以看到最佳尺寸攪拌器只要較少的轉動圈數即可達到均勻，也就是說達到攪拌槽內整體均勻的速度比基準尺寸攪拌器來得快，且均勻性也更好。圖 4.30 所示為濃度分佈的變化，最佳尺寸能較快達到均勻。表 4.3 則比較了基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器的性能，同樣的在偏差度可以很清楚的看到，最佳尺寸攪拌器混合的均勻速度遠快於基準尺寸攪拌器，而在循環數與功率數雖然差距不大，但在能量數則遠低於基準尺寸攪拌器，因為不管是混合或是攪拌能量都與攪拌槽的體積有關，也就是攪拌槽直徑的 3 次方成正比，攪拌槽愈大所需要消耗的能量與時間就愈多。

4.2.6 葉片與套筒間隙的影響

我們知道葉片與套筒間隙的大小會影響攪拌器的性能，因此我們先將攪拌器其他尺寸固定在 $D = 2.3d, S = 0.6d, d_s = 0.254d, h = 1.5d$ ，再改變不同的間

隙與葉片直徑比 C/d ，研究其對攪拌器性能的影響。

圖 4.31 顯示的是不同 C/d 值螺桿攪拌器流場流線與壓力分佈，可以看到流線基本上變化不大，只在套筒內的間隙有些微不同，當間隙夠大時就會產生迴流，使流量降低，可以參考圖 4.32，當 C/d 值愈大在間隙的迴流也愈大。另外在壓力方面，當 C/d 值愈大時，葉片上下兩側的壓力差愈小，同時也造成套筒進出口的壓差下降。

圖 4.33 是 C/d 值對攪拌器性能的影響，圖 4.33(a) 可以看到當 C/d 值愈大會使流量 K_Q 會下降，但下降幅度不大。圖 4.33(b) 則可以看到當 C/d 值很小時， N_p^* 相當大，而且絕大部分是 $N_{p,f}^*$ 造成的，因為在間隙的摩擦力相當大，造成攪拌器消耗功率大增，當 C/d 值的適度增加後， N_p^* 就大幅降低。圖 4.33 (c) 也有同樣的趨勢，當 C/d 值增加到 $C=0.1d$ 時，有最佳的混合效率。

4.2.7 導流套筒的影響

由於螺桿攪拌器葉片較小，因此通常都會在葉片外加裝導流套筒，使流體集中，增強軸向流量，因此我們特別模擬無套筒的螺桿攪拌器流場，研究導流套筒對螺桿攪拌器性能的影響。

圖 4.34～圖 4.36 為三種 D/d 值的無套筒螺桿攪拌器在不同圓周方向位置的速度場，這三種攪拌器可與有套筒螺桿攪拌器速度場(圖 4.5～圖 4.7)作比較。可以看到與有套筒相比，這三種無套筒攪拌器都因為沒有套筒的

限制，所以流體較為分散不集中，並且因為沒有套筒流道變得不封閉，流體會由葉片側邊吸入，再受到葉片作用向下流動，無法由槽下層完整循環到槽上層。

圖 4.37 同樣比較不同 D/d 值的無套筒螺桿攪拌器流場流線與壓力分佈，可以看到基本上，流體由葉片下方往下流之後就由葉片外側流回葉片上方，這種情況有點類似間隙迴流，因此可以看作是有套筒螺桿攪拌器當套筒直徑與槽直徑相等的特例。因為迴流使得流體各自在葉片間循環，無法從下循環到上，因此流量很低，當 D/d 值愈來愈大後，流體才漸漸可以由下循環到上。壓力分佈方面，由於無套筒或是間隙很大的緣故，葉片上下壓力差不大，而且攪拌槽內的壓力變化也不劇烈，只有當 D/d 值很小時，葉片上下的壓力差才比較明顯，攪拌槽內的壓力變化才較大，當 D/d 值愈大時，整個攪拌槽內的壓力幾乎一致。

圖 4.38 為無套筒與有套筒螺桿攪拌器性能隨 D/d 值變化的比較，圖 4.38 (a) 中顯示，無套筒攪拌器的 K_Q 隨著 D/d 值成線性增加，當 D/d 值很小時，有套筒攪拌器的 K_Q 遠大於無套筒攪拌器的 K_Q ，一直到 $D > 4.0d$ 後無套筒攪拌器的 K_Q 才高於有套筒攪拌器的 K_Q ，這個可以由圖 4.39 來說明。圖 4.39 為 $D = 5.0d$ 時在攪拌槽高度 $1/2$ 位置的有套筒與無套筒攪拌器軸向速度 V_z 的徑向分佈，當有套筒時，流體在套筒內的流速是向下，而在套筒外則流速向上，因為流體是由套筒向下流出再由套筒外向上流回形成循環；但當無

套筒時，流體沒有受到套筒限制，流體可以向外擴張循環範圍。圖中 $r_{V_z=0}$ 的位置就代表循環中心的位置，可以看到當有套筒時，這個循環中心是在套筒的邊緣，而且套筒外側邊緣還有小迴流；但是無套筒時，這個循環中心就遠離葉片。無套筒攪拌器循環中心位置隨 D/d 值的變化可以參考圖 4.40，當 D/d 值愈大，循環中心的位置就離葉片愈遠成線性關係。這也就可以解釋為什麼當 $D > 4.0d$ 後無套筒攪拌器的 K_Q 高於有套筒攪拌器的 K_Q ，因為其循環範圍變得較廣。

圖 4.38(b)則可以看到無套筒螺桿攪拌器的功率消耗遠小於有套筒螺桿攪拌器，大概只有 0.46 倍，而且當 $D > 2.5d$ 後幾乎維持在一定值 $N_p^* = 104$ 左右。這是因為葉片與槽壁的間隙很大，導致摩擦力與壓力功率消耗都很小。

圖 4.38(c)則可以看到有套筒螺桿攪拌器混合能量高於無套筒螺桿攪拌器，而且當 D/d 值愈大時差距愈多。

4.2.8 流體流變學性質的影響

當攪拌器中的流體為非牛頓流體時，其黏度會隨流體所受剪應變率的不同而改變，當流體為帶降伏應力偽塑性流體，其黏度變化如圖 3.4 所示。我們選用的流體為三仙膠溶液，其流體特性指標 $m = 0.14$ ，其他的流變學性質如表 3.1 所示。圖 4.41 為流變學性質對螺桿攪拌器性能的影響，比較了牛頓流體與非牛頓流體的攪拌器性能，圖 4.41 (a)為循環數對螺距的變化。可以看到當流體變為降伏偽塑性流體時，攪拌槽內的整體流量都下降，因

為當套筒內葉片產生高的剪應變率時流體黏度下降，套筒外剪應變率較低流體黏度較高，流體較不易流出套筒因此流量下降。但是同樣有一個流量最大值的螺距，但是與牛頓流體的不同，其最大值出現在 $s = 1.0d$ 附近；圖 4.41(b) 為功率數對螺距的變化，可以看到非牛頓流體的功率消耗也較低，如同牛頓流體一般隨著螺距增加而降低，但到達 $s = 1.0d$ 附近後便又開始升高，不像牛頓流體維持一定值，顯示當螺距過大時，葉片剪應變率下降，流體又恢復高黏度，使葉片阻力升高。

圖 4.41(c) 為能量數對螺距的變化，可以看到非牛頓流體的攪拌效率並不如牛頓流體，因為當非牛頓流體的功率消耗減少時，流量也同時下降，因此反而降低了攪拌效率，圖中可以看到同樣在 $s = 1.0d$ 附近有最佳的效率。



4.3 螺帶攪拌器

螺帶攪拌器如同第一章所介紹，其攪拌器葉片直徑較大，屬於大葉片直徑攪拌器，其葉片直徑幾乎接近攪拌槽直徑，葉片轉動時可以使槽內液體產生大的總體軸向流循環，同時葉片與槽壁間隙小而混合效果好。但是間隙過小會使葉片阻力變大，使攪拌器的功率消耗增加，改善的方法就是研究葉片與槽壁間隙的大小對混合效率與功率消耗的影響，找到最佳的間隙大小，如此就可以有好的混合效率同時功率消耗也可以減到最少，除此之外還有其他螺帶攪拌器幾何外型參數會影響混合效率與功率消耗，本章

節即在探討這些參數的影響。圖 2.1 (b)所示為螺帶攪拌器基本外形示意圖，其基準型態的攪拌器尺寸和轉速描述如下：攪拌器葉片直徑 $d=330mm$ ，葉片螺距 $S=0.5d$ ，葉片高度 $h=d$ ，中心軸直徑 $d_s=0.048d$ ，葉片寬度 $W=0.1d$ ，葉片與槽壁間隙 $C=0.0106d$ ，攪拌槽直徑 $D=1.0212d$ ，攪拌槽高度 $H=1.1d$ ，葉片距離攪拌槽槽頂或槽底間距 $h_1=0.05d$ ，葉片厚度 $t=0.0152d$ ，攪拌器轉速則為 $n=30\text{ rpm}$ ，相當於雷諾數 $Re=5$ 。

會影響螺桿攪拌器性能的因素包括有：葉片螺距與葉片直徑比 S/d ；葉片寬度與葉片直徑比 W/d ；葉片-槽壁間隙與葉片直徑比 C/d ；流體的流變學性質等。

接下來為了進行螺帶攪拌器流場的研究，我們首先得要進行網格數目的敏感度測試，依據攪拌器的幾何尺寸，建立不同數目的網格，並比較其對流場參數特性的影響，下一小節中會有詳細介紹：

4.3.1 網格數目測試與計算準確度測試

根據螺帶攪拌器的幾何尺寸建立的網格如圖 4.42 所示，為了了解網格數目對攪拌器流場的影響，我們使用了四種不同數目的網格來測試：106,080，204,000，304,800，405,408。測試結果如表 4.4 所示：功率數隨著網格數目的增加由 317 上升到 345，但是網格數 304,800 與網格數 405,408 的功率數 N_p^* 相差只有 0.3%；循環數 K_Q 則是由 0.0634 變化到 0.0624，在網格數較多時循環數則幾乎沒有什麼變化，因此我們選擇 300,000 左右的網格做為我們計

算網格的數目。

另外為了更確定計算的準確度，我們測試了兩種螺距($S/d=0.5$ ， $S/d=1.0$)與三種葉片與槽壁間隙($C/d=0.0105$ ， $C/d=0.029$ ， $C/d=0.053$)，並計算出功率數與實驗(Käppel,1979b)來比較。比較結果如表 4.5 所示，計算與實驗數據十分接近，在合理的誤差範圍內，顯示我們的模擬有一定的準確度。

4.3.2 螺帶攪拌器流場結構

圖 4.43 顯示的是螺帶攪拌器流場的基本形態：葉片下方的流體在靠近槽壁的區域，先順著葉片的旋轉向下，接著再由葉片的內側也就是槽中心空曠的區域，順著軸心翻到葉片之上，之後再繼續沿著槽壁向下，完成一整個循環。



圖 4.44 則顯示的是 $r=0.45d$ (葉片寬度一半位置) 圓柱面的壓力分佈，圖中可以看到在葉片下方的壓力相對於葉片上方是較高的，若是將葉片圍成的區域看作是一個流道，則流道的兩側剛好是葉片的上方與下方，因此在流道內自然會有一壓力梯度橫跨流道兩側。

圖 4.45 將葉片圍成的流道作一簡單的示意圖：圖中流道左側為葉片下方，流道右側為葉片上方，流道頂部為槽壁，流道底部為中心軸，流道下方空心的區域為葉片內側與軸心間的空曠區域，至於流道上方的葉片外側與槽壁間隙則在圖中省略。當葉片旋轉時，葉片與槽壁有一相對運動，若是看作葉片不動，則槽壁將以葉片旋轉的相反方向運動，因此假設葉片圍

成的流道不移動，則流道頂部的槽壁有一圓周方向速度 V_w ，此速度可以分解成沿流道方向速度 V_c ，與橫跨流道方向速度 V_t ，流道內的流體則由 V_c 驅動，使得流體由流道入口到流道出口的壓力增加 ($p_{out} > p_{in}$)，同時因為逆向壓力梯度，使得流體在流道下方也就是軸心區域產生逆向的流動，如同圖 4.43 流場，流體在軸心區域是向上流動。橫向速度 V_t 則使得流道兩側的壓力不同 ($p_p > p_s$)，如同圖 4.44 所示葉片上下側壓力不同，同時在圖 4.45 中也可以看到，這個葉片上下側的壓力差也造成流體由葉片下側經由葉片內緣翻到葉片上側，若是葉片外緣與槽壁間隙太大，則流體也會由葉片下側經由間隙翻到葉片上側，這樣的二次流則會使得葉片上下側的壓力差降低，同時流道的進出口壓力差也會降低。上述流道內的力平衡可以由下式表示：

$$(p_{out} - p_{in})A_z = (p_p - p_s)A_s \cos \alpha - F_z \quad (4.3)$$

其中， A_z 為流道截面積； A_s 為葉片面積； α 為葉片與水平夾角； F_z 為軸向摩擦力。

了解了螺帶攪拌器流場的基本結構，接下來我們將會針對攪拌器的幾何尺寸，如：葉片螺距、葉片寬度、葉片與套筒間隙、流體流變學性質等，對於攪拌器性能的影響做研究。

4.3.3 葉片寬度的影響

我們知道葉片寬度的不同會影響攪拌器的性能，因此我們先將攪拌器其他尺寸固定在 $D=1.0212d, C=0.0106d, S=1.0d, H=1.1d, h=1.0d$ ，再改變不同

的葉片寬度與葉片直徑比 W/d ，研究其對攪拌器性能的影響。

圖 4.46 顯示的是 $W=0.025d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，以上一節所描述的流道示意圖(圖 4.45)來看，葉片寬度也就是流道高度，當 $W=0.025d$ 時葉片寬度很小，也就是流道高度很小，而流道下方的空心區域卻很大。因此當葉片轉動時，大部分的流體很快就由葉片下方翻到葉片上方形成二次流，很少有流體留在流道內順著葉片向下。從圖中可以看出流場內的流動速度很慢，只有在靠近葉片的附近才有速度較大的二次流，因此對於攪拌槽內流體的循環幫助不大。

接下來我們繼續增加 W/d 值，使葉片寬度增大，圖 4.47 顯示的是 $W=0.2d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，可以看出當 W/d 值增大，不但流道的高度增加，流道下方的空心區域也變小，因此流道內大部分的流體能夠從槽上方的流道入口，順著葉片向下，流到槽下方的流道出口，再由軸心區域流回到槽上方。從圖 4.47 可以明顯看出，槽內流體的整體流速增加許多，循環也較好。

圖 4.48 則是 $W=0.45d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，當葉片寬度大到這個程度時，葉片幾乎已經佔據了整個槽，流道的高度也幾乎等同槽的半徑，因此流道下方的空心區域很小，沒有空間讓流出流道的流體，從槽下方回流到槽上方，此時流道內的流體很多進出口的壓力差很大，但流不出流道，軸向流量很低。從圖 4.48 則可以看出槽中流體的流速

都相當高，但幾乎都為徑向流動，而在軸心區域的流速則很低，此外在流道內甚至因為壓力差過大而產生逆向上迴流。

圖 4.49 比較了不同 W/d 值的螺帶攪拌器流線與壓力分佈，普遍來看葉片下方壓力較大，而葉片上方的壓力較小。圖中可以看到當 W/d 值很小時葉片兩側的壓力差較小，而且整個攪拌槽內的壓力較一致，壓力變化很小。但當 W/d 值逐漸增大時，葉片兩側的壓力差就變大，葉片下方的壓力漸增，而葉片上方的壓力漸減，同時攪拌槽內的壓力大小也較不一致。當 $W > 2.0d$ 後，攪拌槽內的壓力分佈便區分的很明顯。另外圖中的流線也可以看出流體流動方向，基本上流體都是由葉片下方向下流出，再經由軸心空心區域向上流回到葉片上方。當 W/d 值很小時，流體很快由葉片下方翻到葉片上方，流體無法流動到攪拌槽較底層的位置，但是當 W/d 值太大時，流體同樣無法流到底層，因為軸向的流量太小，流體為了要由軸心的空隙通過，因而徑向流動較強。

圖 4.50～圖 4.52 為三種 W/d 值螺帶攪拌器的混合過程，我們使用的是葡萄糖液，其濃度擴散係數為 $6.73 \times 10^{-10} \text{m}^2/\text{s}$ ，我們將兩種不同濃度的葡萄糖液混合，一開始上層紅色濃度為 1，下層藍色濃度為 0。當攪拌器開始旋轉後，先是由葉片與槽壁處開始混合，葉片將流體由槽壁處下拉，再由中心空隙處上升，不斷來回循環，最後達到混合均勻。圖中可以看到當 $W = 0.025d$ 時混合的時間最久，因為如同前述所說，攪拌器流量很低，攪拌

槽內流體流速很慢；當 $W = 0.2d$ 時流量增加，混合過程較為迅速，流體很快就達到了均勻，混合時間較短；當 $W = 0.45d$ 時攪拌器流量又降低，因此混合時間又變長。

圖 4.53 是攪拌器性能參數隨 W/d 值的變化，圖 4.53(a)是功率數隨 W/d 值的變化，可以看到消耗功率是隨著 W/d 值增加的，當 W/d 值很小時，攪拌器功率是比較小的，而且主要是因為摩擦力所造成的。如圖中可以看到 $N_{p,f}^*$ 的值較高，而壓力造成的 $N_{p,p}^*$ 則幾乎為0。因為當 W/d 值很小時，葉片很細長，在攪拌槽內的流體幾乎只是受到葉片拖曳的作用所以壓力沒有什麼變化，可參考圖 4.49(a)，接著隨著 W/d 值的增加，流道高度變高，摩擦力和壓力也同時上升，消耗功率也增加，到 $W > 0.25d$ 之後，壓力仍是繼續上升，但是摩擦力卻開始下降，因為流道內的流量開始減少了。如圖 4.53(b)所示，攪拌槽內的流量隨著 W/d 值增加，但是到 $W = 0.25d$ 達到最高值，之後便開始下降。

圖 4.53(b)為 W/d 值對循環數的影響，也是流量大小的變化，圖中可看出，循環數隨著 W/d 值先升後降，當 W/d 值很小時流量很小，當達到一定大小的寬度後流量達到最大，寬度再增加後流量便不再增加而開始下降。而圖也可以看到這個流量最大值的葉片寬度會隨螺距改變，當葉片螺距 $S = 0.5d$ 時 $W = 0.25d$ 時流量最大，但是當葉片螺距變為 $S = 1.0d$ 時變成 $W = 0.21d$ 時流量最大，甚至還超過 $S = 0.5d$ 時的最大值，因此可以得知當葉

片寬度 $W=0.21d\sim0.25d$ 之間時流量為最大。

圖 4.53(c)與(d)則是螺帶攪拌器能量數與混合時間數隨 W/d 值的變化，前者表示螺帶攪拌器攪拌所需要消耗的能量，後者表示流體混合均勻所需要轉動的圈數，兩者都可以看到在接近 $W=0.2d$ 時有最低值，表示效率最好。

4.3.4 葉片螺距的影響

我們知道葉片螺距的不同會影響攪拌器的性能，因此我們先將攪拌器其他尺寸固定在 $D=1.0212d, C=0.0106d, W=0.25d, H=1.1d, h=1.0d$ ，再改變不同的螺距與葉片直徑比 S/d ，研究其對攪拌器性能的影響。

圖 4.54 顯示的是 $S=0.33d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，當 $S=0.33d$ 時葉片角度很小，葉片幾乎與水平面平行，葉片與槽形成的流道寬度很窄，而整個流道的長度很長，使得流道變成窄長形。而因為葉片較為水平，葉片與槽壁給予流體沿流道方向的速度分量較多，使流體在流道內受到葉片與槽壁拖曳的效果較大，但也因為流道窄長，流體受到較多的摩擦阻力使流量變小，因此槽內整體流速較慢。

接下來我們繼續增加 S/d 值，使葉片螺距增大，圖 4.55 顯示的是 $S=0.7d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，可以看出當 S/d 值增加，流道角度變大，而流道的長度變短，但流道的寬度與空間增加，因此流體受到的摩擦阻力較小，使流量變大，流體速度增加。

圖 4.56 則是 $S=4.0d$ 時在不同圓周方向位置的螺帶攪拌器速度場，當螺

距大到這個程度時，葉片角度 $\alpha > 45^\circ$ ，流道的寬度相當大幾乎是葉片周長的大小，而流道的長度很短，流體受到葉片作用的時間很短，而且大部分為垂直流道方向的作用力，因此流量也很低。圖中可以看到葉片才旋轉 $1/4$ 圈，流體就從攪拌槽上方下降到槽下方，而在其他圓周方向位置的流體則沒有受到葉片的作用。

圖 4.57 比較了不同 S/d 值的螺帶攪拌器流線與壓力分佈，圖中可以看到當 S/d 值很小時葉片上下兩側的壓力差較小，而流道內的壓力變化也很小，只在靠近槽底的壓力較大，靠近槽頂的壓力較小，隨著 S/d 值逐漸增大時，葉片兩側的壓力差就變大，流道內的壓力變化便十分劇烈。當 $S > 1.0d$ 後，部分位置的流體就沒有在葉片形成的流道內，隨著螺距愈大葉片角度愈大，流道就愈來愈短，流道內的流體就更少。大部分的流體並沒有受到葉片的作用，因此壓力的變化又趨於緩和，如圖 4.57(e)所示。另外圖中的流線也可以看出流體流動方向，基本上流體都是由葉片下方流出，經由軸心流回葉片上方。但是當 S/d 值很大時，因為流道很短，大部分的流體不在流道內，而是在葉片轉動方向的前方或後方，流體則因為葉片掃過而由葉片前方經由軸心繞到葉片後方，因此呈現徑向循環的流動方式，軸向流量很少。

圖 4.58～圖 4.60 為三種 S/d 值螺帶攪拌器的混合過程，可以看到反而是當 $S = 0.33d$ 時混合的時間最短，有可能是因為葉片摩擦力增強剪應力的關係。因為如同前述所說，攪拌器流量很低，流道內流體流速很慢，而且流

道很長，流體要經過較長的時間才能流出流道，但是也有可能是因為這樣的關係使流體在高剪應力區有較長的時間混合；當 $S = 0.7d$ 時流量增加，混合過程也很迅速，流體很快就達到了均勻；當 $S = 4.0d$ 時攪拌器流量又降低，因為流體多數都在水平徑向循環，因此混合時間最長。

圖 4.61 是攪拌器性能參數隨 S/d 值的變化，圖 4.61(a)則是功率數隨 S/d 值的變化，可以看到當 S/d 值很小時，攪拌器功率相當大，主要是因為摩擦力所造成的。圖中可以看到 $N_{p,f}^*$ 相當的高，而壓力造成的 $N_{p,p}^*$ 則幾乎為 0，因為當 S/d 值很小時，葉片近乎水平，流體幾乎是受到葉片拖曳的作用而沒有壓力變化，又因為流道窄長，流道寬度很小，摩擦面積很大，因此摩擦力很高。接著隨著 S/d 值的增加，流道寬度變寬，摩擦力也就下降，但同時因為葉片角度也增加，使得葉片承受更多的正向力，所以壓力上升，隨著 S/d 值的增加，壓力的影響也就愈來愈大。到 $S > 2.1d$ 之後，壓力的影響便超過摩擦力，但是當 S/d 大到一定程度時，壓力造成的功率消耗便不再上升，因此功率數維持在 $N_p^* = 160$ 左右。圖 4.61(a)中也與 Käppel 的實驗數據比較，因為他的實驗只有兩種螺距的變化，所以只有兩點的數據，可以看到我們所模擬的結果與 Käppel 的趨勢相當一致。

圖 4.61(b)為 S/d 值對循環數的影響，圖中可看出，當 S/d 值很小時流量也很小，因為流道窄長，摩擦力很高。接著隨著 S/d 值的增加流量快速上升，這是因為流道角度的增加，使得流道寬度變寬，摩擦力下降，流體流量一

直上升到 $S = 0.9d$ 時，達到最高值。之後隨著 S/d 值的增加流量又逐漸減少，這是因為當流道角度增加時，流道長度變短，流道內流體變少，同時流體受到流道方向的分力也變小，使得流道內的流體速度變慢，因此流量變小。流道角度的變化有兩個極限值： $\alpha = 0^\circ$ 與 $\alpha = 90^\circ$ ，當 $\alpha = 0^\circ$ 時攪拌器等同一個圓柱體，此時流量為0；當 $\alpha = 90^\circ$ 時攪拌器則變為一個垂直葉片，流體水平方向繞葉片循環，因此流量也為0。另外圖 4.61(b)也可以看到流量最大值的螺距大小也隨著葉片寬度而改變，當葉片寬度變為 $W = 0.25d$ 時，流量最大值在 $S = 0.7d$ 。

圖 4.61(c)與(d)則是螺帶攪拌器能量數與混合時間數隨 S/d 值的變化，前者表示螺帶攪拌器攪拌所需要消耗的能量，後者表示流體混合均勻所需要轉動的圈數。可以看到在 $S = 0.33d$ 時混合最快，旋轉圈數最少，但是以能量來看卻是非常的耗費能量，反而是在 $S = 0.7d \sim 1.0d$ 之間時效率最好。

4.3.5 葉片與槽壁間隙的影響

葉片與槽壁間隙對混合過程的影響其實是很大的，因為在間隙有高的剪應力流體在此處能快速的混合，因此我們研究間隙對攪拌器性能的影響。

圖 4.62 為不同間隙 C/d 值大小的流線與壓力分佈，可以看到當間隙變大時，原本在葉片流道內向下流動的流體，在間隙處會產生向上迴流，並且原本葉片上下兩側較大的壓力差也因為間隙變大而降低。此迴流與下降的壓差會造成流道內的流量下降，維一的好處是摩擦阻力下降，減少消耗

功率。

圖 4.63 是攪拌器性能參數隨 C/d 值的變化，圖 4.63(a)則是功率數隨 C/d 值的變化，圖中可以看到功率數 N_p^* 在 C/d 值很小時隨 C/d 值下降很快，這是因為摩擦力下降很多的緣故。圖中可以看到摩擦力所消耗的功率 $N_{p,f}^*$ 遠大於壓力所消耗的功率 $N_{p,p}^*$ ，另外圖中還顯示了葉片三個不同受力面的 $N_{p,f}^*$ ：下表面、上表面與間隙相鄰面。以面積來說間隙相鄰面遠小於葉片下表面與上表面，但是當間隙很小時，它所消耗的功率遠超過其他兩者，但是一旦間隙增加，就急速下降，因此是造成功率下降的主要原因。除此之外壓力造成的功率消耗也會隨著 C/d 值增加而緩慢下降，原因如同圖 4.62 顯示，當間隙增加葉片上下兩側的壓差也會減低。圖中也與 Käppel 的實驗數據比較，可以看到結果相當吻合。

圖 4.63(b)則是循環數隨 C/d 值的變化，基本上變化不大呈現緩慢下降的趨勢，因為間隙的變大並不會對流量產生太大的影響，除了流道進出口的壓力差下降，使得軸心處的流量變少。

圖 4.63(c)則是能量數隨 C/d 值的變化，這是綜合功率數與循環數的結果也可以說是攪拌器的效率，圖中可以看到當 $C = 0.06d$ 時攪拌器有最好的效率。

綜合上述的分析螺帶攪拌器最佳尺寸為： $W = 0.25d$, $S = 0.7d$, $C = 0.06d$ 。我們也可以比較一下最佳尺寸螺帶攪拌器與基準尺寸螺帶攪拌器的混合情

形：圖 4.64 是螺帶攪拌器內液體混合過程中某一點位置的濃度變化，可以看到最佳尺寸螺帶攪拌器的濃度變化很快就達到穩定，比起基準尺寸的螺帶攪拌器快了 30%；另外，圖 4.65 則是混合過程中螺帶攪拌器內整體偏差度的變化，也可以看到最佳尺寸螺帶攪拌器內整體偏差度下降很快，顯示液體很快就達到均勻。圖 4.65 則是濃度分佈的變化，同樣也可以到最佳尺寸攪拌器能夠較快達到均勻。表 4.6 則是將基準尺寸與最佳尺寸的螺帶攪拌器性能作一比較，可以看到不管是偏差度、混合速度、循環數、功率數與能量數最佳尺寸攪拌器皆遠佳於基準尺寸攪拌器，因此可以得知此一最佳尺寸大大改善了螺帶攪拌器的性能。

綜合上述對幾何尺寸的研究，我們將螺帶攪拌器功率數 N_p^* 與幾何尺寸整理成如下的關係式：

$$N_p^* = 130.78 \left(\frac{s}{d}\right)^{-0.409} \left(\frac{w}{d}\right)^{0.234} \left(\frac{c}{d}\right)^{-0.36} \quad (4.4)$$

上式適用的範圍為 $0.33 < \frac{s}{d} < 4$, $0.025 < \frac{w}{d} < 0.45$, $0.01 < \frac{c}{d} < 0.1$

4.3.6 流體流變學性質的影響

如同 4.2.8 節所描述，流體的流變學性質影響了螺桿攪拌器的性能，對於螺帶攪拌器，流體流變學性質同樣有很大的影響。圖 4.67 為流體流變學性質對螺帶攪拌器性能參數在不同螺距時的變化，圖 4.67(a)為功率數隨螺距的變化，圖中可以看到當流體變為非牛頓流體時，攪拌器整體的功率消耗減少相當多，但同樣在螺距較小時有較大的功率消耗，隨著螺距增加而

降低，到 $s = 1.0d$ 附近時才又開始微幅上升，之後才又維持定值。

圖 4.67(b) 為循環數對螺距的變化，圖中可以看到當流體為非牛頓流體時循環流量是提升的。這與螺桿攪拌器不同，可能是螺帶攪拌器的葉片直徑較大，能夠掃過較大範圍的流體，產生較高的剪應變率，使大範圍流體黏度下降。但是當螺距過小時，也會使攪拌槽內的流體黏度差距過大，流量也會降低。

圖 4.67(c) 為能量數隨螺距的變化，可以看到當流體為非牛頓流體時，螺帶攪拌器的攪拌效率增加很多，與牛頓流體相同其最佳的螺距也是在 $s = 1.0d$ 附近。

4.4 非牛頓流體攪拌器計算的準確度測試

對於非牛頓流體的混合我們使用的是三仙膠溶液，其流變學性質如表 3.1 所示，為了確認計算的準確性我們先以 Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38] 的實驗數據作比對。

Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38] 所使用的攪拌器是螺帶攪拌器，其尺寸如下：葉片直徑 $d = 370\text{mm}$ ，葉片寬度 $W/d = 0.216$ ，葉片螺距 $S/d = 1.0$ ，葉片與槽壁間隙 $C/d = 0.0405$ ，葉片高度 $h/d = 1.0$ ，槽直徑 $D/d = 1.081$ ，槽高度 $H/d = 1.135$ ，葉片與槽底間隙 $h_1/d = 0.054$ ，葉片與液面間隙 $h_2/d = 0.081$ 。其葉片轉速 $n = 30\text{rpm}$ ，使用的溶液是濃度 1.5% 的三仙膠。

圖 4.68～圖 4.70 顯示的是 Ihejirika 和 Ein-Mozaffari [38] 的實驗數據與我

們計算結果的比較：圖 4.68 比較的是螺帶攪拌槽內軸向速度的徑向分佈，可以看到大致上我們的計算結果與實驗數據十分貼近，只在少部分位置的速度偏高，基本上攪拌槽內維持葉片位置的流體向下流動，軸中心空心區域的流體向上流動。圖 4.68 同時比較了牛頓流體的軸向速度分佈，可以看到當攪拌非牛頓流體時，流體的軸向速度都較牛頓流體來得低，顯示當非牛頓流體在葉片旋轉區受到較大的剪應變率時流體黏度降低，雖然此處的流體能夠較容易流動，但是其他離葉片較遠的區域受到剪應變率較小，流體黏度大不易流動，使得由葉片流出的流體無法傳遞到離葉片較遠的區域，導致流體軸向循環與流量降低。

圖 4.69 比較的是不同轉速下的攪拌器扭矩變化，可以看到計算結果也與實驗接近，只在轉速較高時扭矩值稍低，轉速較低時扭矩值稍高，大致上攪拌器扭矩與轉速成正比，當轉速愈高時攪拌器所需要的扭矩也愈大。圖中同時顯示了牛頓流體攪拌時的扭矩，與牛頓流體相比較，非牛頓流體在葉片高轉速旋轉時，受到較大的剪應變率黏度降低，使得葉片受到流體的阻力下降，因此扭矩較低；但是當葉片轉速較低時，葉片剪應力下降流體黏度增加，同時使葉片受到較大的阻力，因此扭矩反而比牛頓流體高。圖中可以看到當轉速大約在 10rpm 以下，非牛頓流體的扭矩是大於牛頓流體的扭矩。

圖 4.70 比較的是不同雷諾數下的攪拌器功率數 N_p 的變化，其中 Re_a 為

表觀雷諾數，其定義如下：

$$\text{Re}_a = \frac{\rho n d^2 (K_s n)}{\tau_y + K (K_s n)^m} \quad (4.5)$$

其中 $K_s = \frac{\dot{\gamma}_{avg}}{n}$ 為 Metzner-Otto 常數； $\dot{\gamma}_{avg}$ 為剪應變率； τ_y 為降伏應力； K 為稠度係數； m 為流體特性指標。圖中可以看到計算結果也與實驗數據接近，功率數 N_p 與表觀雷諾數 Re_a 成反比，其曲線斜率近似於 -1 也與實驗一致。圖中也顯示牛頓流體的功率數隨雷諾數的變化，其功率消耗較非牛頓流體高，與雷諾數也成反比。

從上面的比較來看，本研究中非牛頓流體於攪拌器中的計算與實驗相近有一定的準確度。



五、結論

由我們發展的三維有限體積非結構性網格多重參考座標系的計算程式，應用在攪拌高黏性牛頓—非牛頓流體的螺桿與螺帶攪拌器層流場與濃度場計算，經過對攪拌器不同的幾何參數研究後，我們可以得出下列的結論：

1. 對於有套筒螺桿攪拌器，當槽直徑與葉片直徑比 D/d 過小時，攪拌槽內的流量相當低，因為套筒與槽壁間隙過小，使得流體通過此區域時受到很大的摩擦阻力，不但使流量降低，同時還造成攪拌器增加功率消耗。
2. 有套筒螺桿攪拌器，當 $D > 2.3d$ 之後，其流量便不再增加達到一個定值 $K_Q = 0.35$ ；功率消耗也不再降低，而維持一定的功率消耗 $N_p^* = 225$ 。
3. 有套筒螺桿攪拌器，若是以攪拌所需的能量(單位流量所需的功率)來看，當能量愈低代表效率愈好，這個最佳攪拌器尺寸在 $D = 2d$ 。
4. 有套筒螺桿攪拌器，雖然當 D/d 過小時 K_Q 很小，但是換個角度想，當葉片直徑固定時，其攪拌槽的容積是最小的；或是當攪拌槽直徑固定時，葉片直徑是最大的，其流量是隨著葉片直徑的三次方在增加，同時葉片能夠帶動攪拌槽內大部分的流體流動，因此混合時間最短，混合速率最快，但是也消耗最多的功率。
5. 有套筒螺桿攪拌器，當軸直徑增加時，套筒內的流道高度下降，使得流量降低，同時流道內空間變小，流體摩擦阻力增加，當 $d_s > 0.6d$ 後，功率消耗大增，混合能量也迅速增加。

6. 螺桿攪拌器葉片在套筒內形成流道，當葉片螺距改變，流道的形狀也跟著改變，當螺距較小時，流道角度與水平夾角較小，流道長度較長，寬度較窄，流道變成窄長形，流體沿流道受力分量較高，但摩擦阻力也大；當螺距較大時，流道角度與水平夾角變大，流道長度變短，寬度增加，流道變成寬短形，流體沿流道受力分量變少，但摩擦阻力降低。其最佳的攪拌尺寸在 $S=1.5d$ ，此時流量最高，功率消耗最低，所需攪拌能量最少，混合速度最快。
7. 有套筒螺桿攪拌器，當套筒與葉片間隙過小時，間隙所產生的摩擦力過大，使得攪拌器功率消耗過高；但是當間隙太大時，會造成葉片上下壓力差降低，進而使得流道進出口的壓力差下降，同時還會在間隙產生迴流，使得流出套筒的流體流量下降。這個最佳的間隙尺寸在 $C=0.1d$ ，所需的攪拌能量最低。
8. 無套筒螺桿攪拌器，可以看作套筒與槽壁間隙為 0，當槽直徑很小時，葉片與槽壁間隙過小，葉片阻力很大，同時又沒有套筒將流體分隔成內外流道，流體不易循環，所以流量遠小於有套筒螺桿攪拌器。但是當槽直徑增加，流體的循環中心就不斷向外移動，流體的流量也跟著線性增加，一直到 $D>4.0d$ 後，流量便超過有套筒螺桿攪拌器。而其功率消耗，一直都約為有套筒螺桿攪拌器的 $1/2$ 。
9. 有套筒螺桿攪拌器，當攪拌流體為降伏偽塑性流體時，其流量與功率消

耗皆大幅下降，其最佳的攪拌尺寸在 $S=1.0d$ ，且其攪拌效率也遠低於攪拌牛頓流體時的效率。

10.螺帶攪拌器，其葉片與槽壁形成半開放的流道，流體經由葉片流道下降到槽底後，再由軸心開放通道上升回到槽頂，或是由葉片壓力端直接通過開放通道回到葉片吸入端形成二次流。

11.螺帶攪拌器，當葉片寬度過小時，其流道高度很低，軸心開放通道則很寬，葉片流道內流體很少，流量相當低；當葉片寬度過寬時，流道高度雖然很高，但軸心開放通道變得太窄，流體通過軸心通道的阻力很大，甚至有些流體無法通過而回流到葉片通道內，造成通道內流量降低，這個最佳攪拌尺寸在 $W=0.25d$ ，有最佳的混合效率與混合速率。

12.螺帶攪拌器，其葉片流道形狀會隨著螺距大小的不同而改變，如同螺桿攪拌器，當螺距很小時，流道狹長，水平夾角小，流體沿流道方向受力分量較大，但摩擦阻力也較高，流量很低；當螺距很大時，流道短寬，水平夾角大，流體沿流道方向分量變小，阻力較低，流量也不高。這個攪拌效率最佳尺寸在 $S=0.7d$ ，但是與螺桿攪拌器不同的是，當螺距 $S < 0.7d$ 時反而混合速率愈快，混合時間愈短，不過所消耗的能量也比螺距較大的時候高。

13.螺帶攪拌器，當葉片與槽壁間隙過小時，流體在間隙的摩擦阻力太大，造成功率消耗的增加，當間隙增加後，功率消耗迅速降低，雖然在間隙

會產生迴流，但流量並沒有太大的減少，其最佳的攪拌尺寸在 $C=0.06d$ ，有最好的攪拌效率。

14. 螺帶攪拌器，當攪拌降伏偽塑性流體時，功率消耗遠低於攪拌牛頓流體，同時流量也較攪拌牛頓流體時高，其攪拌最佳尺寸在 $S=1.0d$ 。



六、參考文獻

- [1] A. H. P. Skelland, Non-Newtonian Flow and Heat Transfer, John Wiley & Sons, inc., New York, London, Sydney (1967).
- [2] C. Kuncewicz, K. Szulc, and T. Kurasinski, “Hydrodynamics of the Tank with a Screw Impeller”, *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 44, pp. 766-774 (2005).
- [3] P. J. Carreau, J. Paris, and P. Guerin, “Mixing of Newtonian and Non-Newtonian Liquids: Screw Agitator and Draft Coil System”, the *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 70, pp. 1071-1082 (1992).
- [4] G. Delaplace, J. C. Leuliet, and V. Relandeau, “Circulation and Mixing Times for Helical Ribbon Impellers. Review and Experiments”, *Experiments in Fluids*, Vol. 28, pp. 170-182 (2000)
- [5] M. Käppel, “Development and Application of a Method for Measuring the Mixture Quality of Miscible Liquids. III. Application of the New Method for Highly Viscous Newtonian Liquids”, *International Chemical Engineering*, Vol. 19, pp. 571-590 (1979).
- [6] J. de la Villéon, F. Bertrand, P. A. Tanguy, R. Labrie, J. Bousquet, and D. Lebouvier, “Numerical Investigation of Mixing Efficiency of Helical Ribbons”, *AIChE Journal*, Vol. 44, pp. 972-977 (1998).
- [7] M. Käppel, “Development and Application of a Method for Measuring the Mixture Quality of Miscible Liquids. I. State of Research and Theoretical Principles”, *International Chemical Engineering*, Vol. 19, pp. 196-215 (1979).
- [8] P. Seichter, “Process Characteristics of Screw Impellers with a Draught Tube for Newtonian Liquids. Time of Homogenization”, *Collection Czechoslovak Chem. Commun.*, Vol. 46, pp. 2032-2042 (1981).
- [9] F. Rieger, V. Novak, and D. Havelkova, “Homogenization Efficiency of Helical Ribbon Agitators”, *Journal of Chemical Engineering*, Vol. 33(3), pp. 143-150 (1986).
- [10] J.-Y. Dieulot, G. Delaplace, R. Guerin, J.-P. Brienne, and J.-C. Leuliet, “Laminar Mixing Performances of a Stirred Tank Equipped with Helical Ribbon Agitator Subjected to Steady and Unsteady Rotational Speed”, *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, Vol. 80(A), pp. 335-344 (2002).
- [11] J. B. Gray, “Batch Mixing of Viscous Liquids”, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 59, pp. 55-59 (1963).
- [12] R. T. Johnson, “Batch Mixing of Viscous Liquids”, *Industrial and*

- Engineering Chemistry Process Design and Development, Vol. 6, pp. 340-345 (1967).
- [13]C. K. Coyle, H. E. Hirschland, B. J. Michel, and J. Y. Oldshue, "Mixing in Viscous Liquids", AICHE Journal., Vol. 16, pp. 903-906 (1970).
- [14]P. J. Carreau , I. Patterson, and C. Y. Yap, "Mixing of Viscoelastic Fluids with Helical-Ribbon Agitators I – Mixing Time and Flow Patterns", the Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 54, pp. 135-142 (1976).
- [15]M. Käppel, "Development and Application of a Method for Measuring the Mixture Quality of Miscible Liquids. II. Experimental Arrangement Experimental Procedures", International Chemical Engineering, Vol. 19, pp. 431-445 (1979).
- [16]D. F. Ryan, L. P. B. M. Janssen, and L. L. van Dierendonck, "Circulation Time Prediction in the Scale-Up of Polymerization Reactors with Helical Ribbon Agitators ", Chemical Engineering Science, Vol. 43(8), pp. 1961-1966 (1988).
- [17]R. E. Hayes, A. Afacan, B. Boulanger, and P. A. Tanguy, "Experimental Study of Reactive Mixing in a Laminar Flow Batch Reactor", Transactions of the Institution of Chemical Engineers, Vol. 76(A), pp. 73-81 (1998).
- [18]K. Takahashi, M. Sasaki, and K. Arai, "Effects of geometrical Variables of Helical Ribbon Impellers on Mixing of Highly Viscous Newtonian Liquids", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 15, pp. 217-224 (1982).
- [19]K. Takahashi, T. Yokota, and H. Konno, "Mixing of Pseudoplastic Liquid in a Vessel Equipped with a Variety of Helical Ribbon Impellers", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 21(1), pp. 63-68 (1988).
- [20]K. Takahashi, M. Iwaki, T. Yokota, and H. Konno, "Circulation Time for Pseudoplastic Liquid in a Vessel Equipped with a Variety of Helical Ribbon Impellers", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 22(4), pp. 413-418 (1989).
- [21]P. Guérin, P. J. Carreau, W. I. Patterson, and J. Paris, "Characterization of Helical Impeller by Circulation Times", the Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 62, pp. 301-309 (1984).
- [22]S. J. Curran, R. E. Hayes, A. Afacan, M. C. Williams, and P. A. Tanguy, "Experimental Mixing Study of a Yield Stress Fluid in a Laminar Stirred Tank", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 39, pp. 195-202 (2000)
- [23]J. B. Paton, P. H. Squires, W. H. Darnell, F. M. Cash, and J. F. Carley, "Chap. 4 Extrusion", Processing of Thermoplastic Materials, E. C. Bernhardt, ed.,

- Van Nostrand Reinhold, New York (1959).
- [24]J. F. Carley, "Single-Screw Pumps for Polymer Melts", Chemical Engineering Progress, Vol. 58, PP. 53-58 (1962).
- [25]P. Seichter, "Process Characteristics of Screw Impellers with a Draught Tube for Newtonian Liquids. Pumping Capacity of the Impeller", Collection of Czechoslovak Chemical Communications, Vol. 46, pp. 2021-2031 (1981).
- [26]S. Sykora, "Mixing of Highly Viscous Liquids", Collection of Czechoslovak Chemical Communications, Vol. 31, PP. 2644-2678 (1966).
- [27]V. V. Chavan and J. Ulbrecht, "Internal Circulation in Vessels Agitated by Screw Impellers", Chemical Engineering Journal, Vol. 6, PP. 213-223 (1973).
- [28]P. Seichter, J. Dohnal, and F. Rieger, "Process Characteristics of Screw Impellers with a Draught Tube for Newtonian Liquids. The Power Input", Collection of Czechoslovak Chemical Communications, Vol. 46, pp. 2007-2020 (1981).
- [29]G. Delaplace and J. C. Leuliet, "Prediction des Facteurs K_P et K_S Pour des Agitateurs à Rubans Hélicoidaux Traitant des Fluides", Récents Progrès en Génie des Procédés, Vol. 11, pp. 31-336 (1997).
- [30]S. M. Shekhar and S. Jayanti, "Mixing of Pseudoplastic Fluids Using Helical Ribbon Impellers", AIChE Journal, Vol. 49, pp. 2768-2772 (2003).
- [31]P. A. Tanguy, R. Lacroix, F. Bertrand, L. Choplin, and de la Fuente E. Brito, "Finite Element Analysis of Viscous Mixing with a Helical Ribbon-Screw Impeller", AIChE Journal, Vol. 38(6), pp. 939-944 (1992).
- [32]F. Bertrand, P. A. Tanguy, de la Fuente E. Brito, and P. Carreau, "Numerical Modeling of the Mixing flow of Second-Order Fluids with Helical Ribbon Impeller", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 180, pp. 267-280 (1999).
- [33]C. Devals, M. Heniche, K. Takenaka, and P. A. Tanguy, "CFD Analysis of Several Design Parameters Affecting the Performance of the Maxblend Impeller", Computers & Chemical Engineering, Vol. 32, pp. 1831-1841 (2008).
- [34]P. A. Tanguy, F. Thibault, E. Brito-De La Fuente, E.-S. Teodoro, and A. Tecante, "Mixing Performance Induced by Coaxial Flat Blade-Helical Ribbon Impellers Rotating at Different Speeds", Chemical Engineering Science, Vol. 52, PP. 1733-1741 (1997).
- [35]F. Thibault and P. A. Tanguy, "Power-Draw Analysis of a Coaxial Mixer with Newtonian and Non-Newtonian Fluids in the Laminar Regime",

Chemical Engineering Sciences, Vol. 57, pp. 3861-3872 (2002).

- [36] J. de la Villéon, F. Bertrand, P. A. Tanguy, R. Labrie, J. Bousquet, and D. Lebouvier, "Numerical Investigation of Mixing Efficiency of Helical Ribbons", *AICHE Journal*, Vol. 44(4), pp. 972-977 (1998).
- [37] C. Rivera, S. Foucault, M. Heniche, T. Espinosa-Solares, and P. A. Tanguy, "Mixing Analysis in a Coaxial Mixer", *Chemical Engineering Science*, Vol. 61, pp. 2895-2907 (2006).
- [38] I. Ihejirika and F. Ein-Mozaffari, "Using CFD and Ultrasonic Velocimetry to Study the Mixing of Pseudoplastic Fluids with a Helical Ribbon Impeller", *Chemical Engineering & Technology*, Vol. 30, PP. 606-614 (2007).
- [39] P. Prajapati and F. Ein-Mozaffari, "CFD Investigation of the Mixing of Yield-Pseudoplastic Fluids with Anchor Impellers", *Chemical Engineering & Technology*, Vol. 32, PP. 1211-1218 (2009).
- [40] M. Rahimi, A. Kakekhani, and A. A. Alsairafi, "Experimental and Computational Fluid Dynamic (CFD) Studies on Mixing Characteristics of a Modified Helical Ribbon Impeller", *Korean Journal of Chemical Engineering*, Vol. 27(4), pp. 1150-1158 (2010).
- [41] P. Neofytou and D. Drikakis, "Non-Newtonian Flow Instability in a Channel with a Sudden Expansion", *J. Non-Newton. Fluid Mechanics*, Vol. 111, PP. 127-150 (2003).
- [42] T. V. Pham and E. Mitsoulis, "Entry and Exit Flows of Casson Fluids", *the Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 72, PP. 1080-1084 (1994).
- [43] F. J. Walburn and D. J. Schneck, "A Constitutive Equation for Whole Human Blood", *Biorheology*, Vol. 13, PP. 201-210 (1976).
- [44] S. E. Charm, W. McComis, and G. Kurland, "Rheology and Structure of Blood Suspensions", *Journal of Applied Physiology*, Vol. 19, PP. 127-133 (1964).
- [45] T. C. Papanastasiou, "Flows of Materials with Yield", *Journal of Rheology*, Vol. 31, PP. 385-404 (1987).
- [46] L. Ai and K. Vafai, "An Investigation of Stokes' Second Problem for Non-Newtonian Fluids", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 47, PP. 955-980 (2005).
- [47] T. Espinosa-Solares, E. Brito-De La Fuente, A. Tecante, and P. A. Tanguy, "Power Consumption of a Dual Turbine-Helical Ribbon Impeller Mixer in Ungassed Conditions", *Chemical Engineering Journal*, Vol. 67, PP. 215-219 (1997).
- [48] J.-J. Wang, F.-F. Feng, X.-P. Gu, K. Wang, and C.-H. Hu, "Power

- Consumption of Inner-Outer Helical Ribbon Impellers in Viscous Newtonian and Non-Newtonian Fluids”, Chemical Engineering Science, Vol.55, PP. 2339-2342 (2000).
- [49] S. Saeed, F. Ein-Mozaffari, and S. R. Upreti, “Using Computational Fluid Dynamics to Study the Dynamic Behavior of the Continuous Mixing of Hershel-Bulkley Fluids”, Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 47, PP. 7465-7475 (2008).
- [50] Y.-Y. Tsui, J.-R. Chou, and Y.-C. Hu, “Blade Angle Effects on the Flow in a Tank Agitated by the Pitched-Blade Turbine”, Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering, Vol. 128, PP. 774-782 (2006).
- [51] Y.-Y. Tsui, S.-C. Lin, S.-J. Shen, and Y.-C. Hu, “Analysis of the Flow Agitated by Disc Impellers with Pitched Blades”, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, Vol. 53, PP. 1091-1108 (2008).
- [52] 浙江長城減速機有限公司, <http://www.aaar.com.cn/>.



表 3.1 三仙膠溶液流變學性質([38],[39], [49])

濃度(wt%)	$\tau_y(Pa)$	$K(Pa \cdot s^m)$	m	$\mu_0(Pa \cdot s)$	$\rho(kg / m^3)$
0.5	1.789	3	0.11	13.3	997.36
1.0	5.254	8	0.12	22.613	991.8
1.5	7.455	14	0.14	32.36	989.76

表 4.1 不同網格數目的循環數 K_Q 與功率數 N_p^* 之比較

網格數目	116,820	202,680	297,360	379,008
K_Q	0.196	0.193	0.193	0.193
N_p^*	287.3	294.6	300.3	301.6

表 4.2 不同葉片厚度的循環數 K_Q 與功率數 N_p^* 與實驗之比較

	$t=1mm$	$t=5mm$	$t=8mm$	Expt.
K_Q	0.204	0.193	0.183	0.178
N_p^*	242.6	301.6	341.6	306.1

表 4.3 基準尺寸與最佳尺寸螺桿攪拌器性能之比較

	$\Delta(nt=50)$	$\Delta(nt=100)$	$\Delta(nt=150)$	$\Delta(nt=170)$	K_Q	N_p^*	E
基準尺寸 D=2.3d, S=1.0d	0.254	0.0613	0.03	0.0214	0.332	230.8	26616
最佳尺寸 D=2.0d, S=1.5d	0.105	0.0386	0.0159	0.0106	0.323	227.8	17744

表 4.4 不同網格數目的功率數 N_p^* 與循環數 K_Q 之比較

網格數目	106,080	204,000	304,800	405,408
N_p^*	317	337	344	345
K_Q	0.0634	0.0626	0.0624	0.0624

表 4.5 不同螺距與間隙的功率數 N_p^* 與實驗之比較

	S/d=0.5	S/d=1.0	C/d=0.0105	C/d=0.029	C/d=0.053
模擬(本研究)	344	212	348	240	196
實驗 (Käppel,1979b)	334	242	334	246	208

表 4.6 基準尺寸與最佳尺寸螺帶攪拌器性能之比較

	$\Delta(nt=50)$	$\Delta(nt=100)$	$\Delta(nt=150)$	$\Delta(nt=200)$	K_Q	N_p^*	E
基準尺寸 W=0.1d, S=0.5d	0.266	0.169	0.131	0.107	0.062	348	20201
最佳尺寸 W=0.25d, S=0.7d	0.170	0.082	0.044	0.024	0.114	309	9955



(a)



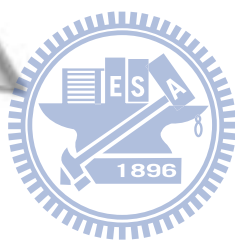
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

圖 1.1 各類型攪拌器[52]:(a)螺旋槳式(b)錨式(c)斜葉渦輪式(d)圓盤直葉
渦輪式(e)螺桿式(f)螺帶式

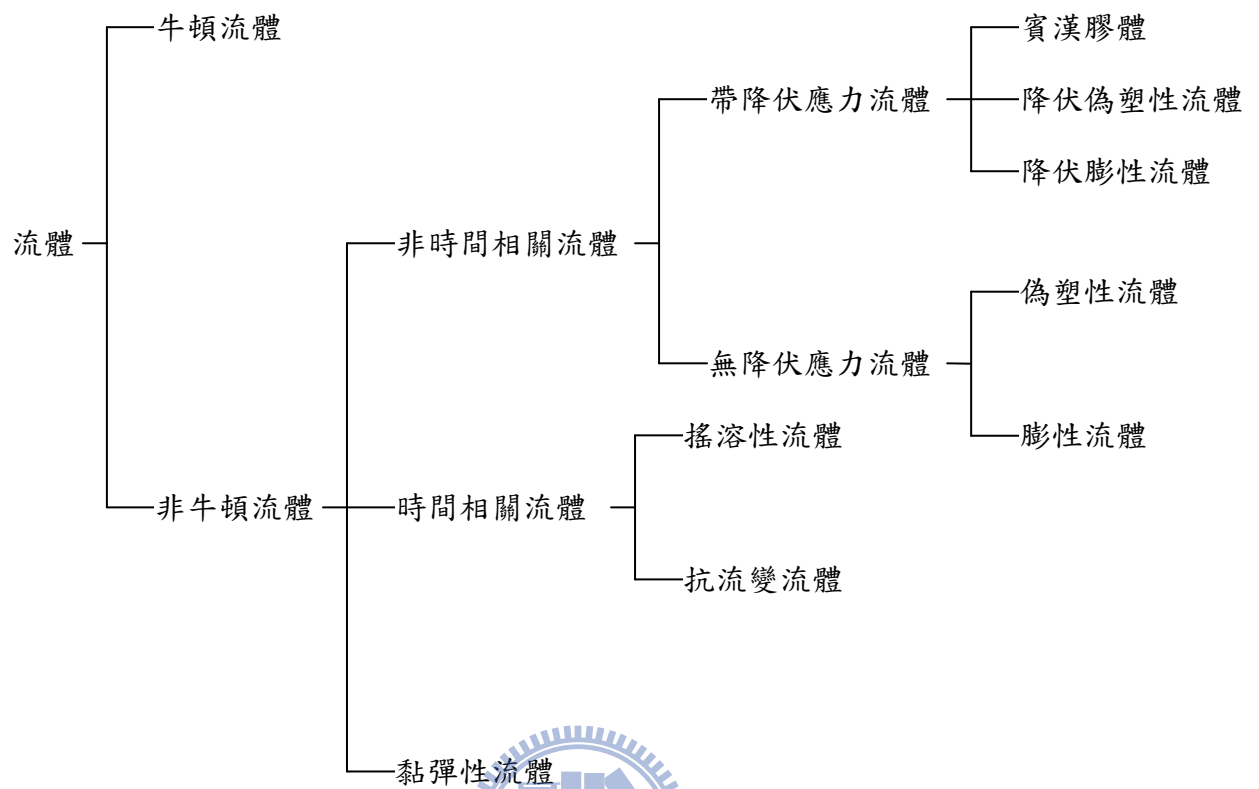


圖 1.2 流體分類

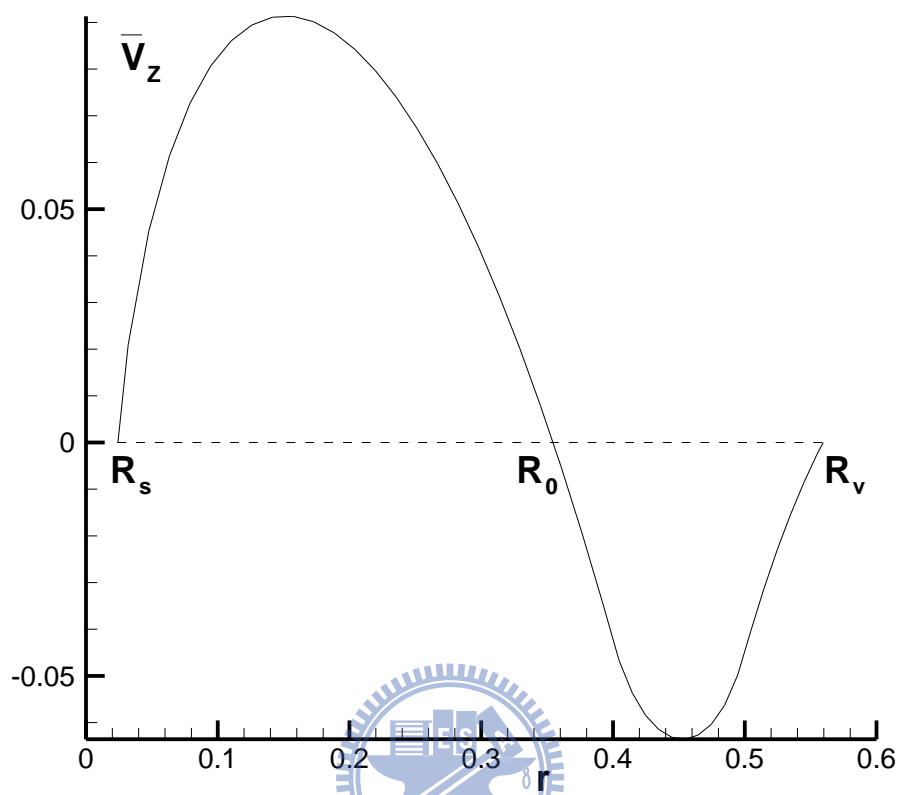


圖 1.3 流體軸向速度

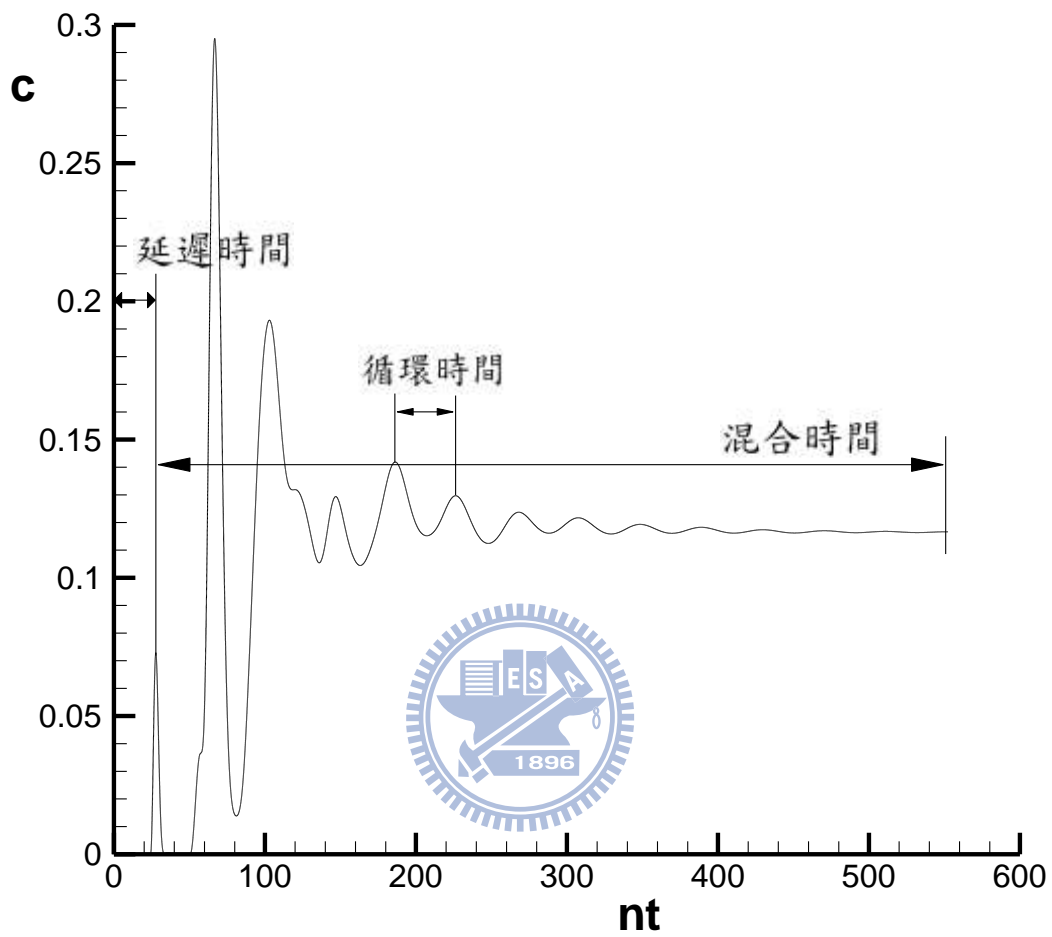
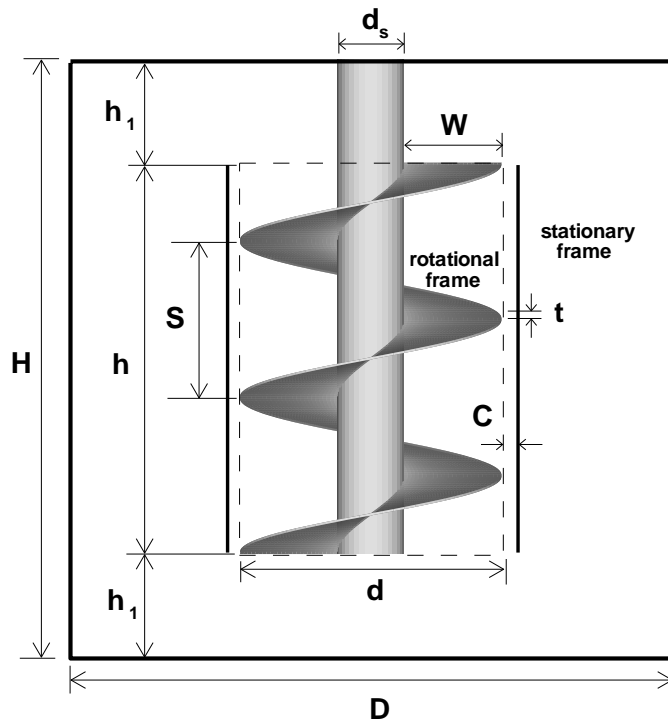
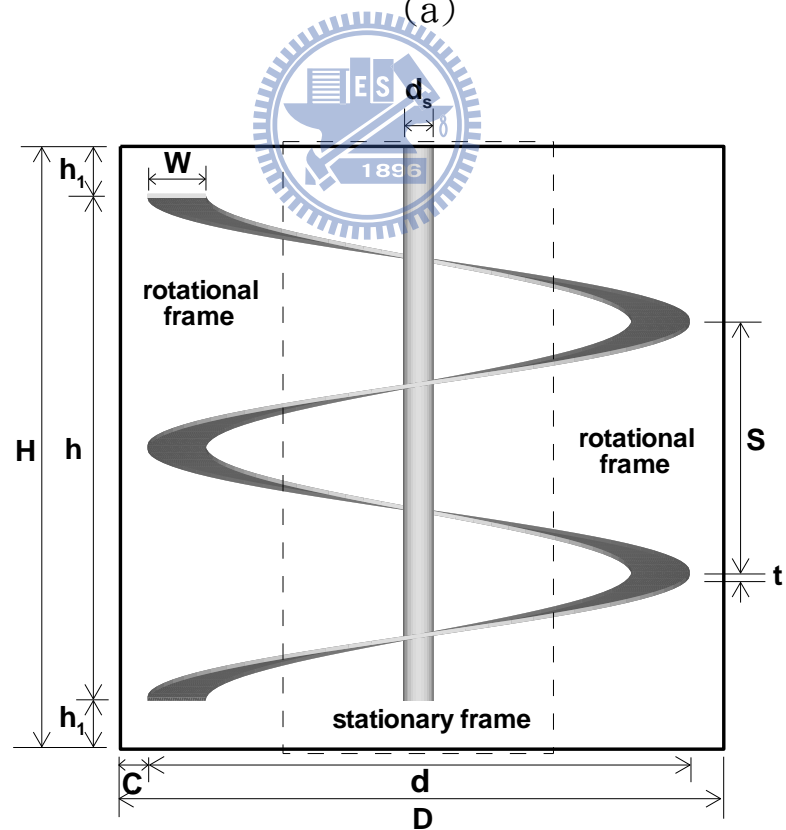


圖 1.4 量測物質濃度變化來量測混合時間



(a)



(b)

圖 2.1 旋轉座標系與靜止座標系區域:(a)螺桿攪拌器；(b)螺帶攪拌器

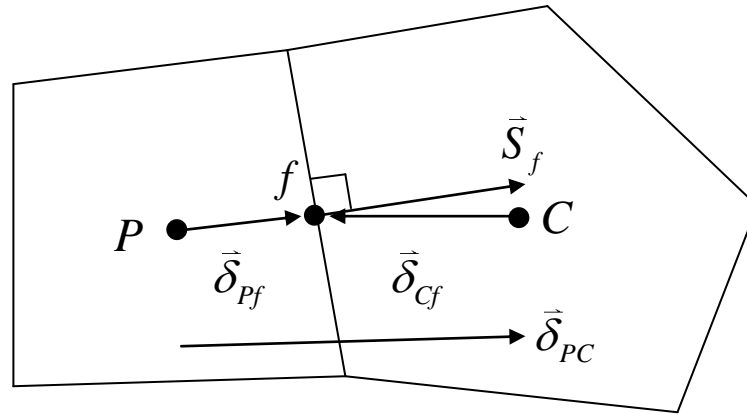
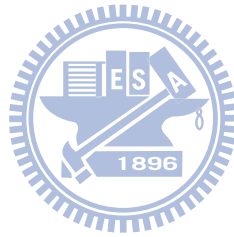


圖 3.1 任意形狀控制體積之面向量 \vec{s}_f 及主格點 P、相鄰格點 C 與面 f 間向

量 $\vec{\delta}_{PC}$, $\vec{\delta}_{Pf}$, $\vec{\delta}_{Cf}$ 標示圖



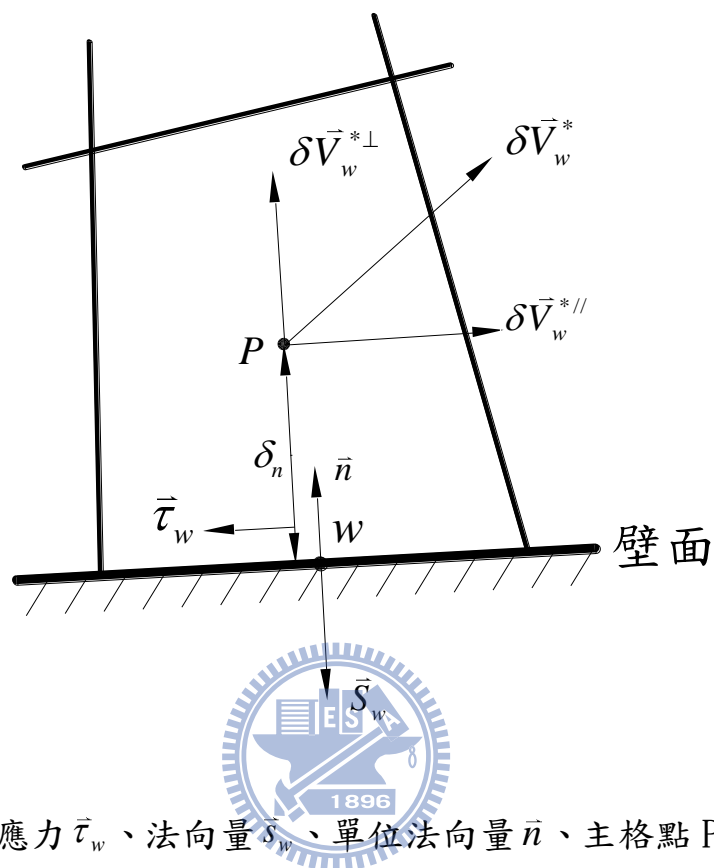
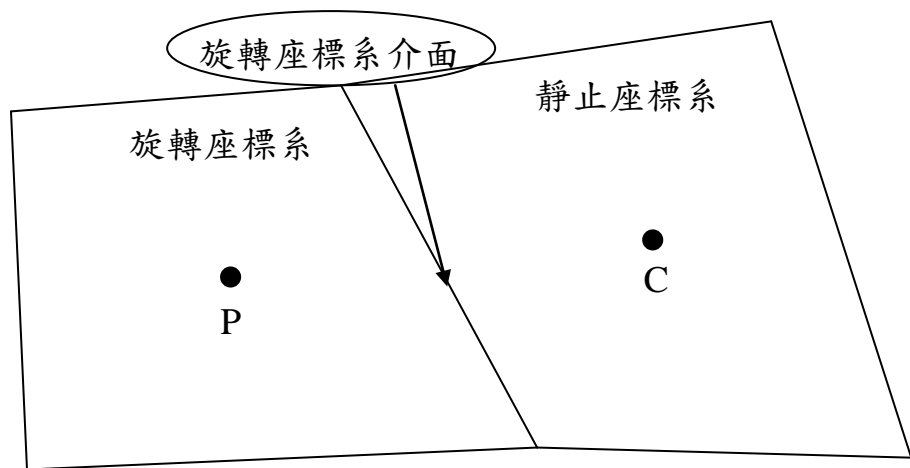
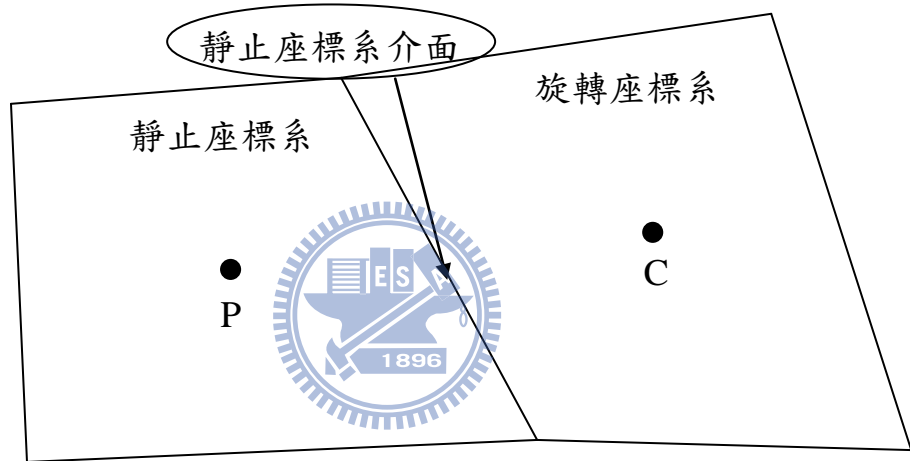


圖 3.2 壁面剪應力 $\vec{\tau}_w$ 、法向量 \vec{s}_w 、單位法向量 \vec{n} 、主格點 P 與壁面 w 垂直距離 δ_n 、速度差向量 $\delta \vec{V}_w^*$ 、速度差垂直分量 $\delta \vec{V}_w^{*\perp}$ 、速度差平行分量 $\delta \vec{V}_w^{*\parallel}$ 標

示圖



(a)



(b)

圖 3.3 多重參考座標系介面修正：(a)旋轉座標系介面；(b)靜止座標系介面

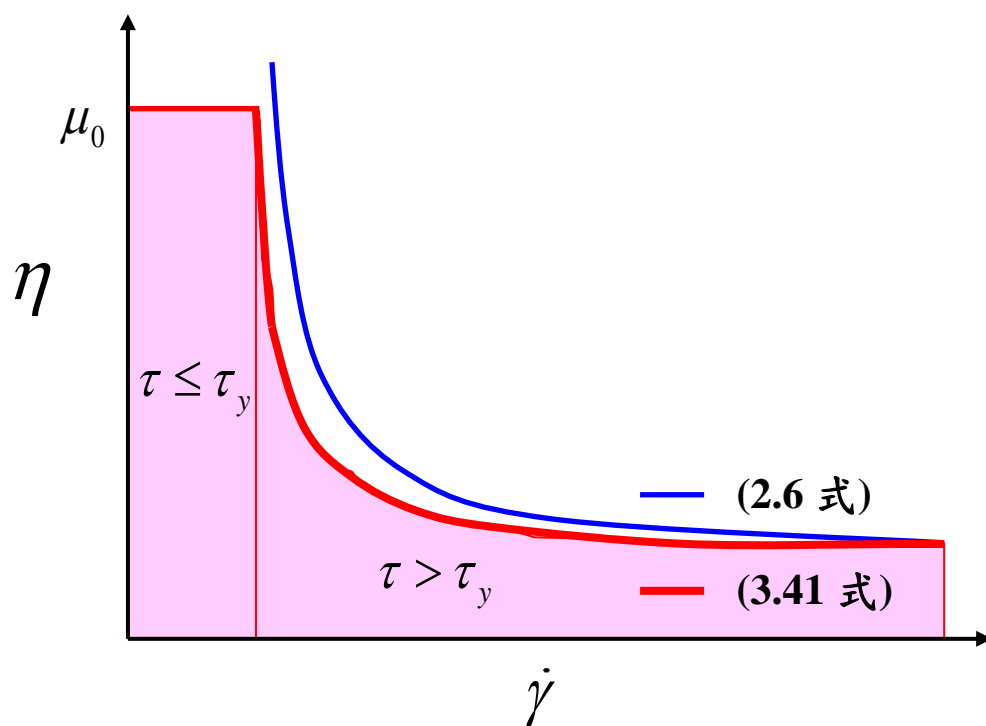


圖 3. 4Herschel-Bulkley 模式與修正 Herschel-Bulkley 模式示意圖

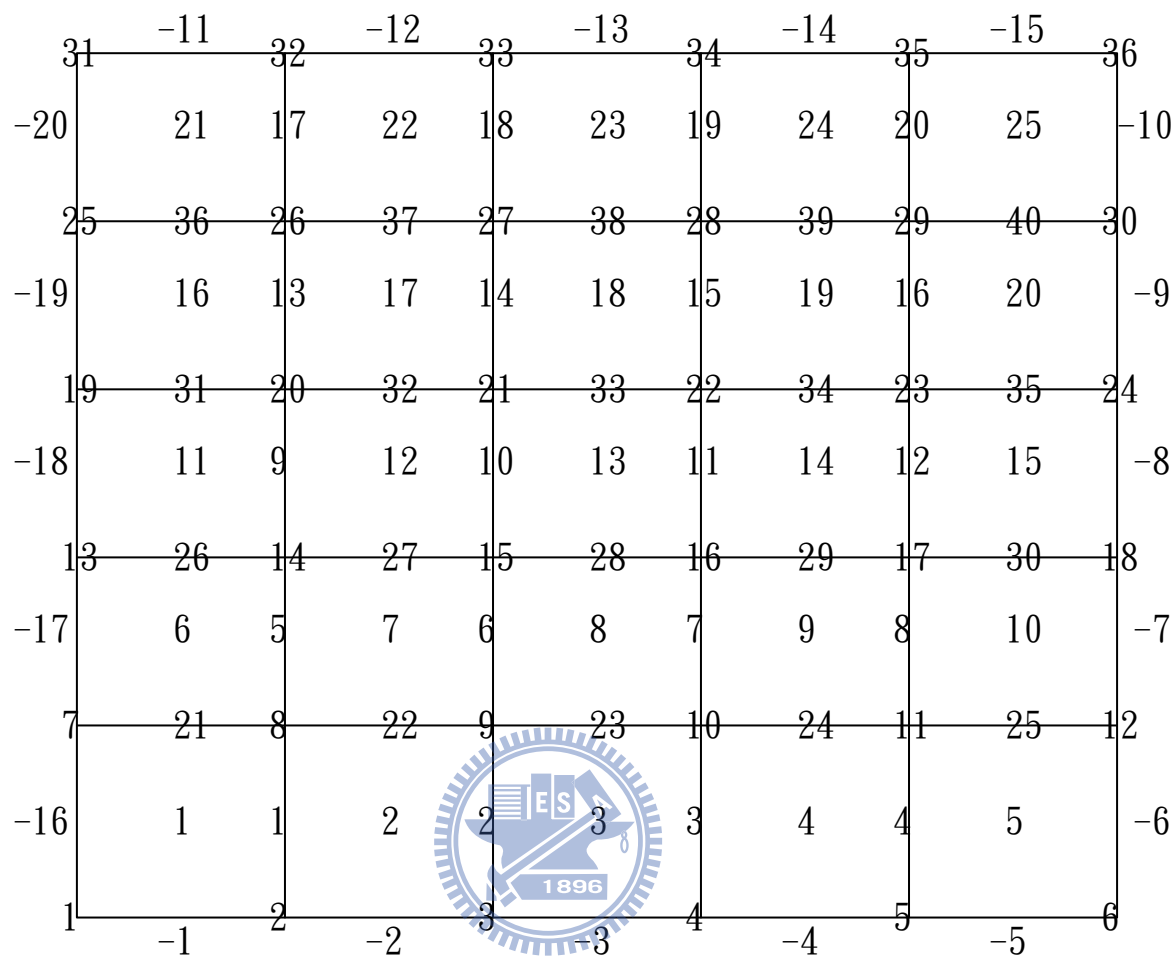


圖 3.5 網格編號、網格面編號、網格節點編號、邊界編號示意圖

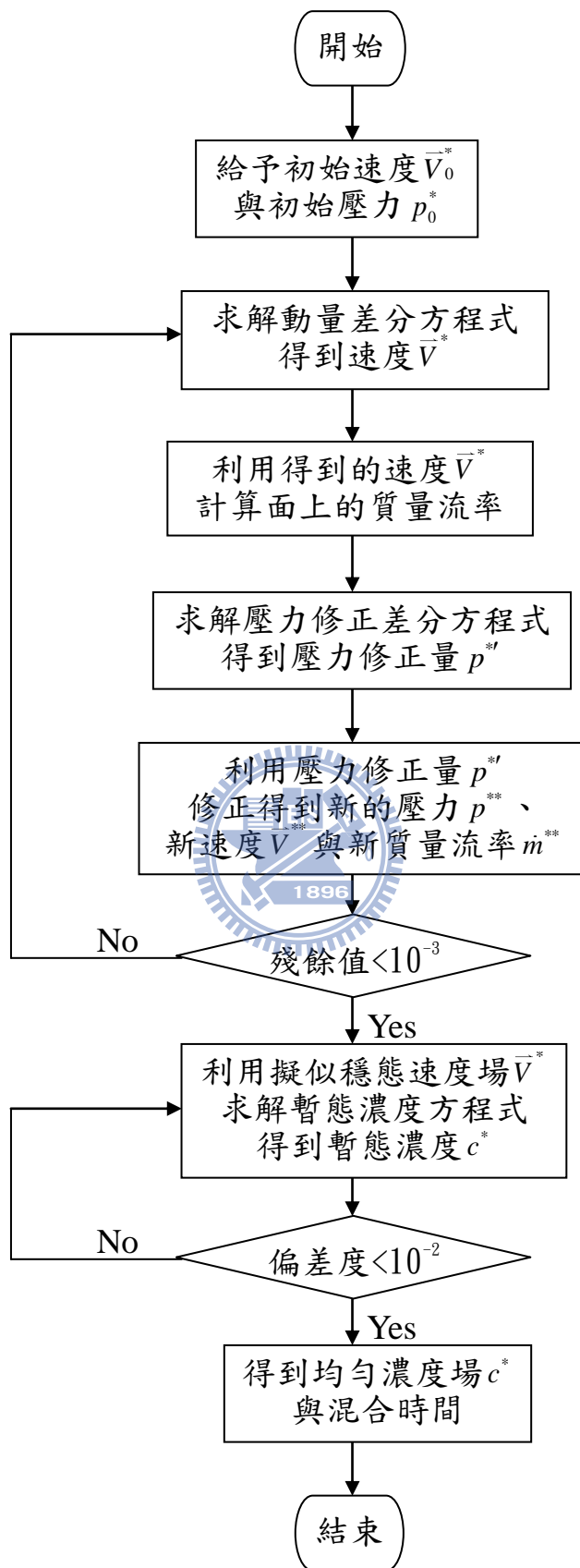


圖 3.6 計算流程圖

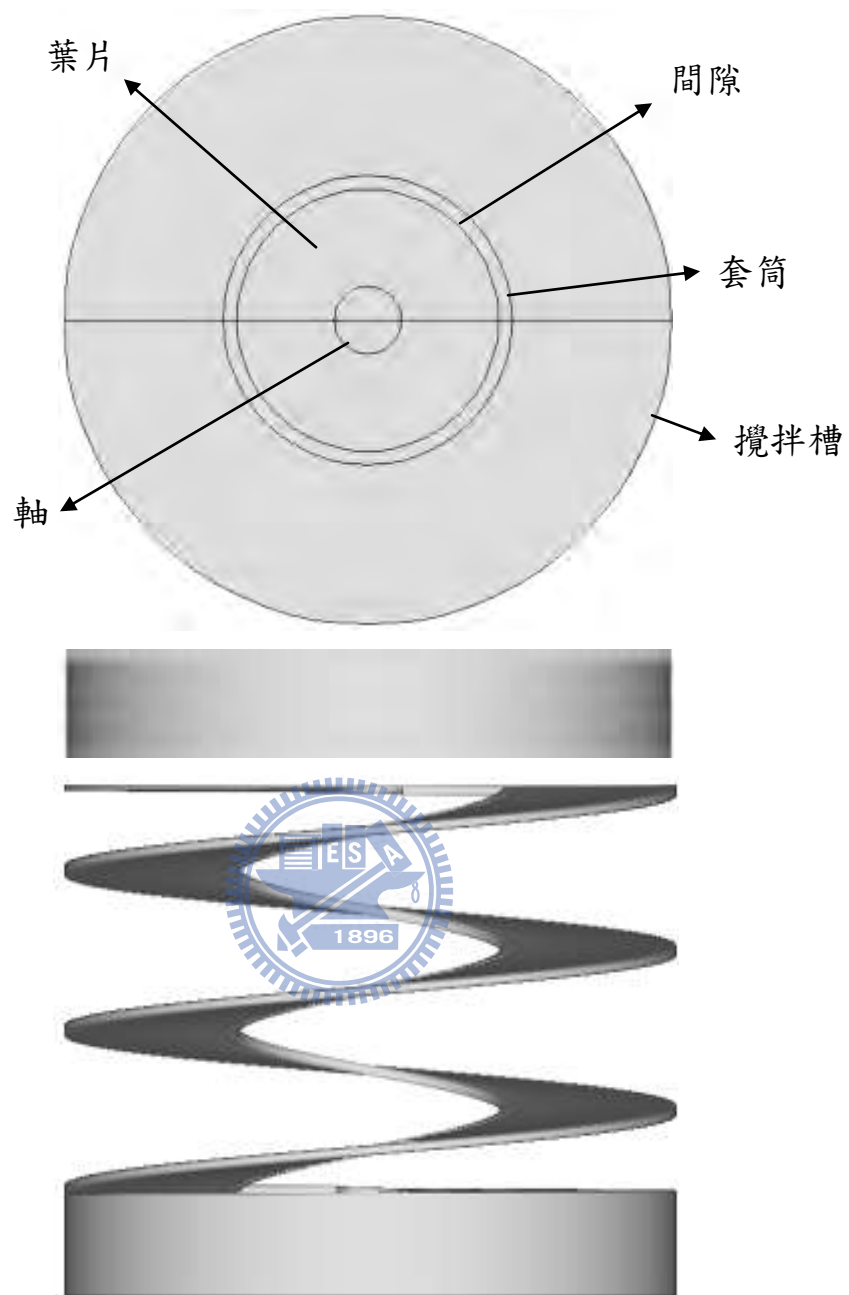


圖 4.1 區塊的劃分

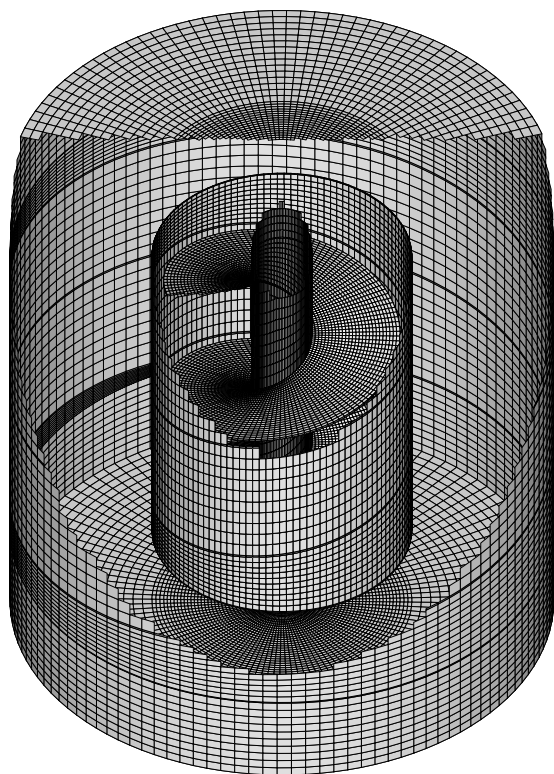


圖 4.2 計算網格



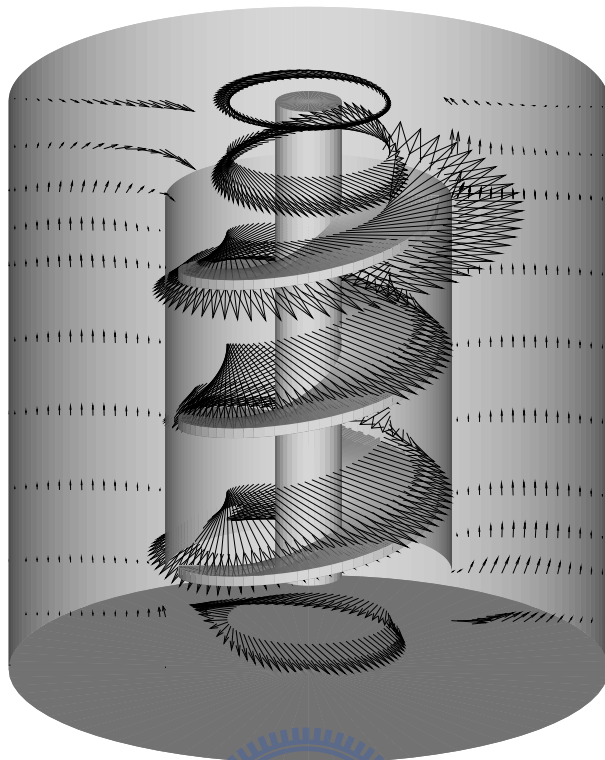


圖 4.3 螺桿攪拌器流場基本形態



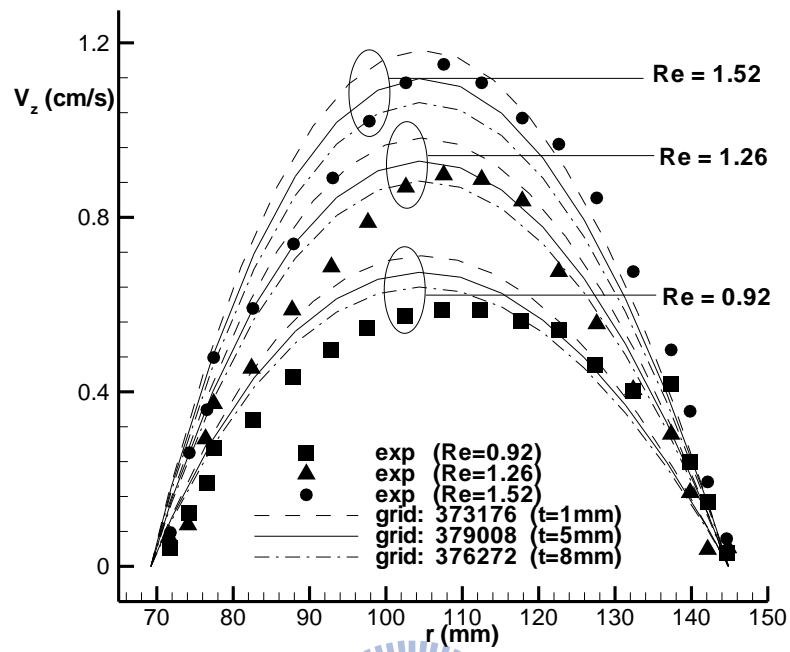


圖 4.4 不同葉片厚度及雷諾數與實驗量測軸向速度 V_z 之比較

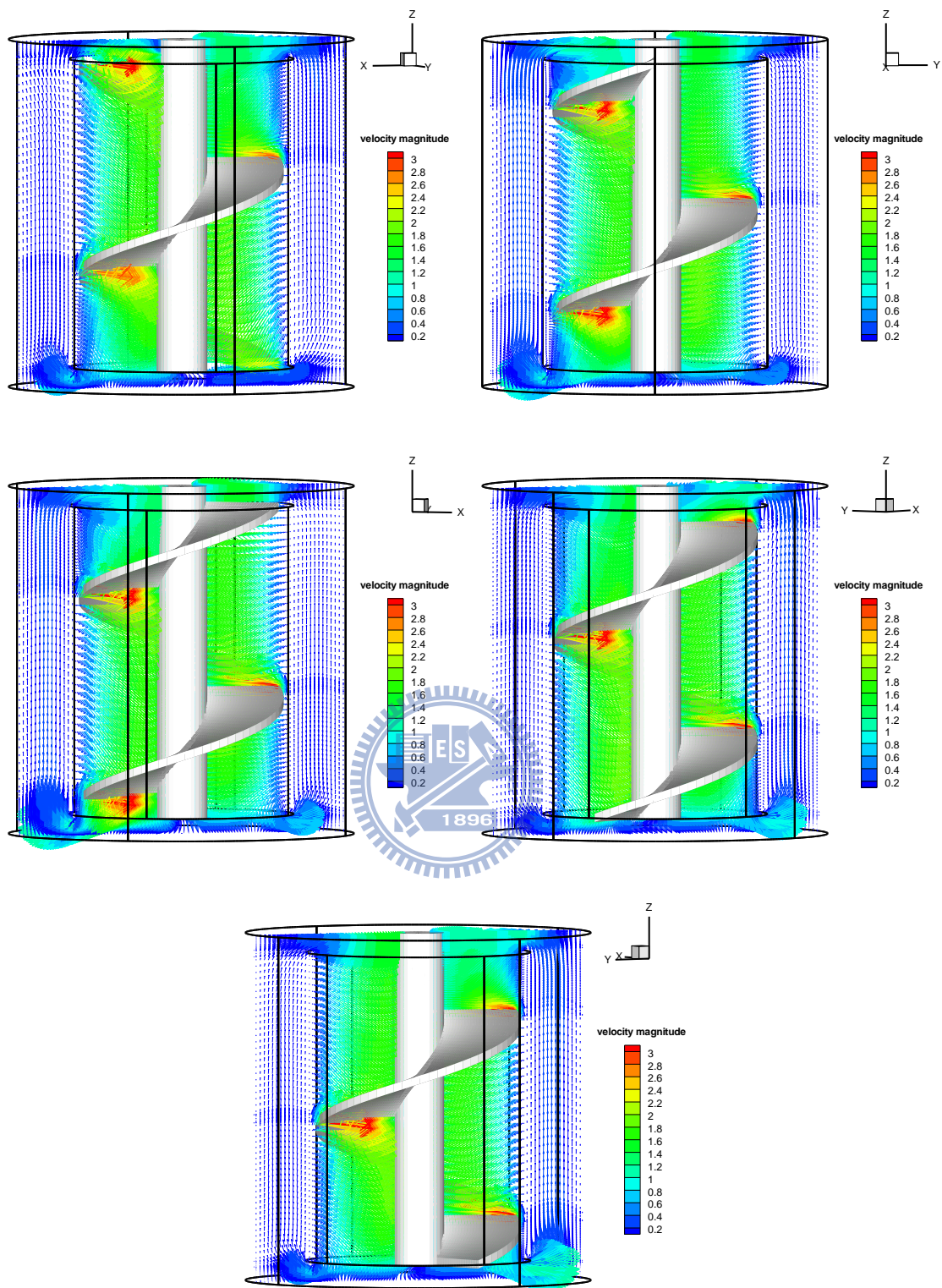


圖 4.5 螺桿攪拌器 $D=1.69d$ 時在不同圓周方向位置的速度場

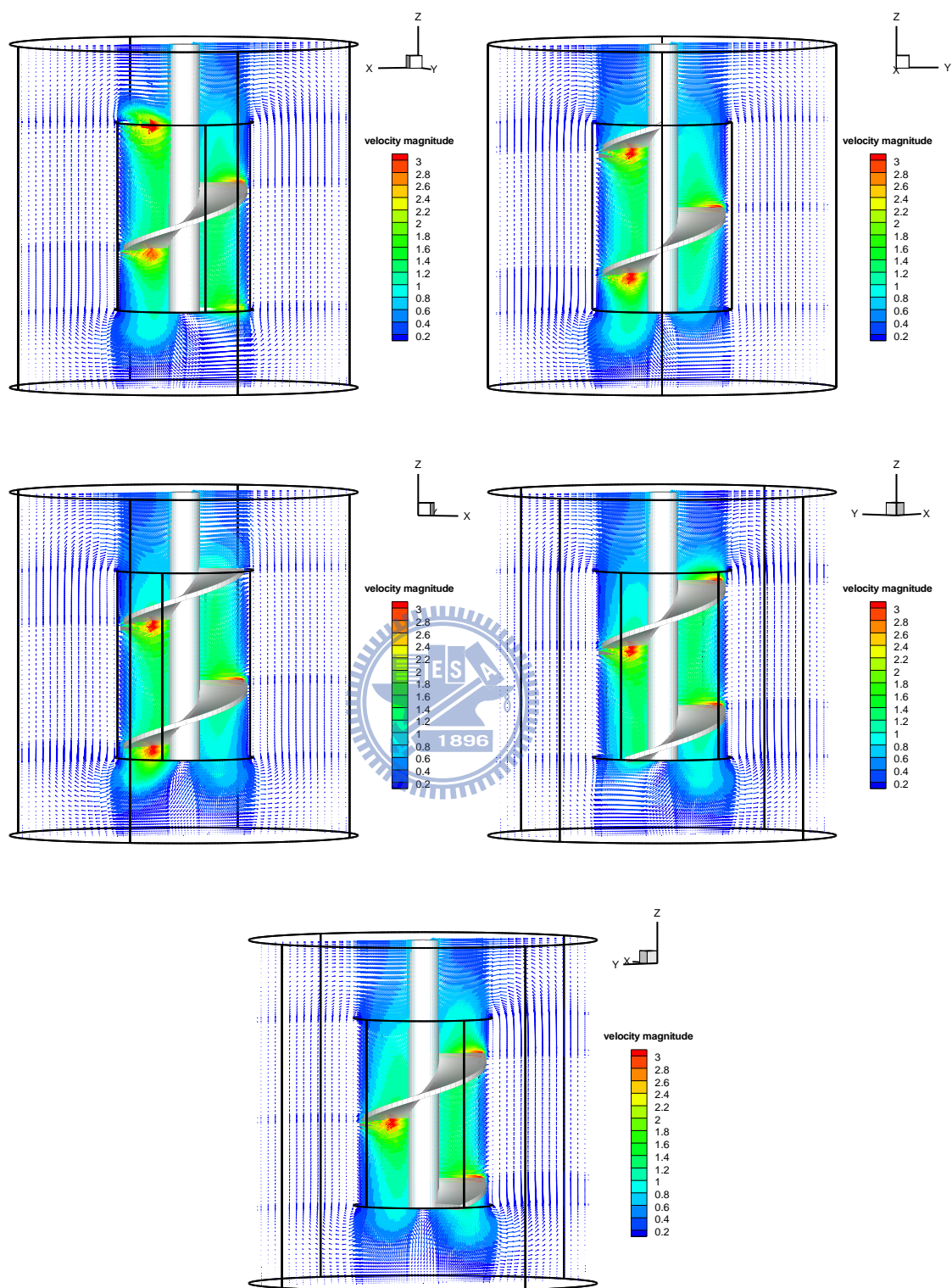


圖 4.6 螺桿攪拌器 $D=2.75d$ 時在不同圓周方向位置的速度場

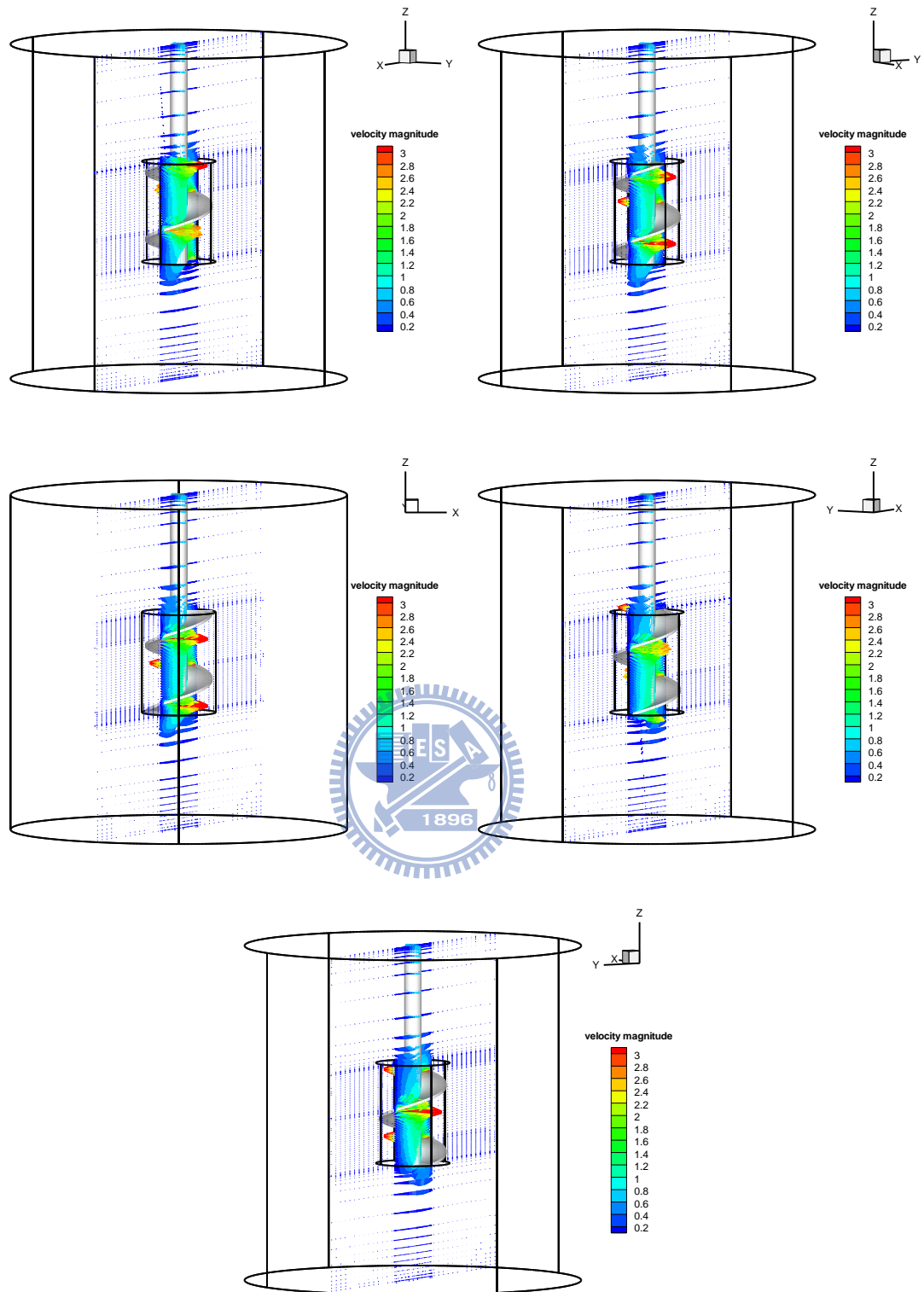


圖 4.7 螺桿攪拌器 $D=5.0d$ 時在不同圓周方向位置的速度場

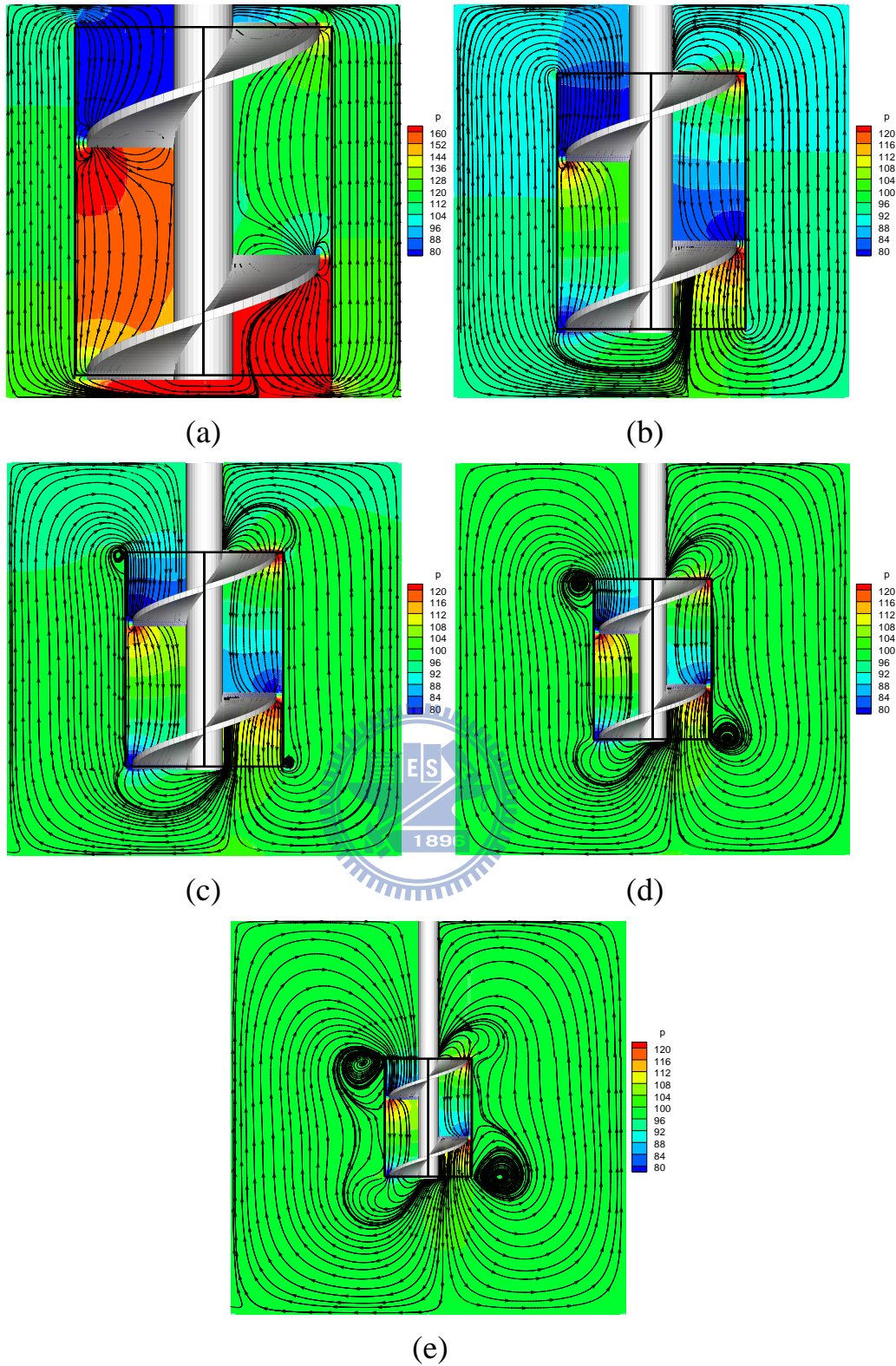


圖 4.8 不同 D/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈：(a) $D=1.69d$ ；(b) $D=2.3d$ ；(c) $D=2.75d$ ；(d) $D=3.67d$ ；(e) $D=5.0d$

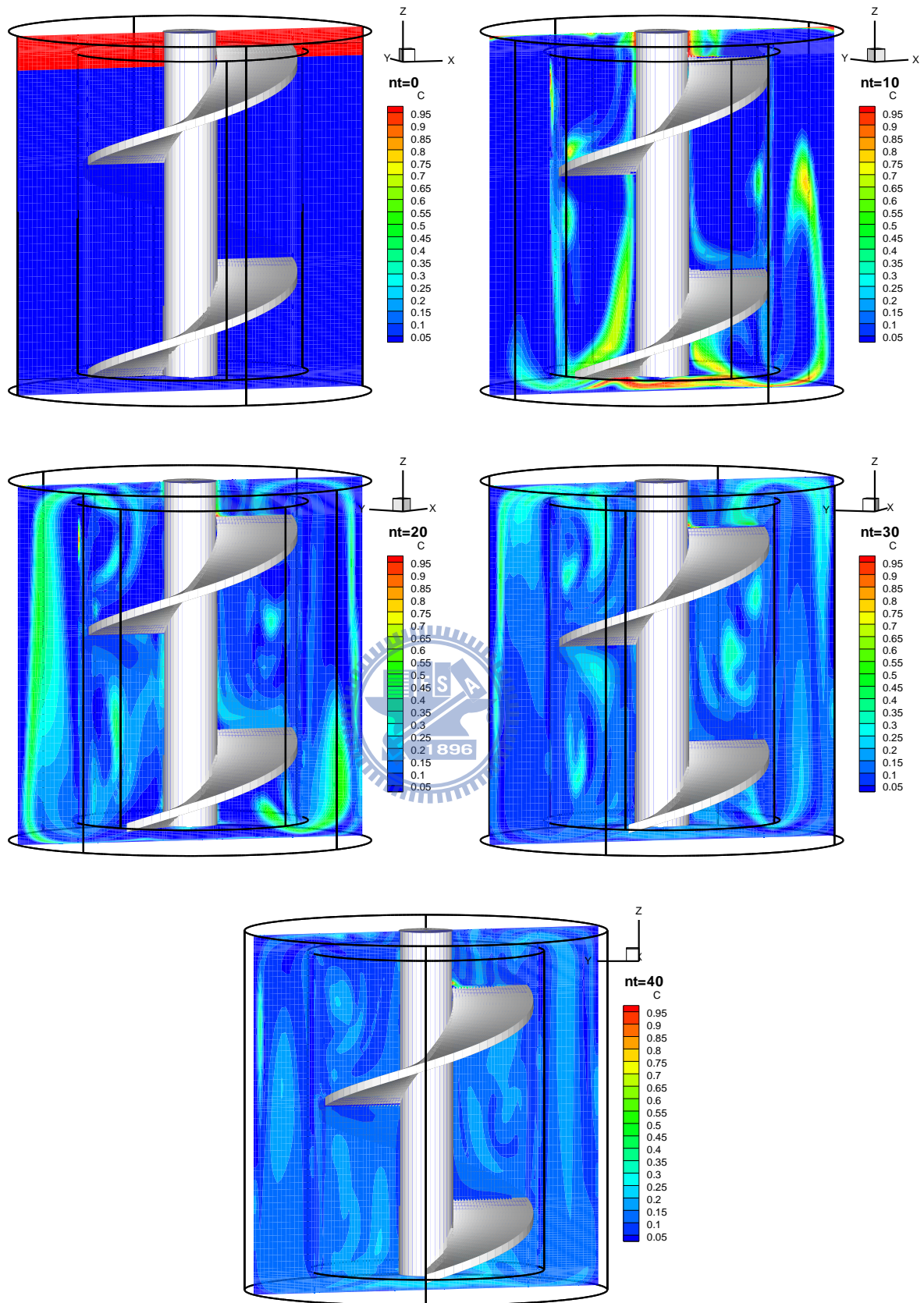


圖 4.9 $D=1.69d$ 時螺桿攪拌器混合過程

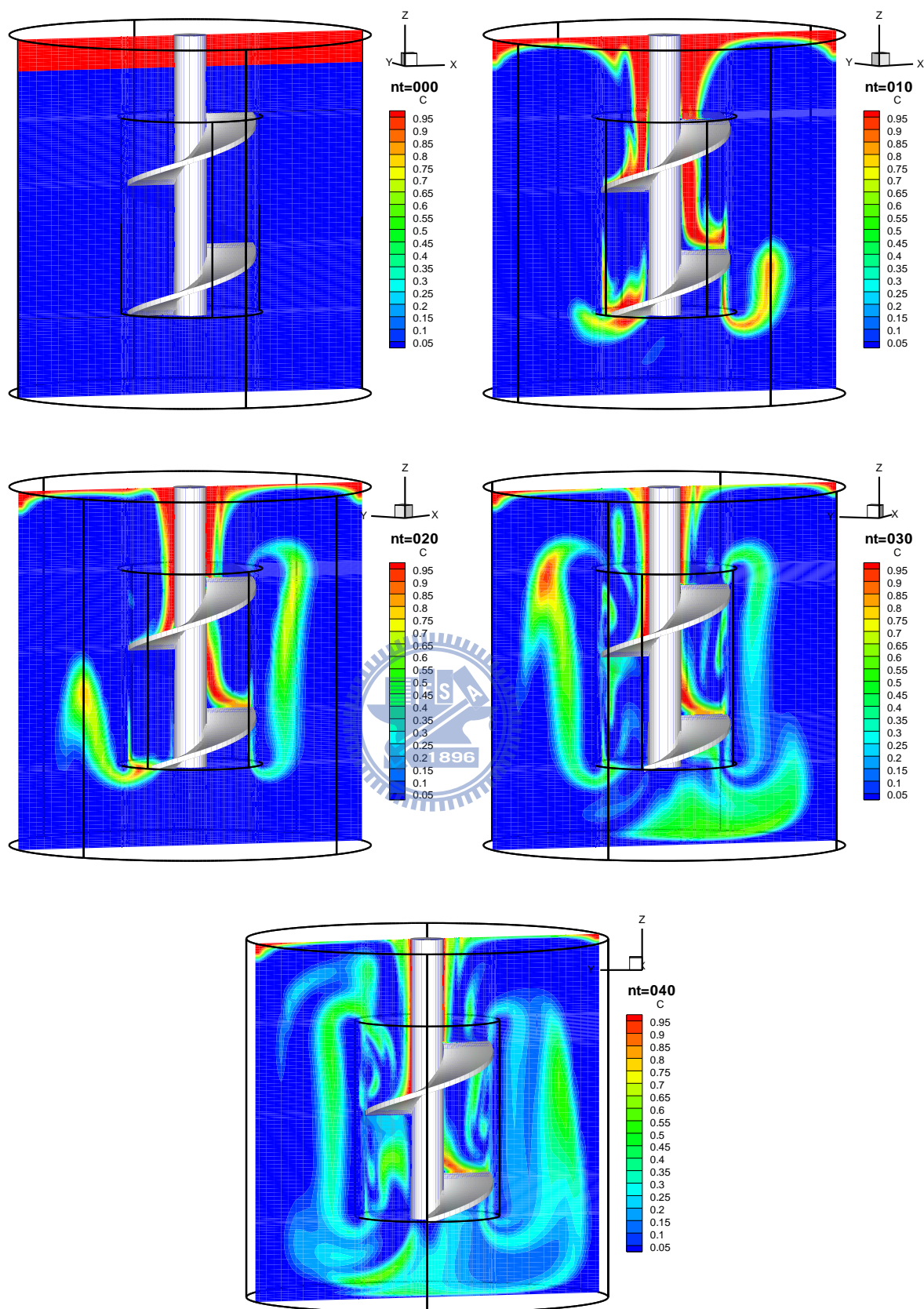


圖 4.10 $D=2.75d$ 時螺桿攪拌器混合過程

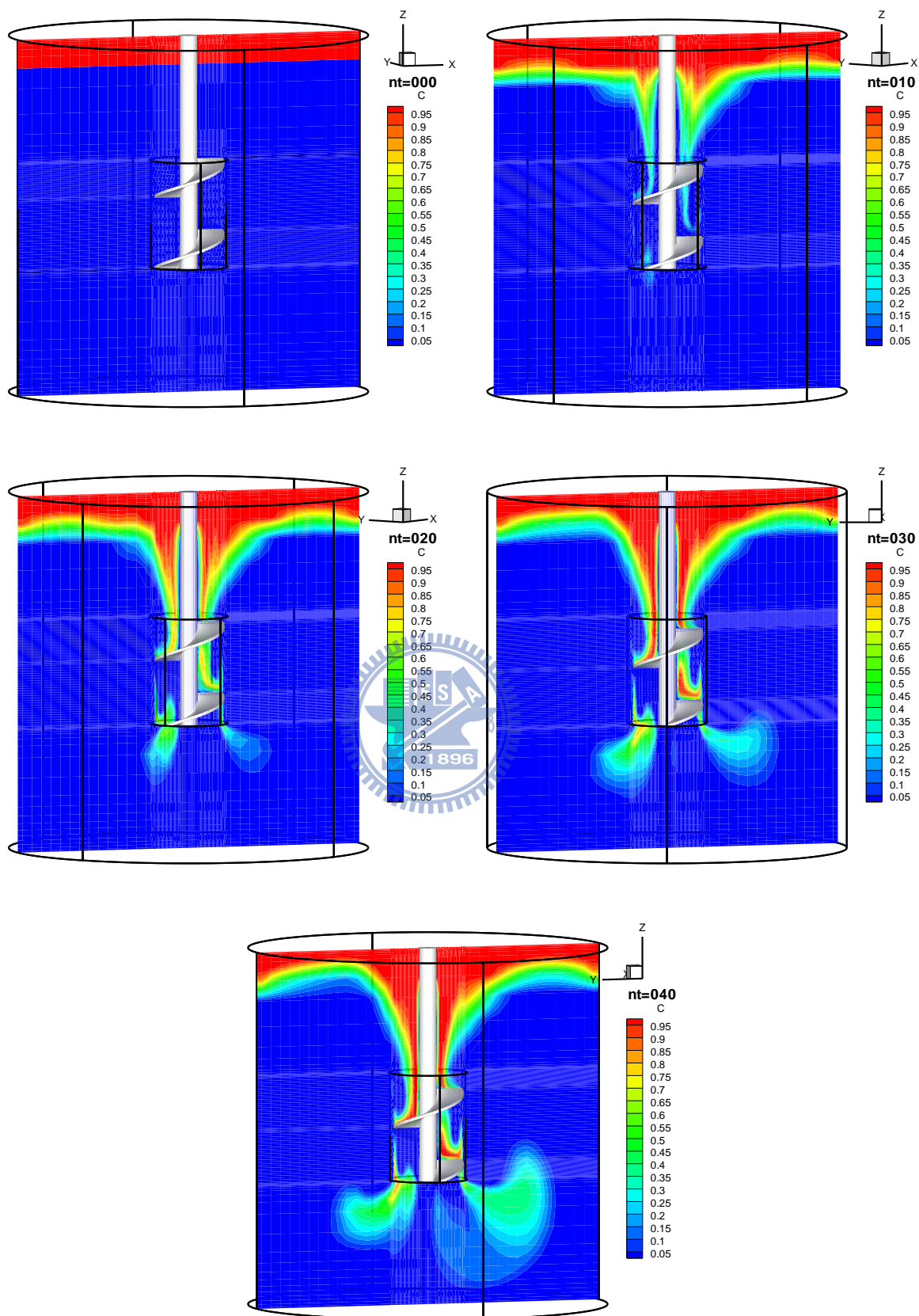


圖 4.11 $D=5.0d$ 時螺桿攪拌器混合過程

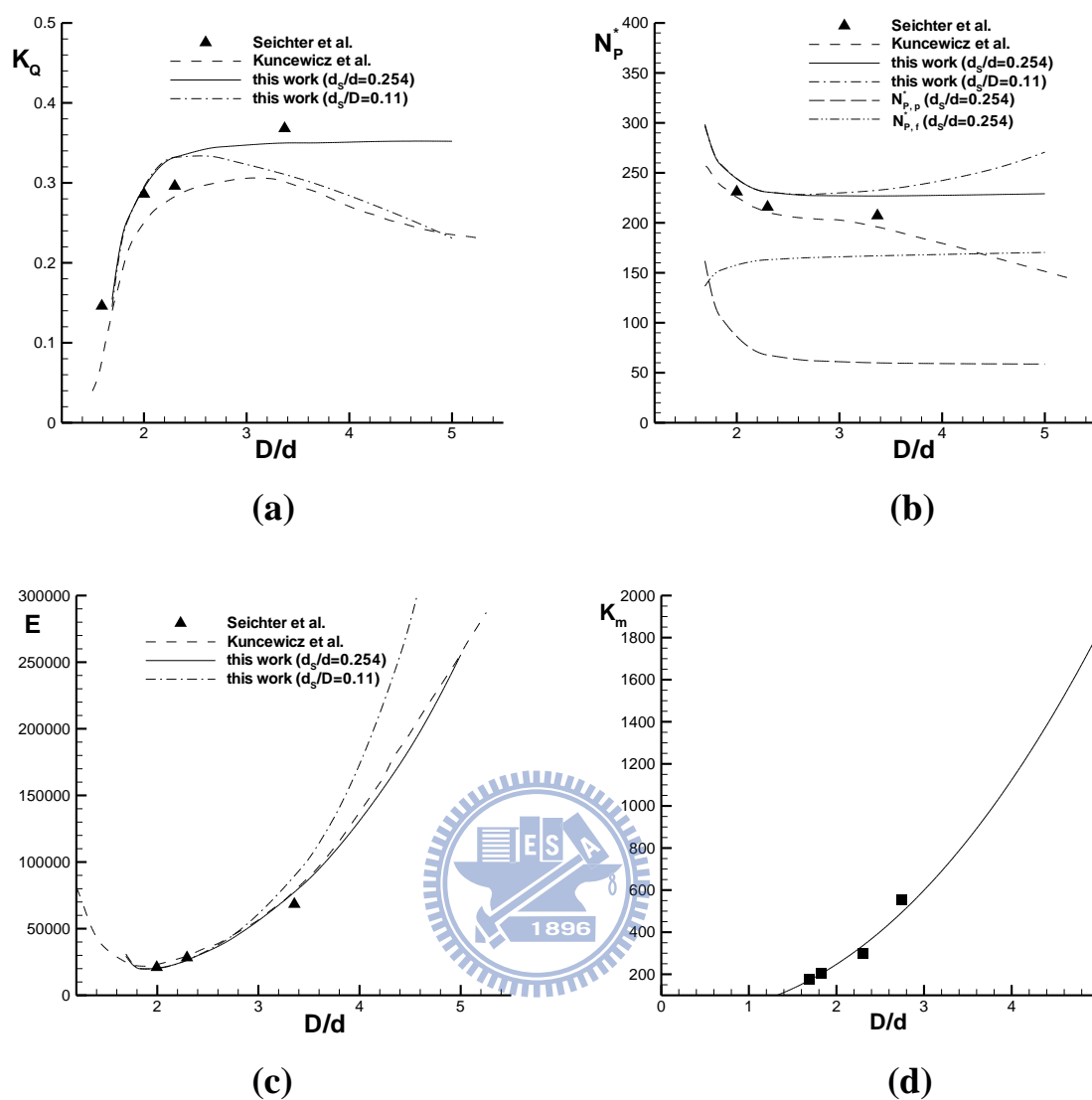


圖 4.12 螺桿攪拌器性能參數:(a)循環數；(b)功率數；(c)能量數；(d)混

合時間數隨槽直徑與葉片直徑比 D/d 的變化

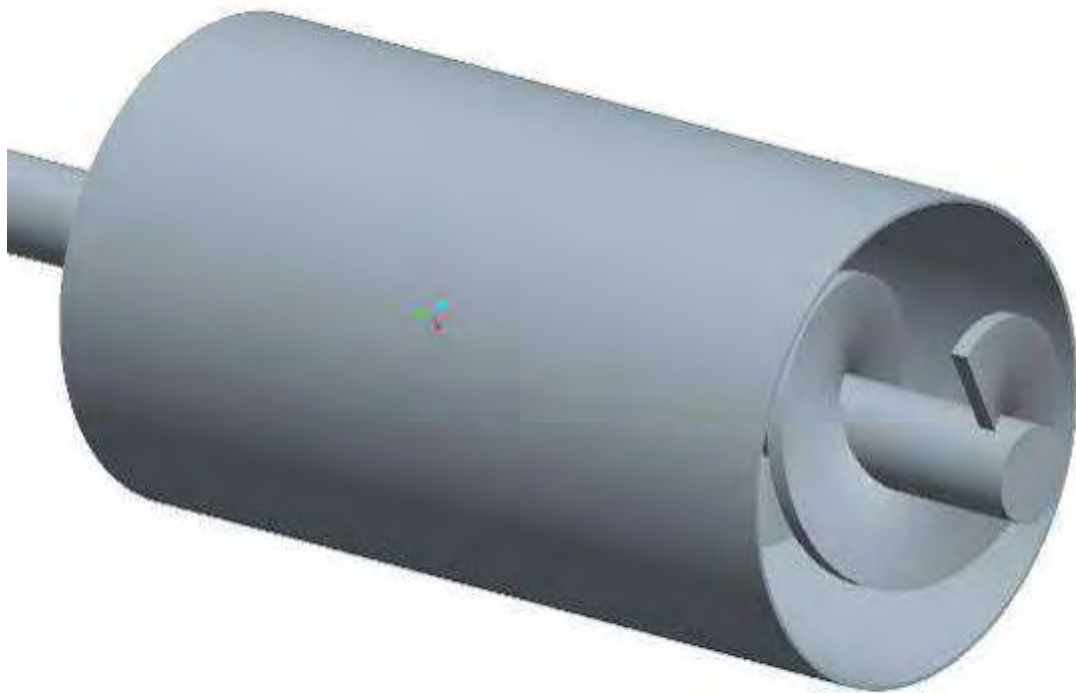


圖 4.13 螺桿攪拌器葉片流道示意圖

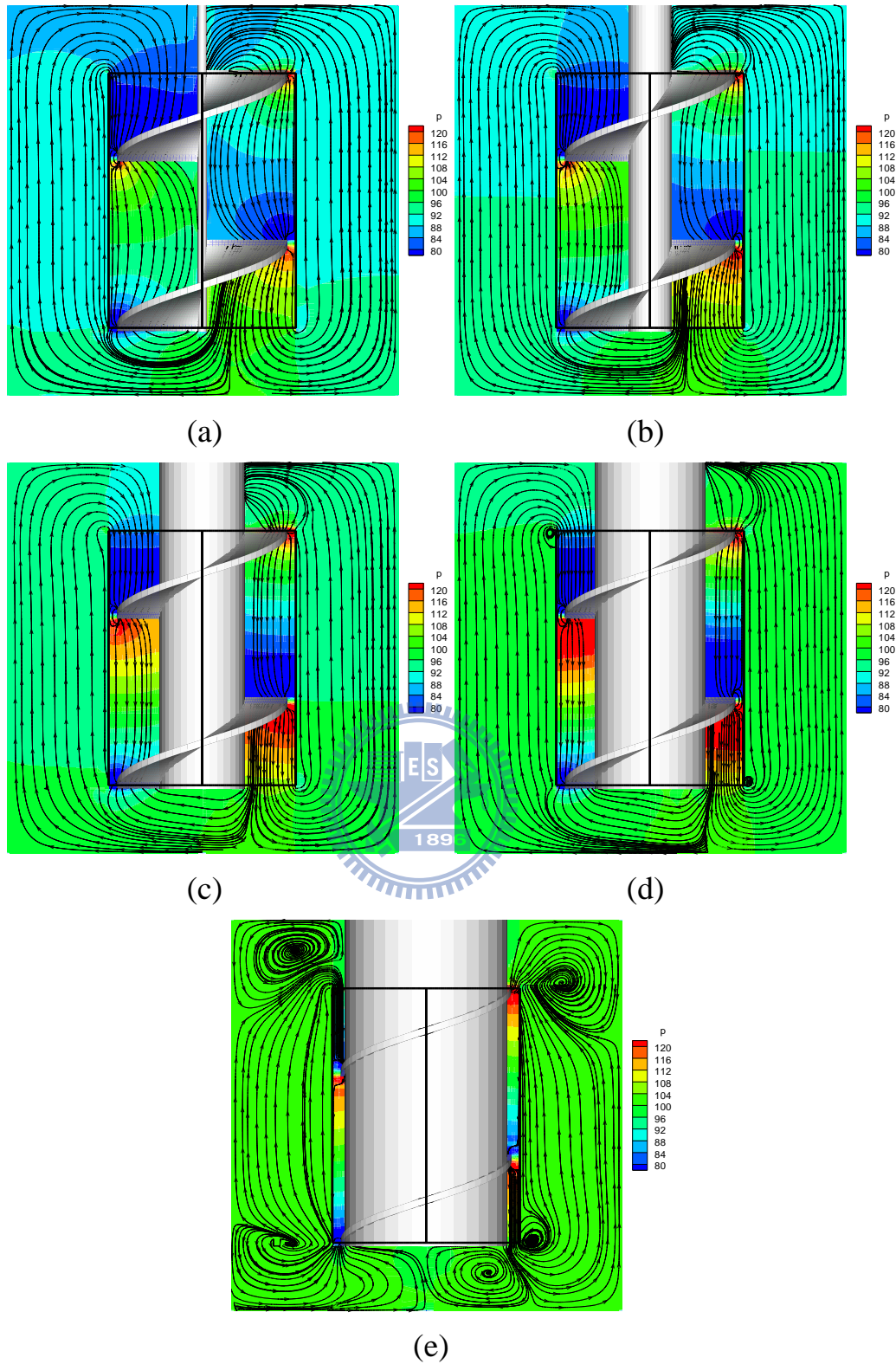
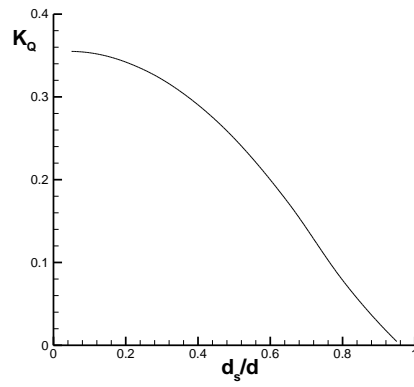
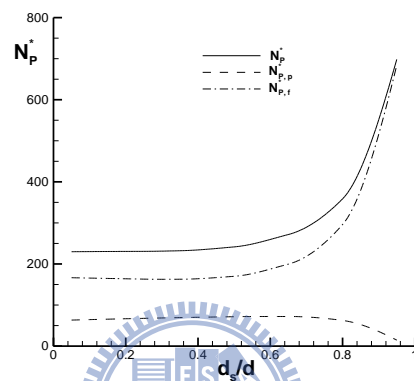


圖 4.14 不同 d_s/d 值的螺桿攪拌器流場的流線與壓力分佈：(a) $d_s = 0.05d$ ；(b)

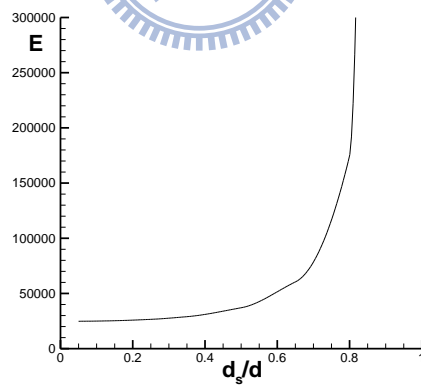
$d_s = 0.254d$ ；(c) $d_s = 0.5d$ ；(d) $d_s = 0.65d$ ；(e) $d_s = 0.95d$



(a)



(b)



(c)

圖 4.15 螺桿攪拌器性能參數:(a)循環數；(b)功率數；(c)能量數隨軸直徑與葉片直徑比 d_s/d 的變化

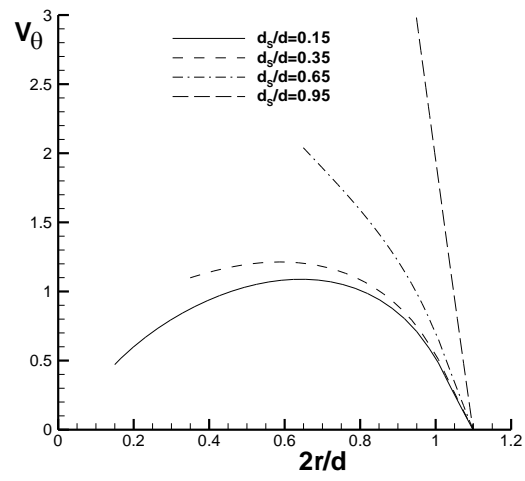
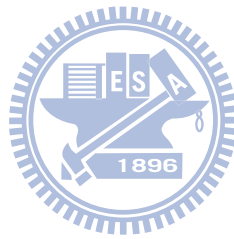


圖 4.16 在套筒內不同 d_s/d 值攪拌器的流體圓周方向速度的徑向分佈



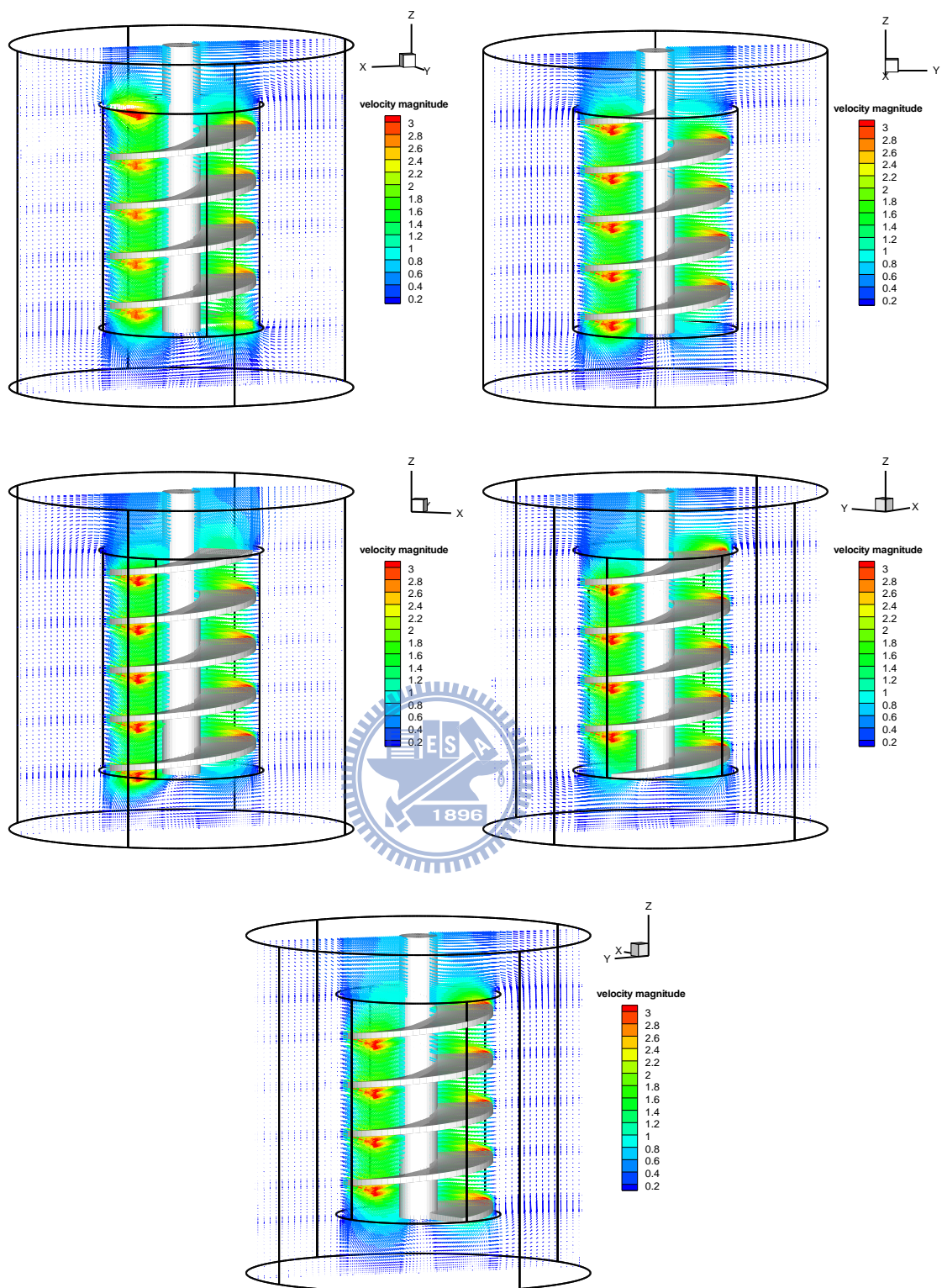


圖 4.17 螺桿攪拌器 $S=0.33d$ 時在不同圓周方向位置的速度場

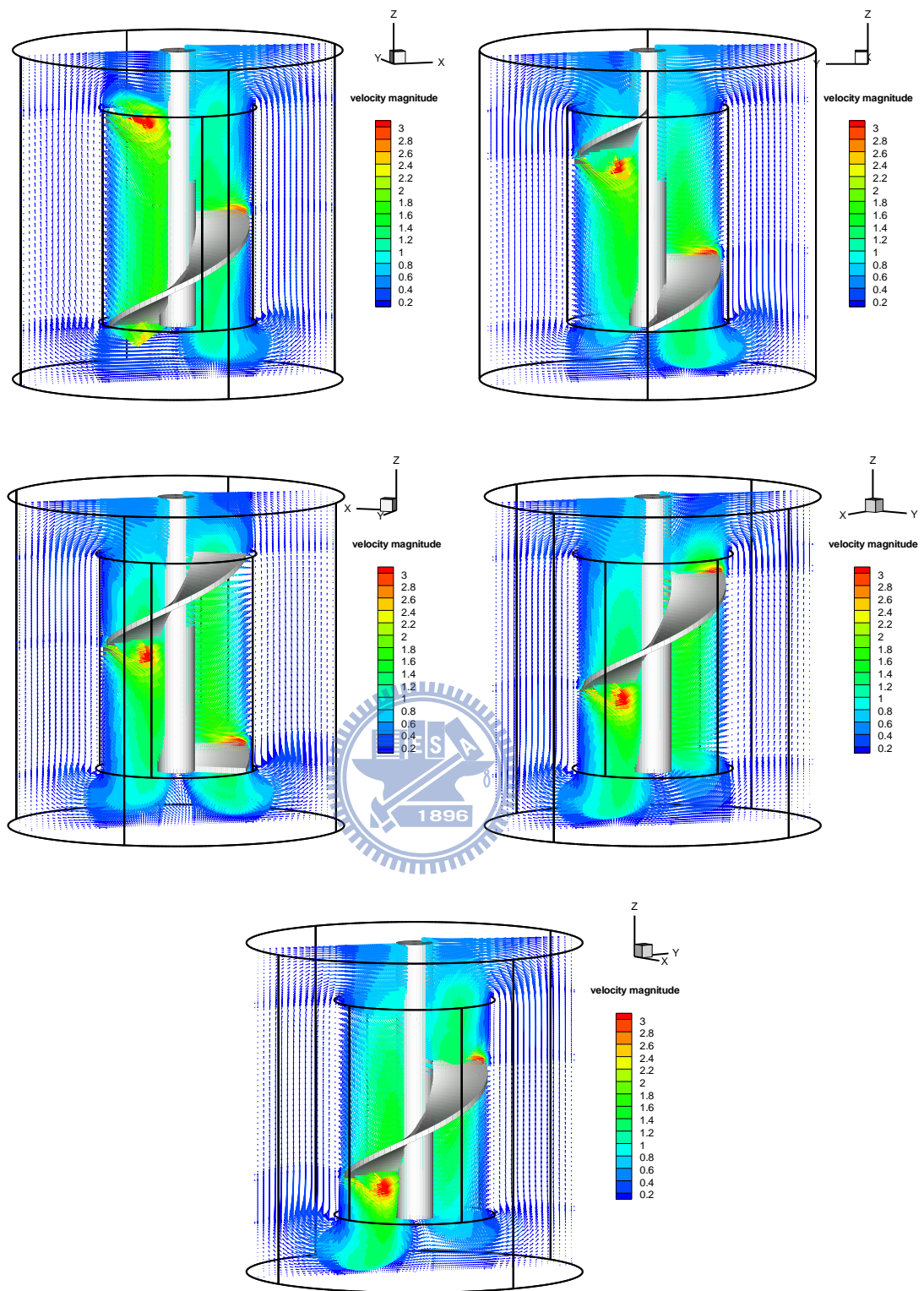


圖 4.18 螺桿攪拌器 $S=1.5d$ 時在不同圓周方向位置的速度場

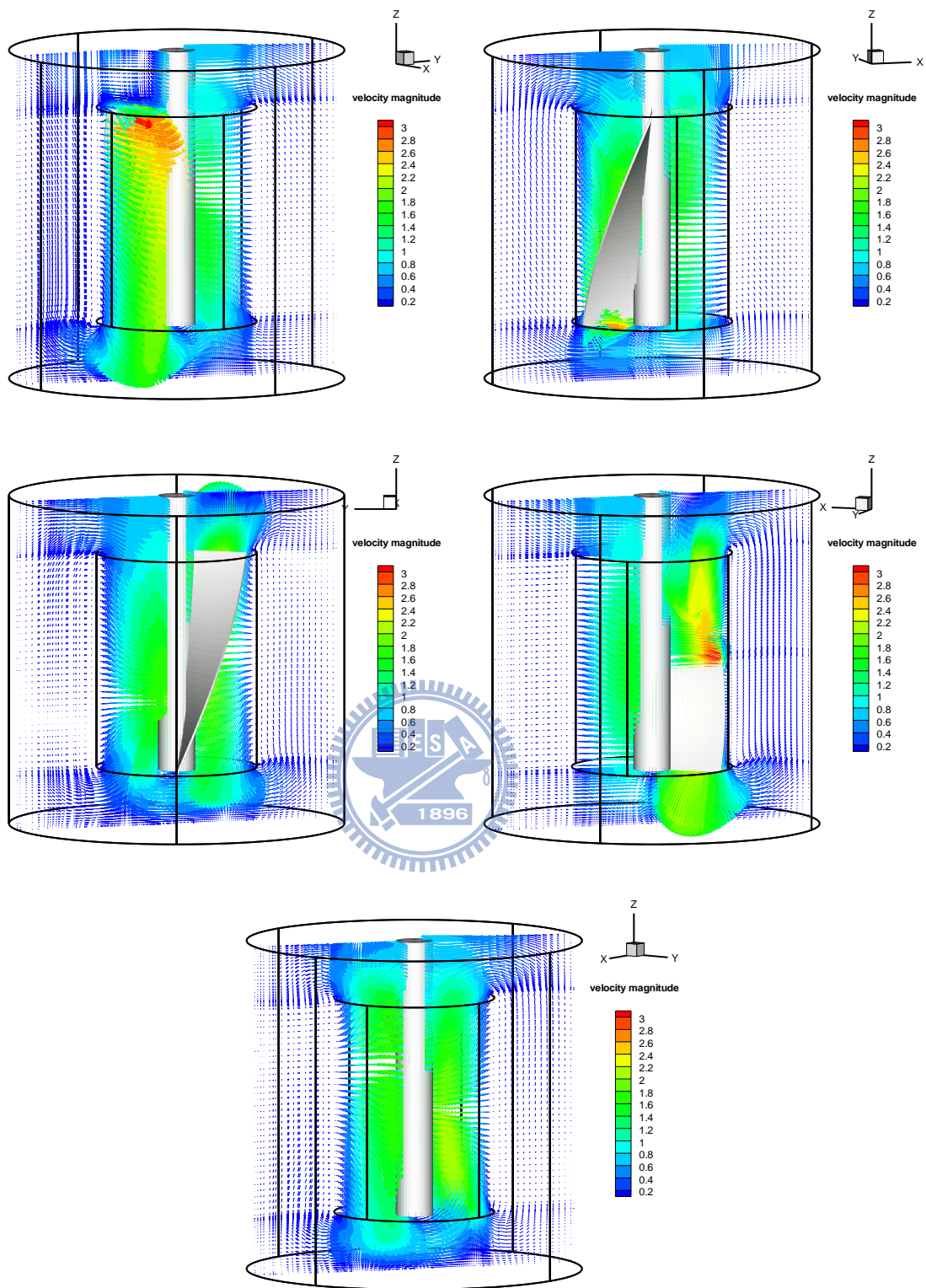


圖 4.19 螺桿攪拌器 $S=7.5d$ 時在不同圓周方向位置的速度場