

國立交通大學

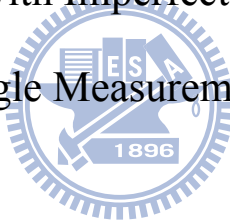
機械工程學系

博 士 論 文

具瑕疵補償與直接角度量測之微機電陀螺儀系統

MEMS Gyroscope Systems with Imperfection Compensations and Direct

Angle Measurements



研 究 生：紀建宇

指導教授：陳宗麟 副教授

中 華 民 國 九 十 九 年 八 月

具瑕疵補償與直接角度量測之微機電陀螺儀系統

MEMS Gyroscope Systems with Imperfection Compensations and Direct
Angle Measurements

研 究 生：紀建宇

Student : Chien-Yu Chi

指導教授：陳宗麟

Advisor : Dr. Tsung-Lin Chen

國 立 交 通 大 學

機 械 工 程 學 系



A Dissertation

Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Doctor of Philosophy
in
Mechanical Engineering
August 2010
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 九 年 八 月

具瑕疵補償與直接角度量測之微機電陀螺儀系統

學 生：紀建宇

指導教授：陳宗麟 副教授

國立交通大學機械工程學系(研究所)博士班

摘要

本研究採用回授控制(軟體計算)同時補償機械結構瑕疵及感測電路瑕疵所造成的影響，在搭配適當的控制與訊號處理方法下，可以不透過角速度積分的方式，直接得到物體轉動角度。本論文詳細探討：(1)瑕疵所造成的系統響應在哪些條件下能被正確估測；(2)如何利用控制輸入營造出此條件，進而補償其瑕疵響應；(3)如何由補償過後的陀螺儀動態直接獲得角度資訊。本文設計的控制器可藉由 Lyapunov 直接法來證明系統的參數收斂性與系統穩定性。此方法所能補償的機械結構瑕疵包括因為微結構設計、製程關係所造成的振動質量塊質量未知、系統剛性係數未知、系統阻尼係數未知、跨軸動態耦合、感測介面的差分電容對不匹配；感測電路瑕疵包括：寄生電容(Parasitic capacitance)、運算放大器的輸入偏壓(Offset voltage)、電路雜訊。

本論文所提出的方法亦可與其它狀態觀察器進行整合，擷取其它狀態觀察器的優點。在角速度估測的部份，本文利用擴增型卡曼濾波器降低雜訊干擾的能力來提升系統參數與動態估測的品質。在數值模擬印證中，相較於以開路方式操作下的「理想陀螺儀」(無機械結構瑕疵與感測電路瑕疵)，本方法可在陀螺儀的所有結構參數都未知(或變動)且感測介面與電路存在瑕疵下，改善感測精確度達六倍；此外，再加入「記憶褪去法」後，對於角速度的感測頻寬改善達十倍。在直接角度估測部分，在角速度以 $200\sin(2\pi \times 10t)^\circ/\text{sec}$ 快速變動下，相較於同樣條件下以角速度積分的結果，本方法可有效避免誤差累積的問題。此外，系統阻尼係數在操作過程因環境變異而出現 40% 以上的變動時，本方法仍可在 0.1 秒內完成補償，並繼續角度估算的工作，無須進行離線校正。

MEMS Gyroscope Systems with Imperfection Compensations and Direct Angle Measurements

Student: Chien-Yu Chi

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen

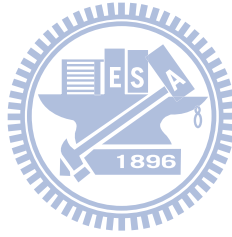
Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

In this dissertation, we proposed using control techniques to estimate and compensate the effects from both mechanical structure imperfections and interface circuit imperfections. Accompanied with proper feedback controls and signal processing techniques, the compensated system dynamics can be used to obtain the rotation angle without integrating the angular rates. The mechanical structure imperfections discussed in this report including unknown proof mass, unknown system stiffness, unknown system damping coefficients, undesired cross-axis coupling, and mismatch of the differential capacitive position sensing. The sensing circuit imperfections discussed in this report including parasitic capacitance, offset voltage of a charge amplifier, circuit noise. This dissertation discussed in detail under what conditions that the effect resulting from the imperfections can be correctly estimated. Furthermore, how to create these conditions and compensate those imperfection effects by control inputs. The stability and effectiveness of the proposed method can be theoretically proven by the Lyapunov direct method.

The proposed method can work with various existing observer algorithms and benefit from their features. For instance, the extended Kalman filter can estimate system dynamics when the measured signals are noisy. This observer algorithm can be used to work with the proposed method to improve the angular rate estimation accuracy. Comparing to the “open loop” operation method, wherein most of system parameters must be known, simulation

results indicated that the proposed method can improve the angular rate sensing accuracy by eight times and the sensing bandwidth by ten times, when those imperfections exist. For the angle measurements, the proposed method does not show obvious signal drifts in a simulation case that the angular rate to be measured is $200\sin(2\pi\times 10t)^\circ/\text{sec}$. Besides, the simulation results show that the proposed method can sustain sudden system parameter variations (40% damping coefficient variations) without an offline calibration process.



誌 謝

首先，我想要感謝我的指導教授陳宗麟老師的諄諄教誨，在我六年的博士研究生涯中，時刻導正我的研究方向，並引導我儘可能做出嚴謹的研究。縱使研究成果並非相當豐富卓越，但在整個博士班修習過程中所有的體驗與學習，相信將對往後的職涯提供實質的益處。此外，也要感謝我的父母，在這幾年的掙扎中給予我最大的支持與鼓勵，讓我能無後顧之憂的情況下全心投入研究。我也要感謝未婚妻伊珊的相伴，體諒並包容我因課業壓力引起的情緒反應。在這不算短的研究生活中，充滿許多歡笑與苦悶，在此我也要感謝所有實驗室的夥伴以及其他的朋友們，與你們共同研究討論以及歡笑打鬧，讓我的博士班生活更加豐富與完整。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iv
目錄	v
表目錄	ix
圖目錄	x
一、緒論	1
1.1 微機電陀螺儀背景簡介	1
1.2 微機電陀螺儀基本架構	3
1.2.1 機械結構	4
1.2.2 彈簧設計	6
1.2.3 阻尼估算	9
1.2.4 驅動與感測介面	10
1.2.5 感測電路	12
1.3 角度量測方法概述	15
1.4 微機電陀螺儀瑕疵與相關研究	16
1.5 研究動機與目的	19
1.6 本論文架構	21

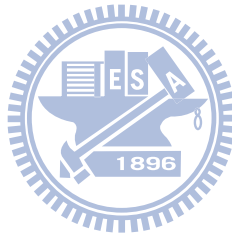
二、	振動式陀螺儀感測原理	22
2.1	系統動態	22
2.2	操作方法	24
2.2.1	傳統操作方法與瑕疵影響	24
2.2.2	閉迴路控制	28
2.2.3	參考模型法與能量控制法	29
2.3	以振動式陀螺儀直接量測轉動角度	31
三、	微機電陀螺儀系統模型	33
3.1	機械結構	33
3.1.1	單一質量塊設計	33
3.1.2	退耦式(Decoupled)雙質量塊設計	34
3.2	感測介面	35
3.3	感測電路	36
3.3.1	基本電荷放大器	36
3.3.2	同步偵測架構	38
3.4	微機電陀螺儀系統模型建構	40
四、	新式振動式陀螺儀控制系統	43
4.1	狀態觀察器設計	46
4.1.1	系統觀察性	46

4.1.2	適用於具參數估測之控制系統的振動式陀螺儀設計	54
4.1.3	觀察器增益設計	57
4.1.3.1	新式觀察器設計	57
4.1.3.2	應用擴增型卡曼濾波器(EKF)之觀察器設計	59
4.1.3.3	時變系統參數估測	60
4.2	回授控制器設計	61
4.2.1	參考模型法	62
4.2.2	系統能量控制	63
4.2.3	替代系統能量控制—阻尼補償	66
4.3	系統穩定性分析	68
五、	角速度量測陀螺儀控制系統模擬	74
5.1	開路系統模擬	74
5.2	角速度量測陀螺儀控制系統	80
5.2.1	單一質量塊振動式陀螺儀	80
5.2.2	退耦式雙質量塊振動式陀螺儀	82
5.2.3	結果討論	83
5.3	角速度量測陀螺儀控制系統—時變系統參數估測	84
5.4	質量已知、感測電路無瑕疵之角速度量測陀螺儀控制系統— 不同回授控制設計比較	86

5.4.1	適應控制法	87
5.4.2	以本論文提出之控制系統搭配參考模型法	89
5.4.3	以本論文提出之控制系統搭配不同回授控制比較	92
5.4.4	結果討論	95
六、	新式直接角度量測陀螺儀控制系統	100
6.1	新式角度量測系統設計	100
6.1.1	回授控制器設計	100
6.1.2	方法一：應用低通濾波器之架構	102
6.1.3	方法二：應用帶通濾波器之架構	105
七、	直接角度量測陀螺儀控制系統模擬	107
7.1	直接角度量測	107
7.2	系統產生變異下之直接角度量測	112
7.3	結果討論	114
八、	結論與未來方向	115
8.1	結論	115
8.2	未來方向	117
	參考文獻	118

表目錄

表 5.1	單一質量塊設計之微機電陀螺儀系統參數。·····	74
表 5.2	退耦式雙質量塊設計之微機電陀螺儀系統參數。·····	74
表 5.3	感測介面與電路參數。·····	80



圖目錄

圖 1.1	用以量測物體角速度的效應。(a)桑亞克干涉示意圖；(b)柯氏效應。……	2
圖 1.2	(a)傳統大型平衡環式陀螺儀；(b)微機電陀螺儀。……	2
圖 1.3	微機電陀螺儀系統架構。……	3
圖 1.4	微機電陀螺儀設計示意圖。(a) 單一質量塊設計；(b) 退耦式雙質量塊設計。……	5
圖 1.5	微機電系統彈簧設計—懸臂樑。……	6
圖 1.6	以懸臂樑作為微機電系統彈簧示意圖。……	7
圖 1.7	不同的微機電系統彈簧設計。(a) 摺疊狀撓性樑；(b) 髮夾式。黑色斜線部分為固定端，其餘為懸浮結構。格子部分長方體為彈簧結構欲支撐的質量塊。……	8
圖 1.8	兩種流體阻尼模型。(a)庫埃特流阻尼；(b)空氣膜擠壓阻尼。……	10
圖 1.9	平行電極板電容。……	11
圖 1.10	微機電系統中兩種用於驅動或感測的基本架構。(a)橫向移動設計；(b)近接移動設計。……	12
圖 1.11	用以量測可變電容位移變化之電荷放大器感測架構示意圖。(a) 同步偵測架構；(b)切換電容架構。……	13
圖 1.12	同步偵測架構搭配載波穩定技術下，各階段訊號之頻域說明。……	14
圖 1.13	用以量測可變電容速度變化之電流放大器感測架構示意圖。……	14
圖 1.14	慣性感測器訊號量測過程與相關方法整理。……	15
圖 1.15	零合白雜訊對時間積分之結果。……	16
圖 1.16	微機電系統彈簧結構之非理想性。……	17
圖 2.1	陀螺儀以 1 rad/sec. 的角速度旋轉下，不同品質因子對感測軸振幅 Y_0 之影響。……	26
圖 2.2	陀螺儀以 1 rad/s 角速度旋轉下之電容變化值，隨共振頻率不匹配程度之變	

	化，與商用可變電容量測 IC(MS-3110)解析度比較。橫軸為感測軸共振頻率與驅動軸共振頻率不匹配程度；右邊縱軸為量測 IC 的解析度；左邊為 y 軸可量測到的電容變化大小。·····28
圖 2.3	振動式陀螺儀在兩種控制方法下質量塊的軌跡，雙箭頭代表質量塊運動的軌跡。(a)參考模型法；(b)能量控制法。·····30
圖 2.4	理想振動式陀螺儀的進動，其中(i, j)代表慣性座標，(x, y)代表轉動座標。左圖為初始狀態；右圖為框架轉動 45 度後之狀態。·····31
圖 3.1	兩種微機電陀螺儀設計示意圖，斜線部分為質量塊。(a)單一質量塊設計；(b)退耦式雙質量塊設計。·····33
圖 3.2	橫向式梳狀結構。(a)初始狀態；(b)因位移 x 造成的差動電容變化。·····36
圖 3.3	考慮非理想因素下之電荷放大器。·····36
圖 3.4	以 HSPICE 模擬印證本文推導之感測電路關係式。此為同步偵測架構在經過解調之前的訊號。·····39
圖 3.5	以 Matlab 處理圖 3.4 之訊號，包括加入白雜訊(左上圖)與 1/f 雜訊(右上圖)、並在解調後以低通濾波器過濾(右下圖)。左下圖為未經同步偵測架構處理之訊號。·····40
圖 4.1	三種不同狀況下，質量已知且感測電路無瑕疵之單一質量塊陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{tsp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。··49
圖 4.2	三種不同狀況下，質量未知但感測電路無瑕疵之單一質量塊陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{tmp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。··51
圖 4.3	三種不同狀況下，質量未知但感測電路無瑕疵之退耦式雙質量塊陀螺儀陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{emp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。·····52
圖 4.4	擴增型卡曼濾波器(EKF)運算流程圖。·····60
圖 5.1	以表 5.1 之參數模擬之系統頻率響應。(a) x 軸；(b) y 軸。·····75
圖 5.2	以表 5.1 之參數模擬之兩軸能量傳遞頻率響應。(a) x 到 y；(b) y 到 x。··76

圖 5.3	以表 5.2 之參數模擬之系統頻率響應。(a) x 軸；(b) y 軸。·····	77
圖 5.4	以表 5.2 之參數模擬之兩軸能量傳遞頻率響應。(a) x 到 y；(b) y 到 x。··	77
圖 5.5	系統未轉動下，以開路操作之陀螺儀。(a) 理想陀螺儀；(b) 以表 5.1 參數 模擬之單一質量塊陀螺儀；(c) 以表 5.2 參數模擬之退耦式陀螺儀。·····	79
圖 5.6	系統在 0.5 秒開始以 10 rad/sec.的角速度轉動，以開路操作之陀螺儀。(a) 理 想陀螺儀；(b) 以表 5.1 參數模擬之單一質量塊陀螺儀；(c) 以表 5.2 參數 模擬之退耦式陀螺儀。·····	79
圖 5.7	以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，阻尼補償控制下，以擴增型卡曼 濾波器設計觀察器增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a) 感測電路輸 出，x 軸偏壓為 15 mV，y 軸偏壓為 11 mV；(b) 以狀態觀察器估測之系統 動態。·····	81
圖 5.8	以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，阻尼補償控制下，以擴增型卡曼 濾波器設計觀察器增益，狀態觀察器估測到之系統參數。系統參數包含八 個機械結構參數以及兩個電路輸出誤差。·····	81
圖 5.9	以退耦式設計為基礎之陀螺儀控制，阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波 器設計觀察器增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a)感測電路輸出，x 軸偏壓為 8 mV，y 軸偏壓為 12 mV；(b)以狀態觀察器估測之系統動態。·· ·····	83
圖 5.10	以退耦式設計為基礎之陀螺儀控制，阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波 器設計觀察器增益，狀態觀察器估測到之系統參數。·····	83
圖 5.11	在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器 增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a) 感測電路輸出，x 軸與 y 軸偏壓 分別為 10 mV 與 12 mV；(b)估測系統動態。·····	85
圖 5.12	在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器 增益，狀態觀察器估測到之系統參數。·····	85
圖 5.13	在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器	

	增益，狀態觀察器估測到不同頻率變動下之角速度。·····	86
圖 5.14	以適應控制法控制下之陀螺儀質量塊運動軌跡，X、Y 為旋轉座標。·····	87
圖 5.15	以適應控制法設計的參數適應律估測之系統參數。·····	88
圖 5.16	三階、通帶為 10 Hz 之低通濾波器頻率響應圖。·····	88
圖 5.17	以適應控制法設計的參數適應律估測之角速度，並以低通濾波器過濾之結果。·····	89
圖 5.18	以本論文的方法控制下之陀螺儀質量塊運動軌跡，X、Y 為旋轉座標。···	90
圖 5.19	以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之系統動態。·····	90
圖 5.20	以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之系統參數。·····	91
圖 5.21	以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之角速度以低通濾波器過濾後之結果。·····	91
圖 5.22	以狀態觀察器搭配阻尼補償作控制回授下，觀察器估測之系統動態。···	92
圖 5.23	以狀態觀察器搭配阻尼補償作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。·····	93
圖 5.24	以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，觀察器估測之系統動態。···	93
圖 5.25	以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。·····	94
圖 5.26	加入能量控制，以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，觀察器估測之系統動態。·····	95
圖 5.27	加入能量控制，以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。·····	95
圖 5.28	在速度量測訊噪比約為 10 的情況下，以不同演算法設計狀態觀察器估測之角速度。上圖使用本論文之控制器，下圖使用擴增型卡曼濾波器。·····	96
圖 5.29	適應性順滑模態控制法中，不同順滑層厚度對角速度估測精確度之影響。 (a) 順滑層厚度為 0.01；(b) 順滑層厚度為 0.5。·····	97
圖 5.30	參考模型法控制中參考模型頻率設定為匹配下，觀察器估測之系統動態。···	

.....	98
圖 5.31 參考模型法控制中參考模型頻率設定為匹配下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。	98
圖 5.32 三個不同控制回授下，觀察性矩陣的奇異值分解。(a) 阻尼補償控制；(b) 兩軸頻率設定不同之參考模型控制；(c) 兩軸頻率設定相同之參考模型控制。	99
圖 6.1 當系統無旋轉以及輔助訊號為零時之陀螺儀質量塊振動軌跡。	103
圖 6.2 應用低通濾波器之訊號處理架構。	105
圖 6.3 應用帶通濾波器之訊號處理架構。	106
圖 7.1 以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測，狀態觀察器估測之系統動態。	107
圖 7.2 以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測，狀態觀察器估測之系統參數。	108
圖 7.3 以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測下，質量塊之運動軌跡， X 、 Y 為旋轉座標。	109
圖 7.4 將控制下之陀螺儀動態以應用帶通濾波器的架構處理後，在經過如(6.9)的關係式計算出轉動角度。(a) 通帶為 3000-3400 Hz 之帶通濾波器頻率響應圖；(b) 上圖為過濾後之假想系統動態；下圖為計算出來的角速度。	110
圖 7.5 將控制下之陀螺儀動態直接以(6.9)的關係式計算出轉動角度，再以低通濾波器過濾後之結果。(a) 通帶為 200 Hz 之低通濾波器頻率響應圖；(b) 上圖為以系統動態直接計算的角度；下圖為經過低通濾波器處理後的結果。	110
圖 7.6 以方法一作角度計算下之頻譜分析。上圖為經過低通濾波器之前；下圖為經過低通濾波器之後。	111
圖 7.7 使用方法一的角速度估算與直接積分估測角速度之比較。	112
圖 7.8 使用本論文提出的新式角度量測系統，在阻尼係數因環境變動發生改變	

	下，狀態觀察器估測的系統參數。·····	113
圖 7.9	使用本論文提出的新式角度量測系統，在 0.5 秒時阻尼係數因環境變動發生 改變下，使用方法一做角速度估算的結果。·····	113



一、緒論

靠著 Wii 與 iPhone 的熱賣，微機電製程的運動感測器(Motion Sensor)技術一舉在消費性市場上打響了名號。短短 1 年多的時間內，許多的半導體廠紛紛推出對應的解決方案，甚至連晶圓代工廠也喊出微機電系統(Microelectromechanical systems, MEMS)代工的服務，企圖搶佔這塊華麗的消費性電子大餅。根據市場研究機構 The Information Network 預估，MEMS 應用市場規模可達 78 億美元，其中 MEMS 在消費電子應用比例可近五成，規模將為 35 億美元，預估到 2012 年全球 MEMS 應用市場規模將達 154 億美元，其中 MEMS 消費電子應用規模可成長至 71 億美元 [1]。

目前市場上較常使用的運動感測器解決方案中，則以 2~3 軸的加速度計為最多，因其設計簡單且方便使用，目前已被應用在遊戲機、可攜式導航產品(Portable navigation device, PND)、智慧型手機及計步器等消費性電子上。然而，市場普遍看好的陀螺儀(Gyroscope)則仍未見起色，主要原因在於元件技術層次較高、價格昂貴。根據另一個市場研究機構 iSuppli 調查研究顯示，微機電陀螺儀到 2010 年後將會有明顯的市場需求出現。

1.1 微機電陀螺儀背景簡介

陀螺儀泛指用來量測物體轉動速度的感測器，通常藉由桑亞克效應(Sagnac effect)或柯氏效應(Coriolis effect)來量測。桑亞克效應的應用又稱桑亞克干涉，其架構如圖 1.1(a)所示，光源透過分光器同時但反向進入介質，在裝置未旋轉時，順時針與逆時針兩道光完整的走完一圈後將無光程差，兩道光產生一固定的干涉條紋；當裝置轉動時，其光程差隨轉動產生，而干涉條紋也將隨轉速的不同而變化，因此可藉由干涉條紋的判別來估算角速度。柯氏效應原理可由圖 1.1(b)說明，若有一物體朝慣性座標(i, j, k)的 j 方向以 v 的速度飛行，觀測者由旋轉座標(x, y, z)上觀察物體，將可觀察到物體除了 j 方向的速度以外，尚有一 i 方向的加速度，其大小與旋轉座標之轉速 ω 成正比，因此可藉由量測 i 方向的加速度分量來計算角速度，振動式陀螺儀皆透過柯氏效應達到角速度量測。

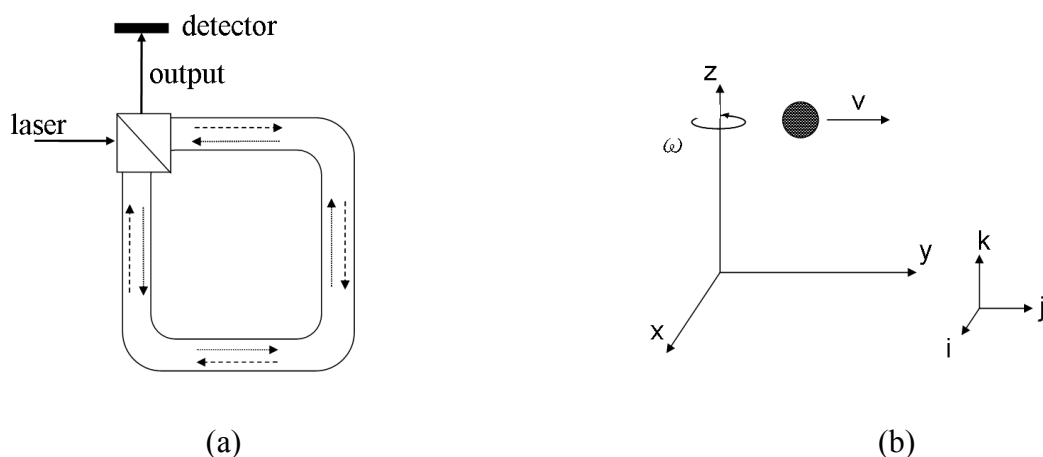


圖 1.1： 用以量測物體角速度的效應。(a) 桑亞克干涉示意圖；(b) 柯氏效應。

傳統大型的平衡環式(Gimbals)陀螺儀(如圖 1.2(a))設計需要一持續轉動的旋轉盤，以及支撐旋轉物體的軸承物件，這在微小化的設計製作中相當困難，因此，一般微機電陀螺儀幾乎都是以振動的結構代替旋轉盤，如圖 1.2(b)所示。

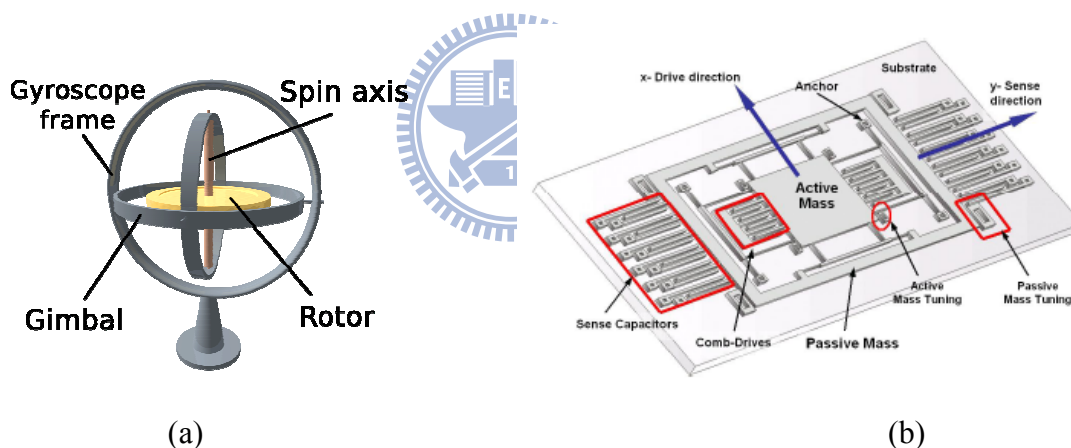


圖 1.2： (a) 傳統大型平衡環式陀螺儀 [2]；(b) 微機電振動式陀螺儀 [3]。

第一個振動式陀螺儀在 1980 年代初期首先被製作出來，是以石英作為材料的音叉式結構；在 1991 年 Charles Stark Draper Laboratory 提出第一個以矽製程製作的微機電陀螺儀；同年，由 Fujishima 等人[4]成功的用壓電材料製作出小型的振動式陀螺儀，自此開啟了一陣設計微小型陀螺儀的風潮。

相較於傳統的機械式陀螺儀，微機電陀螺儀最大的特色為體積小，在大量製造下又可大幅降低成本，有利於其在許多電器用品上的應用。如汽車的行車穩定(Ride stabilization)系統與翻覆偵測(Rollover detection)系統、搭配全球衛星定位系統(GPS)使用

的航位推算(Dead reckoning)、互動式遊戲機的姿態感測、數位相機或數位錄影機的防手震(Camcorder stabilization)系統、智慧型系統或機器人等[3]。

然而，這個微小化的特色也成了提高微機電陀螺儀性能最大的挑戰。由於體積小的緣故，製作過程的製程不確定性(Uncertainties)，將對結構特性造成極大的影響，包括：彈性係數(或共振頻率)、阻尼係數、振動質量塊。除此之外，感測電路的瑕疵包括：雜訊、寄生電容(Parasitic capacitance)以及放大器的非理想性(Non-idealities)等，都將大幅降低微機電陀螺儀的效能。因此，在上述機械與電路瑕疵的影響之下，微機電陀螺儀過去一般都被歸類在性能較差的角速度感測器。

1.2 微機電陀螺儀基本架構

陀螺儀和加速度計(Accelerometer)一樣同為慣性感測器，用以量測慣性加速度，都需要透過質量量測並轉換成等效力。一般機械式陀螺儀被設計來量測柯氏加速度(Coriolis acceleration)以推算出旋轉的角速度，要量測此柯氏加速度則必須透過一個「持續穩定運動的物體」，該物體通常為旋轉、振動或持續移動的質量(如流體)。在微機電陀螺儀中，作動的方式以振動佔大多數。振動一般又可分為線性振動與轉動振動兩種，本節將介紹最常見的線性振動式微機電陀螺儀。

微機電陀螺儀系統依訊號的傳感可細分為三個子系統，分別為：機械結構(包含感測介面)、感測電路與控制器(法則)，如下圖所示：

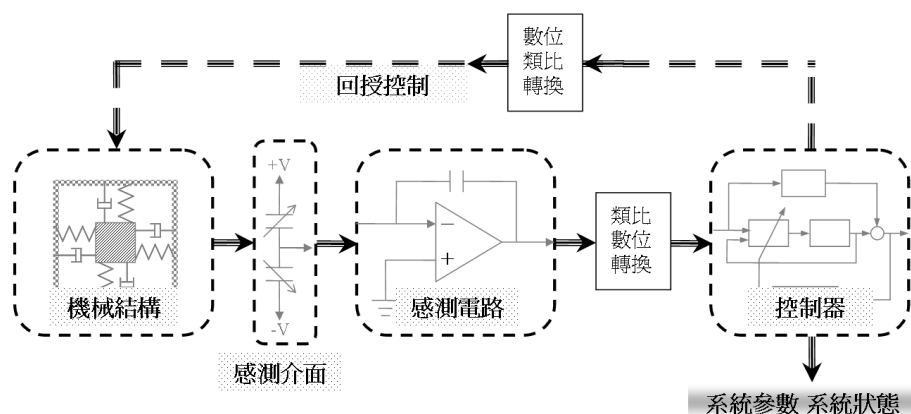


圖 1.3：微機電陀螺儀系統架構。

因轉動造成的科氏加速度透過一持續振動的質量轉換成科氏力，科氏力又在機械結構上引起相對應的位移；此位移透過感測介面(如壓電效應或電容變化)再次被轉換成等量的電壓或電流訊號；此一電訊號由感測電路(如電流或電荷放大器)轉換成適用於一般運算處理的電壓訊號輸出；該電壓訊號經由回授控制器的演算法處理，一方面產生回授控制輸入，另一方面可以計算出引起科氏加速度的角速度，在適當的演算法設計下也可以同時估測出其他系統參數。

須要注意的是，無論是將微陀螺儀機械結構與感測電路製作於單一晶片上的架構，如 J.A. Geen 等人[5]以 IC 製程製作出的微機電振動式陀螺儀，其中類似音叉的雙質量塊陀螺儀、可變電容的感測介面、量測訊號與補償溫度影響的感測電路皆整合在同一個晶片上的方式；或是將兩者分別製作於不同晶片再使用打線(Wire bond)方式連接的多晶片架構，如 A.S. Sharma 等人[6]先用體型微加工(Bulk micromachining)技術以絕緣層上矽晶結構(Silicon on Insulator, SOI)的晶圓製造出振動式陀螺儀結構與感測介面，再將其與另一個晶片上的轉阻式放大器(Trans-impedance amplifier)連接以量測訊號的架構，其感測訊號的傳感皆需透過如圖 1.3 的程序。然而，在多晶片架構中由於整合較複雜，因此在感測電路中可能有較大的寄生電容(Parasitic capacitance)；另外，單晶片的架構在電路的整合理論上會有較佳的性能，但以 IC 製程製作出來的機械結構特性往往較體型微加工差，因此兩者各有優缺點。

1.2.1 機械結構

微機電振動式陀螺儀的質量塊以機械結構連接於框架上並呈懸浮的狀態，亦需要驅動與感測裝置，以使質量塊產生振動並且量測因柯氏力所引起的變化。依結構設計的不同，一般又有單一質量塊設計與退耦式雙質量塊設計，如圖 1.4 所示。

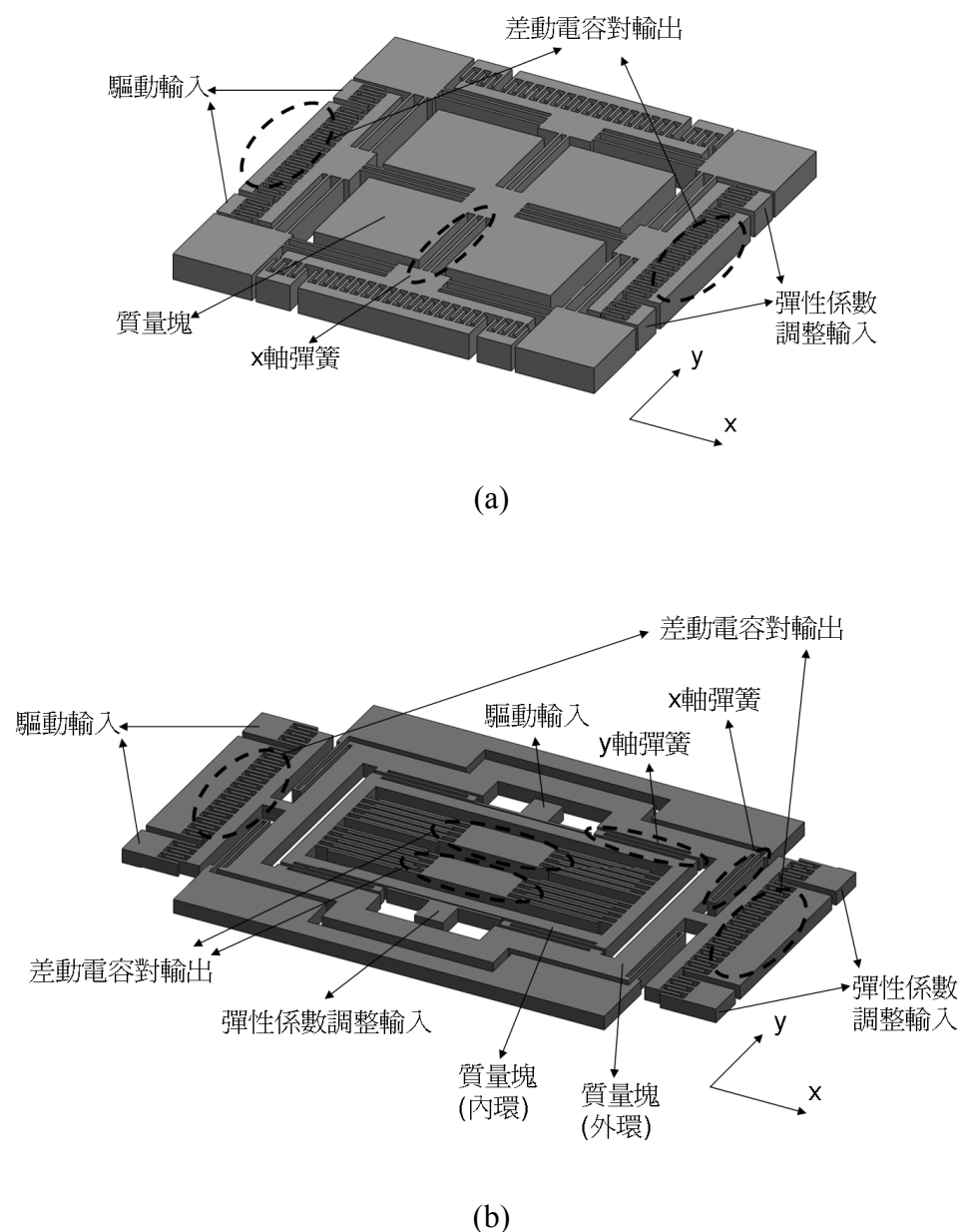


圖 1.4：微機電振動式陀螺儀設計示意圖。(a) 單一質量塊設計；(b) 退耦式雙質量塊設計。

圖 1.4(a)的單一質量塊設計為雙軸對稱結構，包括沿兩軸方向振動的質量與周邊設計，圖上僅標示 x 軸方向的配置，包括用以輸入控制訊號的驅動輸入端、量測質量塊在兩軸方向上的位移或速度的差動電容(Differential capacitance)輸出端以及彈性係數調整輸入端。按照設計，兩軸之彈性係數(或共振頻率)應該相等，分別由六對兩端拘束的雙懸臂樑構成，圖中僅標示出一對 x 軸方向的彈簧。此結構係參考 S.E. Alper 與 T. Akin [4] 的設計改良而成，每對彈簧由兩個懸臂樑構成的原因是為了增加軸向的剛性，以儘可能

在橫向運動時不要產生軸向的運動(即耦合動態)，此設計具有退耦式設計的優點。圖 1.4(b)的退耦式雙質量塊設計為非對稱結構，由於周邊設計亦不同，圖上標示出兩軸的配置。此雙質量塊為內外環結構，外環僅可沿 x 軸方向自由振動，內環本體可沿 y 軸方向自由振動，設計上外環將不影響內環沿 y 軸方向的振動，藉此達到不干擾輸出的目的。由於沿兩軸方向振動質量大小不同，為了讓兩軸共振頻率匹配，兩軸彈簧結構的彈性係數需要依質量的不同調整，而兩軸彈簧分別由四對相同型態的結構組成。不同結構設計將影響阻尼係數與彈性係數的估算，甚至直接影響系統特性或直接造成動態的耦合，以下幾節將就各個部份作簡介。

1.2.2 彈簧設計

在微機電振動式陀螺儀中，彈簧除了要使質量塊懸浮以外，具有特定方向的自由度也是設計重點。一般在微機電系統中，最簡單的彈簧設計可以用一懸臂梁(Cantilever beam)取代，圖 1.5 為一 y 軸方向微結構彈簧示意圖。

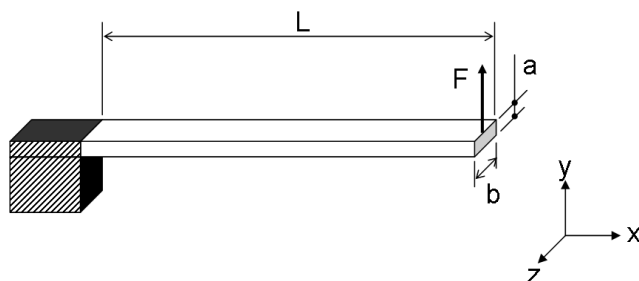


圖 1.5：微機電系統彈簧設計—懸臂樑。黑色斜線部分為固定端，其餘為懸浮結構。

在懸臂樑的自由端施加一 F 力往 y 軸方向彎曲，則懸臂樑的形變為：

$$\delta_y = \frac{FL^3}{Ea^3b} \quad (1.1)$$

其中 E 為該懸臂樑的楊氏係數(Young's Modulus)。由此可以得到此「彈簧」之 y 軸彈性係數為：

$$K_y = \frac{F}{\delta_y} = \frac{Ea^3b}{4L^3} \quad (1.2)$$

同樣地，z 軸與 x 軸方向的彈性係數可以分別計算為：

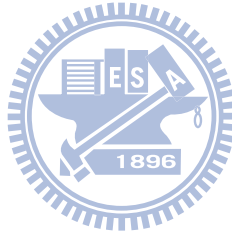
$$K_z = \frac{Eab^3}{4L^3}, \quad K_x = \frac{Eab}{L} \quad (1.3)$$

該懸臂樑三軸的彈性係數比為：

$$\frac{K_z}{K_y} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \frac{K_x}{K_y} = \left(\frac{2L}{a}\right)^2, \quad \frac{K_x}{K_z} = \left(\frac{2L}{b}\right)^2 \quad (1.4)$$

為了維持其 y 軸方向之自由度，並且限制 z 軸與 x 軸方向之運動，必須儘可能設計將 b/a 以及 2L/a 提高。此外，在 x 軸方向之運動為樑之拉伸或挫曲(Buckling)，這在微機電系統中幾乎無法因為外力造成，其通常起因於內應力(Internal stress)。若以圖 1.5 的設計，藉由以上的比較可以清楚得知：

$$K_x \gg K_z > K_y \quad (1.5)$$



因此該設計可以作為在微機電系統中 y 軸方向之彈簧，如圖 1.6 所示。

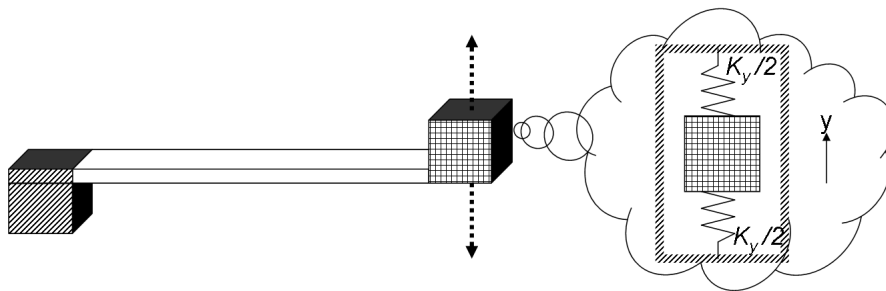
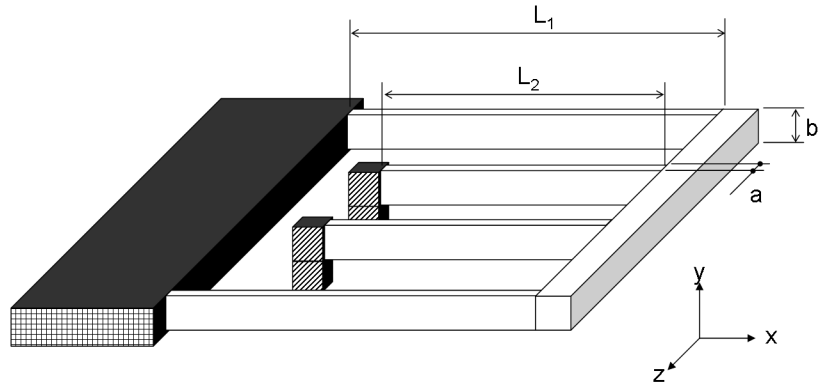
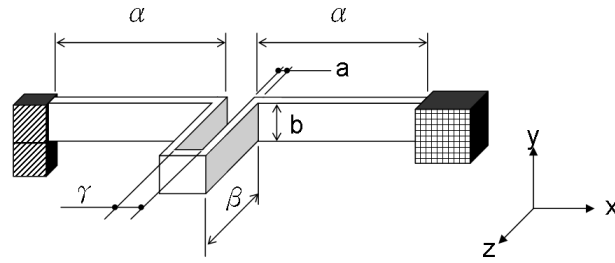


圖 1.6：以懸臂樑作為微機電系統彈簧示意圖。左邊為可能的實際結構，右邊為簡化之物理模型。黑色斜線部分為固定端/框架，格子部分代表彈簧結構欲支撐的質量塊。

實際上常用的彈簧結構依需求而有不同的設計，常見的結構有摺疊狀撓性樑 (Folded beam) 與髮夾式 (Hairpin type，或 Serpentine) 設計[7, 8]，如圖 1.7 所示：



(a)



(b)

圖 1.7：不同的微機電系統彈簧設計。(a) 摺疊狀撓性樑；(b) 髮夾式。黑色斜線部分為固定端，其餘為懸浮結構。格子部分長方體為彈簧結構欲支撐的質量塊。[7, 8]

摺疊狀撓性樑的最大特色為移動較線性，並容易定義單一方向的自由度，圖 1.7(a)中所呈現的為 z 軸方向振動的設計，其等效的彈性常數為：

$$K_{z,folded} = 2Ea^3b \left(\frac{1}{L_1^3 + L_2^3} \right) \quad (1.6)$$

髮夾式最大的特色是設計者容易設定兩軸的彈性係數，圖 1.7(b)的例子為 z 軸與 x 軸方向振動的設計，其等效彈性係數為(假設 $\gamma \ll \alpha, \beta$)[8]：

$$K_{z,hairpin} = \frac{Ea^3b}{4\alpha^2(5\alpha + 3\beta)}, \quad K_{x,hairpin} = \frac{Ea^3b}{2\beta^3 \left(4 - \frac{3\beta}{(\alpha + \beta)} \right)} \quad (1.7)$$

1.2.3 阻尼估算

在所有動態系統中，與能量消耗有關的部份通常以阻尼來描述，而機械系統的阻尼來源一般可分為三類[9]：內阻尼(Internal damping)、結構阻尼(Structural damping)與流體阻尼(Fluid damping)。內阻尼的來源為微結構瑕疵(參雜(Impurities)、晶粒邊界(Grain boundaries)等)、熱應力、金屬材料中的差排(Dislocation)、黏滯彈性(Visco-elasticity)與遲滯(Hysteresis)效應等；結構阻尼的來源為結構之間的作用，如摩擦或接觸等，而在微機電系統中，常來自於錨點(Anchor)；流體阻尼的來源則是週遭流體(微機電系統中通常是指氣體)與結構之間產生的黏滯效應(Viscous effect)。在微機電系統中，內阻尼的影響通常遠小於結構阻尼與流體阻尼，而結構阻尼又小於流體阻尼，因此以下只介紹流體阻尼的估算。

庫埃特流(Couette flow)阻尼與空氣膜擠壓(Squeeze film)阻尼是兩種最常見的數學模型[10, 11]，其架構如圖 1.8 所示。庫埃特流阻尼係由兩平板間有相對的平行運動所造成，在線性振動式微機電陀螺儀中常見於質量塊與基板之間，假設中間的氣體為牛頓流體(Newtonian fluid)，其阻尼係數可表示成[10]：

$$d_{Couette} = \frac{\mu A}{t} \quad (1.8)$$

其中 μ 為氣體的黏滯係數； A 為平板重疊的面積； t 為平板距離。空氣膜擠壓阻尼係由兩平板間有垂直運動所造成，平板間的氣體受到擠壓將使得中間的壓力大於週遭環境，其阻尼係數和氣體的特性以及相對運動的速度有關。假設位移相對小於平板之距離，該阻尼係數經線性化後可表示成[11]：

$$d_{Squeeze} = \frac{l^2 \tau P}{\omega t} \frac{64\sigma}{\pi^6} \left(\frac{1 + (1 + \tau)^2}{[1 + (1 + \tau)^2]^2 + \sigma^2 / \pi^4} \right) \quad (1.9)$$

其中 l 與 w 分別為平板重疊區之長度與寬度； $\tau = w/l$ ； P 為大氣壓力； ω 為可動件振動的頻率； $\sigma = 12\mu l^2 \omega / (Pt^2)$ 。

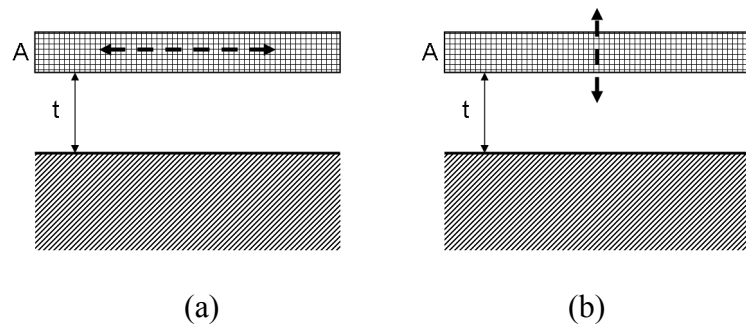


圖 1.8：兩種流體阻尼模型。(a) 庫埃特流阻尼；(b) 空氣膜擠壓阻尼。格子部分為可動件，斜線為固定平板。其中虛線雙箭頭為可動件之運動方向。[10, 11]

1.2.4 驅動與感測介面

對微機電陀螺儀中質量塊電驅動的方法主要有壓電式(Piezoelectric)、電磁式(Electromagnetic)與靜電式(Electrostatic)。壓電式的驅動裝置具有結構簡單與輸出力大等優點，但材料特性易受溫度影響，且常有嚴重的遲滯現象，製造上則不易與積體電路製程整合；電磁式單位能量密度高且可在惡劣環境工作，但電能損耗較高，輸入電流不容易控制，製造上同樣不易與積體電路製程整合也限制了其應用範圍；靜電式的特點為消耗功率低且穩定，輸入電壓較易控制，雖然仍有缺點，如：結構上對間隙的精度要求高、常需要高電壓輸入與位移量較小等，但製造上與積體電路製程相容的特性，仍讓靜電式設計成為在微機電系統中最常見的驅動方式。

感測的方式有許多種，例如：穿隧電流(Tunneling current)、光學影像、壓阻(Piezoresistive)或壓電效應、可變電容等。以穿隧電流量測的方式具有低雜訊、高精度的優點，但是可量測的距離較小；光學量測亦具高精確度、低雜訊，但設計複雜且昂貴；壓阻或壓電方式具有便宜且感測電路設計簡單、等優點，然而其有易溫度變動干擾的缺點；可變電容則因與積體電路製程相容性佳、可忽略溫度效應、設計製作容易無需額外製程、可同時作為驅動或感測等多項優點，是最被廣泛使用的方式。因此以下針對靜電式的驅動與感測作一說明。

在帶電的兩電極板之間，只要有電位差就會有電容的產生，如圖 1.9 所示，忽略邊緣效應(Fringing effect)下，電容的大小和重疊面積與介電常數成正比，和距離成反比，

此時電容值可表示成：

$$C = k\epsilon_0 \frac{z \cdot x}{y} \quad (1.10)$$

其中 ϵ_0 為真空下之介電常數(Permittivity)； k 為兩平板間的介質相對於真空之介電常數。

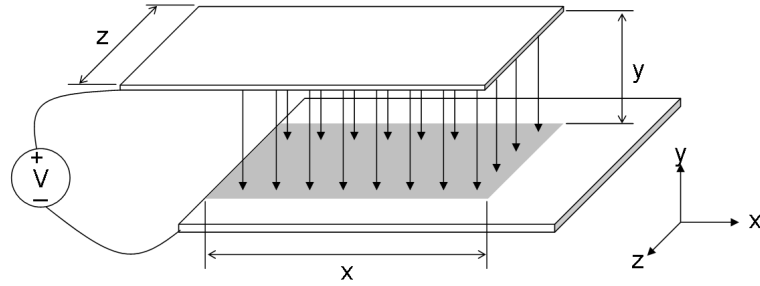
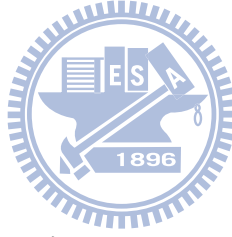


圖 1.9：平行電極板電容。兩平板間的箭頭為電場方向。

因此，若重疊的面積或距離改變，則電容值將隨之改變。此帶電的兩電極板彼此吸引的靜電力可由下式計算：

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \nabla C V^2 \quad (1.11)$$



其中 V 為外加之電位差。上式又可表示成：

$$F_x = \frac{1}{2} k\epsilon_0 \frac{z}{y} V^2, \quad F_y = -\frac{1}{2} k\epsilon_0 \frac{z \cdot x}{y^2} V^2, \quad F_z = \frac{1}{2} k\epsilon_0 \frac{x}{y} V^2 \quad (1.12)$$

由上式可知，若上電極板朝 x 或 z 軸方向移動，其靜電力將維持定值，若朝 y 方向移動，則靜電力將與移動距離的平方成反比。

根據上述原理，依運動方向的不同，兩種基本電極架構經常被使用在微機電系統的驅動或感測中，如下圖所示。配合上一節的彈簧設計，圖 1.10(a)之可動電極適合 z 與 x 軸方向的運動，稱為橫向(Laterally)驅動/感測架構，而圖 1.10(b)之可動電極適合 y 軸方向的運動，稱為近接(Gap-closing)驅動/感測架構。由(1.12)可知，在 z 與 x 軸方向的驅動力為定值(與位移大小無關)，再加上可移動距離較遠的關係，橫向架構大多用來當作驅動電極使用。而近接架構則因為相對於距離變化的電容改變量較大，而較常被用來作為

感測電極，但感測部分牽涉到後續電路設計。

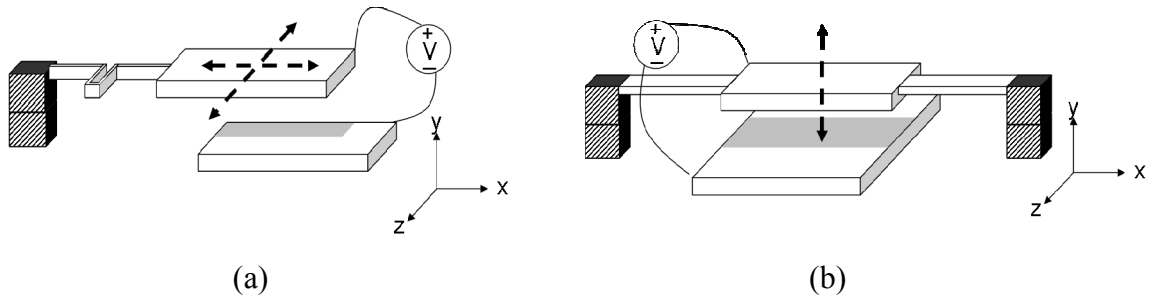


圖 1.10：微機電系統中兩種用於驅動或感測的基本架構。(a) 橫向移動設計；(b) 近接移動設計。

1.2.5 感測電路

在實際微機電系統的結構中，由於訊號極小，一般的電容變化的敏感度約在 $50-100\text{ fF}/\mu\text{m}$ 的等級[12]，因此感測電路的解析度通常是決定感測效能的重要因素。由上一節所述，可以利用電容的變化來量測位移，電容變化的量測有幾種方法[13]：無穩態振盪器(Relaxation oscillator)、阻抗電橋(Impedance bridge)與電荷放大器(Charge amplifier)。其中，由於電荷放大器可以達成高解析度以及轉換函數與寄生電容無關(理想上)等因素，使得電荷放大器成為最常被使用的架構。

電容的定義為兩個具電位差的帶電平板間累積的電荷(電容=電荷/電位差)，在兩端偏壓固定下，電容改變量與電荷改變量呈正比，因此平板「位移」的大小可以直接用電荷的改變量來換算。電荷放大器的設計大致可以分為兩大類，一為同步偵測架構(Synchronous detection sensing scheme)、一為切換電容架構(Switched-capacitor sensing scheme)。同步偵測架構如圖 1.11(a)所示，概念簡單，而缺點為電路中的大回授電阻佔晶片空間，也會造成較大的寄生電容(Parasitic capacitance)，產生較大的熱雜訊(Thermal noise)；切換電容架構如圖 1.11(b)所示：以電容切換機制來設定運算放大器的直流偏壓點，取代回授電阻，其優點是晶片空間節省且易於使用 IC 製程製造，而缺點是取樣的動作將造成高頻的白噪音(White noise)被混疊(Aliasing)到低頻的待量測訊號中無法分離開來[14]。由於切換電容架構需要多個時脈(Clock)以及切換過程容易造成的多餘問題，

如電壓突波(Voltage spike)與電荷注入造成的電流突波等[15]，可以選用操作相對單純的同步偵測架構。

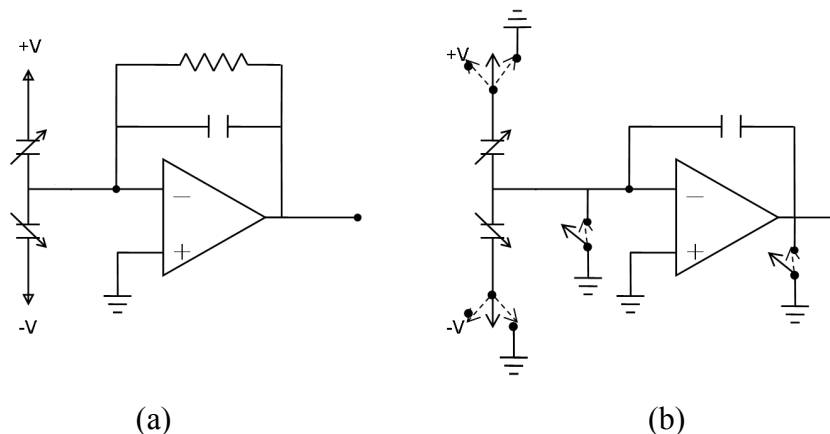


圖 1.11：用以量測可變電容位移變化之電荷放大器感測架構示意圖。(a) 同步偵測架構；(b) 切換電容架構。[14, 15]

此外，為處理低頻雜訊(如閃爍雜訊(Flicker noise))或操作型放大器的非理想因素(如輸入偏移電壓(Input offset voltage))等，實際應用上通常會搭配一些訊號處理技巧，相關方法依 C.C. Enz 與 G.C. Temes [16]的分類有兩種：取樣以及調變/解調。取樣方式主要是自動歸零(Auto-zeroing, AZ)，常見的雙取樣(Correlated double sampling, CDS)則可歸納為 AZ 的一種特殊例子；調變/解調方式則是著名的截波穩定(Chopper stabilization, CHS)，或稱鎖相感測(Lock-in sensing)。同步偵測架構適用 CHS，其工作原理可以簡述如下。

同步偵測架構搭配截波穩定如圖 1.12 所示，電容變化通常為一相對低頻的訊號，在經過兩高頻的反向載波(Anti-phasic carrier)調變之後，該電容變化訊號被提到高頻(即載波的頻率附近)，此時線路的雜訊或誤差也混雜在裡面。在透過乘法器(Multiplier)進行解調後，電容變化訊號又被轉回原本的頻率，同時低頻雜訊或誤差被提到高頻去，經過低通濾波器(Low pass filter, LPF)之後，即可將電容變化訊號濾出。理想上，經過處理的輸出訊號(V_o)將與電容變化量呈正比：

$$V_o = \frac{2\Delta C}{C_f} \cdot V_s \quad (1.13)$$

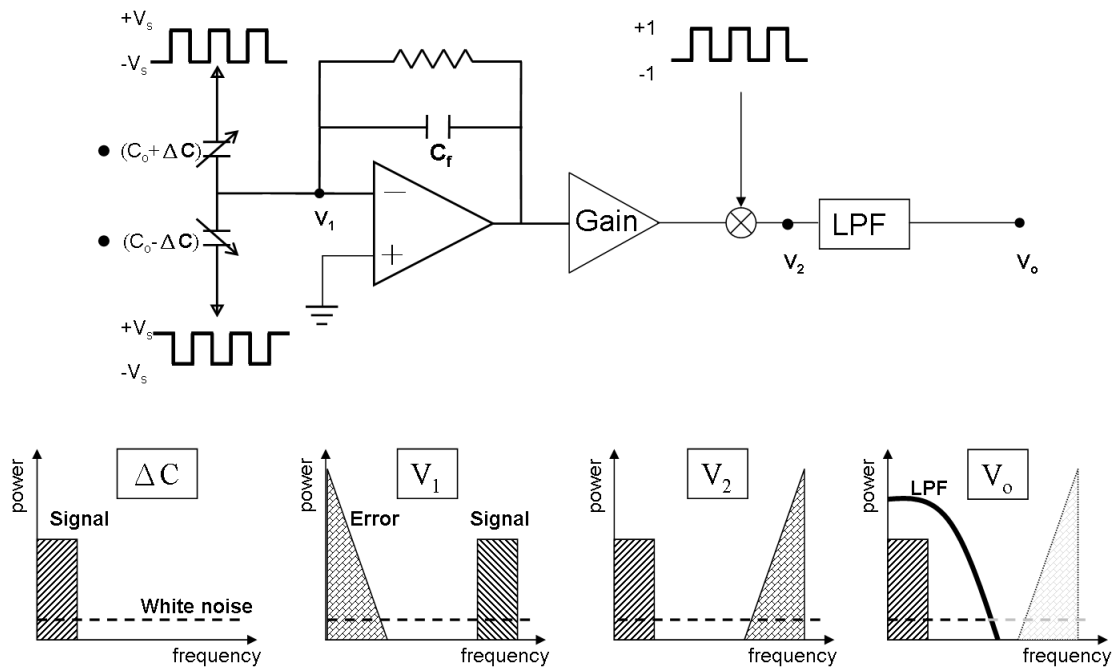


圖 1.12： 同步偵測架構搭配截波穩定技術下，各階段訊號之頻域說明。[17]

前文提到，位移的大小可以藉由電容變化引起的電荷「改變量」來求得，若移除圖 1.12 中的 C_f 僅留下適當大小的回授電阻，則成為電流放大器(Current amplifier)，如圖 1.13 所示，則該電路無「積分」功能，因此可以量測到的物理量變成電荷隨時間的變化(即電流)，因此對應的關係變成電容改變量的隨時間的變化，亦即帶電平板移動「速度」的大小。

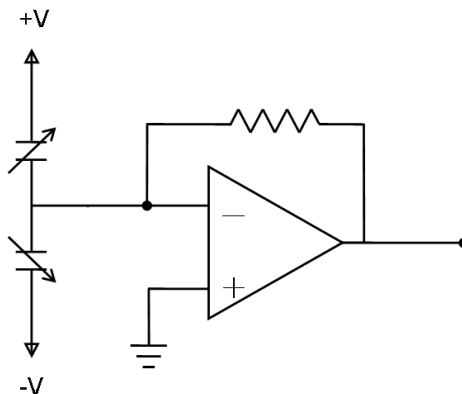


圖 1.13： 用以量測可變電容速度變化之電流放大器感測架構示意圖。[8]

綜合以上討論，慣性感測器的量測過程/方法可以整理如圖 1.14。其中物理量轉換為電子訊號機制的選擇，與機械結構設計有關。

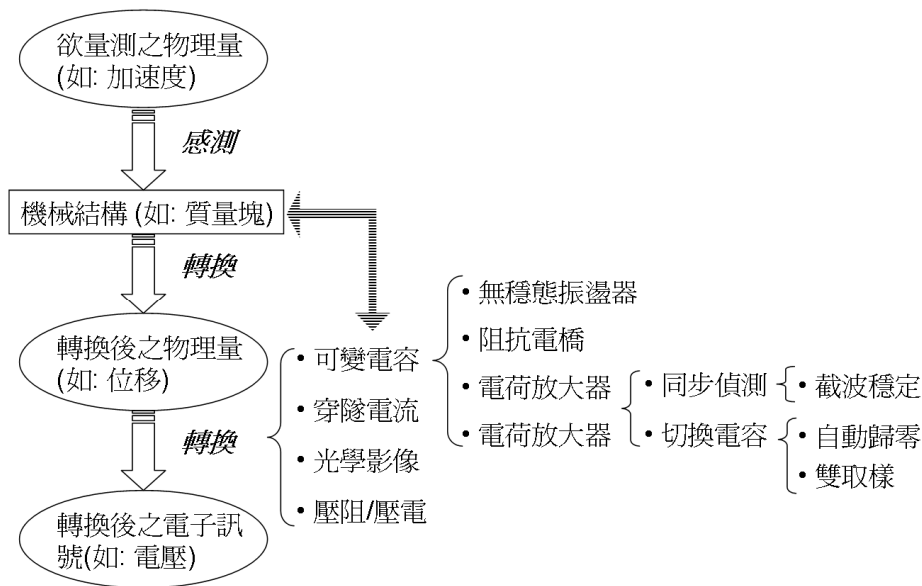


圖 1.14：慣性感測器訊號量測過程與相關方法整理。



1.3 角度量測方法概述

用來量測絕對角度的感測器有以下幾種：傾角器 (Inclinometer)、磁力計 (Magnetometer) 以及陀螺儀。傾角器係用來量測結構相對於重力方向的傾斜角度，經常被用在建築相關的工程測準上，傾角器有各種不同的設計，一般可利用氣泡的浮力或物體的重力來量測。不受溫度影響、構造簡單、感測度高等皆是傾角器的優點；而主要的缺點是容易受直線加速度的影響，並且僅能量測垂直於重力方向的轉動，在姿態控制來說，傾角器僅能量測傾斜角 (Pitch) 與翻滾角 (Roll)，而平行於重力方向的搖擺角 (Yaw) 則無法量測。磁力計係利用地球磁場感應轉動角度 (如指南針)，可精準定義出絕對位置是最大的特點；但主要缺點為其易受週遭環境的電磁干擾，而且僅可量測平行於重力方向的轉動，也就是搖擺角。

以單軸量測振動式陀螺儀而言，則可偵測任何垂直於質量塊振動平面的轉動角速度，但要得到角度則需要對角速度作一次積分，因此，若角速度量測雜訊含有偏壓誤差，

則經過短時間的積分即會造成嚴重的誤差累積；但即便雜訊單純為零合白雜訊 (Zero-mean white noise)，積分後同樣會造成訊號飄移的問題，如下圖模擬所示：

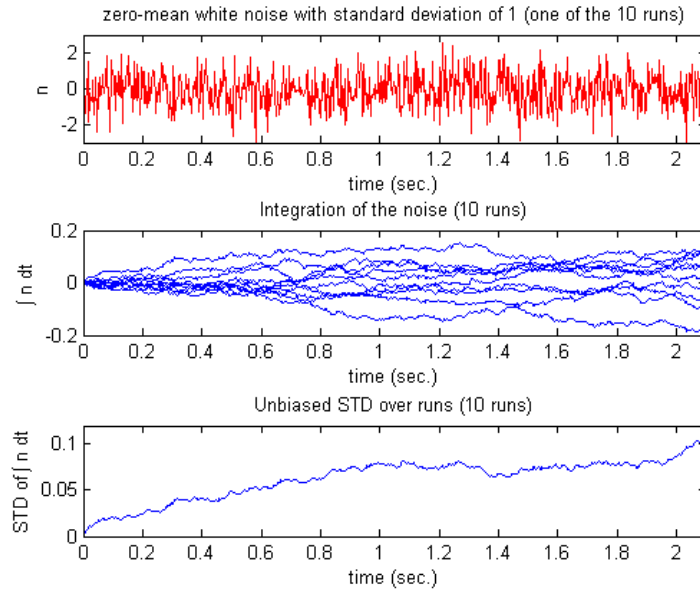


圖 1.15：零合白雜訊對時間積分之結果。

上圖中第一個圖為零合、標準差為 1 的白雜訊；第二個圖為積分十組如第一個圖的隨機訊號的結果；第三個圖則為這十筆結果(即第二個圖中的十條軌跡)的標準差。透過這個簡單的模擬可以看出，就算感測介面與電路沒有瑕疵，且實際量測時除了白雜訊外沒有其他雜訊的狀況下，積分的結果依然會隨時間飄移。這個現象在微機電陀螺儀將更加嚴重，因為可量測訊號原本就極小，再加上雜訊的影響，也因此使得微機電陀螺儀的應用受限於短時間的操作，長時間使用下，則需要時常停止以進行歸零修正。

1.4 微機電陀螺儀瑕疵與相關研究

微機電振動式陀螺儀的製造係透過微製造技術，不管是使用哪種技術，要做出一個完整的微結構都需要許多步驟，步驟越多可能造成的變動就越大。在微影的過程可能產生的對準誤差(Misalignment)、蝕刻過程可能產生過蝕刻(Over-etching)的情況、沉積材料過程可能造成結構內應力等因素，都會造成結構不對稱或尺寸與設計不符等瑕疵，一般製造下會造成系統參數變異約實際值的 10%~20%[3, 18, 19]。以圖 1.7 中的摺疊狀撓性

樑與髮夾式彈簧結構設計為例，若假設蝕刻後的結構側壁為垂直，並且無對準誤差，僅在厚度產生 10% 的誤差，則由式(1.6)與(1.7)可見，主軸的彈性係數亦將產生 10% 的誤差。另外，實際製作出來的微機電陀螺儀結構，振動質量塊除了在外型上可能因不對稱而直接影響動態以外，由於設計上經常會有孔洞以降低阻尼的影響，因此也更增加了振動質量塊質量大小的不可預測而經常與設計有所差異。

M.S. Weinberg 與 A. Kourepenis[19]以音叉式雙質量設計詳細探討微機電振動式陀螺儀中可能的誤差來源，包括真空環境(影響阻尼、驅動力、結構雜訊(布朗運動, Brownian motion))、機械結構(造成跨軸動態(Quadrature error))、電訊號耦合(Electrical coupling)，最後並建議需要用結構修整(Trimming)與訊號處理的方式降低結構瑕疵的影響。以特殊製程或後製程修整的方式降低瑕疵的研究如：B. Choi 等人[20]設計材料具犧牲層的體型微加工，以製造出較平滑的質量塊平面，降低因質量塊分布不均所產生的耦合動態；K. Tanaka 等人[21]發表以離子銑削(Ion-milling)的方法修整結構，製作出側面較平整的彈簧結構，降低因結構不對稱所產生的耦合剛性；而 H. Kawai 等人[22]則在陀螺儀懸浮質量塊的底層設計電極，不同於結構上的修整，而是在陀螺儀製作完成後再調整底電極電壓，以外加偏壓的方式消除質量塊的耦合動態。

微機電系統彈簧結構的瑕疵除了製造過程的變異因素以外，結構設計上固有的非理想性也是來源之一。最基本的結構非理想性可以由下圖作解釋：

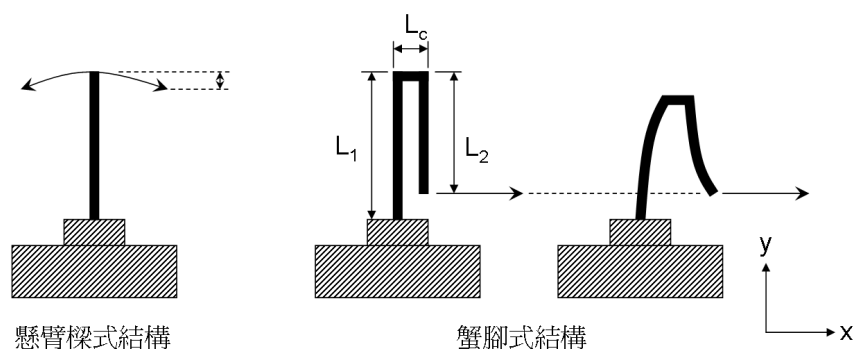


圖 1.16：微機電系統彈簧結構之非理想性。[7]

如前述之介紹，微機電系統中可以簡單使用一懸臂樑作為彈簧結構，雖然結構簡單且彈性係數容易估算，但其作動的方式並非直線是最大的問題。如圖 1.16 中的懸臂樑，是設

計作為水平橫移的彈簧，但在大範圍擺動下會造成垂直擺動，如此即造成水平與垂直方向的動態耦合。類似於圖 1.7(a)的設計，圖 1.16 中之蟹腳式(Crab-leg)結構設計目的亦是要使結構具有更大範圍的水平移動(在摺疊狀撓性樑中用了兩對蟹腳式結構，將可以更有效的限制其在 x 軸方向的移動，但也增加了在 z 軸方向的剛性並降低其可移動距離)。然而，就算是蟹腳式結構已大幅降低動態耦合，但在[7]中的討論，其依舊存在有耦合效應，該效應可以用彈簧常數 K_{xy} 來表示：

$$K_{xy} = \frac{3EI_c(L_1 - L_2)}{L_c L_1^3} \quad (1.14)$$

其中 I_c 為轉角連接點之質量慣性矩(Moment of inertia)。由上式中可以發現，理論上若 L_1 與 L_2 長度一樣時，則該耦合彈簧常數為零，因此良好的設計有機會降低機械結構所引發的系統動態非理想性。但相反地，以蟹腳式設計為例，由式(1.14)可知， L_1 與 L_2 的長度差距會直接造成耦合彈簧常數(即 K_{xy})的存在。

在機械結構設計方面，除了[4-6]的設計以外，如：J. Bernstein 等人[23]提出類似音叉的對稱性結構，利用矽微加工的技術，分別以單晶矽、多晶矽與鎳製作出以靜電驅動的微機電陀螺儀，利用音叉式結構對稱的特性，降低因製作誤差與線性加速度造成的影響；C. Acar 等人[24]提出多質量塊設計，在感測端多設計一個類似減振器的結構以產生兩個相近的共振頻率，而驅動端的共振頻率則設計在兩共振頻率之間，利用此區段變動較緩的頻率響應，降低因製程誤差或操作過程溫度與結構變化下，驅動端共振頻率的變動而造成的敏感度(Sensitivity)下降或失效；C.C. Painter 等人[25]提出動態誤差排除的同心圓環設計，建構出對稱的結構，在受到殘留應力或溫度變化下可均勻釋放應力，降低兩軸共振頻率的不匹配程度。

在前面介紹的阻尼估算係在許多假設條件下所推導出來的，實際上平板間的阻尼係數還牽涉到氣體性質(如是否為可壓縮流體)、環境溫度、平板設計(厚度與縫隙)等，使得阻尼係數甚至在沒有製造誤差或是環境變動的情況下，都很難被準確地計算出來，只能大略的估計。而阻尼係數最直接影響的系統規格即品質因子(Quality factor)，因此如同結構的彈簧常數，實際微機電結構的阻尼(或品質因子)通常是未知參數，也需要在測試

時進一步確定系統規格。在實際設計中，品質因子的設定依需求而有所調整，將同時影響感測的敏感度與感測頻寬，這個部份將在下一章詳細討論。

若如圖 1.10 採用電容變化量測質量塊位移，在量測上若兩帶電平板的相對位移並非維持平行，則電容變化就不會與位移呈線性的比例關係，將造成量測的誤差；此外，在微機電系統中電容變化通常是以差動的方式量測，若初始電容的大小或兩差動電容不匹配，也會造成量測結果的誤差。目前針對微機電陀螺儀的研究，並未有針對此項瑕疵作探討，本論文將在後面的章節把這個誤差建構於陀螺儀的動態模型中。

在許多的感測器應用中，感測電路的問題往往限制了整體感測器的效能[12]。以常用的操作型放大器 AD-8552 為例，在 5V 的操作電壓下，其基本偏移電壓(Offset voltage)為 $1\text{ }\mu\text{V}$ ，而隨著溫度變化的變動為 $2\text{ }\mu\text{V}/^{\circ}\text{C}$ ，另外，如長時間操作所產生的飄移或因電路老化等問題也會使得偏移電壓不斷改變。此類的誤差通常為低頻率的變動，一般來說，可以用截波穩定技術來移除，但如圖 1.12 所示常用的同步偵測架構搭配截波穩定技術中，用於解調過程的乘法器(Multiplier)在實際製造上也會存在瑕疵，其中最關鍵的問題之一即為線路中的不對稱性所引起的直流偏移(DC offset)[17]。另外，在可變電容感測介面因電容值不匹配所造成的偏移，其頻率與欲量測的訊號相同，因此也無法用截波穩定濾除[17]。此問題一般透過感測器每次使用前的手動校正來消除，或者使用更複雜的補償電路來降低影響[17]。

1.5 研究動機與目的

由於微小化的特性，微機電陀螺儀可應用於消費性電子產品、智慧型載具以及慣性導航等。而由文獻回顧可知，決定微機電陀螺儀性能的三大因素為：機械結構瑕疵(Imperfection)、感測電路瑕疵以及在獲得角度過程中因積分運算所造成的誤差累積。目前有關陀螺儀性能改善的研究，大多是利用特殊的製造程序、複雜的結構設計或昂貴的後製程來改善機械結構瑕疵，僅有少數文獻利用回授控制技術補償機械結構瑕疵，但對瑕疵的類型仍有許多假設。感測電路的瑕疵多是藉由複雜的線路設計來改善，尚未發現

任何利用回授控制來補償感測電路瑕疵的陀螺儀控制文獻。積分誤差累積的問題大多是藉由提高角速度感測精度來降低角度的誤差量，另外也有少數不透過積分運算可直接獲得轉動角度的陀螺儀操作方法，但在這些方法中，存在許多不同操作條件的假設外，共同點則是皆需要離線校正的程序。

以上可以歸納出幾點：(1) 無論結構或是感測電路的研究都是個別地提出改善方法，然而陀螺儀不同於其他感測器的地方就在於其操作複雜性，若要穩定的工作，則需要精確的回授控制，系統整合將是重要的課題；(2) 製程的改善與後製程的使用，雖然可有效的直接消除結構瑕疵，但複雜的程序將大幅增加製造成本，此為目前微機電陀螺儀普及化最大的阻礙；(3) 以控制來補償機械結構的不確定性無需複雜的設計與製程，有利於大量製造與降低成本。不過，絕大多數的作法皆假設待量測的角速度為定值，對於非固定角速度的量測僅有[26]針對變動的角速度估測提出解決方案，至今也尚未有相關文獻提出完整的強健性與穩定性證明或實驗數據(實現)驗證；(4) 目前針對陀螺儀設計的控制器，一般都假設機械結構參數未知，以線上估測的方式一邊鑑別出系統參數一邊控制系統動態，惟獨質量塊皆需假設為已知，若要以控制方式達成無需離線校正並線上補償系統瑕疵的目標，則必需估測質量的大小；(5) 微機電陀螺儀控制的研究一般都以傳統單質量塊的設計為主，但實際上許多的振動式陀螺儀設計在結構上都採用退耦式雙質量塊設計，數學模型以及控制器設計需要進一步針對此類設計作修正；(6) 目前所有文獻上針對陀螺儀設計的控制方法，皆無針對感測介面瑕疵或感測電路誤差加以著墨，如同假設理想電路，但實際上感測電路造成的影響通常遠大於陀螺儀本身的訊號[12]，因此在解決方法中須補償電路瑕疵；(7) 少數研究以陀螺儀作直接角度量測，可直接以陀螺儀獲得角度的控制方法雖然可以避開積分的誤差累積，但是仍有許多的假設，例如：兩軸共振頻率匹配[27]、無耦合阻尼項[27-29]、無耦合彈性係數[29]等。因此當陀螺儀系統存在機械結構與感測電路瑕疵時，文獻上所提的控制法皆不適用；(8) 目前文獻以陀螺儀作直接角度量測的方法，通常需要兩階段以上的操作，亦即至少需要一個離線校正的步驟，無法做到線上直接補償與量測，若操作過程因環境擾動甚至是結構出現劣化以至於系統參數改變，現有的方法皆無法即時得知並補償。

本論文主要目的在於提出一回授控制器的設計，將微機電陀螺儀機械結構瑕疵所造成的非理想響應、感測電路瑕疵所造成的量測誤差，「一併」估測、補償，並控制陀螺儀動態，在不透過積分運算下，使用陀螺儀動態獲得物體轉動角度。除了線上補償系統瑕疵影響的特性外，期望達成免校正的微機電陀螺儀控制系統，以控制技術一併解決微機電陀螺儀的三大問題。其基本作法為：將機械結構瑕疵與感測電路瑕疵一起整合在振動式陀螺儀系統的模型中，把這些因瑕疵所造成變異的系統參數視為未知參數，再與系統動態一起估測，再依此估測值對系統動態作補償，補償過後的動態，再透過適當的演算法與訊號處理技巧，即可直接估算待測物體轉動角度。本論文設定各個系統參數變異皆在 20% 以內，並以產生變異前的系統參數為初始值進行估測。

須要注意的是，在傳統開路操作下(即一軸驅動、一軸感測)僅需量測感測軸之振幅，但若要針對微機電陀螺儀系統設計一回授控制器，則必須有質量塊完整的即時動態資訊，即質量塊在兩軸的即時位置與/或速度，因此該陀螺儀設計在兩軸都需要有感測輸出。另外，不同於開路操作的陀螺儀，若要配合控制器設計，一般在兩軸都需要有控制輸入。應用上可以依照圖 1.4 中兩種設計的配置即可。

1.6 本論文架構

本文共分為八章，以上介紹了陀螺儀的背景與相關的研究，並指出本研究的切入點，第二章將就振動式陀螺儀系統動態、感測原理以及不同的操作方法作分析。第三章建構微機電振動式陀螺儀的系統模型，包括機械結構(單一質量塊與退耦式雙質量塊設計)、感測介面與電路的整合。第四章則以此模型為基礎，以改良的狀態觀察器估測參數並根據此估測值設計回授控制器，內容主要分為三個部份：第一部分詳述不同狀況下之狀態觀察器設計；第二部份以狀態觀察器為基礎提出回授控制設計；而第三部份則針對系統穩定性作分析，並接著在第五章以數值模擬印證。使用微機電陀螺儀作線上直接角度量測的方法則在第六章單獨介紹，同樣接著在第七章以數值模擬印證。結論與未來方向則在第八章呈現。

二、 振動式陀螺儀感測原理

2.1 系統動態

柯氏加速度可以簡單的由相對運動公式中求得，以下將簡述其推導。質量塊(m)所受的總力可以根據運動學推導(相對於旋轉座標)如下：

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} = m \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (2.1)$$

其中 \vec{f} 為質量塊(m)所受的力； \vec{a} 為質量塊的加速度； \vec{R} 為慣性座標原點到轉動座標原點的位置向量； \vec{r} 為旋轉座標原點到質量塊中心的位置向量； $\vec{\Omega}$ 為旋轉座標的角速度。式(2.1)中的第一項為旋轉座標相對於慣性座標的線性加速度；第二項為質量塊相對於旋轉座標的加速度；第三與第四項為角加速度與向心加速度引起的線性加速度；最後一項即是所謂的柯氏加速度，也是陀螺儀欲量測的物理量。值得注意的是，不同於加速度計量測線性加速度可以使用靜態的結構，由此運動方程式可發現，要得到柯氏加速度必須由「具有速度的質量(結構)」(即式子中的 $\frac{d\vec{r}}{dt}$)。此外，我們也可以觀察到，該柯氏加速度是由角速度與質量運動速度的外積(Cross product)所構成，因此產生之加速度方向將與這兩項垂直。

式(2.1)中的位置向量與角速度項若以直角座標重新表示，則為：

$$\begin{aligned} \{\text{旋轉座標}\} &= \{\hat{e}_x \quad \hat{e}_y \quad \hat{e}_z\} \\ \vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \\ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z \\ \vec{\Omega} &= \Omega_x \hat{e}_x + \Omega_y \hat{e}_y + \Omega_z \hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中(x,y,z)為質量塊相對於旋轉座標的位置。式(2.1)的作用力 \vec{f} 可再細分為由彈簧結構、阻尼與控制輸入三項的組合，即 $\vec{f} = \vec{f}_S + \vec{f}_D + \vec{f}_C$ ，並可如(2.2)再以直角座標重新表示：

$$\begin{aligned}
\vec{f}_S &= -k_1 x \hat{e}_x - k_2 y \hat{e}_y - k_3 z \hat{e}_z \\
\vec{f}_D &= -d_1 \dot{x} \hat{e}_x - d_2 \dot{y} \hat{e}_y - d_3 \dot{z} \hat{e}_z \\
\vec{f}_C &= u_x \hat{e}_x + u_y \hat{e}_y + u_z \hat{e}_z
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 d 與 k 分別為阻尼與彈性係數； u 為控制輸入。

一般單軸感測振動式陀螺儀會將質量塊的動態侷限在一平面上，如圖 1.4 設計，質量塊的動態被限制在 x - y 平面上，而僅量測 z 軸方向的角速度。如此設計下，式(2.1)可以利用(2.2)與(2.3)，分開改寫成兩軸的動態：

$$\begin{aligned}
ma_x + m\ddot{x} + d_1\dot{x} + (k_1 - m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2))x + m(\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)y &= u_x + 2m\Omega_z\dot{y} \\
ma_y + m\ddot{y} + d_2\dot{y} + (k_2 - m(\Omega_x^2 + \Omega_z^2))y + m(\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega}_z)x &= u_y - 2m\Omega_z\dot{x}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

一般線性加速度可以藉由設計或補償而消除，則上式的 ma_x 與 ma_y 可以被忽略。此外，假設角速度為定值，式(2.4)可以簡化成以下：

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + d_1\dot{x} + (k_1 - m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2))x + m\Omega_x\Omega_y y &= u_x + 2m\Omega_z\dot{y} \\
m\ddot{y} + d_2\dot{y} + (k_2 - m(\Omega_x^2 + \Omega_z^2))y + m\Omega_x\Omega_y x &= u_y - 2m\Omega_z\dot{x}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中柯氏效應所引起的慣性力為 $2m\Omega_z\dot{x}$ 與 $2m\Omega_z\dot{y}$ ，由此可以發現，較大的質量或線性速度將使上述兩項慣性力有較大的輸出，而角速度 Ω_z 的量測精確度就可以更高。不過，微機電系統最大的特色就是微小化，如此造成該質量一般只有約 $10^{-6} \sim 10^{-10} \text{ kg}$ 的數量級。這也是微機電陀螺儀不容易有高精確度的原因之一。此外，振動式微機電陀螺儀通常操作在幾千至幾萬赫茲的振動頻率上，因此角速度相乘項通常遠小於振動頻率而可以被忽略(此微小影響又可以被視為參數的微小擾動，若控制法則具有強健性，系統將不受此擾動影響)，因此式(2.5)可以再次簡化成更簡單的形式：

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + d_1\dot{x} + k_1x &= u_x + 2m\Omega_z\dot{y} \\
m\ddot{y} + d_2\dot{y} + k_2y &= u_y - 2m\Omega_z\dot{x}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

上式即為一般單軸角速度感測振動式陀螺儀的系統動態。由式中我們可以觀察到，理想上，僅有 Ω_z 會造成兩軸的動態耦合(Dynamic coupling)，換句話說，兩軸的振動除了陀螺儀本身有轉動($\Omega_z \neq 0$)以外，將僅受各自的結構特性影響，因此，我們理論上可藉由動

態耦合的狀態來求得角速度。

2.2 操作方法

2.2.1 傳統操作方法與瑕疵影響

傳統的操作方法一般又稱為開路操作(Open-loop mode)，其作法分為兩部分：驅動與感測。驅動一般可以用鎖相迴路(Phase-locked loop，PLL)使結構達到共振，用自動增益控制(Automatic gain control，AGC)的電路來達成固定振幅 [8]；感測部分則可設計不同方式來量測質量塊在另一軸的位移(振幅)，再換算出角速度。如前述動態，若定義 x 軸為驅動軸， y 軸為感測軸，經控制後，陀螺儀質量塊的動態可由下列數學式描述：

$$x = X_0 \sin(\omega_x t)$$

$$\ddot{y} + \frac{\omega_y}{Q_y} \dot{y} + \omega_y^2 y = u_y - 2\Omega_z \dot{x} \quad (2.7)$$

其中 X_0 為質量塊在驅動軸上的固定振幅； ω_x 與 ω_y 則代表兩軸的共振頻率； Q_y 為感測軸的品質因子。在無額外的動態耦合，假設 $\Omega_z = \Omega_{z0} \cos(\delta \cdot t)$ ，初值為 $y(0) = 0$ 、 $\dot{y}(0) = 1$ ，由式(2.7)可以解出：

$$y(t) = y_{hq}(t) + y_{rq}(t)$$

$$y_{hq}(t) = \frac{2Q_y}{\omega_y \sqrt{4Q_y^2 - 1}} \exp\left(-\frac{\omega_y}{2Q_y} t\right) \sin\left(\frac{\omega_y}{2Q_y} \sqrt{4Q_y^2 - 1} \cdot t\right)$$

$$y_{rq}(t) = -Y_0 \cos((\omega_x \pm \delta)t - \phi_{rq})$$

$$Y_0 = \frac{2X_0(\omega_x \pm \delta)\Omega_{z0}}{\sqrt{\left(\frac{(\omega_x \pm \delta)\omega_y}{Q_y}\right)^2 + (\omega_y^2 - (\omega_x \pm \delta)^2)^2}}$$

$$\phi_{rq} = \tan^{-1}\left(\frac{Q_y(\omega_y^2 - (\omega_x \pm \delta)^2)}{(\omega_y \pm \delta)\omega_x}\right)$$

以上齊性解 $y_{hq}(t)$ 將隨時間遞減，時間常數(Time constant)為 $\frac{2Q_y}{\omega_n}$ ，而在穩態時僅剩

非齊性解 $y_{rq}(t)$ 。角速度在感測軸引起的振動可表示如下：

$$\left| \frac{Y_0}{\Omega_{z0}} \right| = \frac{2X_0(\omega_x \pm \delta)}{\sqrt{\left(\frac{(\omega_x \pm \delta)\omega_y}{Q_y} \right)^2 + (\omega_y^2 - (\omega_x \pm \delta)^2)^2}} \quad (2.8)$$

其中 Y_0 為感測軸上量測到的振幅，而 Ω_{z0} 為角速度的大小。一般來說，在微機電陀螺儀中，角速度變動的頻率必定遠小於驅動軸振動頻率 ($\delta \ll \omega_x$)，此外，由式(2.8)可以看出，在兩軸共振頻率完全匹配 ($\omega_x = \omega_y = \omega_n$) 下有最大的敏感度(Sensitivity)，即單位角速度在感測軸引起的振幅最大，則上式又可以化簡成：

$$\left| \frac{Y_0}{\Omega_z} \right| = \frac{2X_0Q_y}{\omega_n} \quad (2.9)$$

由上式可知，藉由量測 Y_0 搭配已知的 Q_y 與 ω_n ，角速度可以經由計算得出。但需要注意的是，此操作方式必須要等到感測軸的振動進入穩態後，方可得到對應特定角速度大小的 Y_0 值，以一般微機電陀螺儀規格如 $Q_y = 800$ 與 $\omega_n = 2\pi \times 3200 \text{ rad/sec}$ 為例，時間常數約為 0.08 秒，而以 4 個時間常數為系統的安定時間(Settling time)估計，進入穩態約需 0.32 秒，而其對應的頻寬(即開路操作下可量測角速度變動的頻寬)僅約 3 Hz。另外，由時間常數可知，只要提高共振頻率或降低品質因子都可以提高感測頻寬，但是同時也將損失量測的敏感度，敏感度過低將使得感測軸的量測難度提高，甚至無法量測。以理想陀螺儀(兩軸的共振頻率皆為 3.2 kHz、無耦合項)為例，系統在 0.2 秒之後以 1 rad/sec. 角速度旋轉，y 軸在品質因子越大時角速度引起的振幅越大，但到達穩態的時間也相對越久，如下圖所示。因此品質因子的選擇將需要在感測敏感度與感測頻寬間作一權衡(Trade-off)的考量。

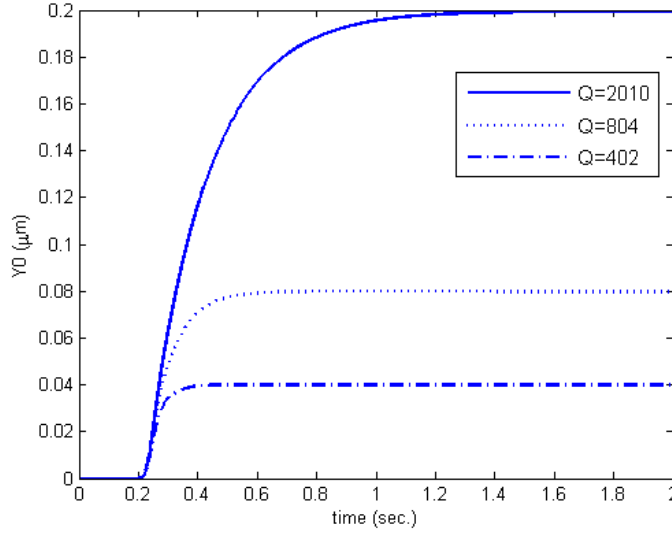


圖 2.1：陀螺儀以 1 rad/sec.的角速度旋轉下，不同品質因子對感測軸振幅 Y_0 之影響。

然而，如前幾節所述，實際的微機電系統必存在瑕疵，可能造成的問題為：實際系統參數未知、陀螺儀兩軸頻率不匹配以及結構不對稱造成的動態耦合。尺寸與設計不符會使得實際系統的參數(如彈簧的彈性係數、系統的品質因子、質量塊的質量等)與設計不同，即便在結構沒有動態耦合的狀況下，因為系統參數偏離設計值而為未知，式(2.8)的簡單關係式亦無法使用或需要在使用前先設法得知實際的系統參數，但若系統參數在使用過程因環境變動等因素而改變，則無法即時得知，算出來的角速度也會帶有誤差；陀螺儀兩軸頻率不匹配則如前述關係式，會降低感測的敏感度；而結構不對稱將使得兩軸的動態耦合不全由角速度造成(如圖 1.16 中懸臂樑的上下擺動)，換句話說，在角速度為零的狀況下，從感測軸仍會量測到訊號，這個現象在陀螺儀為重要的性能指標之一，稱為無轉動輸出(Zero rate output, ZRO)。如此一來，式(2.7)必須修正為：

$$x = X_0 \sin(\omega_x t)$$

$$\ddot{y} + D_{xy}\dot{x} + \frac{\omega_y}{Q_y}\dot{y} + K_{xy}x + \omega_y^2 y = u_y - 2\Omega_z \dot{x} \quad (2.10)$$

其中 D_{xy} 與 K_{xy} 分別代表結構或設計瑕疵所造成的耦合阻尼與耦合彈性係數，而其對感測軸的影響與驅動軸的振動速度與振幅成正比。在角速度變動的頻率遠小於驅動軸振動頻率($\delta \ll \omega_x$)下，求解上式可得：

$$|Y_0| = \frac{\sqrt{(2\Omega_{z0}X_0\omega_x + D_{xy}X_0\omega_x)^2 + (K_{xy}X_0)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_y\omega_x}{Q_y}\right)^2 + (\omega_y^2 - \omega_x^2)^2}} \quad (2.11)$$

由上式可看出，瑕疵所造成的動態耦合對感測軸振福的影響很難被分解開來。若以相位來探討， K_{xy} 造成的誤差其相位與科氏加速度項相差 90 度，理論上在知道角速度相位的狀況下， K_{xy} 的影響應該可以被分別出來；然而， D_{xy} 造成的誤差其相位與科氏加速度項一樣，在開路操作下將完全無法被分解，因此這兩項耦合一般被認為是 ZRO 的最主要來源[7, 8]。

為量化說明瑕疵的影響，首先我們假設系統參數如下： $X_0 = 1\mu m$ 、 $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 3000$ rad/sec.、 $Q_y = 1000$ 、 $dC/dy = 100$ fF/ μm ，在兩軸共振頻率匹配又無耦合阻尼與耦合彈性係數，假設系統以 1 rad/sec. 的角速度轉動，在沒有量測雜訊下感測軸可量測到相對應的振幅為 $0.106\mu m$ 。

在耦合彈性係數的影響方面，以圖 1.15 的蟹腳式彈簧設計為例，若 L_1 與 L_2 的長度產生 1% 的誤差，則彈性係數也會有 1% 的誤差，則以本例可知 $K_{xy} = (2\pi \times 300)^2$ ，此耦合彈性係數在系統未轉動也沒有量測雜訊下，在感測軸引起的振幅可達 $10\mu m$ ，換句話說，因製造過程的變異產生僅 1% 的尺寸誤差，在開路操作下將引發相當於 100 rad/sec. 的效應，其影響遠大於轉動所引起的動態耦合。

在共振頻率不匹配的影響方面，假設用來量測感測軸輸出(即位移 Y_0 引起之電容變化)的電路使用由 Irvine Sensors 公司所販售的可變電容量測 IC (MS-3110 Universal Capacitive Readout IC)，其解析度(Resolution)為 $4aF/\sqrt{Hz}$ ，若 ω_x 維持 $2\pi \times 3000$ rad/sec. 且無耦合阻尼與耦合彈性係數，僅 ω_y 因尺寸誤差產生偏移，而造成共振頻率不匹配的情況下，其感測敏感度以式(2.8)計算，我們可以得到如圖 2.2 的結果。圖中實線為此陀螺儀以 1 rad/s 的角速度旋轉下，在 y 軸引起的振幅所造成的電容變化大小，隨共振頻率不匹配程度(定義為 $((\omega_y - \omega_x)/\omega_x) \times 100\%$)的變化情形；而點虛線為此頻率下可變電容量測 IC 的解析度，在 3000 Hz 附近約 0.22 fF。由圖可見，尺寸誤差若造成 2.5% 以上的共

振頻率不匹配，將嚴重到使感測軸完全量不到訊號。

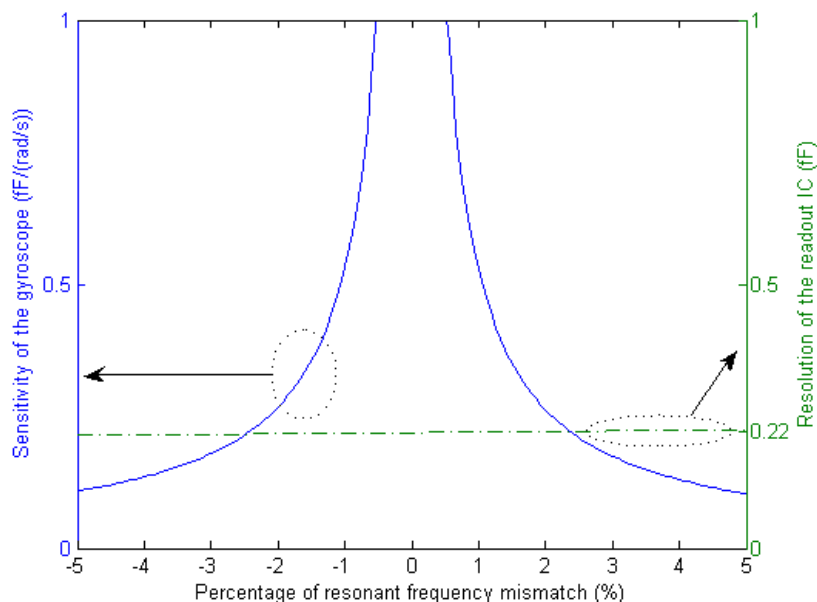


圖 2.2：陀螺儀以 1 rad/s 角速度旋轉下之電容變化值，隨共振頻率不匹配程度之變化，與商用可變電容量測 IC(MS-3110)解析度比較。橫軸為感測軸共振頻率與驅動軸共振頻率不匹配程度；右邊縱軸為量測 IC 的解析度；左邊為 y 軸可量測到的電容變化大小。

除了機械結構與感測介面因製造過程的瑕疵將對陀螺儀性能造成嚴重的影響外，由以上的例子可知，感測電路(可變電容量測 IC)也是一個重要關鍵。在此架構下，若量測 IC 之解析度可提高兩倍達到 $2aF/\sqrt{Hz}$ ，即可在共振頻率存在 5% 不匹配的情況下仍可量到 1 rad/s 的轉動，換句話說，量測 IC 的解析度越高，可容許的機械結構誤差也越大。但一般來說，感測電路的使用也存在有瑕疵，如：雜訊、訊號飄移、偏壓等，以常見的規格而言[17]，電路存在的寄生電容(Parasitic capacitance)與線路(Wiring)所造成的電容變動即可達幾個 pF 的等級，此數量級幾乎都在一般量測訊號(或如圖 2.2 為例)的 1000 倍以上，如此一來使得微機電陀螺儀的製造與量測更加困難。

2.2.2 閉迴路控制

由以上介紹可知，要使用開路操作法，系統參數必須為已知，為了要得到更高的量測精確度，兩軸的共振頻率要儘可能的匹配，更重要的是，在沒有適當的訊號處理與控

制下，系統不能存在有耦合阻尼與耦合彈性係數，這三項條件在一般的微機電陀螺儀製作很難實現，只能在製造後以更精密的方法修整，儘可能使誤差縮小，但如此一來大幅提高製造成本、時間與技術門檻。為了解決這個問題，強健控制的概念被引進了微機電陀螺儀的操作，期望藉由控制器的強健性，降低因製作過程的變動所引起的系統參數不確定的影響，或是藉由回授控制的概念補償瑕疵取代後製程的修整並提高感測頻寬等性能。

如 S. Sung 等人[30]利用鎖相迴路的控制回授設計，利用負彈簧效應在其中一端施加適當的偏壓調整結構彈性係數，達成兩軸共振頻率的匹配，以提高量測的敏感度；或如 R.P. Leland [31]以適應控制的方法，一邊估測結構參數，並補償系統動態以調整驅動軸的共振頻率；另外一種常見的控制稱為力平衡法(Force balance)或是力再平衡法(Force rebalancing)[26]，作法類似開路操作法，係透過控制力抑制感測軸之動態，再藉由控制力的大小反算出角速度，在這個作法下，由於感測軸位移總是被控制在零附近，因此理論上沒有動態範圍(Dynamic range)的限制，而角速度係由控制器反算求出，並不需要如開路操作法須等到振動進入穩態，其感測頻寬可大幅提高。但因為用控制力反算角速度的作法無法將阻尼耦合與真正的角速度值分開，因此必須假設耦合阻尼為零[26]；C. Batur 等人[32]則使用順滑模態控制，以電腦模擬出特定微機電陀螺儀的參數值，在不估測實際參數的情況下，利用順滑模態控制的強健性使系統在存在結構瑕疵的情況下仍能穩定運作，本研究同樣利用力再平衡的方法獲得角速度。

2.2.3 參考模型法與能量控制法

若以陀螺儀質量塊的運動軌跡來區分，陀螺儀的控制大致上有兩大類：參考模型法(Reference model)與能量控制法(Energy control)，如圖 2.3 所示，左邊為轉動前、右邊為轉動後質量塊的振動軌跡。參考模型法指的是質量塊的動態，將相對於陀螺儀框架維持固定(亦即從轉動座標上來看的話，其振動軌跡在轉動過程維持不變)；能量控制法指的是，控制法則將設法使質量塊的動態不受轉動或其他能量消耗因素所影響(亦即從慣性座標上來看的話，振動軌跡將因為動量守衡而維持固定)。依此定義來看，上一節提到

的力平衡法也是參考模型法的一種。

參考模型控制法通常與適應控制(Adaptive control)相結合，用來同時進行結構參數(如式(2.6)的 k 與 d)的估測與動態補償[8]。作法是將陀螺儀質量塊的動態控制成預先選定的參考模型，在控制的過程中一邊作參數估測，在滿足「持續刺激條件」(Persistent excitation condition)下，則可以保證在完成動態控制的同時，該系統參數估測也將收斂到正確值，換句話說，若未能滿足持續刺激條件，則此方法很有可能在控制完成時，參數估測收斂在錯誤值上。在這個方法中，角速度被視為系統未知參數之一，與其他參數同時估測，因此若無其他改良方法，其基本假設必須是估測時間內角速度為定值。另外，由於參考模型必須於控制前設定，因此該控制勢必干擾陀螺儀質量塊於轉動座標兩軸間能量的互傳(此現象又稱為「進動」，Precession)，而無法使陀螺儀動態保留轉動角度的資訊。換言之為了要直接得到角度資訊，必須讓由角速度造成的能量互傳自由進行，如圖 2.3(b)所示，因此能量控制法的目的在於如何讓陀螺儀系統持續振動(消除阻尼項影響)但又不影響進動(消除動態耦合) [33]。作法是控制系統能量的固定，間接的補償阻尼項，並控制系統動量的守恆，以消除耦合彈性係數的影響。

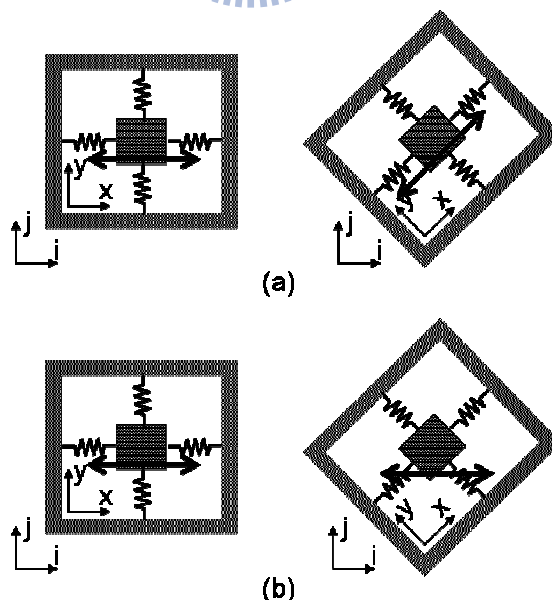


圖 2.3：振動式陀螺儀在兩種控制方法下質量塊的軌跡，雙箭頭代表質量塊運動的軌跡。(a)參考模型法；(b)能量控制法。

2.3 以振動式陀螺儀直接量測轉動角度

理想的振動式陀螺儀在轉動的過程中，因為動量守衡的關係，其振動方向在慣性座標上將保持固定，因此若可求得振動方向與轉動座標(即振動式陀螺儀質量塊所連接的「框架」)的夾角，即可得知即時的轉動角度。如下圖所示：

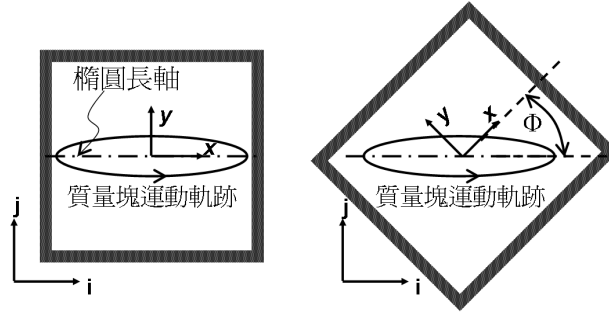


圖 2.4：理想振動式陀螺儀的進動，其中(i, j)代表慣性座標，(x, y)代表轉動座標。左圖為初始狀態；右圖為框架轉動 45 度後之狀態。

因此，若我們可以將含有瑕疵的陀螺儀動態「控制成」理想陀螺儀動態，理論上即可利用質量塊的動態得知轉動角度。理想的振動式陀螺儀動態為：(1) 沒有阻尼與耦合阻尼來消耗系統能量或擾亂系統動態；(2) 沒有耦合彈性係數；(3) 振動頻率匹配，即如下所示：

$$\begin{aligned}\ddot{x} + kx &= 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + ky &= -2\Omega_z \dot{x}\end{aligned}\tag{2.12}$$

需要注意的是，上式在 x 與 y 同相位的特例中，其振動軌跡應該是直線，因此利用簡單的 $\tan^{-1}(y/x)$ 就可得知夾角，但實際的操作我們並無法控制其動態的初始值，因此在振動頻率相同卻存在相位差的情況下，質量塊運動軌跡應該如圖 2.4 一樣是為橢圓形。使用 B. Friedland 與 M. Hutton 在 1978 年[34]對振動式陀螺儀動態的分析，我們可以得到如下的關係式，只要以陀螺儀振動質量塊速度與位置的即時資訊以及共振頻率，即可直接計算旋轉角度。

$$\tan 2\phi = \frac{2(\omega_n^2 xy + \dot{x}\dot{y})}{\omega_n^2(x^2 - y^2) + (\dot{x}^2 - \dot{y}^2)} \quad (2.13)$$

其中 ϕ 即為旋轉角度； ω_n 為兩軸匹配的共振頻率； x 與 y 為質量塊在兩軸的位置； \dot{x} 與 \dot{y} 為質量塊在兩軸的速度。

藉由陀螺儀的動態以直接估算角度資訊亦是近來逐漸興起的議題[27-29]。C.C. Painter 與 A.M. Shkel[27]則延續[33]中所提出的概念，將能量控制與角動量控制結合，實際以實驗印證了該想法的可能性，不過在[27]中並未實際用來量測轉動角度，僅印證了該控制方法的可行性；S. Park 等人[28]以鎖相迴路、低通濾波器、能量控制與參數估測的方法，在校正階段取得實際系統參數與設計參數的差異，以此差異值回授補償系統，使系統動態能維持自由的進動，再透過質量塊的軌跡求得即時的轉動角度，而無須透過積分運算；D. Piyabongkarn 等人[29]同樣針對振動式陀螺儀可能出現的各個瑕疵，提出離線的校正方法，分別求出各種瑕疵可能造成的問題再加以補償，文章最後並提出一角速度與角度相互修正的觀察器，但並未有系統收斂性或系統穩定性的證明。



三、微機電陀螺儀系統模型

3.1 機械結構

微機電陀螺儀有各種不同的設計，大多數為振動式，以下稱微機電振動式陀螺儀為微機電陀螺儀。本節針對第一章中所提出的兩種線性振動陀螺儀建立動態模型，圖 3.1 為此兩種設計的組成結構示意圖(Lumped model)。

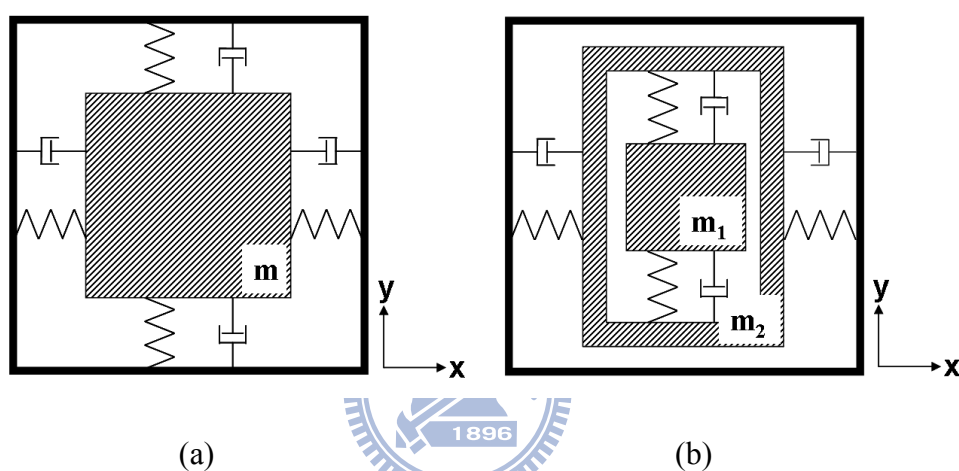


圖 3.1：兩種微機電陀螺儀設計示意圖，斜線部分為質量塊。(a) 單一質量塊設計；(b) 退耦式雙質量塊設計。

3.1.1 單一質量塊設計

如 2.2.1 節的探討，機械結構的不對稱將造成兩軸動態耦合不全由角速度造成，其來源可能為結構剛性或阻尼的耦合，為模擬此一效應，針對圖 3.1(a)，式(3.6)又可以改寫成：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + d'_{xx}\dot{x} + d'_{xy}\dot{y} + k'_{xx}x + k'_{xy}y &= u_x + 2m\Omega_z\dot{y} \\ m\ddot{y} + d'_{yx}\dot{x} + d'_{yy}\dot{y} + k'_{yx}x + k'_{yy}y &= u_y - 2m\Omega_z\dot{x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 d'_{xy} 、 d'_{yx} 、 k'_{xy} 與 k'_{yx} 即為影響耦合的阻尼與彈簧係數，此設計為對稱結構，因此在

此假設兩軸的耦合係數相同，即 $d'_{xy} = d'_{yx}$ 與 $k'_{xy} = k'_{yx}$ 。而個別的參數可能會因製作過程的變異造成實際參數與設計不符。為了後續狀態方程式的建構，可以進一步將式(3.1)以質量作歸一化，即：

$$\begin{aligned}\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y &= \sigma u_x + 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + d_{xy}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + k_{xy}x + k_{yy}y &= \sigma u_y - 2\Omega_z \dot{x}\end{aligned}\quad (3.2)$$

其中 $d_{xx} \leftarrow d'_{xx}/m$; $d_{yy} \leftarrow d'_{yy}/m$; $d_{xy} \leftarrow d'_{xy}/m$; $k_{xx} \leftarrow k'_{xx}/m$; $k_{yy} \leftarrow k'_{yy}/m$; $k_{xy} \leftarrow k'_{xy}/m$; $\sigma \leftarrow 1/m$ 。此動態模型與大部分微機電陀螺儀控制系統研究中所使用的數學模型類似，但幾乎所有陀螺儀控制的研究皆假設此質量 m 為已知[8, 26-33]，事實上質量的大小如同其他機械參數一樣會受製程的變異影響而與設計值有所偏差，而且由上式可知其大小將會直接對控制輸入有影響，為了後續推導而改寫成 σ 。

3.1.2 退耦式(Decoupled)雙質量塊設計

針對如圖 3.1(b)之設計，式(3.1)的動態須修正如下：

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{x} + d'_{xx}\dot{x} + k'_{xx}x + k'_{xy}y &= u_x + 2m_1\Omega_z\dot{y} \\ m_1\ddot{y} + d'_{yy}\dot{y} + k'_{yx}x + k'_{yy}y &= u_y - 2m_1\Omega_z\dot{x}\end{aligned}\quad (3.3)$$

此修正係參考[28]與[24]之模型。一般來說，此類設計的目的就是要透過適當的結構，讓兩軸的動態無法出現串擾(Crosstalk)的現象，因此理論上式(3.1)中之 d'_{xy} 、 d'_{yx} 、 k'_{xy} 與 k'_{yx} 將不復存在於動態模型中，但實際製造上仍可能存在一定程度的耦合，因此仍保留耦合彈性係數¹。又由於該設計並非對稱結構，在動態中假設 $k'_{xy} \neq k'_{yx}$ 。如同單一質量塊模型，系統參數可簡化如： $d_{xx} \leftarrow d'_{xx}/(m_1 + m_2)$; $d_{yy} \leftarrow d'_{yy}/m_1$; $k_{xx} \leftarrow k'_{xx}/(m_1 + m_2)$;

¹ 目前文獻並無針對耦合組尼係數有進一步的研究，將此耦合效應加入動態模型中首見於 A.M. Shkel 等人[18]的發表，針對陀螺儀組尼係數估計，更詳細的討論僅見於 C. Acar 與 A.M. Shkel 的多質量塊設計中，但在[28]與[24]中一開始即忽略耦合組尼係數，而在[7]中進一步提到，該效應在適當的封裝(提高真空度)、結構設計(如使用非近接式設計)下，其效應將可被大幅降低，剩餘影響極小而可歸納為陀螺儀之偏移值，因此在退耦式設計的動態模型中省略耦合組尼係數。

$$k_{yy} \leftarrow \frac{k'_{yy}}{m_1} ; k_{xy} \leftarrow \frac{k'_{xy}}{(m_1 + m_2)} ; k_{yx} \leftarrow \frac{k'_{yx}}{m_1} ; \sigma_x \leftarrow \frac{1}{(m_1 + m_2)} ; \sigma_y \leftarrow \frac{1}{m_1} .$$

而 x 軸的科氏加速度項可以令成一個新的參數， $\Omega_r \leftarrow \frac{m_1 \Omega_z}{(m_1 + m_2)}$ ，如此將有助於簡化推導過程。因此上式又可改寫成：

$$\begin{aligned} \ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + k_{xx}x + k_{xy}y &= \sigma_x u_x + 2\Omega_r \dot{y} \\ \ddot{y} + d_{yy}\dot{y} + k_{yx}x + k_{yy}y &= \sigma_y u_y - 2\Omega_z \dot{x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 感測介面

微機電系統中最普遍的感測介面設計為梳狀(Comb)結構，如圖 3.2 所示。考量到電容變化相對於位移的線性度以及較大的位移，在本模型推導中採用橫向式移動設計，如圖 3.2 所示。其中 C_{o1} 與 C_{o2} 分別為差動電容兩端的初始電容； V 為施加的直流偏壓； d 則為初始的誤差； ΔC_1 與 ΔC_2 為兩端的電容變化； x 為位移。製作過程的變異不僅會造成結構缺陷而影響動態，同樣會在感測介面產生顯著的影響。以圖 3.2 為例，最可能的誤差將出現在初始電容與電容變化量的不匹配($C_{o1} \neq C_{o2}$ 與 $\Delta C_1 \neq \Delta C_2$)，其中電容變化量的不匹配由於相對很小，因此在本例中忽略其差異。

在忽略邊緣效應下，與位移對應的電容變化($\Delta C_1 = \Delta C_2 = \Delta C$)如下所示：

$$\Delta C = N\varepsilon \frac{W}{Z} x \quad (3.5)$$

其中 ΔC 為電容變化； N 為梳狀結構的對數(圖 3.2 所示為三對)； ε 為介電常數； W 與 Z 為重疊區域的寬度與間隙大小。而因初始電容不匹配所造成的電容值誤差如下：

$$C_{o1} - C_{o2} = \Delta C_o = 2N\varepsilon \frac{W}{Z} d \quad (3.6)$$

此誤差將在訊號通過感測電路轉換成電壓時造成偏壓。如圖 1.15 的模擬，此偏壓並無法被截波穩定技術所濾除，此效應也在[17]中證實。該誤差訊號將與量測訊號一起通過感測電路，為了將此誤差整合在狀態觀察器的輸出中，在下一小節將結合電路其他非理想因素，進而推導出最後的訊號誤差。

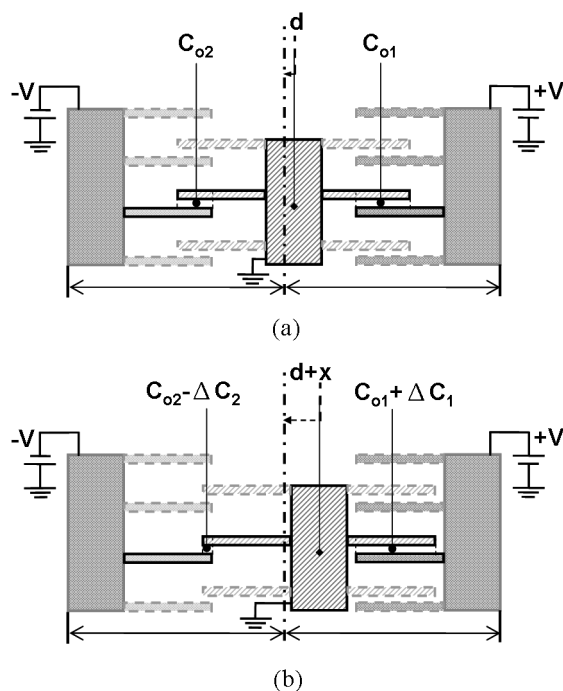


圖 3.2：橫向式梳狀結構。(a) 初始狀態；(b) 因位移 x 造成的差動電容變化。

3.3 感測電路



3.3.1 基本電荷放大器

訊號量測在未搭配如圖 1.12 的截波穩定技術處理下，使用基本的電荷放大器即可直接得到電容變化，如圖 3.3。其中 V 為差動電容的偏壓； R_f 與 C_f 分別為回授電阻與電容。

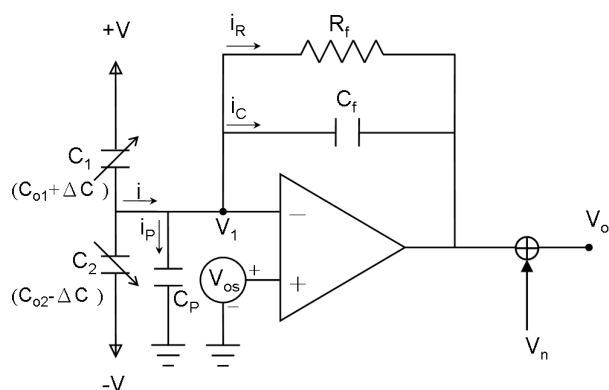


圖 3.3：考慮非理想因素下之電荷放大器。

為推導電子元件或電路設計的瑕疵所造成的影響，本論文考慮常見的電路瑕疵包

括：運算放大器的輸入偏移電壓(Input offset voltage, V_{os})、因導線本身或與電路基板間產生的寄生電容(C_p)。在電容改變的狀況下，電荷將被「擠出」而流進感測電路，電荷與電容變化的關係如下：

$$Q = (C_{o1} + \Delta C)(V - V_1) + (C_{o2} - \Delta C)(-V - V_1) \quad (3.7)$$

假設無電流流入運算放大器(即理想放大器)，則流入回授電容的電流 i_c 如下：

$$i_c = i - i_p - i_R = \frac{d(Q)}{dt} - C_p \frac{d(V_1 - 0)}{dt} - \frac{V_1 - V_o}{R_f} \quad (3.8)$$

通常為了降低對訊號量測的干擾，回授電阻都非常大，約在 Mega-ohms 等級以上[16]，因此可將 i_R 省略以簡化公式推導。由於運算放大器的虛擬接地(Virtual ground)效應， V_1 會近似於 V_{os} ，因此輸出電壓 V_o 將可推導如下：

$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_c dt + V_{os} + V_n \\ &= -\frac{2V}{C_f} (\Delta C) - (C_{o1} - C_{o2}) \frac{V}{C_f} + \left(\frac{C_{o1} + C_{o2} + C_p + C_f}{C_f} \right) V_{os} + V_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

式(3.9)中，第一項是理想的輸出電壓與電容變化的關係，若再將 ΔC 以(3.5)取代，則可以得到輸出電壓與位置變化的正比關係，但後兩項的偏差將造成嚴重的影響。(3.9)中的第二項即是上一節所推導的感測介面初始電容不匹配所造成的影響，而第三項則是操作型放大器本身的電壓偏移與電路的寄生電容所造成的影響。

在陀螺儀的應用中，控制系統的設計需要兩軸的位移資訊。結合(3.5)、(3.6)與(3.9)可以得到感測電路的輸出電壓如下：

$$\begin{bmatrix} V_{oxa} \\ V_{oya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2V}{C_{fx}} N_x \varepsilon \frac{W_x}{Z_x} x + \Phi_{xa} + V_{nx} \\ -\frac{2V}{C_{fy}} N_y \varepsilon \frac{W_y}{Z_y} y + \Phi_{ya} + V_{ny} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中

$$\Phi_{xa} = \beta_x$$

$$\Phi_{ya} = \beta_y$$

$$\alpha_x = \left(2N_x \varepsilon \frac{W_x}{Z_x} d_x \right) \frac{V}{C_{fx}}, \quad \beta_x = \left(2N_x \varepsilon \frac{W_x}{Z_x} x_0 + C_{Px} + C_{fx} \right) \frac{V_{osx}}{C_{fx}}$$

$$\alpha_y = \left(2N_y \varepsilon \frac{W_y}{Z_y} d_y \right) \frac{V}{C_{fy}}, \quad \beta_y = \left(2N_y \varepsilon \frac{W_y}{Z_y} y_0 + C_{Py} + C_{fy} \right) \frac{V_{osy}}{C_{fy}}$$

其中下標 x 與 y 代表兩軸各自的參數或誤差； x_0 與 y_0 則是可變電容初始的重疊長度。由於 C_P 、 V_{os} 、 d 、 x_0 與 y_0 皆為未知量，因此 α 與 β 為未知，此為量測時的訊號誤差或飄移來源； Φ_{xa} 與 Φ_{ya} 則代表因感測介面與電路瑕疵所造成的量測誤差。

3.3.2 同步偵測架構

訊號量測在搭配如圖 1.12 的截波穩定技術處理下，考量誤差與圖 3.3 所示相同下，輸出電壓 V_o 將可推導如下：

$$V_o = -\frac{2V}{C_f}(\Delta C) - (C_{o1} - C_{o2}) \frac{V}{C_f} + \nu \left(\frac{C_{o1} + C_{o2} + C_p + C_f}{C_f} \right) V_{os} + V_{n2} \quad (3.11)$$

其中 V_{n2} 的頻率與調變訊號相鄰，會與訊號一同經過低通濾波器處理，因此其大小理論上應比式(3.9)中的 V_n 要小； ν 為小於一的實數，代表誤差減少的程度，其值大小與低通濾波器的設計有關。再結合(3.5)、(3.6)與(3.11)可以得到感測電路的輸出電壓為：

$$\begin{bmatrix} V_{oxs} \\ V_{oys} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2V}{C_{fx}} N_x \varepsilon \frac{W_x}{Z_x} x + \Phi_{xs} + V_{n2x} \\ -\frac{2V}{C_{fy}} N_y \varepsilon \frac{W_y}{Z_y} y + \Phi_{ys} + V_{n2y} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

其中

$$\Phi_{xs} = \alpha_x + \nu \beta_x$$

$$\Phi_{ys} = \alpha_y + \nu \beta_y$$

α 與 β 的定義與(3.10)相同。由於電容值不匹配造成的影響無法被消除，因此無論有沒

有使用截波穩定技術，輸出電壓都會有一個偏壓訊號。

以下即以 HSPICE 模擬印證初始電容不匹配所造成的影響：假設交流偏壓為頻率 300 kHz 振幅 1 volt、初始電容為 200 fF 偏移 20 fF(因此差動電容結構下不匹配大小為 40 fF)、電容變化(訊號)以頻率 3 kHz 振幅 50 fF 變化、寄生電容為 1 pF、回授電容為 2 pF、輸入偏移電壓從 0 mV 飄移到 20 mV，模擬結果如下：

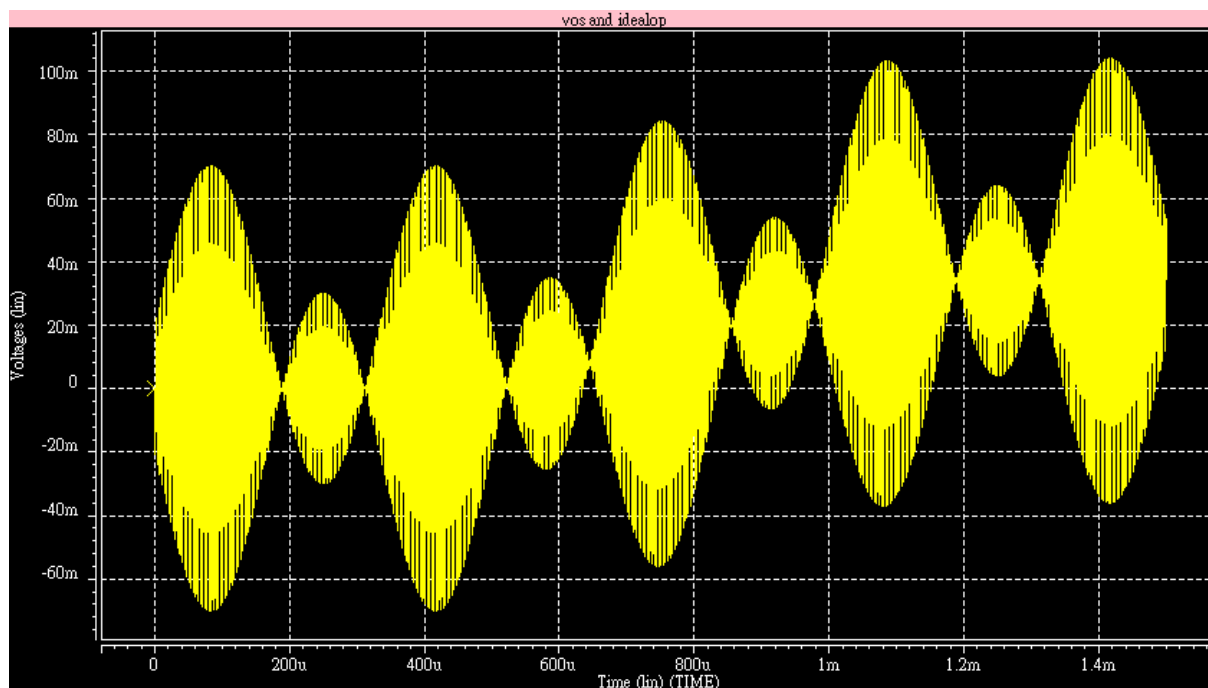


圖 3.4：以 HSPICE 模擬印證本文推導之感測電路關係式。此為同步偵測架構在解調之前的訊號。

圖 3.4 為使用 HSPICE 模擬以同步偵測架構量測可變電容，3 kHz 的電容變化以 300 kHz 的訊號調變後的訊號。由上述參數可以算出在沒有瑕疵的狀況下，其電容變化引起的電壓應為 50 mV，但因初始電容不匹配造成振幅增加 20 mV，從 0.5 ms 到 1.1 ms 這段時間又因輸入偏移電壓產生 34 mV 的輸出偏移。將此訊號以 Matlab 作後處理，在加入白雜訊與 1/f 雜訊後再以 300 kHz 的訊號作解調，再以低通濾波器過濾，其結果如圖 3.5 所示。

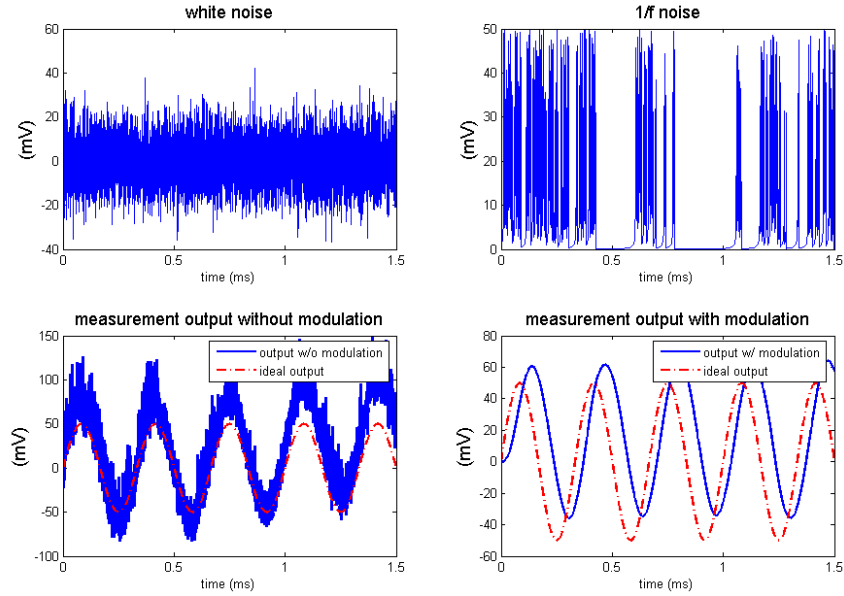


圖 3.5：以 Matlab 處理圖 3.4 之訊號，包括加入白雜訊(左上圖)與 1/f 雜訊(右上圖)、並在解調後以低通濾波器過濾(右下圖)。左下圖為未經同步偵測架構處理之訊號。

由右下角的圖可以明顯發現，低通濾波器有效過濾掉高頻雜訊，而截波穩定的方法也可以將閃爍雜訊、操作型放大器的偏移電壓、與寄生電容產生的影響濾除，但仍然存在相位落後與偏移量(20 mV)，相位落後係由低通濾波器所引起，而偏移量即為初始電容不匹配所引起。

3.4 微機電陀螺儀系統模型

以上探討了微機電振動式陀螺儀系統中三個主要部份，包括對圖 3.1 兩種設計的機械結構動態方程式、感測介面、以及感測電路，其中感測介面瑕疵與感測電路瑕疵一起被建構成量測電路輸出的誤差訊號。系統整理如下：

◆ 單一質量塊設計

$$\begin{aligned} \ddot{q}_s + D_s \dot{q}_s + K_s q_s &= \Lambda_s U_s - 2\Omega \dot{q}_s \\ Z_s &= V_s \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中

$$q_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_s = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{bmatrix}, \quad K_s = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \end{bmatrix}, \quad V_s = \begin{bmatrix} V_{ox} \\ V_{oy} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_s = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

其中 V_s 代表兩軸感測輸出，以位置回授為例。在以基本電荷放大器電路量測電容變化的例子中，感測輸出 V_{ox} 與 V_{oy} 分別等於 V_{oxa} 與 V_{oya} ；在以同步偵測架構量測電容變化的例子中，則感測輸出 V_{ox} 與 V_{oy} 分別等於 V_{oxs} 與 V_{oys} 。

◆ 退耦式雙質量塊設計

另外根據退耦式雙質量陀螺儀設計，系統模型可以整理如下：

$$\ddot{q}_d + D_d \dot{q}_d + K_d q_d = \Lambda_d U_d - 2\Omega \dot{q}_d$$

$$Z_d = V_d \quad (3.14)$$

其中

$$q_d = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_d = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} d_{xx} & 0 \\ 0 & d_{yy} \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_d = \begin{bmatrix} u_{dx} \\ u_{dy} \end{bmatrix}, \quad V_d = \begin{bmatrix} V_{ox} \\ V_{oy} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_d = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$$

其中 V_d 代表兩軸感測輸出，以位置回授為例。與單一質量塊設計一樣，感測輸出 V_{ox} 與 V_{oy} 與感測電路有關。

以上模型中的系統參數，如第一章所介紹，將受製造過程的影響而與設計值有所不同，此變異一般約在 10%~20% 的範圍，而量測訊號也可能因寄生電容與操作型放大器的輸入偏壓產生誤差。因此，上述模型的系統參數在實際製作出來的陀螺儀中，通常偏離設計值而成為未知參數。

另外需要注意的是，以上模型中的控制輸入 U_d 與 U_s 指的是「靜電力」，在靜電式驅動中，產生的力與輸入電壓的關係則如式(1.11)所示，輸入電壓無論正負，都將產生同方向的力，但要產生振動等往復運動，也必須能產生相反方向的控制力才行。一般在使用靜電式驅動時，會在實際的控制電壓加上偏壓，即：

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \nabla C (V_b \pm V_c)^2 = \frac{1}{2} \nabla C (V_b^2 + V_c^2 \pm 2V_b \cdot V_c) \quad (3.15)$$

其中 V_b 為外加偏壓， V_c 為控制電壓。如此即可透過改變控制電壓的正負來產生往復運動。而力的輸入也受許多因素影響，如：平板間阻尼所造成提升的力(Lift force，此在[19]中也稱之為衝浪板效應(Surfboarding effect))；或是靜電彈簧(Electrostatic spring)所造成的負彈簧效應(Negative spring effect)[30]。由於振動式陀螺儀質量塊的位移通常不大，因此本論文假設輸入靜電力對結構的作用不受其他非理想因素干擾，並且假設陀螺儀之輸入與輸出無饋通(Feedthrough)的現象產生。



四、新式振動式陀螺儀控制系統

微機電陀螺儀容易在製造過程中產生瑕疵，因此通常需要外加控制，即使用傳統的操作方法也需要在驅動軸加入回授控制，如鎖相迴路與自動增益控制，以使質量塊產生穩定振動。為提高系統可靠度，閉迴路的操作方法在兩軸都加入控制，因而可以處理因瑕疵造成系統動態的不確定性(Uncertainty)，控制器設計可使用具強健性(Robustness)的控制法則，如順滑模態控制或 H-infinity 控制。然而，此類強健控制訊號的顫振(Chattering)現象或輸入過大可能引發系統其他未知響應，或造成控制訊號直接穿透到感測端。為避免此類問題，可改採搭配參數估測的控制設計，以瑕疵造成的參數變異的估測值作回授控制，一方面補償系統不確定性，一方面將包括角速度在內的系統參數估測出來，不同於傳統操作中感測頻寬受系統時間常數的限制，以此方式作角速度量測，將可以大幅提高陀螺儀的感測頻寬。目前文獻上以線上估測的方式一邊估測出系統參數一邊控制系統動態的研究，以適應控制法的設計為主，而且大部分都假設振動質量塊質量為已知且感測介面與電路無瑕疵。

本章以上一章建立的系統模型為基礎，設計一具參數估測功能的控制系統。為達成此目的，本論文以改良式狀態觀察器估測系統動態與系統參數，並依估測值設計回授控制。要使用狀態觀察器，首先必須將上一章建構的系統模型改寫成狀態空間(State space)表示式，而為了使用狀態觀察器估測系統參數，本論文修正系統模型，將系統動態中的系統參數(單一質量塊設計中的 $\Omega_z, k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, d_{xx}, d_{yy}, d_{xy}, \sigma$ 與退耦式雙質量塊設計中的 $\Omega_z, k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, k_{yx}, d_{xx}, d_{yy}, \sigma_x, \sigma_y$)、代表感測介面與電路誤差訊號的 (Φ_x, Φ_y) 與系統動態 (x, \dot{x}, y, \dot{y}) 都一併建構成系統狀態，而系統參數在此先假設為定值，因此其微分皆為零。

◆ 單一質量塊設計

$$\begin{aligned}\dot{X}_t &= f_t(X_t, U_t) \\ Z_t &= H_t X_t + \bar{n}\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中

$$X_t = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \Phi_x \quad \Phi_y \quad \Omega_z \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad d_{xx} \quad d_{yy} \quad d_{xy} \quad \sigma]^T,$$

$$f_t(X_t, U_t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -k_{xx}x - k_{xy}y - d_{xx}\dot{x} - d_{xy}\dot{y} + 2\Omega_z\dot{y} + \sigma u_{tx} \\ -k_{xy}x - k_{yy}y - d_{xy}\dot{x} - d_{yy}\dot{y} - 2\Omega_z\dot{x} + \sigma u_{ty} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{14 \times 1}, \quad U_t = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix},$$

$$H_t = \begin{bmatrix} \left(-\frac{2V}{C_{fx}}N_x\epsilon\frac{W_x}{Z_x}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2V}{C_{fy}}N_y\epsilon\frac{W_y}{Z_y}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 8} [0]_{2 \times 8}$$

◆ 退耦式雙質量塊設計



$$\begin{aligned} \dot{X}_e &= f_e(X_e, U_e) \\ Z_e &= H_e X_e + \bar{n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中

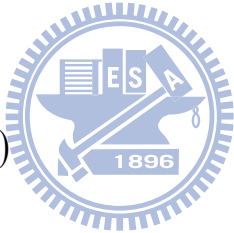
$$X_e = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \Phi_x \quad \Phi_y \quad \Omega_r \quad \Omega_z \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad k_{yx} \quad d_{xx} \quad d_{yy} \quad \sigma_x \quad \sigma_y]^T,$$

$$f_e(X_e) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -k_{xx}x - k_{xy}y - d_{xx}\dot{x} + 2\Omega_r\dot{y} + \sigma_x u_{ex} \\ -k_{yx}x - k_{yy}y - d_{yy}\dot{y} - 2\Omega_z\dot{x} + \sigma_y u_{ey} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{16 \times 1}, \quad U_e = \begin{bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix},$$

$$H_e = \begin{bmatrix} \left(-\frac{2V}{C_{fx}}N_x\epsilon\frac{W_x}{Z_x}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2V}{C_{fy}}N_y\epsilon\frac{W_y}{Z_y}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 10} [0]_{2 \times 10}$$

以此修正，在系統狀態為可觀察(Observable)的情況下，將可以用狀態觀察器來估測系統參數，也因此許多用來設計狀態觀察器增益的演算法皆可用來作參數估測，擷取其它演算法的優點。此一作法有助於提高參數估測與回授控制的設計彈性。此外，輸出方程式中的量測矩陣(H_t 與 H_e)也依系統狀態修正，包含正確的訊號與誤差訊號。

上述的修正在不同的情況下也略有不同，以單一質量塊設計為例，在確知振動質量塊質量時，無需將 σ 建構成系統狀態；在系統參數如彈性係數或阻尼係數已知時，也無須將其納入系統狀態；在感測介面與電路無瑕疵的情況下，系統狀態也不須加入誤差訊號，且量測矩陣中也僅代表已知的系統狀態與量測訊號的關係。因此，假設感測介面與電路無瑕疵並採速度量測，但包含質量塊在內的機械結構皆為未知的情況，以此為例同樣可以建構類似(4.1)與(4.2)的振動式陀螺儀模型如下：

$$\begin{aligned} \dot{X}_{tm} &= f_{tm}(X_{tm}, U_t) \\ Z_{tm} &= H_{tm}X_{tm} + \bar{n} \\ \dot{X}_{em} &= f_{em}(X_{em}, U_e) \\ Z_{em} &= H_{em}X_{em} + \bar{n} \end{aligned} \quad (4.3)$$


其中

$$X_{tm} = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \Omega_z \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad d_{xx} \quad d_{yy} \quad d_{xy} \quad \sigma]^T,$$

$$X_{em} = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \Omega_r \quad \Omega_z \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad k_{yx} \quad d_{xx} \quad d_{yy} \quad \sigma_x \quad \sigma_y]^T$$

$$f_{tm}(X_{tm}, U_t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -k_{xx}x - k_{xy}y - d_{xx}\dot{x} - d_{xy}\dot{y} + 2\Omega_z\dot{y} + \sigma_{tx} \\ -k_{xy}x - k_{yy}y - d_{xy}\dot{x} - d_{yy}\dot{y} - 2\Omega_z\dot{x} + \sigma_{ty} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{12 \times 1},$$

$$f_{em}(X_{em}, U_e) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -k_{xx}x - k_{xy}y - d_{xx}\dot{x} + 2\Omega_r\dot{y} + \sigma_x u_{ex} \\ -k_{yx}x - k_{yy}y - d_{yy}\dot{y} - 2\Omega_z\dot{x} + \sigma_y u_{ey} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{14 \times 1},$$

$$H_{tm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & [0]_{2 \times 8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_{em} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & [0]_{2 \times 10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由上式可知，系統狀態 X_{tm} 與 X_{em} 少了代表量測誤差的 Φ_x 與 Φ_y ；輸出矩陣 H_{tm} 與 H_{em} 改以速度量測；系統矩陣 f_{tm} 與 f_{em} 僅維度改變；控制輸入則不變。

4.1 狀態觀察器設計

以修改後的系統模型為基礎，其狀態估測可以透過以下的觀察器：

$$\begin{aligned} \hat{\dot{X}}_n &= f_n(\hat{X}_n, U_n) + L_n(Z_n - \hat{Z}_n) \\ \hat{Z}_n &= H_n \hat{X}_n \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 n 可為 t 、 e 、 tm 、 em 以分別代表(4.1)-(4.3)的系統模型；而 $U_t = U_{tm}$ 、 $U_e = U_{em}$ ； \hat{X}_n 代表 X_n 的估測值； L_n 為觀察器增益矩陣。

4.1.1 系統觀察性

模型(4.1)-(4.3)中系統狀態兩兩相乘，因此為非線性系統，而根據[35]，非線性系統的觀察性，可以由以下方式驗證：

$$W_o \equiv \frac{\partial}{\partial q} \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \ddot{r} & \dots \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

其中 W_o 為觀察性矩陣； r 為系統的量測輸出； q 為系統狀態。此作法是對輸出與輸出的微分項作線性化，再代入特定時間的狀態值，若矩陣為滿秩(Full rank)，則該時間下系

統在該狀態值附近為局部可觀察(Locally observable)。

◆ 質量已知、感測電路無瑕疵之陀螺儀系統

文獻上針對振動式陀螺儀設計的控制器皆有的共同假設，即質量塊質量已知且量測質量塊位移或速度的介面與電路無瑕疵，控制模型一般假設兩軸質量塊大小相等但未指明其設計，以下使用單一質量塊設計為例說明，而詳細模型建構則不再贅述。另外，在常見的適應控制法中，正確地估測系統參數所需的條件是由「持續刺激」(Persistent excitation)的方法證明。在本方法中，同樣可以對如此假設下的系統作設計，並且同樣可以利用狀態觀察性的印證來求得正確參數估測的條件。依以上的假設，系統觀察性可以檢驗如下：

$$W_{ts} = \begin{bmatrix} [C_{ts}]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 7} \\ [0]_{7 \times 4} & [W_{tsp}]_{7 \times 7} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

其中

$$C_{ts} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{xx} & -k_{xy} & 0 & 0 \\ -k_{xy} & -k_{yy} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{tsp} = \begin{bmatrix} 2\ddot{y} & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} \\ -2\ddot{x} & 0 & -\dot{y} & -\dot{x} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} \\ 2y^{(3)} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} \\ -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} \\ 2y^{(4)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} \\ -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(4)} \\ 2y^{(5)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(5)} & 0 & -y^{(5)} \end{bmatrix}$$

以上 C_{ts} 為對應系統動態 (x, \dot{x}, y, \dot{y}) 的觀察性矩陣，只要 $k_{xx} \cdot k_{yy} \neq k_{xy}^2$ ， C_{ts} 必定呈滿秩(Full rank)，因此系統動態為可觀察，其秩又與狀態無關，因此為全域可觀察(Globally observable)，換句話說，在適當的觀察器設計下將可以得到：

$$\hat{x} \rightarrow x \quad \hat{y} \rightarrow y \quad \dot{\hat{x}} \rightarrow \dot{x} \quad \dot{\hat{y}} \rightarrow \dot{y}$$

而 W_{tsp} 為其他系統參數的觀察性矩陣，由列向量來觀察：以第二行為例，若系統狀態僅存在一個頻率(如： $\dot{x} = \sin(\omega t)$)，則再兩次微分之後($x^{(3)} = -\omega^2 \sin(\omega t)$)會回到與原本僅差倍數的關係，而第三行亦相同(如： $\dot{y} = \cos(\omega t) \rightarrow y^{(3)} = -\omega^2 \cos(\omega t)$)，如此一來，第四中第五與第一個元素的倍數關係會與第二行中第五與第一個元素的倍數關係相同(其他行亦同)，因此，若系統狀態只有一個頻率，則 W_{tsp} 的秩最多為 4，而無法達成滿秩的狀況，也因此系統狀態將成為不可觀察(Unobservable)；以同樣觀察可知，若系統狀態有兩個頻率，(如： $\dot{x} = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) \rightarrow \ddot{x} = -\omega_1^2 \sin(\omega_1 t) - \omega_2^2 \sin(\omega_2 t)$ ， y 亦相同)，列向量將皆線性獨立於彼此，若 x 與 y 各自頻率不相同亦然。再由行向量來觀察，除了兩個頻率的條件以外，只要 x 和其微分項與 y 和其微分項不完全相同，則可使 W_{tsp} 為滿秩，系統參數則為可觀察。事實上只要系統初始狀態並非是完全相等的特殊情況，即 $x(0) = y(0)$ 且 $\dot{x}(0) = \dot{y}(0)$ ，就不會造成 $x(t) = y(t)$ 的問題，而且要用控制將兩軸控制成都要有兩個頻率且完全相同需要特殊設計，一般狀況不容易造成此結果，但若主動控制避免這個問題，可以透過下一節要介紹的外加訊號來解決。因此，適當的控制器設計使受控狀態有兩個(含)以上頻率的條件下，以適當的觀察器設計將可透過狀態觀察器作系統參數估測。

以下用幾個狀況的數值模擬，以觀察性矩陣的奇異值分解來總結上述討論：狀況一，耦合阻尼係數相同($d_{xy} = d_{yx}$)且系統動態僅含有一個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000)$ 、 $y = \sin(2\pi \times 3000)$)；狀況二，耦合阻尼係數相同($d_{xy} = d_{yx}$)但系統動態含有兩個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000) + \cos(2\pi \times 5000)$ 、 $y = \cos(2\pi \times 3000) + \cos(2\pi \times 5000)$)；狀況三，耦合阻尼係數不同($d_{xy} \neq d_{yx}$ ，因此滿秩的狀況其秩應為 8)但系統動態含有兩個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000) + \cos(2\pi \times 5000)$ 、 $y = \cos(2\pi \times 3000) + \cos(2\pi \times 5000)$)。將以上數值代入觀察性矩陣可得以下模擬結果：

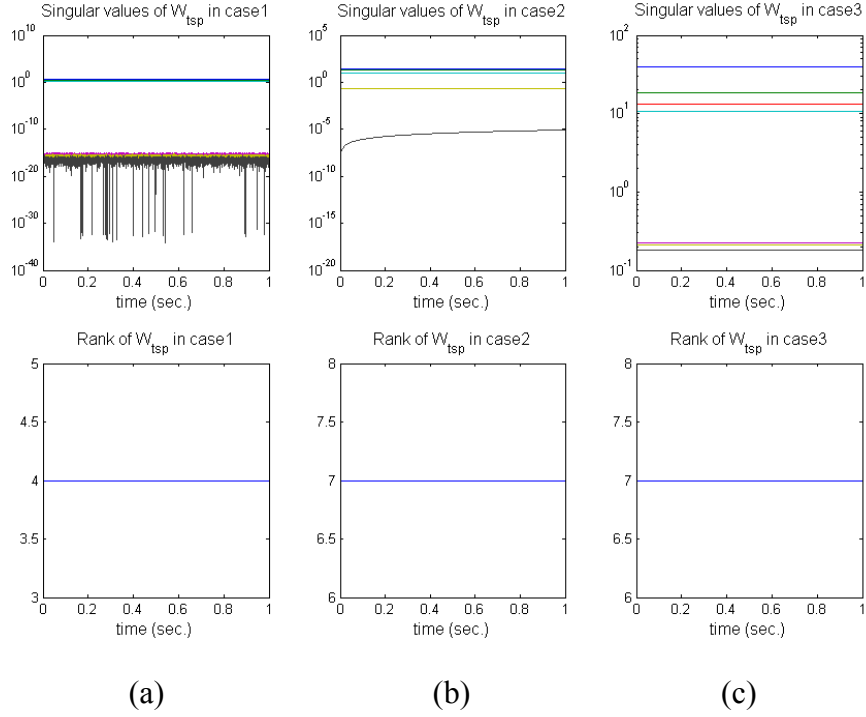


圖 4.1：三種不同狀況下，質量已知且感測電路無瑕疵之單一質量塊陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{tsp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。

以上模擬可知，在系統動態僅含有一個頻率的狀況一，對應系統參數的觀察性矩陣將無法呈滿秩，並且與分析相同，其秩為 4；而在系統動態含有兩個頻率的狀況二則可以使此觀察性矩陣滿秩；而在狀況三中，縱使系統動態已含有兩個頻率，但由於兩軸耦合阻尼係數不同($d_{xy} \neq d_{yx}$)，仍無法使觀察性矩陣呈滿秩。

◆ 質量未知、感測電路無瑕疵之陀螺儀系統

假設感測介面與電路無瑕疵，以速度回授為例，同樣以(4.5)檢驗單一質量塊與退耦式雙質量塊兩種設計下的振動式陀螺儀模型，觀察性矩陣如下：

$$W_{tm} = \begin{bmatrix} [C_{tm}]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 8} \\ [0]_{8 \times 4} & [W_{tmp}]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$W_{em} = \begin{bmatrix} [C_{em}]_{4 \times 4} & [0]_{4 \times 10} \\ [0]_{10 \times 4} & [W_{emp}]_{10 \times 10} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中

$$C_{tm} = C_{em} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{xx} & -k_{xy} & 0 & 0 \\ -k_{xy} & -k_{yy} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{tmp} = \begin{bmatrix} 2\ddot{y} & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & \dot{u}_{tx} \\ -2\ddot{x} & 0 & -\dot{y} & -\dot{x} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} & \dot{u}_{ty} \\ 2y^{(3)} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & \ddot{u}_{tx} \\ -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} & \ddot{u}_{ty} \\ 2y^{(4)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & u_{tx}^{(3)} \\ -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(4)} & u_{ty}^{(3)} \\ 2y^{(5)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(5)} & 0 & -y^{(5)} & u_{tx}^{(4)} \\ -2x^{(5)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(5)} & -x^{(5)} & u_{ty}^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$W_{emp} = \begin{bmatrix} 2\ddot{y} & 0 & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & \dot{u}_{ex} & 0 \\ 0 & -2\ddot{x} & 0 & -\dot{y} & 0 & -\dot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & \dot{u}_{ey} \\ 2y^{(3)} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -x^{(3)} & 0 & \ddot{u}_{ex} & 0 \\ 0 & -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & 0 & \ddot{u}_{ey} \\ 2y^{(4)} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & u_{ex}^{(3)} & 0 \\ 0 & -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & u_{ey}^{(3)} \\ 2y^{(5)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(5)} & 0 & u_{ex}^{(4)} & 0 \\ 0 & -2x^{(5)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & u_{ey}^{(4)} \\ 2y^{(6)} & 0 & -x^{(5)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & -x^{(6)} & 0 & u_{ex}^{(5)} & 0 \\ 0 & -2x^{(6)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & -x^{(5)} & 0 & -y^{(6)} & 0 & u_{ey}^{(5)} \end{bmatrix}$$

以上 C_{tm} 與 C_{em} 一樣，只要 $k_{xx} \cdot k_{yy} \neq k_{xy}^2$ 必定呈滿秩；而 W_{tmp} 與 W_{emp} 除了最後一行與最後兩行以外，滿秩的條件也都和上例中的 W_{tsp} 相同。而對應 $\sigma(W_{tmp}$ 最後一行) 或 σ_x 與 $\sigma_y(W_{emp}$ 最後兩行) 的部份，若要在矩陣中產生獨立的秩，由行向量觀察，至少回授控制 U_t 與 U_e 的一次微分必須存在，然而，若僅以系統狀態作為回授控制訊號，則 W_{tmp} 的最後一行與 W_{emp} 的最後兩行都將會是其前七行的線性組合而使矩陣無法滿秩。因此，為使 W_{tmp} 與 W_{emp} 達成滿秩的狀況，則回授控制 U_t 與 U_e 中必須含有非系統狀態的訊號。因此在控制訊號將系統狀態控制成含有兩個以上的頻率，且控制訊號中含有非系統狀態的訊號下，系統將為可觀察，因此機械結構參數都可經由適當的狀態觀察器設計正確地估測得到。而為了使系統不發散並符合一次微分存在，該輔助訊號必須為有限值(Bounded)，因此可選定為弦波訊號。以下同樣以不同狀況之觀察性矩陣奇異值分解來總結上述討

論。在單一質量塊的設計中，狀況一，系統動態僅含有一個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000)$ 、 $y = \sin(2\pi \times 3000)$)但控制訊號中僅有狀態回授並無不同於系統狀態的訊號($u_{tx} = u_{ty} = c_1x + c_2y$ ，其中 c_1 與 c_2 為任意常數)；狀況二，系統動態含有兩個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000)$ 、 $y = \sin(2\pi \times 5000)$)但控制訊號中僅有狀態回授並無不同於系統狀態的訊號($u_{tx} = u_{ty} = c_1x + c_2y$)；狀況三，系統動態含有兩個頻率($x = \sin(2\pi \times 3000)$ 、 $y = \sin(2\pi \times 5000)$)且控制訊號中亦含有不同於系統狀態的訊號($u_{tx} = u_{ty} = c_1x + c_2y + \sin(2\pi \times 500)$)。將以上數值代入 W_{tmp} 並做奇異值分解與矩陣判定可得以下結果：

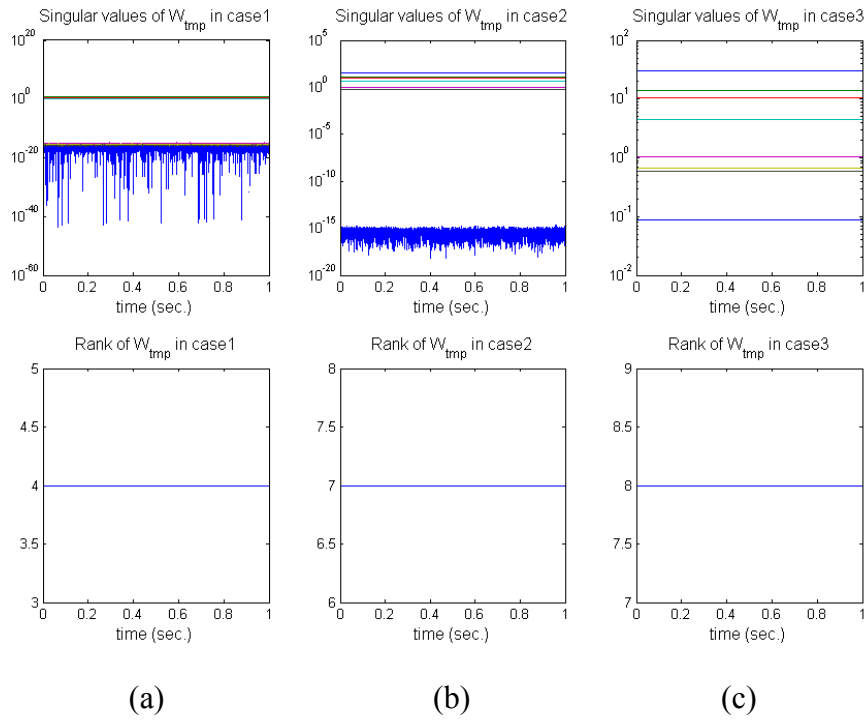


圖 4.2：三種不同狀況下，質量未知但感測電路無瑕疵之單一質量塊陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{tmp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。

以上模擬可清楚看到，同時要使用狀態觀察器估測陀螺儀振動質量塊質量的狀況下，除了系統動態須滿足兩個頻率以外，控制訊號中還需要含有非狀態回授的訊號才得以使系統觀察性矩陣呈滿秩，如狀況三所示。而狀況一亦如分析，其秩同樣為 4。同樣將上述三個不同狀況代入退耦式雙質量塊設計中的 W_{emp} ，可得以下結果：

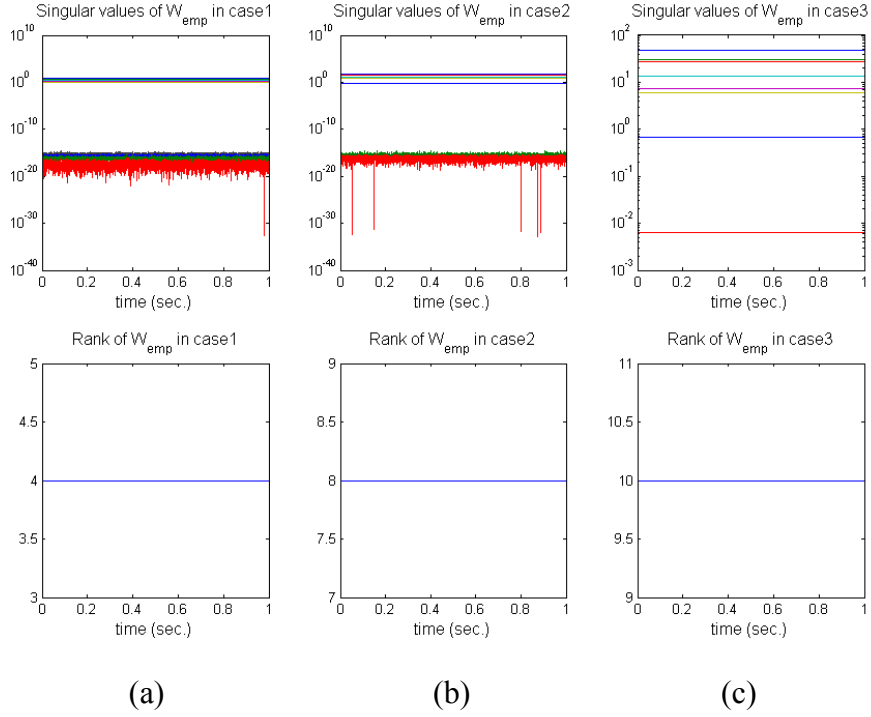


圖 4.3：三種不同狀況下，質量未知但感測電路無瑕疵之退耦式雙質量塊陀螺儀系統觀察性矩陣(W_{emp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。

察性矩陣(W_{emp})之奇異值分解。(a) 狀況一；(b) 狀況二；(c) 狀況三。

需要注意的是，若改採位移回授，則上述矩陣將變成：

$$C_{tm1} = C_{em1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{imp1} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} & -x & 0 & -y & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & u_{tx} \\ -2\dot{x} & 0 & -y & -x & 0 & -\dot{y} & -\dot{x} & u_{ty} \\ 2\ddot{y} & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & \dot{u}_{tx} \\ -2\ddot{x} & 0 & -\dot{y} & -\dot{x} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} & \dot{u}_{ty} \\ 2y^{(3)} & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & \ddot{u}_{tx} \\ -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} & \ddot{u}_{ty} \\ 2y^{(4)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & u_{tx}^{(3)} \\ -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & -x^{(4)} & u_{ty}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$W_{emp1} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} & 0 & -x & 0 & -y & 0 & -\dot{x} & 0 & u_{ex} & 0 \\ 0 & -2\dot{x} & 0 & -y & 0 & -x & 0 & -\dot{y} & 0 & u_{ey} \\ 2\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & \dot{u}_{ex} & 0 \\ 0 & -2\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & \dot{u}_{ey} \\ 2y^{(3)} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -x^{(3)} & 0 & \ddot{u}_{ex} & 0 \\ 0 & -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & 0 & \ddot{u}_{ey} \\ 2y^{(4)} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & u_{ex}^{(3)} & 0 \\ 0 & -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & u_{ey}^{(3)} \\ 2y^{(5)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(5)} & 0 & u_{ex}^{(4)} & 0 \\ 0 & -2x^{(5)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & u_{ey}^{(4)} \end{bmatrix}$$

系統動態(x, \dot{x}, y, \dot{y})同樣為全域可觀察，而 W_{imp1} 與 W_{emp1} 中的每個元素都比速度回授下的 W_{imp} 與 W_{emp} 降了一階，如此一來，對應 σ 或 σ_x 與 σ_y 的行向量若要在矩陣中產生獨立的秩，回授控制 U_t 與 U_e 中輔助訊號的選擇僅需要有界且存在，並獨立於系統狀態即可，不需要一次微分存在的條件。因此，理論上在位移回授下只要外加一個固定的偏壓訊號在回授控制輸入中，即可與外加弦波訊號產生同樣效果。其他部分滿秩的條件則與速度回授時相同，在此不再重複討論。由以上的驗證，在適當的設計回授控制下，本方法中無論使用速度回授或位置回授，在妥善設計觀察器增益的情況下，都將可以正確地估測到系統參數。

◆ 質量未知、感測電路有瑕疵之陀螺儀系統

以位移回授為例，在陀螺儀機械結構參數皆為未知且量測訊號存在有誤差的情況，單一質量塊與退耦式設計的系統觀察性以(4.5)檢驗如下：

$$W_t = \begin{bmatrix} [C_t]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 8} \\ [0]_{8 \times 6} & [W_{tp}]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$W_e = \begin{bmatrix} [C_e]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 10} \\ [0]_{10 \times 6} & [W_{ep}]_{10 \times 10} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

其中

$$C_t = C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{xx} & -k_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{xy} & -k_{yy} \end{bmatrix}$$

$$W_{tp} = W_{tmp}$$

$$W_{ep} = W_{emp}$$

以上 C_t 與 C_e 為對應系統動態 (x, \dot{x}, y, \dot{y}) 與量測誤差 (Φ_x, Φ_y) 的觀察性矩陣，只要 $k_{xx} \cdot k_{yy} \neq k_{xy}^2$ ， C_t 與 C_e 必定滿秩，因此系統動態與量測誤差為可觀察，其秩又與狀態無關，因此亦為全域可觀察； W_{tp} 與 W_{ep} 為其他系統參數的觀察性矩陣，其滿秩條件與上一個部份一樣，因此不再詳述。須要注意的是，本例中已經是位移回授，因此在需要估測量測誤差的狀況下，回授控制 U_t 與 U_e 一次微分存在是必定需要被滿足的條件。

4.1.2 適用於具參數估測之控制系統的振動式陀螺儀設計

陀螺儀設計如 1.5 節所列需要兩軸皆有感測輸出與控制輸入的配置以外，由狀態觀察性檢驗得知，若系統動態具有兩個(含)以上的頻率，必可使列向量線性獨立，但在行向量上將受到限制，因此為了符合正確參數估測的條件，本論文也提出適用於此類具參數估測的控制系統所使用的陀螺儀設計。

在質量已知、感測電路無瑕疵的狀況下，若陀螺儀為單一質量塊設計，由 W_{isp} 的第一行(對應 Ω_z)與最後三行(對應 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})可知，若結構耦合阻尼 $d_{xy} \neq d_{yx}$ ，則最後一行將會分成兩行(第七與第八行)而成為：

$$\begin{bmatrix} -\ddot{y} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -y^{(5)} \\ 0 & -\ddot{x} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -x^{(4)} & 0 \end{bmatrix}^T$$

如此一來第一行將成為此第七與第八行的線性組合，因此這五個在系統動態中同為速度

項(\dot{x} 與 \dot{y})係數所對應的行向量，在觀察性矩陣中產生的秩最多也僅會有 4，如此將使得 W_{isp} 非滿秩。在非滿秩的情況下，並非僅代表此八個參數(含 d_{yx})只能估測到七個，而是所有參數都將無法正確估測。依此特性可以了解，若要使用參數估測的方式來控制陀螺儀系統，單一質量塊設計下之陀螺儀必須儘可能讓 $d_{xy} = d_{yx}$ ，否則將無法正確估測出所有系統參數。由於兩軸之質量大小一樣，因此在還原成歸一化之前系統實際的阻尼係數後，可得到同樣的結論，即式(3.1)中的 $d'_{xy} = d'_{yx}$ 。透過此觀察也可以知道，除了質量塊以外，系統參數估測極限為：兩軸位置項的係數($k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, k_{yx}$)與速度項的係數($d_{xx}, d_{yy}, d_{xy}, d_{yx}, \Omega_z$)中，各四個系統參數。

在陀螺儀為退耦式雙質量塊設計中，為了更清楚觀察系統特性，可以由質量已知、感測電路無瑕疵陀螺儀系統的觀察性矩陣得知。以式(3.3)作觀察性驗證，在未假設新參數 Ω_r 之下，以速度回授為例，觀察性矩陣為：

$$W_{emp2} = \begin{bmatrix} 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\ddot{y} & -\dot{x} & 0 & -\dot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 \\ -2\ddot{x} & 0 & -\dot{y} & 0 & -\dot{x} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} \\ 2\frac{m_1}{m_1+m_2}y^{(3)} & -\ddot{x} & 0 & \ddot{y} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & 0 \\ -2x^{(3)} & 0 & -\ddot{y} & 0 & -\ddot{x} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(3)} \\ 2\frac{m_1}{m_1+m_2}y^{(4)} & -x^{(3)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & 0 \\ -2x^{(4)} & 0 & -y^{(3)} & 0 & -x^{(3)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(4)} \\ 2\frac{m_1}{m_1+m_2}y^{(5)} & -x^{(4)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(5)} & 0 & -y^{(5)} & 0 \\ -2x^{(5)} & 0 & -y^{(4)} & 0 & -x^{(4)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & -x^{(5)} \\ 2\frac{m_1}{m_1+m_2}y^{(6)} & -x^{(5)} & 0 & -y^{(5)} & 0 & -x^{(6)} & 0 & -y^{(6)} & 0 \end{bmatrix}$$

由上式可觀察到， W_{emp2} 的第一行會是第八行與第九行的線性組合，因此在 $d_{xy} \neq d_{yx}$ 的狀況下，系統為不可觀察，換句話說，當退耦式設計中仍存在跨軸阻尼係數時， d_{xy} 與 d_{yx} 必須相等(由前面討論出的系統估測極限也可知，如式(3.3)的系統模型中，應可再估測出一速度項係數)。在還原成歸一化之前系統實際阻尼係數後，可以歸納出，在退耦式雙質量塊設計下陀螺儀的阻尼係數必須僅可能設計與質量塊的比例相同，亦即

$\frac{d'_{xy}}{d'_{yx}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ ，其中 d'_{xy} 即在式(3.3)中 x 軸可能存在的耦合阻尼係數，而 d'_{yx} 即為式(3.3)

中 y 軸可能存在的耦合阻尼係數。

然而，如第一章的介紹，影響阻尼係數的因素很多，因此在實際系統中僅能大致估計並無法精確得知，這樣的狀況下要製作出兩跨軸阻尼係數相等的振動式陀螺儀幾乎不可能達成。為估計跨軸阻尼係數不相等對於角速度估測可能造成的影響，以式(3.13)的系統模型為例，速度項 \dot{q}_s 的係數為：

$$D_s + 2\Omega = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} - 2\Omega_z \\ d_{yx} + 2\Omega_z & d_{yy} \end{bmatrix}$$

依前述系統估測極限來看，除了主軸的阻尼係數(d_{xx} 與 d_{yy})外，僅能再正確地估測出兩個參數，但若 $d_{xy} \neq d_{yx}$ ，則非對角線(Off-diagonal)項中則會有三個未知數。以求解方程式的角度解釋，若兩不相等的跨軸阻尼係數的關係為 $d_{yx} = (1 + \delta)d_{xy}$ (其中 δ 代表不匹配程度)，假設 $d_{xy} - 2\Omega_z = c_1$ 、 $d_{yx} + 2\Omega_z = c_2$ ，則角速度值受不匹配程度的影響為：
 $\Omega_z = \frac{(c_2 - c_1(1 + \delta))}{(4 + 2\delta)}$ ，為了進一步觀察 δ 對角速度造成的影響，可以再對 δ 展開：

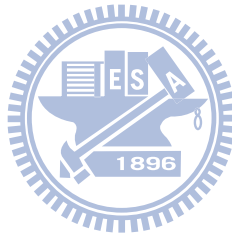
$$\Omega_z \cong \left(\frac{c_2 - c_1}{4} \right) - \left(\frac{c_2 + c_1}{8} \right) \delta + \left(\frac{c_2 + c_1}{16} \right) \delta^2 - \left(\frac{c_2 + c_1}{32} \right) \delta^3 + H.O.T.$$

其中 $H.O.T.$ 為高次項。由上式可知，第一項即為無 δ (即 $d_{yx} = d_{xy}$) 下 Ω_z 的解；在一般的對稱結構設計下，兩跨軸阻尼係數差距不至於過大，假設差距在 10% 以內 (即 $|\delta| \leq 0.1$)，則第三項以後可以忽略，而角速度估測的誤差與 δ 呈正比。此外，將第二項除以第一項並代入實際系統參數後可得：

$$\frac{-\left(\frac{c_2 + c_1}{8} \right) \delta}{\left(\frac{c_2 - c_1}{4} \right)} = -\frac{d_{xy} + d_{yx}}{4\Omega_z + d_{yx} - d_{xy}} \cdot \frac{\delta}{2}$$

上式與一般的理解相同，在角速度較大或是阻尼項較小的情況下，都可以降低因 $d_{xy} \neq d_{yx}$ 所造成的角速度估測誤差。

在[19]的研究中指出，要製作出高性能的微機電陀螺儀，在封裝中維持適度的真空是關鍵之一；在[4]中亦透過提高真空度企圖獲取更高的量測精度。然而，真空度愈高則阻尼係數愈小，而相對的品質因子也愈大，由 2.2.1 節的討論可知，這將牽涉到感測敏感度與感測頻寬之間的權衡設計。但本論文採用參數估測的方式作角速度量測，感測頻寬將不受系統的時間常數所影響，因此在本控制系統中，陀螺儀的設計宜採品質因子較大的設計，不僅可提高感測敏感度，也可降低跨軸阻尼不匹配的影響。以質量塊質量為 $1.8 \times 10^{-7} \text{ kg}$ 、兩軸共振頻率皆為 3.2 kHz 的振動式陀螺儀為例，假設跨軸阻尼的大小為主軸阻尼的 $\frac{1}{100}$ 且 d_{yx} 相對於 d_{xy} 有 10%(即 $|\delta| = 0.1$) 的偏差，若此陀螺儀要達到 $0.1^\circ/\text{sec.}$ 的估測精度，則兩跨軸阻尼必須小於 $3.96 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ ，因此兩主軸相對應的品質因子約為 10053 與 9139，此狀況下角速度估測精度受兩跨軸阻尼不匹配的影響為 $\pm 0.029^\circ/\text{sec.}$ 。



4.1.3 觀察器增益設計

如同一般控制器增益的設計，設計式(4.5)的觀察器增益也可以有許多選擇，這也是本方法的主要優點之一。如卡曼濾波器(Kalman filter)[36]與順滑模態法(Sliding mode method)[37]等，都可依不同的需求選擇不同的演算法來設計。由於以里昂普諾夫法為基礎的設計簡單，也易於證明收斂性，一般最常被用來設計控制或觀察器；卡曼濾波器則是最佳化設計的一種，有收斂速度快、具抑制雜訊等優點。接下來在假設感測介面與電路無瑕疵的情況下，使用本論文提出之新式設計方法，此方法將可使用里昂普諾夫直接法來證明其收斂性；而在整合模型的估測中，將使用擴增型卡曼濾波器的演算法來設計觀察器增益，以獲取其雜訊抑制的特點；再搭配「記憶褪去法」(Fading memory)的技巧設計觀察器，則可增加其對時變參數估測的能力。

4.1.3.1 新式觀察器增益設計

在質量塊未知而感測介面與電路無瑕疵的情況下，針對單一質量塊與退耦式雙質量塊設計下的狀態觀察器如(4.4)的標準型式，由於振動質量塊的質量大小未知， B_{tm} 與 B_{em} 也是未知，因此在觀察器的表示中也加入上標(Hat)以代表估測值。以本論文提出之新式設計方法，可以得到以下觀察器增益矩陣：

$$L_{tm}^T = \begin{bmatrix} L_{tm1}^T & L_{tm2}^T \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$L_{em}^T = \begin{bmatrix} L_{em1}^T & L_{em2}^T \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

其中

$$L_{tm1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_{tm31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{tm42} \end{bmatrix}$$

$$L_{em1}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_{em31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{em42} \end{bmatrix}$$

$$L_{tm2}^T = \begin{bmatrix} 2\dot{\hat{y}} & -\hat{x} & 0 & -\hat{y} & -\hat{x} & 0 & -\dot{\hat{y}} & u_{tx} \\ -2\dot{\hat{x}} & 0 & -\hat{y} & -\hat{x} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & u_{ty} \end{bmatrix}$$

$$L_{em2}^T = \begin{bmatrix} 2\dot{\hat{y}} & 0 & -\hat{x} & 0 & -\hat{y} & 0 & -\dot{\hat{x}} & 0 & u_{ex} & 0 \\ 0 & -2\dot{\hat{x}} & 0 & -\hat{y} & 0 & -\hat{x} & 0 & -\dot{\hat{y}} & 0 & u_{ey} \end{bmatrix}$$

上式中之 L_{tm1}^T 與 L_{em1}^T 是用來估測質量塊動態的增益； L_{tm2}^T 與 L_{em2}^T 則是用來估測系統參數的增益。其中 l_{tm31} 與 l_{tm42} 可以是任意大於零的值，而 l_{em31} 與 l_{em42} 除了須大於零以外，為了進一步確保的系統收斂性，還有額外的考量，將在稍後系統穩定性分析中討論。由以上的設計中也可以發現，估測質量塊動態的增益與傳統控制器或觀察器增益設計一樣，其回授增益為定值，但在系統參數估測時，則得到「變動」的增益，如 L_{tm2}^T 與 L_{em2}^T 所示，其中增益值與估測系統所估測到的系統動態有關。關於此設計的收斂性，將在下一章介紹完回授控制設計後一併證明。此外，在這個例子中，觀察器設計將需要質量塊的速度

資訊，因此 H_{tm} 和 H_{em} 為速度回授，即：

$$H_{tm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & [0]_{2 \times 8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & [0]_{2 \times 10} \end{bmatrix}, \quad H_{em} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & [0]_{2 \times 10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & [0]_{2 \times 10} \end{bmatrix}$$

另外，對於簡化模型(即質量假設為已知)的設計，僅須要將觀察器中對應系統參數的增益修正如下即可：

$$L_{ts2}^T = \begin{bmatrix} 2\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} \\ -2\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} \end{bmatrix}$$

4.1.3.2 應用擴增型卡曼濾波器(EKF)之觀察器設計

在本論文建構的整合模型中，假設質量塊未知且感測介面與電路有瑕疵，而實際的量測訊號中除了誤差訊號外，亦免不了雜訊的存在，因此本例使用卡曼濾波器的演算法來設計狀態觀察器的增益。卡曼濾波器適用於線性系統的設計，但由於本論文將所有系統參數皆建構為系統狀態，因此此系統為狀態兩兩相乘的非線性系統，針對非線性系統，則需要改採擴增型卡曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)[36]的演算法來設計。

根據[36]，EKF 有一套演算流程以計算出觀察器增益。在使用 EKF 之前，連續系統必須要先被離散化(Discretization)，而所謂的預測方程式(Prediction equation)則可以表示如下：

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1}^- &= f(k, \hat{X}_k, U_k) \\ P_{k+1}^- &= A_k P_k A_k^T \\ A_k &= \partial f_k / \partial X \big|_{X=\hat{X}_k} \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 k 代表第 k 個時間； P_k 則定義為系統狀態估測的共變異矩陣(Covariance matrix) $E[(\hat{X}_k - X_k)(\hat{X}_k - X_k)^T]$ ； A_k 即是在 $X = \hat{X}_k$ 線性化的系統。接著修正方程式(Correction equation)可以表示如下：

$$\begin{aligned}
L_{k+1} &= P_{k+1}^- H^T (H P_{k+1}^- H^T + R_{k+1})^{-1} \\
P_{k+1} &= (I - L_{k+1} H) P_{k+1}^- \\
\hat{X}_{k+1} &= \hat{X}_{k+1}^- + L_{k+1} \cdot (Z_{k+1} - \hat{Z}(k, \hat{X}_{k+1}^-))
\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中 L_{k+1} 即是設計出來的觀察器增益； \hat{X}_{k+1} 為計算出來的新估測值； R 則為量測雜訊的共變異數矩陣。以式(4.13)與(4.14)反覆疊代運算，將在每個時間點得到不同的 L_{k+1} ，而計算出來的 \hat{X}_{k+1} 將逐漸趨近於 X 。其詳細流程如下圖所示：

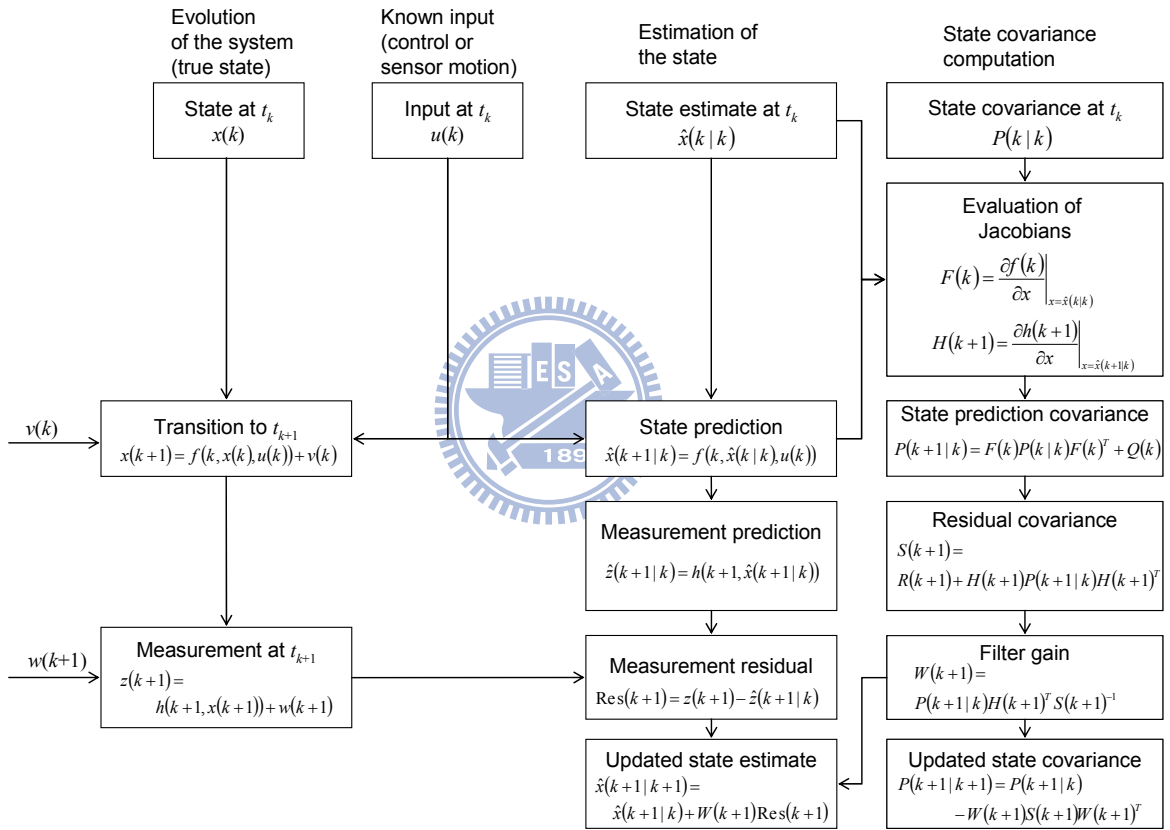


圖 4.4：擴增型卡曼濾波器(EKF)運算流程圖[36]。

依上述程序，可以套用到(4.5)的狀態觀察器進而計算出 L_t 與 L_e 。在本例中 H_t 與 H_e 則採位移回授，如式(4.1)與(4.2)中所示。

4.1.3.3 時變系統參數估測

在以上所建立的系統模型中，皆假設系統參數為定值，但實際操作上，系統參數並

非永久的維持固定。例如：IC 封裝有漏氣或環境溫度改變皆可能造成阻尼的改變、結構因長時間振動出現劣化也有可能造成彈性係數的變動等。為解決這個問題，可以將該時變參數視為模型誤差，而採取一般在卡曼濾波器的演算法中，為了補償模型誤差所加入的修正方法，即所謂的記憶褪去技巧[36]。

在[38]中針對卡曼濾波器的應用問題與相關的改善方法有回顧與介紹，其中提到一開始的卡曼濾波器由於適用於線性系統的設計，在實際使用上，其模型誤差將可能因為操作時間拉長造成誤差累積，進而使整個系統產生發散的問題。其中一種解決方法，即是限制卡曼濾波器的「記憶」，將系統過去的歷史資訊權重(Weighting)降低，以降低長時間操作下的累積誤差。若系統有不可預測的跳躍或飄移，甚至可以動態的改變記憶長度以調整估測的特性。

依此技巧，被視為模型錯誤的變動系統參數，可利用此記憶褪去的技巧來估測。記憶褪去方法的使用，需要在式(4.13)的預測方程式中引進遺忘參數(Forgetting factor)，將時間越久以前的系統資訊乘上較小的權值，而越新的資訊則相對有較大的權值，以利系統追上變動。因此系統狀態的共變異數矩陣修正如下：

$$P_{k+1}^- = \lambda_{k+1} A_k P_k A_k^T \quad (4.15)$$

其中 λ 即為遺忘參數。遺忘參數的選擇可由以下方法選擇：

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max\{1, \text{trace}(N) / \text{trace}(M)\} \\ M &= H A_k P_k A_k^T H^T \\ N &= H P_{k+1}^- H^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

另外在[38]亦有介紹不同的方法，但這些都是以理論方式推導出來的選擇方式，實際在應用的時候，可以藉由模擬結果或實作中手動微調。而在配合適當的遺忘參數的設計下，此狀態觀察器將可以增加擴增型卡曼濾波器對變動系統參數的估測能力。

4.2 回授控制器設計

利用上一個部份所介紹的狀態觀察器，在實際應用中僅需量測質量塊位移或速度，就可以透過觀察器得到其他未量測的系統動態以及未知的系統參數。這一節更要進一步使用這些估測到的系統狀態來作回授控制。本論文以狀態觀察器的技巧設計回授控制的優點，除了可以得利於不同觀察器設計方法的優點外，本方法更提供使用者靈活的選擇回授控制訊號，因此大幅的提高了系統設計的彈性。由觀察性驗證中，更幫助我們了解系統控制回授必須要確保系統動態有兩個以上的頻率與一個非系統狀態回授的訊號。系統動態會受初使狀態、系統參數、與控制輸入影響，因此確保系統動態有兩個以上的頻率的方法將可以有很多選擇，如試圖維持系統動態不受阻尼能量消耗所影響，讓系統本身因系統參數耦合構成兩個以上頻率的動態；或將原本系統的動態補償成回授控制訊號中所設定的兩個頻率皆可。因此本節將提出確保系統動態有兩個以上頻率的不同控制方法。

另外，以 4.1.3.1 節所設計的狀態觀察器為例，其中系統參數估測的部份為 $L_{tm2} \cdot (Z_{tm} - \hat{Z}_{tm})$ 與 $L_{em2} \cdot (Z_{em} - \hat{Z}_{em})$ ，此與適應控制法中的參數適應律(Adaptation law)類似，參數估測所需的「刺激」(Excitation)將由 L_{tm2} 與 L_{em2} 提供。然而，由式(4.11)與(4.12)的設計又可知道， L_{tm2} 與 L_{em2} 只與觀察器的「估測動態」有關。因此，此處估測動態對於觀察器中參數估測的部分，類似參考模型對於適應控制中參數適應律的作用，換句話說，估測動態(\hat{x} , $\dot{\hat{x}}$, \hat{y} , $\dot{\hat{y}}$)將直接影響參數估測的效能。以下提出幾個可能的設計，皆可達成此目標。

4.2.1 參考模型法

利用狀態觀察器估測出來的系統參數，搭配適當的回授控制設計亦可如適應控制的方法一樣實現參考模型控制。針對兩種不同的設計，控制輸入可以設計成：

$$U_t = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} \hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{xy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xx}\hat{x} + \hat{k}_{xy}\hat{y} - k_{Ax}\hat{x} - 2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{y}} + \eta_x \\ \hat{d}_{xy}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xy}\hat{x} + \hat{k}_{yy}\hat{y} - k_{Ay}\hat{y} + 2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{x}} + \eta_y \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$U_e = \begin{bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_x} \left(\hat{d}_{xx} \dot{\hat{x}} + \hat{k}_{xx} \hat{x} + \hat{k}_{xy} \hat{y} - k_{Ax} \hat{x} - 2\hat{\Omega}_r \dot{\hat{y}} + \eta_x \right) \\ \frac{1}{\hat{\sigma}_y} \left(\hat{d}_{yy} \dot{\hat{x}} + \hat{k}_{yx} \hat{x} + \hat{k}_{yy} \hat{y} - k_{Ay} \hat{y} + 2\hat{\Omega}_z \dot{\hat{x}} + \eta_y \right) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

其中所有 (\bullet) 皆為狀態觀察器所估測出來的系統狀態； k_{Ax} 與 k_{Ay} 即為參考模型的參數，若要使系統動態存在有兩個以上的頻率，則使用者可以將其設計成 $k_{Ax} \neq k_{Ay}$ ，而 $k_{Ax} = \omega_1^2$ 與 $k_{Ay} = \omega_2^2$ ，則系統的估測動態會變成：

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}} + \omega_1^2 \hat{x} &= \eta_x \\ \ddot{\hat{y}} + \omega_2^2 \hat{y} &= \eta_y \end{aligned} \quad (4.19)$$

上式與[8]提出的適應控制法中之參考模型形式類似，然而，在[8]中是在假設質量塊已知的情況下設計，因此控制輸入中將不需要輔助控制訊號 η_x 與 η_y ，以上的估測動態等號右邊即為零，與適應控制法中之參考模型相同。而在等號右邊為零的情況下，上式的解析解為：

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 \cos(\omega_1 t) \\ \hat{y}(t) &= y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 x_0 、 y_0 與 φ 的大小由初值決定。因此，只要回授控制中之 $k_{Ax} \neq k_{Ay}$ ，就算沒有輔助控制訊號，也可以確保系統估測動態中含有兩個頻率，因此該回授控制下，包含角速度在內的所有系統參數皆為可觀察。

需要注意的是，本設計的控制輸入中系統動態皆以估測動態取代，以估測動態取代須透過量測取得的系統動態的優點是：一、若透過量測動態含有雜訊或誤差，以估測動態回授可以提供補償過後正確的動態值；二、若推導出來的觀察器僅需要位移回授或速度回授，則實際架構不需要為了控制需求而多增加額外的量測電路。

4.2.2 系統能量控制

由於陀螺儀的使用必需主動提供持續性的振動，但在實際的物理系統中，必定受到

阻尼的影響而有能量消耗。本論文採用系統參數估測的方式，但在此回授控制下，若阻尼項過大且估測速度過慢，可能的風險是在該回授控制尚未完全補償阻尼之前，系統即因能量快速的消耗而停止振動。雖然在上一節的控制設計中包含了輔助訊號，若系統本身因初始狀態造成的動態因能量消耗而消失，實際動態中仍有輔助訊號，但在僅剩一個頻率的情況下，系統也將成為不可觀察，為了避免這種狀況，可以在系統中加入能量控制的概念。

在[27]與[33]中，系統能量的定義如下：

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\omega_o^2(x^2 + y^2) \quad (4.21)$$

其中 ω_o 為兩軸實際的振動頻率，但在本例中，可以如上一節一樣將質量塊的振動控制到指定的頻率上，因此上式的第二項可以改定義成： $\frac{1}{2}k_{Ax}x^2 + \frac{1}{2}k_{Ay}y^2$ ，此與[28]中使用補償過後的振動頻率作為能量定義值的作法類似。

加入能量控制的概念後，除了回授控制的設計必定有修正外，也將影響觀察器的設計，以單一質量塊為例，式(4.11)中設計的觀察器增益必須稍作修正。為了後續的穩定性證明，須在系統狀態中多加一個代表能量的狀態，其在 $f_{tm}(X_{tm})$ 中對應的關係應為 \dot{E}_0 ，而在 $f_{tm}(\hat{X}_{tm})$ 中對應的關係為 \dot{E} ， E_0 為指定的能量準位， E 為實際系統能量，能量變化又可以定義為 $\tilde{E} = E_0 - E$ ，由於要維持系統能量不變，因此設定能量準位為定值，所以 $\dot{\tilde{E}} = -\dot{E}$ 。需要注意的是，本方法並不是透過觀察器來估測能量變化，而是即時量測質量塊的位移與速度來計算系統能量，為了計算系統能量而必須同時量測質量塊的速度與位移，因此與量測矩陣也必須修正。觀察器修正如下：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_{tm} &= f_{tm}(\hat{X}_{tm}, U_{tE}) + L_{tmE}(Z_{tmE} - \hat{Z}_{tmE}) + L_E \\ \hat{Z}_{tmE} &= H_{tmE} \hat{X}_{tm} \end{aligned} \quad (4.22)$$

其中

$$H_{tmE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0]_{4 \times 9}$$

以本論文的新式設計法可以推導出觀察器增益矩陣如下：

$$L_{tmE}^T = \begin{bmatrix} L_{tmE1}^T & L_{tmE2}^T \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

其中

$$L_{tmE1}^T = \begin{bmatrix} l_{E11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{E22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{E33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{E44} \end{bmatrix}$$

$$L_{tmE2}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & u_{tEx} & 0 \\ -2\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & 0 & -\dot{\hat{y}} & -\dot{\hat{x}} & u_{tEy} & 0 \end{bmatrix}$$

以上 l_{E11} 、 l_{E22} 、 l_{E33} 與 l_{E44} 可以是任意大於零的值。而 L_E 則可推導如下：

$$L_E^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{x}\dot{\hat{x}}\tilde{E} & \dot{\hat{y}}\dot{\hat{y}}\tilde{E} & (\dot{\hat{x}}\dot{\hat{y}} + \dot{\hat{x}}\dot{\hat{y}})\tilde{E} & \dot{\hat{x}}^2\tilde{E} & \dot{\hat{y}}^2\tilde{E} & 2\dot{\hat{x}}\dot{\hat{y}}\tilde{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

除了狀態觀察器外，對應的控制輸入也同時修正為：

$$U_{tE} = \begin{bmatrix} u_{tEx} \\ u_{tEy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} \hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{xy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xx}\hat{x} + \hat{k}_{xy}\hat{y} - k_{Ax}\hat{x} - 2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{y}} + \eta_x + \tilde{E}\dot{\hat{x}} \\ \hat{d}_{xy}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xy}\hat{x} + \hat{k}_{yy}\hat{y} - k_{Ay}\hat{y} + 2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{x}} + \eta_y + \tilde{E}\dot{\hat{y}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

以上式控制後，系統的估測動態會變成：

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}} + k_{Ax}\hat{x} &= \eta_x + \tilde{E}\dot{\hat{x}} \\ \ddot{\hat{y}} + k_{Ay}\hat{y} &= \eta_y + \tilde{E}\dot{\hat{y}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

在[27]的實驗中， \tilde{E} 仍會有穩態誤差，而其誤差來源是系統能量定義中的 ω_o 與實際不符。但在本例中，系統能量定義是用控制過後的頻率取代，將可降低該穩態誤差，進而

使式(4.25)接近式(4.19)的結果，如此一來，不但可以控制系統的振動頻率，又可以避免估測過程中能量損耗太快的風險。此時的估測動態，與前一節推導一樣，在 $k_{Ax} \neq k_{Ay}$ 的控制下，必可確保有兩個頻率。

然而，在微機電系統中，阻尼項通常不會太大，一般的微機電陀螺儀阻尼比(Damping ratio)大多在 10^{-3} 以下，因此加入系統能量控制對系統效能影響並不顯著，反而因能量控制的需要，必需在量測端分別加入量測位移與速度的兩組電路，將增加系統複雜度，因此在實現上將可視需求決定納入與否。

4.2.3 替代系統能量控制—阻尼補償

除了上述兩種控制方法，本論文也提出另一種更簡單的方法達成陀螺儀的控制需求，也就是只使用狀態觀察器中的估測阻尼來補償系統動態，控制輸入可以設計成：

$$U_t = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} \hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{xy}\dot{\hat{y}} + \eta_x \\ \hat{d}_{xy}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \eta_y \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$U_e = \begin{bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_x} (\hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \eta_x) \\ \frac{1}{\hat{\sigma}_y} (\hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \eta_y) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

以單一質量塊設計為例，系統的估測動態將會變成：

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}} + \hat{k}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{k}_{xy}\dot{\hat{y}} &= 2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{y}} + \eta_x \\ \ddot{\hat{y}} + \hat{k}_{xy}\dot{\hat{x}} + \hat{k}_{yy}\dot{\hat{y}} &= -2\hat{\Omega}_z\dot{\hat{x}} + \eta_y \end{aligned} \quad (4.29)$$

上式在兩軸共振頻率不匹配($\hat{k}_{xx} \neq \hat{k}_{yy}$)時，估測動態與參考模型法一樣必定至少有兩個頻率。若兩主軸頻率恰巧相同($\hat{k}_{xx} = \hat{k}_{yy}$)，但仍存在耦合彈性係數下，以阻尼補償的方法控制的系統動態仍將存在兩個頻率。以單一質量塊設計為例，以初值 $\hat{x}(0) = A_{mx}$ 、 $\hat{y}(0) = 0$ 與 $\dot{\hat{x}}(0) = \dot{\hat{y}}(0) = 0$ ，且 $\hat{k}_{xx} = \hat{k}_{yy} = k$ ，上式的解析解為：

$$\begin{aligned}
\hat{x} = & \left(\frac{A_{mx}}{2} - \frac{\hat{\Omega}_z^2 A_{mx}}{\xi} \right) \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{A_{mx}}{2} + \frac{\hat{\Omega}_z^2 A_{mx}}{\xi} \right) \cos(\omega_2 t) \\
& + \left(\frac{\hat{k}_{xy} \hat{\Omega}_z A_{mx}}{\xi \omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) - \left(\frac{\hat{k}_{xy} \hat{\Omega}_z A_{mx}}{\xi \omega_2} \right) \sin(\omega_2 t) \\
\hat{y} = & \left(\frac{\hat{k}_{xy} A_{mx}}{2\xi} \right) \cos(\omega_1 t) - \left(\frac{\hat{k}_{xy} A_{mx}}{2\xi} \right) \cos(\omega_2 t) \\
& - \left(\frac{k \hat{\Omega}_z A_{mx}}{\xi \omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) + \left(\frac{k \hat{\Omega}_z A_{mx}}{\xi \omega_2} \right) \sin(\omega_2 t)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{k + 2\hat{\Omega}_z^2 + \sqrt{\hat{k}_{xy}^2 + 4\hat{\Omega}_z^2(k + \hat{\Omega}_z^2)}} \\
\omega_2 &= \sqrt{k + 2\hat{\Omega}_z^2 - \sqrt{\hat{k}_{xy}^2 + 4\hat{\Omega}_z^2(k + \hat{\Omega}_z^2)}} \\
\xi &= \sqrt{\hat{k}_{xy}^2 + 4\hat{\Omega}_z^2(k + \hat{\Omega}_z^2)}
\end{aligned}$$

由上式可知，當系統耦合彈性係數或轉動角速度不為零時， $\omega_1 \neq \omega_2$ ，系統估測動態就會有兩個頻率。由此可以看出，在以參數估測為基礎的架構下，耦合彈性係數反而會對角速度量測有所幫助，因為產生的耦合動態會提供參數估測更多的頻率刺激。此外，不同於參考模型法，在不補償科氏加速度項的狀況下，理論上角速度也會引起兩個頻率，有利於觀察器正確地估測到轉動角速度。不過需要注意的是，在微機電陀螺儀中，彈性係數與角速度的大小通常有一千萬倍(10^8)以上的差距，因此僅透過角速度產生的頻率差來估測參數，在實際操作或數值模擬上都不容易實現。另外，由以上觀察可知，控制後的系統動態保留了角速度資訊，因此在適當的改良控制法則後，將可望使用本方法控制陀螺儀動態以達成直接角度量測，這個部份將在下一章詳述。

使用式阻尼補償來控制系統可能產生的問題如前一節所述，若阻尼項過大且估測速度過慢，將可能來不及補償系統因阻尼造成的能量消耗，為避免這個問題，實現上也可以視需要加入上一節的能量控制，方法與前述類似，在此不再重複說明。

4.3 系統穩定性分析

一般的適應控制是將參數估測與系統控制共同透過一里昂普諾夫候選函數證明穩定性，而本論文提出的新式控制系統設計，本論文以不同的方法設計，但同樣可以透過里昂普諾夫直接法證明其收斂性與系統穩定性。

◆ 質量未知、感測電路無瑕疵之陀螺儀系統—單一質量塊設計

依單一質量塊設計的模型，可以得到以下的估測誤差動態(Error dynamics)為：

$$\dot{\underline{e}} = -(LH + \tilde{F})\underline{e} \quad (4.31)$$

其中

$$\underline{e}^T = [\tilde{e}_1^T \quad \tilde{e}_2^T \quad \tilde{\rho}_{tm}^T]$$

$$\tilde{e}_1^T = [e_x \quad e_y], \quad \tilde{e}_2^T = [\dot{e}_x \quad \dot{e}_y], \quad \tilde{\rho}_{tm}^T = [e_{\Omega_z} \quad e_{k_{xx}} \quad e_{k_{yy}} \quad e_{k_{xy}} \quad e_{d_{xx}} \quad e_{d_{yy}} \quad e_{d_{xy}} \quad e_{\sigma}]$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{xx} & k_{xy} & d_{xx} & d_{xy} - 2\Omega_z & -2\dot{y} & \hat{x} & 0 & \hat{y} & \dot{\hat{x}} & 0 & \dot{\hat{y}} & -u_{tx} \\ k_{xy} & k_{yy} & d_{xy} + 2\Omega_z & d_{yy} & 2\dot{\hat{x}} & 0 & \hat{y} & \dot{\hat{x}} & 0 & \dot{\hat{y}} & \dot{\hat{x}} & -u_{ty} \\ [0]_{8 \times 12} & & & & & & & & & & & [0]_{12 \times 12} \end{bmatrix}$$

選擇里昂普諾夫候選函數如下：

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T P \underline{e} \quad (4.32)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & d_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} & d_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [0]_{4 \times 8} \\ [0]_{8 \times 4} & [I]_{8 \times 8} \end{bmatrix}$$

若 $k_{xx} \cdot k_{yy} > k_{xy}^2$ 時， P 為正定(Positive definite)。使用式(4.11)的觀察器增益，里昂普諾夫候選函數的一次微分將可大幅的簡化成：

$$\dot{V} = -\tilde{e}_2^T \begin{bmatrix} d_{xx} + l_{m31} & 0 \\ 0 & d_{yy} + l_{m42} \end{bmatrix} \tilde{e}_2^T \quad (4.33)$$

上式為半負定，這將表示里昂普諾夫候選函數中的項次皆為有限值，即 \underline{e} 中的所有值皆為有限值，而根據式(4.30)， $\dot{\underline{e}}$ 亦為有限值。再對式(4.32)作一次微分可以得到：

$$\ddot{V} = -2\dot{\underline{e}}^T (LH + \tilde{F})^T P \underline{e} - \underline{e}^T (\dot{L}H + \dot{\tilde{F}})^T P \underline{e} \quad (4.34)$$

由於上式等號右邊的每一項都是有限值，因此 \ddot{V} 也是有限值。根據巴氏的引理(Barbalat's lemma)[39]，當時間趨近於無限大時，可以得到 $\dot{V} \rightarrow 0$ ，因此：

$$\|\tilde{e}_2\| \rightarrow 0$$

在 \tilde{e}_2 中的項次皆會收斂到零的狀況下，式(4.31)可以化簡併整理成以下形式：

$$K_{tm} \tilde{e}_1 = -M_{tm}^T (\hat{x}, \hat{y}, \dot{\hat{x}}, \dot{\hat{y}}) \tilde{\rho}_{tm} \quad (4.35)$$

其中

$$K_{tm} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

$$M_{tm}^T = \begin{bmatrix} -2\dot{\hat{y}} & \hat{x} & 0 & \hat{y} & \dot{\hat{x}} & 0 & \dot{\hat{y}} & -u_{tx} \\ 2\dot{\hat{x}} & 0 & \hat{y} & \hat{x} & 0 & \dot{\hat{y}} & \dot{\hat{x}} & -u_{ty} \end{bmatrix}$$

由於上式的每一項皆為有限值，因此積分後可以得到：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{tm} \tilde{e}_1 dt &= -\int_0^\infty M_{tm}^T \tilde{\rho}_{tm} dt \\ &= -\overline{M}_{tm}^T \tilde{\rho}_{tm} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \overline{M}_{tm}^T \dot{\tilde{\rho}}_{tm} dt \end{aligned} \quad (4.36)$$

其中

$$\overline{M}_{tm}^T = \int M_{tm}^T dt$$

M_{tm} 由估測動態(\hat{x} , \hat{y} , $\dot{\hat{x}}$, $\dot{\hat{y}}$)與控制輸入 U_t 組成，由上一節的控制設計，皆為單純的弦波訊號，因此 \overline{M}_{tm} 為有限值，利用三角不等式(Triangle inequality)可以得到：

$$\left\| \int_0^\infty K_{tm} \tilde{e}_1 dt \right\| \leq \left\| \overline{M}_{tm}^T \tilde{\rho}_{tm} \right\|_0^\infty + \left\| \overline{M}_{tm}^T \right\| \cdot \left\| \tilde{\rho}_{tm} \right\|_0^\infty \quad (4.37)$$

由於上式等號右邊皆為有限值，因此可知：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{e}_1 \right\| \rightarrow 0$$

再由式(4.34)可以得到：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{tm}^T \tilde{\rho}_{tm} \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

根據上式， $\tilde{\rho}_{tm}$ 中的每一項都要收斂到零的必要條件為 M_{tm} 的「列」必須線性獨立，以求解方程式的角度來看， M_{tm} 的「列向量」的組合僅能有唯一零解。而這個條件可以透過以下矩陣的秩是否等於8來檢驗 $\tilde{\rho}_{tm}$ 的收斂性：

$$\begin{bmatrix} M_{tm} & \dot{M}_{tm} & \ddot{M}_{tm} & \dots \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

以上的矩陣與上一節中針對單一質量塊的設計，在位移回授下，可得到的觀察性矩陣的轉置 W_{tmp1}^T 類似。因此滿秩的條件也是需要兩個以上的頻率，並須在控制訊號中加入輔助訊號 η_x 與 η_y 以確保質量塊估測的正確性。

因此，使用式(4.11)的觀察器增益將可以正確地估測到所有系統狀態，即 $\underline{e} \rightarrow 0$ 。在使用上一節所介紹的任何一個控制設計下，則可以將系統動態控制成穩定的弦波，因此系統可證明為穩定。

◆ 質量未知、感測電路無瑕疵之陀螺儀系統—退耦式雙質量塊設計

依退耦式雙質量塊設計的模型，可以得到以下的估測誤差動態(Error dynamics)為：

$$\dot{\underline{e}} = -(LH + \tilde{F})\underline{e} \quad (4.40)$$

其中

$$\underline{e}^T = [\tilde{e}_1^T \quad \tilde{e}_2^T \quad \tilde{\rho}_{em}^T]$$

$$\tilde{e}_1^T = [e_x \quad e_y], \quad \tilde{e}_2^T = [\dot{e}_x \quad \dot{e}_y], \quad \tilde{\rho}_{em}^T = [\Omega_r \quad \Omega_z \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad k_{yx} \quad d_{xx} \quad d_{yy} \quad \sigma_x \quad \sigma_y]$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{xx} & k_{xy} & d_{xx} & -2\Omega_r & -2\dot{y} & 0 & \hat{x} & 0 & \hat{y} & 0 & \dot{\hat{x}} & 0 & -u_{ex} & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 2\Omega_z & d_{yy} & 0 & 2\dot{\hat{x}} & 0 & \hat{y} & 0 & \hat{x} & 0 & \dot{\hat{y}} & 0 & -u_{ey} \\ [0]_{8 \times 14} & & & & & & & & & & & & & [0]_{14 \times 14} \end{bmatrix}$$

同樣選擇以下的里昂普諾夫候選函數：

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T P \underline{e} \quad (4.41)$$



其中

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [0]_{4 \times 10} \\ [0]_{10 \times 4} & [I]_{10 \times 10} \end{bmatrix}$$

P 矩陣的選擇與前兩個模型不同。若 $k_{xx} \cdot k_{yy} > k_{xy} \cdot k_{yx}$ 時， P 為正定。使用式(4.12)的觀察器增益，里昂普諾夫候選函數的一次微分可簡化成：

$$\dot{V} = -\tilde{e}_2^T \begin{bmatrix} d_{xx} + l_{em31} & 2\Omega_z \\ -2\Omega_r & d_{yy} + l_{em42} \end{bmatrix} \tilde{e}_2^T \quad (4.42)$$

因為 Ω_z 與 Ω_r 的大小與正負號都未知，因此上式不全為半負定， l_{331} 與 l_{342} 的設計則需要進一步討論。先忽略一定是為正的 d_{xx} 與 d_{yy} ，根據式(3.3)中 Ω_r 的定義，其他部份可以

展開如下：

$$-\left(l_{em31} \cdot e_{\dot{x}}^2 + l_{em42} \cdot e_{\dot{y}}^2 + 2\Omega_z \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot e_{\dot{x}} \cdot e_{\dot{y}}\right) \quad (4.43)$$

為使系統穩定，必須要設計 l_{em31} 與 l_{em42} 讓上式括號中的值為正：若 $m_1 \gg m_2$ ，則該退耦式設計將退化成單一質量塊設計，因此與前兩個模型的設計一樣， l_{em31} 與 l_{em42} 可以選擇任意大於零的值；若 $m_1 \ll m_2$ ，則上式的最後一項將近似於 $2\Omega_z \cdot e_{\dot{x}} \cdot e_{\dot{y}}$ ，又 $e_{\dot{x}}^2 + e_{\dot{y}}^2 \geq 2e_{\dot{x}} \cdot e_{\dot{y}}$ ，因此只要選擇 $l_{em31} = l_{em42} > |\Omega_z|$ 即可。一般陀螺儀可量測的角速度大小將與設計的動態範圍(Dynamic range)有關，在本系統中，若欲量測的角速度值小於 l_{em31} 與 l_{em42} 的設計，則在後續證明為收斂之下，表示本新式陀螺儀系統將可；相反地，若欲量測的角速度值大於 l_{em31} 與 l_{em42} 的設計，本系統將無法正確地估測到角速度。換句話說，此增益的大小設計將成為另一個限制動態範圍的因素。在確保式(4.42)為負值之下，式(4.41)則為半負定。

再以同樣的方法證明 $\|\tilde{e}_1\| \rightarrow 0$ 和 $\|\tilde{e}_2\| \rightarrow 0$ 以及：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{em}^T \tilde{\rho}_{em} \rightarrow 0 \quad (4.44)$$

其中

$$M_{em}^T = \begin{bmatrix} -2\dot{y} & 0 & \hat{x} & 0 & \hat{y} & 0 & \dot{x} & 0 & -u_{ex} & 0 \\ 0 & 2\dot{x} & 0 & \hat{y} & 0 & \hat{x} & 0 & \dot{y} & 0 & -u_{ey} \end{bmatrix}$$

將可透過以下矩陣的秩是否等於 10 來檢驗 $\tilde{\rho}_{em}$ 的收斂性：

$$\begin{bmatrix} M_{em} & \dot{M}_{em} & \ddot{M}_{em} & \dots \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

以上的矩陣與上一節中針對退耦式陀螺儀的設計，在位移回授下，可得到的觀察性矩陣的轉置 W_{emp1}^T 類似。其滿秩的條件也是需要兩個以上的頻率，並須在控制訊號中加入輔助訊號 η_x 與 η_y 以確保質量塊估測的正確性。因此，使用式(4.12)的觀察器增益將可以正

確地估測到所有系統狀態，即 $\underline{e} \rightarrow 0$ ，在使用上一節所介紹的任何一個控制設計下，也可以將系統動態控制成穩定的弦波，因此系統可證明為穩定。

◆ 質量已知、感測電路無瑕疵之陀螺儀系統

觀察器的估測誤差動態形式與前述例子相同：

$$\dot{\underline{e}} = -(LH + \tilde{F})\underline{e} \quad (4.46)$$

其中

$$\underline{e}^T = [\tilde{e}_1^T \quad \tilde{e}_2^T \quad \tilde{\rho}_{ts}^T]$$

$$\tilde{e}_1^T = [e_x \quad e_y], \quad \tilde{e}_2^T = [\dot{e}_x \quad \dot{e}_y], \quad \tilde{\rho}_{ts}^T = [e_{\Omega_z} \quad e_{k_{xx}} \quad e_{k_{yy}} \quad e_{k_{xy}} \quad e_{d_{xx}} \quad e_{d_{yy}} \quad e_{d_{xy}}]$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{xx} & k_{xy} & d_{xx} & d_{xy} - 2\Omega_z & -2\dot{y} & \hat{x} & 0 & \hat{y} & \hat{x} & 0 & \dot{y} \\ k_{xy} & k_{yy} & d_{xy} + 2\Omega_z & d_{yy} & 2\dot{x} & 0 & \hat{y} & \hat{x} & 0 & \dot{y} & \dot{x} \end{bmatrix}_{11 \times 11}$$

接下來的證明與單一質量塊的例子相同，因此不再詳述。

◆ 質量未知、感測電路有瑕疵之陀螺儀系統

如(4.13)與(4.14)所示，本例使用擴增型卡曼濾波器來對完整微機電陀螺儀模型設計觀察器增益，擴增型卡曼濾波器係卡曼濾波器的改良，以將卡曼濾波器應用於非線性系統，但其最大的問題是無法在理論上證明該方法的穩定性[36]。所幸在車輛穩定控制與衛星姿態控制上，已有不少研究以實驗印證過擴增型卡曼濾波器的可行性[40-42]。除此之外，若要進一步增加收斂性，可以使用疊代式卡曼濾波器(Iterated Kalman filter, IKF)[43]，但缺點是疊代式卡曼濾波器需要的運算量將更加龐大。前面章節已經證明了本論文提出的振動式陀螺儀整合感測架構模型之系統穩定性，在擴增型卡曼濾波器設計出來的觀察器增益可以正確地估測出所有系統狀態下，系統將為穩定。

五、角速度量測陀螺儀控制系統模擬

本章利用數值模擬印證本論文提出的陀螺儀控制系統，在角速度量測上的應用。單一質量塊設計所使用的參數詳列如表 5.1，退耦式雙質量塊設計所使用的參數詳列如表 5.2，本參數與實際微機電陀螺儀參數類似[4]。

表 5.1：單一質量塊設計之微機電陀螺儀系統參數。

系統參數	數值
m	$1.8 \times 10^{-7} \text{ kg}$
k_{xx}	63.96 N/m
k_{yy}	95.92 N/m
k_{xy}	12.78 N/m
d_{xx}	$3.6 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s/m}$
d_{yy}	$4.5 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s/m}$
d_{xy}	$3.6 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s/m}$

表 5.2：退耦式雙質量塊設計之微機電陀螺儀系統參數。

系統參數	數值
m_x	$2.6 \times 10^{-7} \text{ kg}$
m_y	$1.6 \times 10^{-7} \text{ kg}$
k_{xx}	92.38 N/m
k_{yy}	85.26 N/m
k_{xy}	0.92 N/m
k_{yx}	0.25 N/m
d_{xx}	$5.2 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s/m}$
d_{yy}	$4.8 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s/m}$

5.1 開路系統模擬

如第一章介紹的傳統操作方法，一般未含兩軸控制器設計的微機電陀螺儀，都是採單軸驅動單軸感測的開路操作，如(2.7)與(2.8)所示。在含有耦合阻尼與耦合彈性係數的狀況下，單一質量塊設計的動態方程式，在經過質量塊歸一化之後，角速度為零時，可

以用下式表示：

$$\begin{aligned}\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y &= u \\ \ddot{y} + d_{xy}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + k_{xy}x + k_{yy}y &= 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

對上式作拉氏轉換(Laplace transformation)後，開路轉移函數為：

$$\frac{X}{U} = \frac{S^2 + d_{yy}S + k_{yy}}{S^4 + (d_{xx} + d_{yy})S^3 + (d_{xx}d_{yy} + d_{xy}^2 + k_{xx} + k_{yy})S^2 + (d_{xx}k_{yy} + d_{yy}k_{xx} - 2d_{xy}k_{xy})S + (k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-d_{xy}S - k_{xy}}{S^4 + (d_{xx} + d_{yy})S^3 + (d_{xx}d_{yy} + d_{xy}^2 + k_{xx} + k_{yy})S^2 + (d_{xx}k_{yy} + d_{yy}k_{xx} - 2d_{xy}k_{xy})S + (k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2)}$$

其能量傳遞的關係又可由以下表示：

$$\frac{Y}{X} = \frac{-d_{xy}S - k_{xy}}{S^2 + d_{yy}S + k_{yy}}, \quad \frac{X}{Y} = \frac{-d_{xy}S - k_{xy}}{S^2 + d_{xx}S + k_{xx}}$$

此開路系統以表 5.1 的參數模擬之頻率響應圖如下：

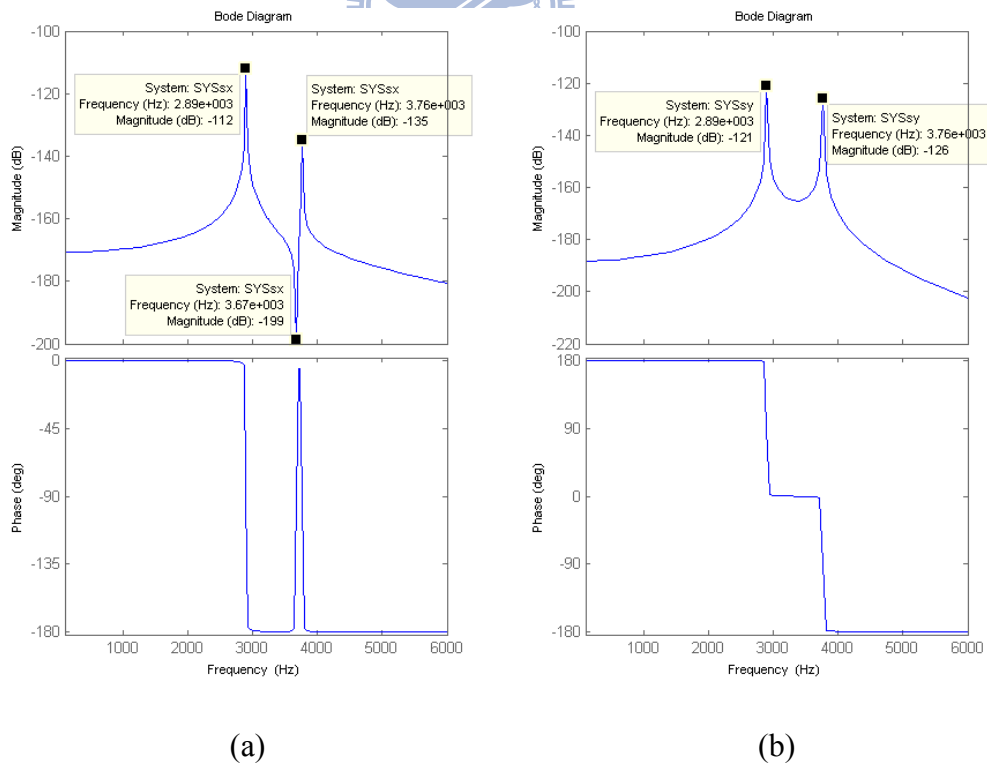
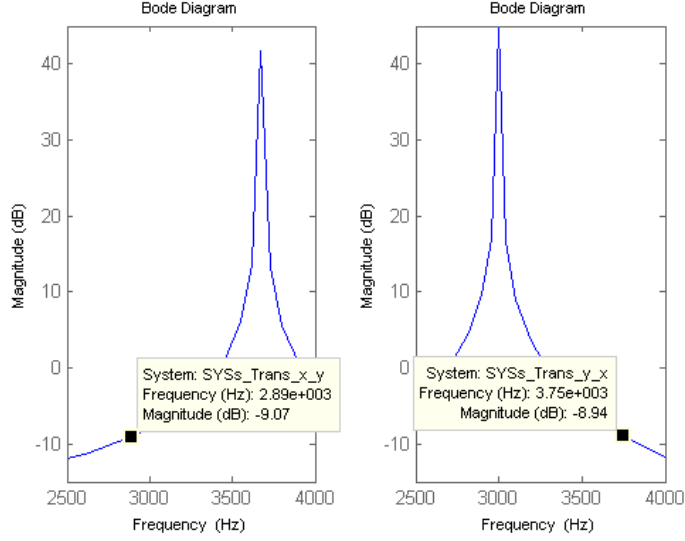


圖 5.1：以表 5.1 之參數模擬之系統頻率響應。(a) x 軸；(b) y 軸。



(a) (b)

圖 5.2：以表 5.1 之參數模擬之兩軸能量傳遞頻率響應。(a) x 到 y；(b) y 到 x。

依照表 5.1 的參數，x 軸與 y 軸的共頻頻率應該分別在 3 kHz 與 3.674 kHz，但由於耦合彈性係數的存在，其共振頻率將偏移至 2.893 kHz 與 3.758 kHz 附近；反共振點則出現在 3.674 kHz 附近；而此狀況下之品質因子分別約為 942 與 919；而共振峰值的大小又可以由圖 5.2 得知，因耦合造成的能量傳遞從 x 傳到 y 與 y 傳回到 x 都會有 -9 dB 的大小差距。

退耦式雙質量塊設計在經過質量塊歸一化之後的動態，則表示如下：

$$\begin{aligned} \ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + k_{xx}x + k_{xy}y &= u \\ \ddot{y} + d_{yy}\dot{y} + k_{yx}x + k_{yy}y &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

對上式作拉氏轉換(Laplace transformation)後，開路轉移函數為：

$$\begin{aligned} \frac{X}{U} &= \frac{S^2 + d_{yy}S + k_{yy}}{S^4 + (d_{xx} + d_{yy})S^3 + (d_{xx}d_{yy} + k_{xx} + k_{yy})S^2 + (d_{xx}k_{yy} + d_{yy}k_{xx})S + (k_{xx}k_{yy} - k_{xy}k_{yx})} \\ \frac{Y}{U} &= \frac{-k_{yx}}{S^4 + (d_{xx} + d_{yy})S^3 + (d_{xx}d_{yy} + k_{xx} + k_{yy})S^2 + (d_{xx}k_{yy} + d_{yy}k_{xx})S + (k_{xx}k_{yy} - k_{xy}k_{yx})} \end{aligned}$$

其能量傳遞的關係由以下表示：

$$\frac{Y}{X} = \frac{-k_{yx}}{S^2 + d_{yy}S + k_{yy}}, \quad \frac{X}{Y} = \frac{-k_{xy}}{S^2 + d_{xx}S + k_{xx}}$$

此開路系統以表 5.2 的參數模擬之頻率響應圖如下：

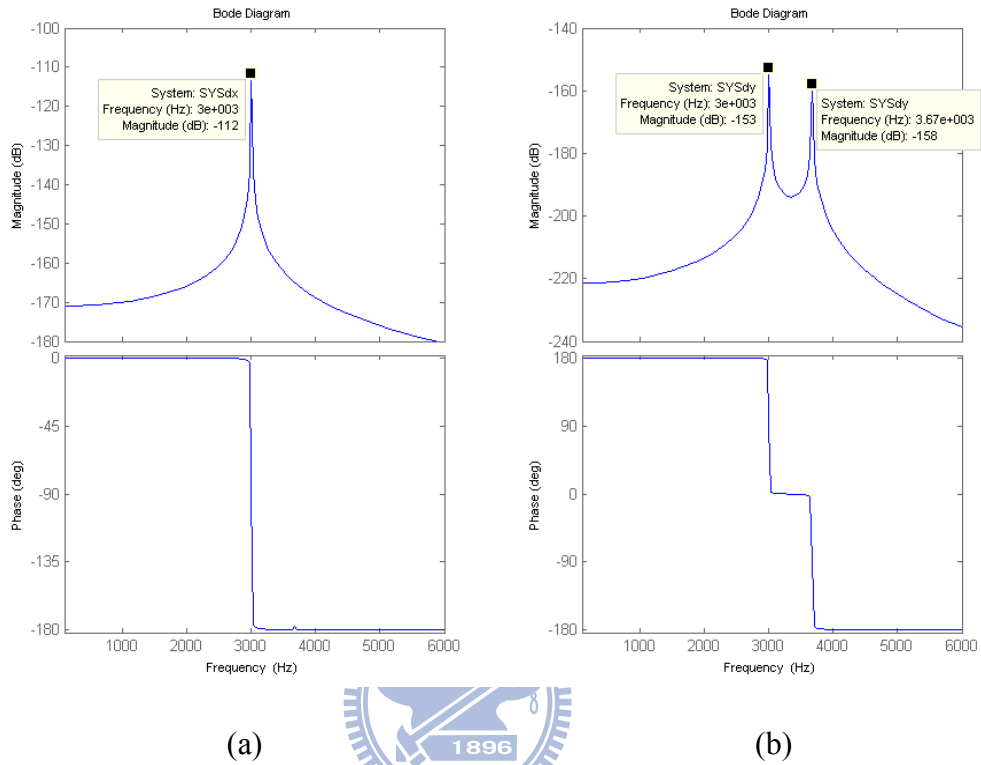


圖 5.3：以表 5.2 之參數模擬之系統頻率響應。(a) x 軸；(b) y 軸。

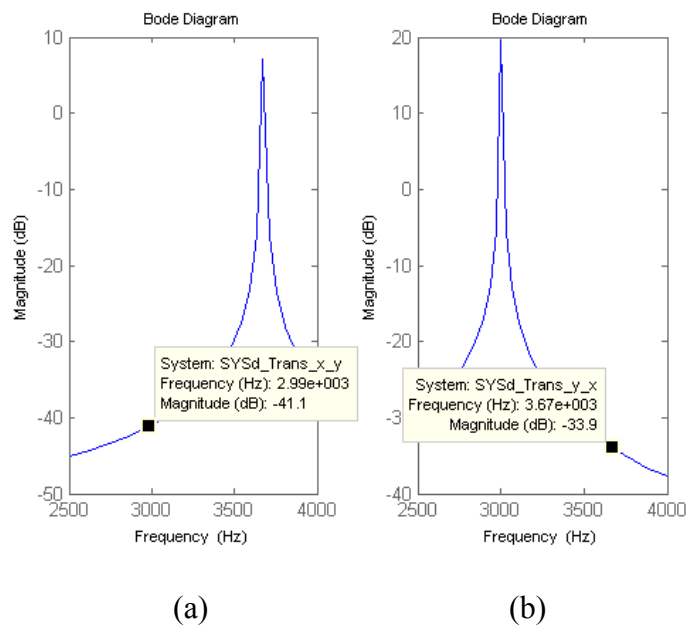


圖 5.4：以表 5.2 之參數模擬之兩軸能量傳遞頻率響應。(a) x 到 y；(b) y 到 x。

依照表 5.2 的參數，由於耦合彈性係數相對較小，x 軸與 y 軸的共振頻率仍分別在 3 kHz 與 3.674 kHz 附近；反共振點出現在 3.674 kHz 附近，但因為與共振頻率太接近，僅可由相位圖觀察到細微的突起(由轉移函數可知，反共振點的位置由 k_{yy} 與 d_{yy} 決定，通常 d_{yy} 較小，因此幾乎落在 y 軸的共振頻率上，若彈性係數耦合較小，兩軸共振頻率的偏移也比較不嚴重，因此在 x 軸的頻率響應圖上會有第二共振點與反共振點幾乎重疊的情況)；而此狀況下之品質因子分別約為 942 與 769；而共振峰值的大小又可以由圖 5.4 知道，因動態耦合造成的能量傳遞從 x 傳到 y 與 y 傳回到 x 分別約有 -41 dB 與 -34 dB 的大小差距，來回即有 -75 dB 的損耗，這也是在圖 5.3 的 x 軸中看不到另一個共振峰值的原因之一。

如式(5.1)與(5.2)的系統，在沒有外加控制下($u=0$)，阻尼造成的能量消耗將使系統逐漸停止振動，因此一般會在其中一軸施加固定振盪(驅動軸，在此為 x 軸)，如式(2.7)所示，再從另一軸量測振幅變化。以鎖相迴路搭配自動增益控制將驅動軸控制成 $x = \sin(\omega_x t)$ ，則 y 軸的振幅將可以解調的方式算出：

$$Y_{amp} = LPF(2 \times y \times -\cos(\omega_x t)) \quad (5.3)$$

與理想陀螺儀(兩軸的共振頻率皆為 3.2 kHz、無耦合項、品質因子為 804)比較，在系統未轉動並以開路操作的方式下，假設感測軸的位移量測訊噪比(Signal to noise ratio, SNR)為 1000，量測 y 軸輸出可得如圖 5.5 之結果。在陀螺儀沒有瑕疵的情況下，系統未轉動時 y 軸所量測到的振幅為零，如圖 5.5(a)之理想陀螺儀；但在有耦合項存在的情況下，y 軸將可量到動態耦合造成的影響，如圖 5.5(b)與圖 5.5(c)，其中退耦式設計的振幅明顯小於單一質量塊設計。另外，當系統在 0.5 秒開始以 10 rad/sec.的角速度轉動，可得如圖 5.6 之結果。其中量測理想陀螺儀之 y 軸得到因角速度引起的振幅約 $0.8 \mu m$ ，但具瑕疵的兩個陀螺儀在 y 軸量測到的振幅皆與動態耦合的振幅相同，原因應是兩軸共振頻率差距過大所造成。由此模擬可知，表 5.1 與 5.2 所設定之陀螺儀，其機械結構瑕疵將造成系統無法以開路操作方式量測角速度。以下將對這兩個陀螺儀進行控制，補償系統瑕疵作並用以量測角速度。

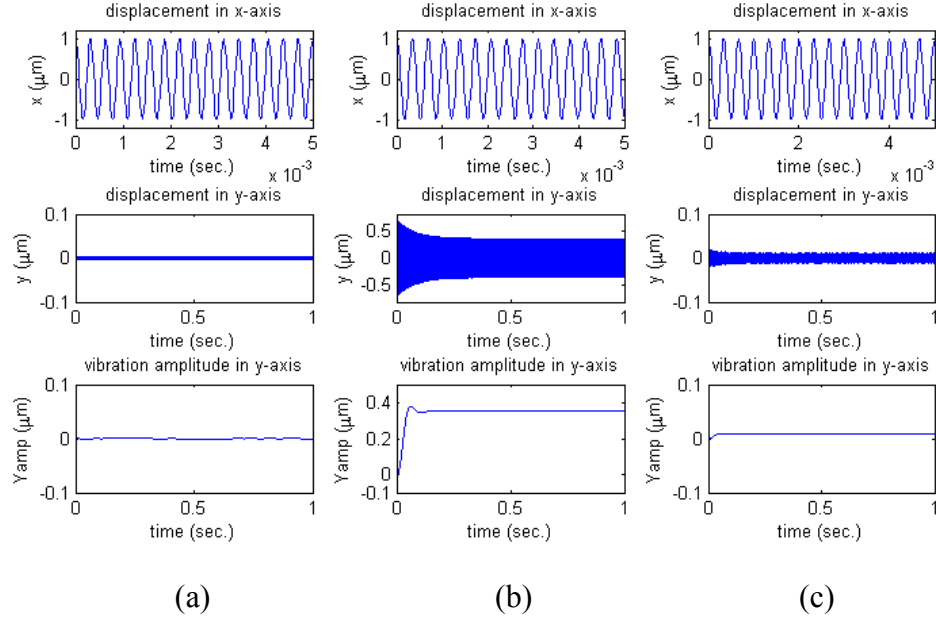


圖 5.5：系統未轉動下，以開路操作之陀螺儀。(a) 理想陀螺儀；(b) 以表 5.1 參數模擬之單一質量塊陀螺儀；(c) 以表 5.2 參數模擬之退耦式陀螺儀。

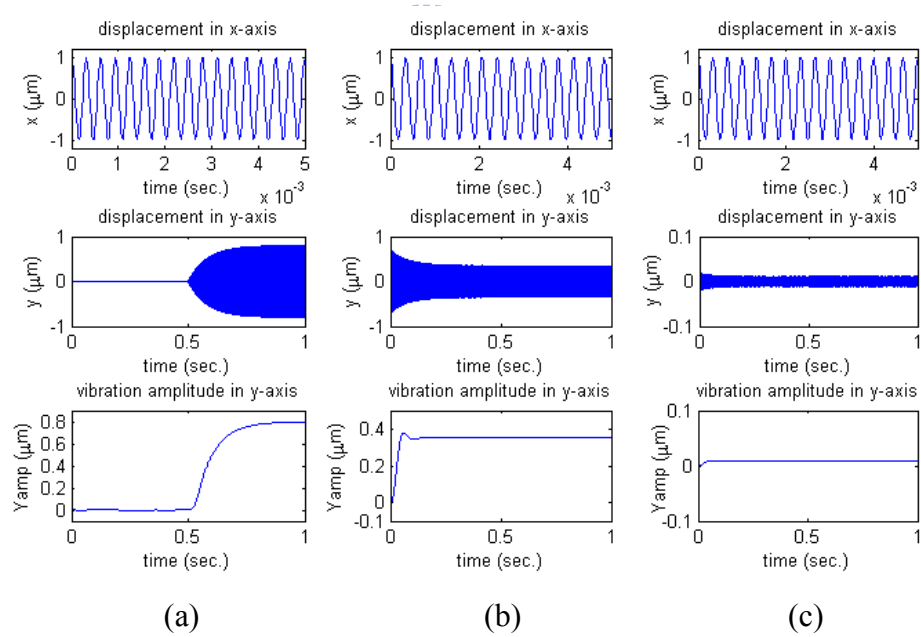


圖 5.6：系統在 0.5 秒開始以 10 rad/sec.的角速度轉動，以開路操作之陀螺儀。(a) 理想陀螺儀；(b) 以表 5.1 參數模擬之單一質量塊陀螺儀；(c) 以表 5.2 參數模擬之退耦式陀螺儀。

5.2 角速度量測陀螺儀控制系統

5.2.1 單一質量塊振動式陀螺儀

微機電陀螺儀系統中除了機械參數皆為未知外，系統中尚包含量測電路與介面的誤差。本節以擴增型卡曼濾波器所設計的狀態觀察器增益來模擬。

感測介面之結構(含瑕疵)與電路相關參數列於表 5.3。將參數帶入式(2.10)可以算出相對應的誤差訊號為 $\Phi_x = 15mV$ 、 $\Phi_y = 11mV$ ，而感測敏感度假設為 $dC/dy = dC/dx = 5 \text{ fF}/\mu m$ ，對應的電壓輸出約為 100 mV。

表 5.3：感測介面與電路參數。

參數	數值
$N_x = N_y$	113
$W_x = W_y$	5 μm
$Z_x = Z_y$	1 μm
$x_0 = y_0$	50 μm
d_x	0.1 μm
d_y	0.085 μm
V	10 volt.
$C_{fx} = C_{fy}$	1 pF
$C_{Px} = C_{Py}$	1 pF
V_{osx}	2 mV
V_{osy}	1 mV

以單一質量塊設計為基礎，使用(4.4)的狀態觀察器，並以(4.13)與(4.14)設計的觀察器增益，搭配阻尼補償的回授控制下，系統以 1 rad/sec 的角速度轉動，輔助訊號設計則為 $\eta_x = \eta_y = 53.95 \sin(2\pi \times 600t) \text{ volt.}$ 。在位移量測訊噪比為 100 的情況下，以表 5.1 的機械結構參數模擬如下。本模擬中假設實際系統參數偏離設計值 15%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 85%。

圖 5.7 為感測電路輸出與系統動態估測結果，其中感測電路輸出可以由圖上看出有明顯的偏移量，假設輸出電壓與實際位移量的關係(如式(3.10)所示)不變，以此量測電壓換算成相對應的質量塊位移，以此位移資訊作狀態回授控制下，觀察器估測到的系統動

態如圖 5.7(b)中之實線所示。其中可以發現，雖然感測電路輸出含有明顯的偏移量，但並未影響到實際的位移量換算，本方法依舊可以正確地估測出質量塊的位移與速度。

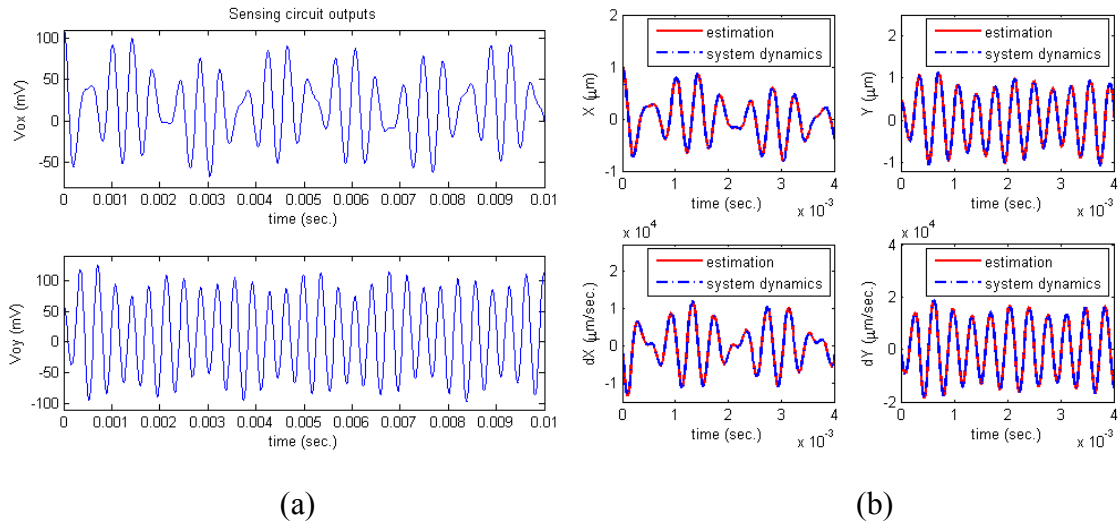


圖 5.7：以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器設計觀察器增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a) 感測電路輸出，x 軸偏壓為 15 mV，y 軸偏壓為 11 mV；(b) 以狀態觀察器估測之系統動態。

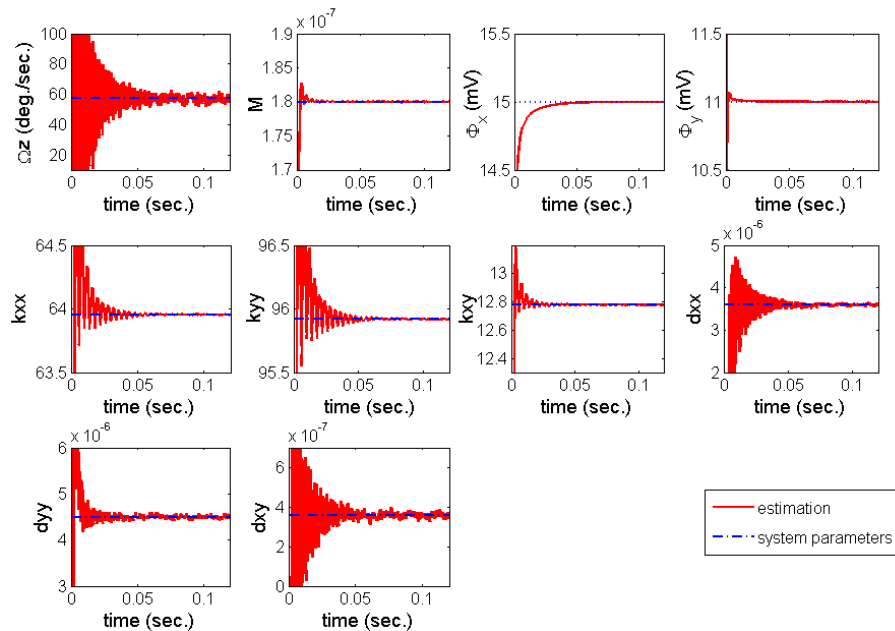


圖 5.8：以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器設計觀察器增益，狀態觀察器估測到之系統參數。系統參數包含八個機械結構參數以及兩個感測電路誤差。

上圖則為使用狀態觀察器估測的系統參數，各個參數亦皆在 0.08 秒以內收斂完成，由圖中可以看出，使用擴增型卡曼濾波器的演算法設計觀察器增益，可有效的將感測輸出與其估測值最佳化，因此在不經濾波器處理的情況下，也可以明顯有抑制雜訊影響的功能，由 0.1 秒後角速度估測的標準差即達 $1.17^\circ/\text{sec}$ 可以看出。在這個模擬條件下，0.1 秒以後，參數(M 、 Φ_x 、 Φ_y 、 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為(2×10^{-5} 、 1.7×10^{-5} 、 6×10^{-6} 、 3.8×10^{-5} 、 3.9×10^{-5} 、 3.5×10^{-5} 、 5.1×10^{-3} 、 5.8×10^{-3} 、 0.03)。另外，以此量測訊噪比，在理想陀螺儀以開路操作下，以共振頻率為 $2\pi \times 3200 \text{ rad/sec}$ 、品質因子 804 來計算，以式(2.9)計算可得最佳解析度為 $7.16^\circ/\text{sec}$ 。因此在本方法中，搭配擴增型卡曼濾波器的設計，在系統同時存在機械與電路瑕疵下，對於角速度的量測精度可改善約六倍。

5.2.2 退耦式雙質量塊振動式陀螺儀

以退耦式雙質量塊振動式陀螺儀為基礎，同樣使用(4.4)的狀態觀察器，以(4.13)與(4.14)設計的觀察器增益，並搭配阻尼補償的回授控制下，系統以 1 rad/sec 的角速度轉動，輔助訊號則設計為 $\eta_x = 53.95 \sin(2\pi \times 250t)$ 、 $\eta_y = 53.95 \sin(2\pi \times 450t) \text{ volt}$ 。以加速收斂。本模擬中同樣假設實際系統參數偏離設計值 15%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 85%。在位移量測訊噪比為 100 的狀況模擬如下。

圖 5.9 為具有電壓偏移誤差的感測電路輸出與系統動態估測結果，同樣在假設輸出電壓與實際位移量的關係不變下，觀察器估測到的系統動態已將此偏移誤差的影響消除，而計算出與實際運動軌跡吻合的估測值。圖 5.10 為使用狀態觀察器估測的系統參數，各個參數亦皆在 0.08 秒以內收斂完成，同樣可以由圖中看出擴增型卡曼濾波器演算法的抑制雜訊功能。在 0.1 秒後角速度量測的標準差為 $1.69^\circ/\text{sec}$ 。在這個模擬條件下，0.1 秒以後，參數(M_x 、 M_y 、 Φ_x 、 Φ_y 、 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 k_{yx} 、 d_{xx} 、 d_{yy})估測相對於正確值的誤差為(1.9×10^{-5} 、 1.2×10^{-5} 、 5.7×10^{-5} 、 8.3×10^{-6} 、 3.8×10^{-5} 、 2.3×10^{-5} 、 5.9×10^{-4} 、 1.4×10^{-3} 、 6.9×10^{-3} 、 4.3×10^{-3})。

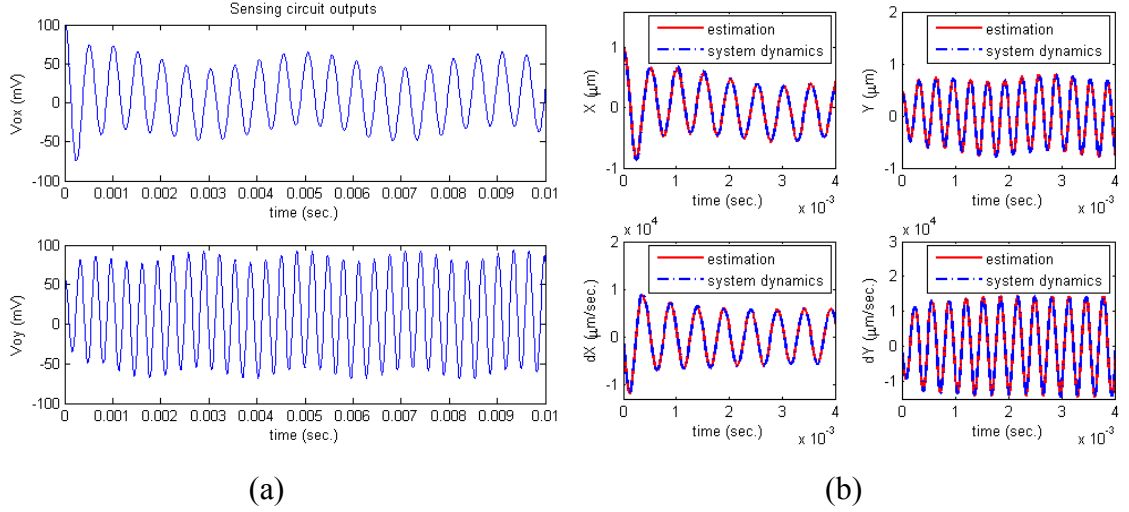


圖 5.9：以退耦式設計為基礎之陀螺儀控制，在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器設計觀察器增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a) 感測電路輸出，x 軸偏壓為 8 mV，y 軸偏壓為 12 mV；(b) 以狀態觀察器估測之系統動態。

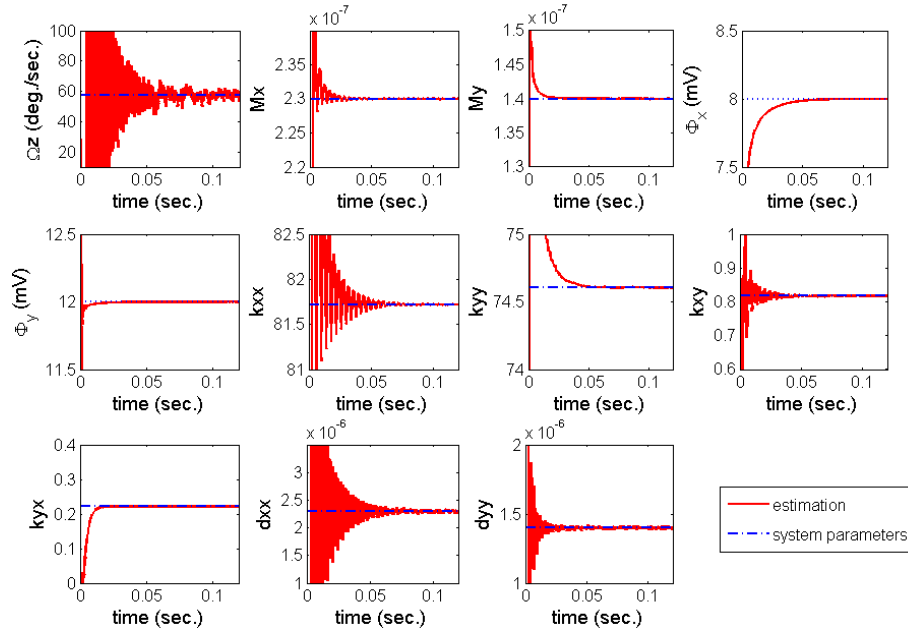


圖 5.10：以退耦式設計為基礎之陀螺儀控制，阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器設計觀察器增益，狀態觀察器估測到之系統參數。

5.2.3 結果討論

在退耦式雙質量塊設計的例子中，控制訊號加入兩個不同的輔助訊號來增加收斂速度，原因是在阻尼補償的控制方法中，基本上是透過系統本身不匹配的兩軸彈性係數與

耦合彈性係數所造成的「具兩個頻率以上」的動態來估測參數(詳見第三章中針對阻尼補償法下的系統估測動態分析)，不同於開路操作的陀螺儀，系統耦合的狀況愈嚴重其影響的動態也愈有利於參數估測。如圖 5.5 的開路系統模擬中，退耦式設計的動態耦合在系統未轉動下約為單一質量塊設計的 2.5%，因此在退耦式設計的控制中，若使用同樣的控制回授將得到較差的效果。

此外，在模擬的例子中雖然明顯可看出擴增型卡曼濾波器的雜訊抑制能力，但除了無法理論證明演算法的收斂性的缺點外，因演算法複雜，需要的運算量較大。在本節的模擬中需要用到 10 MHz 的取樣頻率來操作才得以讓觀察器收斂，這在即時控制的實現上將造成阻礙。另外，若僅以最簡單的擴增型卡曼濾波器演算法來設計，由式(4.14)可以發現，在求得 L_{k+1} 時的最後一項為反矩陣，這在運算過程有可能會遇到奇異點的問題，若要在實作中使用，將需要進一步改良。

5.3 角速度量測陀螺儀控制系統—時變系統參數估測

卡曼濾波器具有良好的雜訊抑制能力，在搭配記憶褪去的技巧下得以估測時變參數。以(4.13)與(4.14)設計觀察器增益，並搭配阻尼補償的回授控制。以單一質量塊設計為例，系統一開始以 1 rad/sec 的角速度轉動，在 36 ms 時隨即以斜率 15 rad/sec² 飄移；x 軸的電壓偏移一開始為 10 mV，在 45 ms 以 3 mV/sec 的速度快速飄移；y 軸的電壓偏移一開始為 12 mV，在 45 ms 以 3.5 mV/sec 的速度快速飄移。遺忘參數選擇為 1.00014，在位移量測訊噪比為 100 的狀況模擬如下。本模擬中假設實際系統參數偏離設計值 10%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 90%。

圖 5.11 為具有電壓偏移誤差的感測電路輸出與系統動態估測結果，其中感測電路輸出可看出雜訊的影響，假設輸出電壓與實際位移量的關係不變下，觀察器估測到的系統動態已將此偏移量的影響消除，而與實際運動的軌跡吻合。圖 5.12 為狀態觀察器估測的系統參數，在加入記憶褪去的技巧後，轉動角速度與感測誤差訊號在快速飄移的狀況下，觀察器皆可跟上變動。在 45 ms 後角速度量測的標準差為 5.63 °/sec。在這個模擬條

件下，45 ms 以後，參數(Φ_x 、 Φ_y 、 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為(4.5×10^{-4} 、 4.7×10^{-4} 、 1.1×10^{-5} 、 8.9×10^{-6} 、 5×10^{-5} 、 1.36×10^{-2} 、 1.19×10^{-2} 、 1.4×10^{-2})。

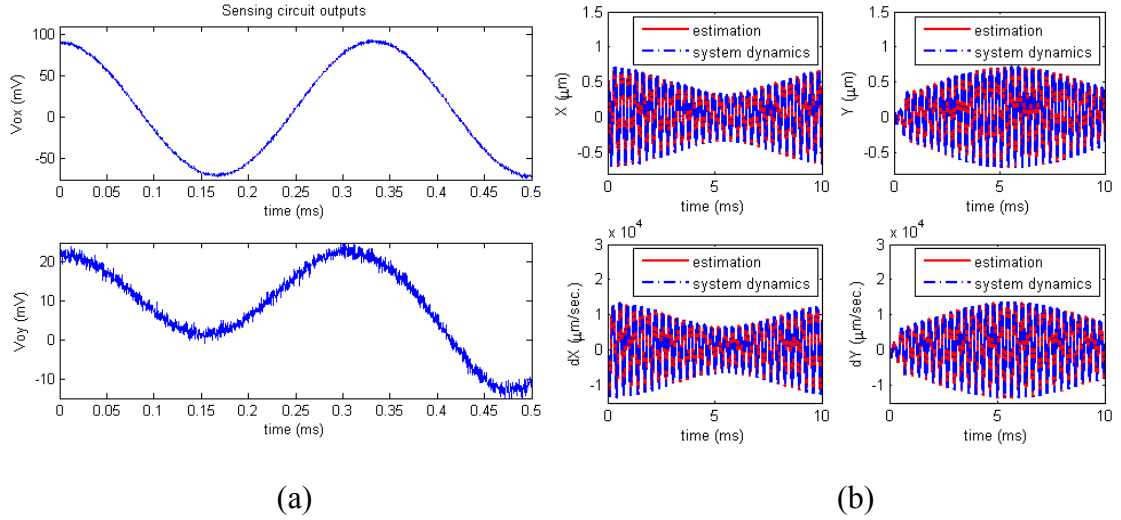


圖 5.11：在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器增益，感測電路輸出與系統動態估測。(a) 感測電路輸出，x 軸與 y 軸偏壓分別為 10 mV 與 12 mV；(b) 估測系統動態。

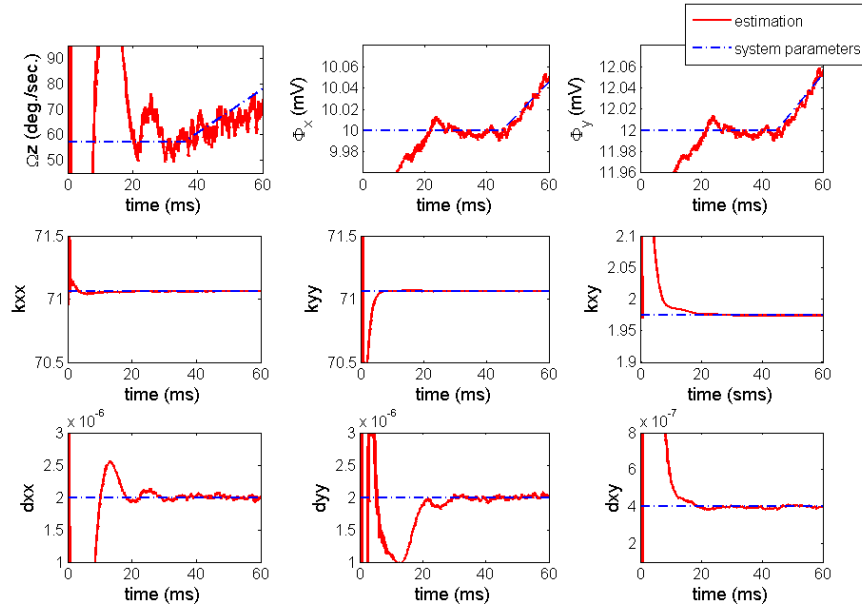


圖 5.12：在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器增益，狀態觀察器估測到之系統參數。

為了更深入了解上述方法對於變動角速度的追蹤能力，以下更進一步以不同頻率的

角速度變動來測試。以同樣的模擬條件，但量測偏移值保持固定(10 mV 與 12 mV)下，僅改變轉動角速度的頻率，模擬結果如圖 5.13。由圖中可以發現，在頻率超過 30 Hz 之後，估測角速度開始出現較明顯的相位與大小的誤差，並且在 40 Hz 與 45 Hz 的例子中也可以看到明顯的相位落後。雖然本例未使用低通濾波器，但在特定的模擬條件下(如量測雜訊大小與遺忘參數的設計等)，以擴增型卡曼濾波器設計出來的觀察器增益也有一定的估測效能。由模擬中可以了解，在這個模擬條件下，狀態觀察器的頻寬約超過 30 Hz。相較於以開路操作之理想陀螺儀，以共振頻率為 $2\pi \times 3200$ rad/sec、品質因子 804 來計算，在感測電路有誤差且系統參數都未知的情況下，量測頻寬改善可達十倍。

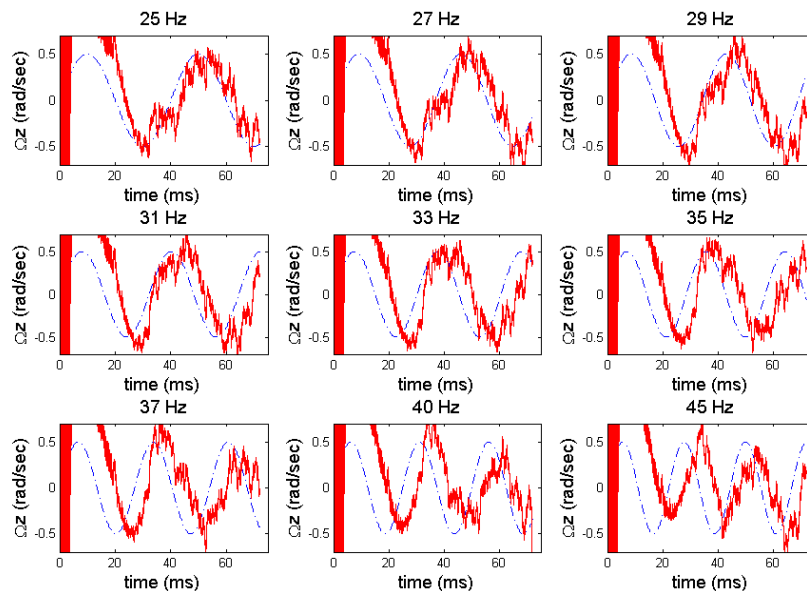


圖 5.13：在阻尼補償控制下，以擴增型卡曼濾波器搭配記憶褪去的技巧設計觀察器增益，狀態觀察器估測到不同頻率變動下之角速度。

5.4 質量已知、感測電路無瑕疵之陀螺儀角速度控制系統——不同回授控制設計比較

本節將以單一質量塊設計為例，使用表 5.1 的參數，並以本論文提出之新式觀察器設計做參數估測。為了可以在相同的基礎下，比較不同的回授控制設計對系統的影響，將如大部分文獻一樣假設陀螺儀振動質量塊的質量已知且感測電路無瑕疵。

5.4.1 適應控制法

以下使用適應控制法對陀螺儀作控制與參數估測，參考模型的兩個頻率設定為 3 kHz 與 5 kHz，若系統於 0.2 秒與 0.6 秒時分別以 1 rad/sec 與 -3 rad/sec 的角速度轉動，質量塊在兩軸的振動設定為 $1\ \mu\text{m}$ ，在速度量測訊噪比為 1000 的情況下，以表 5.1 的參數模擬結果如下(為節省篇幅，未將推導過程列出，以下模擬為使用適應性順滑模態控制所設計[39])。本模擬中假設實際系統參數偏離設計值 20%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 80%。

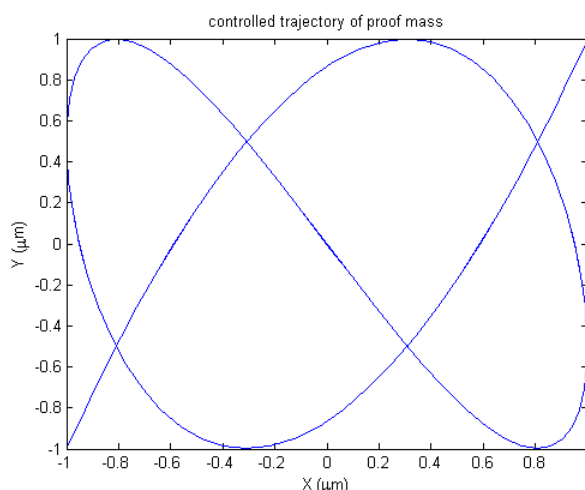


圖 5.14：以適應控制法控制下之陀螺儀質量塊運動軌跡，X、Y 為旋轉座標。

上圖為控制器作用下，相對於旋轉座標之陀螺儀質量塊運動軌跡，由於是使用參考模型法，在控制器作用下，從旋轉座標看起來的軌跡持續與參考模型相同，運動軌跡並不會受到轉動的影響。此外，由軌跡可以看出：(1) 系統動態必定不止存在一個頻率，此為陀螺儀系統中要正確地估測出系統參數必須的條件；(2) 質量塊振幅一直維持在 $1\ \mu\text{m}$ ，這使柯氏加速度項(在 y 軸為 $2\Omega_z\dot{x}$)中的速度得以在固定振動下維持在系統設定的最大值，藉此提高感測的精度。

圖 5.15 為使用參數適應律估測的參數，各個參數皆在 0.02 秒以內收斂完成。由於模擬中假設速度量測含有雜訊，因此對阻尼項與角速度估測的影響甚鉅，而對彈性係數估測的影響相對小很多。在這個模擬條件下，0.8 秒以後，角速度估測的標準差為 171.8

°/sec，而參數(k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為(3.1×10^{-4} 、 2.1×10^{-4} 、 1.2×10^{-3} 、0.29、0.24、1.93)。為了取得更精確的角速度值，再將估測角速度以低通濾波器過濾，其中低通濾波器系統階數設計為三階且通帶為 10 Hz，如圖 5.16。

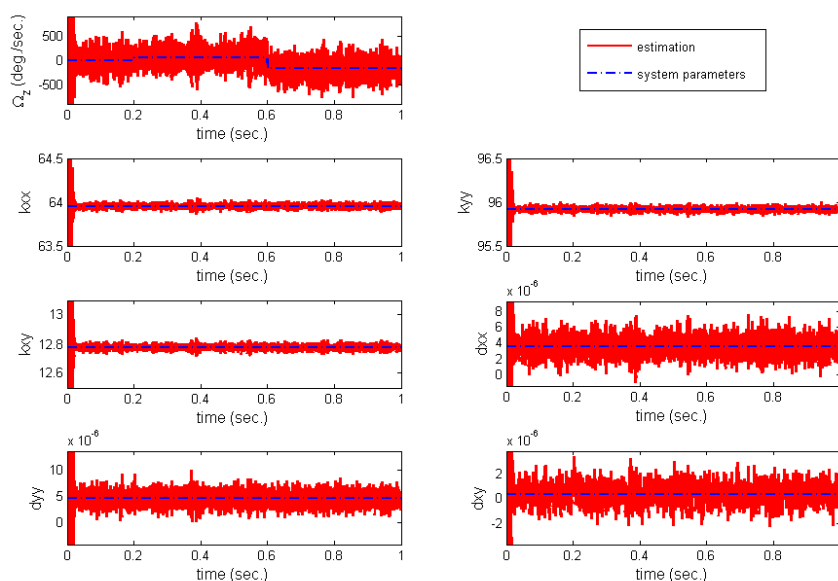


圖 5.15：以適應控制法設計的參數適應律估測之系統參數。

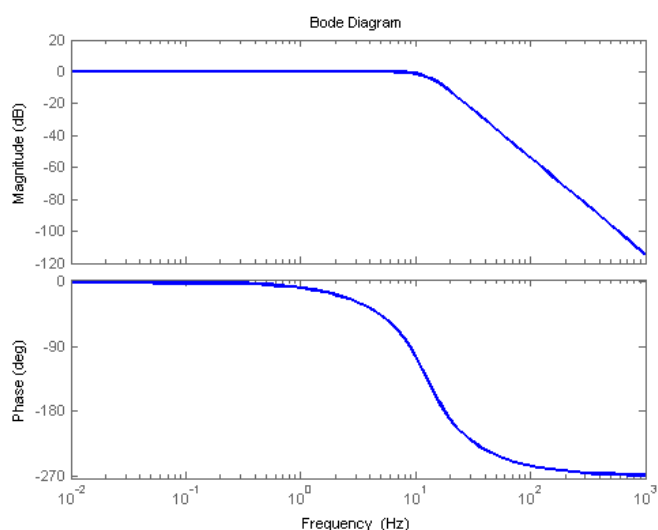


圖 5.16：三階、通帶為 10 Hz 之低通濾波器頻率響應圖。

圖 5.17 的上圖為過濾後的估測角速度，而為了檢驗估測精度，我們也做了長時間

的估測並以同樣的低通濾波器過濾，如圖 5.17 下圖。由圖 5.17 上圖可見，使用低通濾波器過濾後之估測角速度已收斂至正確值，在角速度變動下，估測收斂時間約 0.1 秒，雖然低通濾波器的使用也造成了相位落後，但仍可保有頻寬約 10 Hz 的感測能力；另外，由圖 5.17 下圖的長時間模擬中，系統於 1 秒時開始以 5 °/sec 轉動，結果顯示在這個模擬條件下，兩秒後的角速度量測的標準差為 2.84 °/sec。

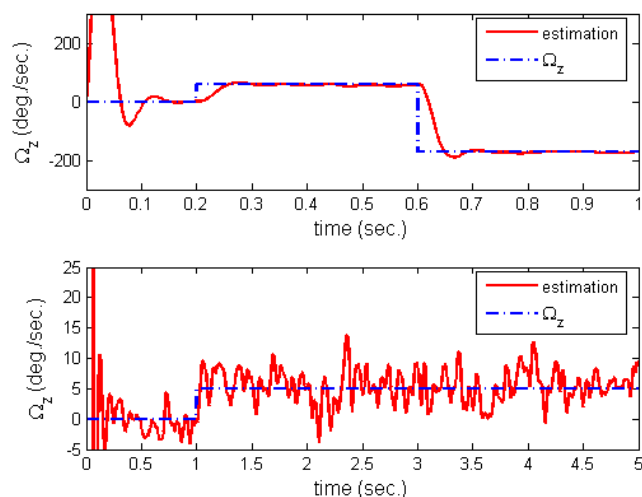


圖 5.17：以適應控制法設計的參數適應律估測之角速度，並以低通濾波器過濾之結果。

5.4.2 以本論文提出之控制系統搭配參考模型法

與上一節相同的條件下，使用本論文提出的新式控制器對陀螺儀作瑕疵補償，也同時用狀態觀察器估測系統狀態。參數估測所需的兩個頻率同樣設定為 3 kHz 與 5 kHz，系統於 0.2 秒與 0.6 秒時分別以 1 rad/sec 與 -3 rad/sec 的角速度轉動，以 $l_{m31} = l_{m42} = 100$ 的設計，質量塊在兩軸的振動設定為 $1 \mu m$ ，在速度量測訊噪比亦為 1000 的情況下，以表 5.1 的參數模擬結果如下。本模擬中同樣假設實際系統參數偏離設計值 20%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 80%。

圖 5.18 為控制器作用下，在旋轉座標上之陀螺儀質量塊的運動軌跡，與前例類似，在完成控制的狀況下，從旋轉座標看起來的運動軌跡維持固定，並不會受到轉動的影響，此軌跡即可視為本方法中的「參考模型」，縱使回授控制設計中並未設計讓系統動態跟上此軌跡。此外，系統動態中必定不只一個頻率，與適應控制法控制的質量塊軌跡相

比，最大的不同在軌跡稍複雜，且 y 軸的振幅較小。

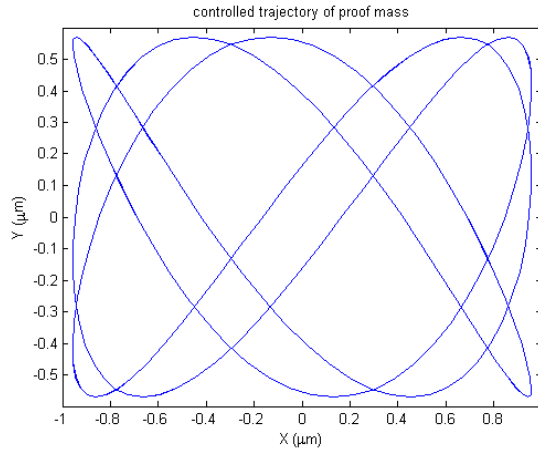


圖 5.18：以本論文的方法搭配參考模型的概念設計回授控制下，陀螺儀質量塊之運動軌跡，X、Y 為旋轉座標。

圖 5.19 為使用狀態觀察器估測到的系統動態，因為收斂的速度快，圖中顯示估測值與實際值幾乎重疊，另外，由 X 與 Y 也可以看出，其補償後的動態 x 軸與 y 軸的振動頻率分別為 3 kHz 與 5 kHz。圖 5.20 為使用狀態觀察器估測的系統參數，各個參數亦皆在 0.02 秒以內收斂完成，速度量測的雜訊也對阻尼項與角速度估測有顯著影響，而對彈性係數估測的影響相對不明顯。在這個模擬條件下，0.8 秒以後，角速度估測的標準差為 40.1 °/sec，而參數(k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為 (1.1×10^{-4} 、 6.2×10^{-5} 、 3.9×10^{-4} 、0.09、0.07、0.83)。

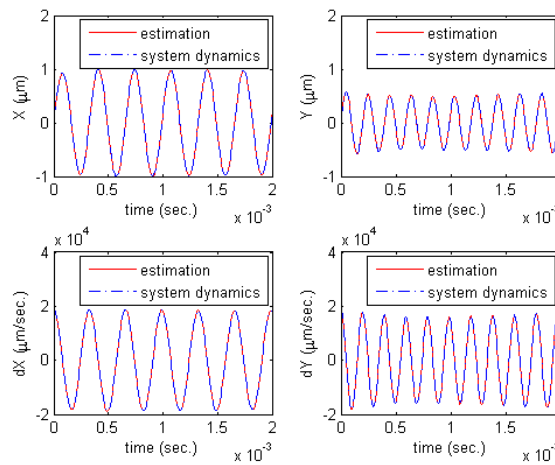


圖 5.19：以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之系統動態。

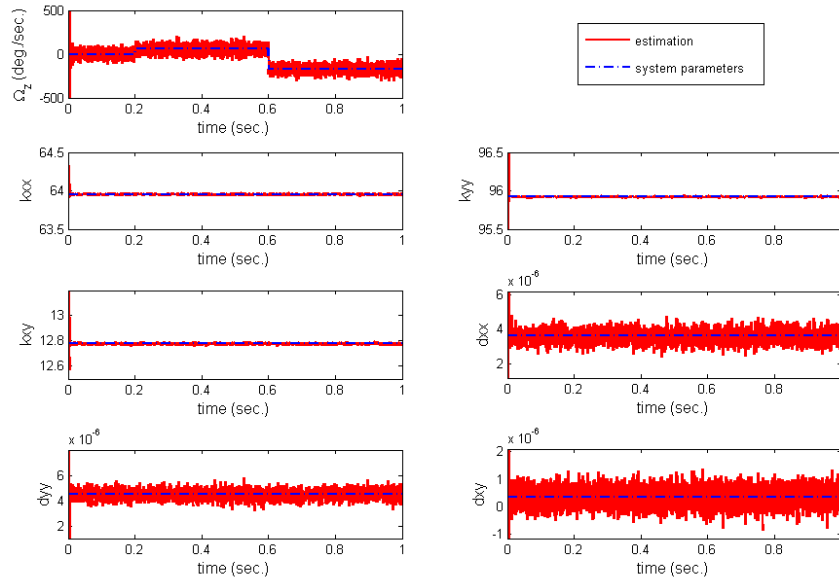


圖 5.20：以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之系統參數。

同樣可以將估測角速度以圖 5.16 中的低通濾波器過濾，如下圖所示。由圖 5.21 上圖，角速度估測亦會收斂至正確值，收斂時間約 0.1 秒，而低通濾波器的使用也同樣會引起些微相位落後。由圖 5.21 下圖的長時間模擬中，系統於 1 秒時開始轉動，結果顯示在這個模擬條件下，兩秒後的角速度量測的標準差為 0.88 $^{\circ}/\text{sec}$ 。

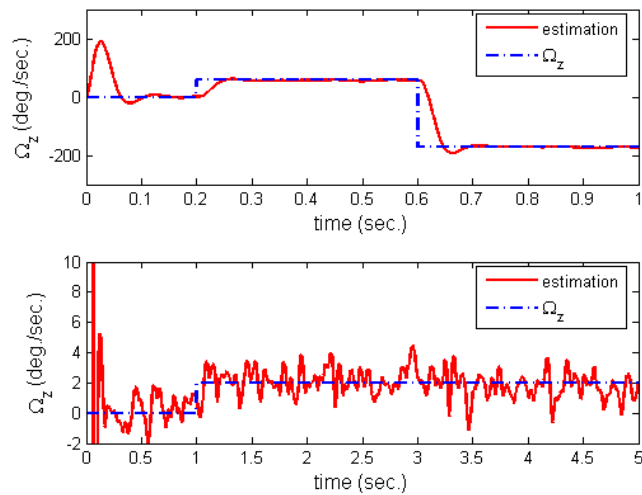


圖 5.21：以參考模型法作回授控制下，狀態觀察器估測之角速度以低通濾波器過濾後之結果。

5.4.3 以本論文提出之控制系統搭配不同回授控制比較

與上一節相同的條件下，僅補償阻尼的回授控制，以本論文提出的新式觀察器設計作即時參數估測，系統以 1 rad/sec 的等角速度轉動，觀察器增益則設計為 $l_{m31} = l_{m42} = 12$ 。為了比較不同回授控制設計下參數估測的效能，本節假設量測無雜訊。本模擬中同樣假設實際系統參數偏離設計值 20%，因此觀察器的估測初始值設定為實際系統參數的 80%。模擬結果如下：

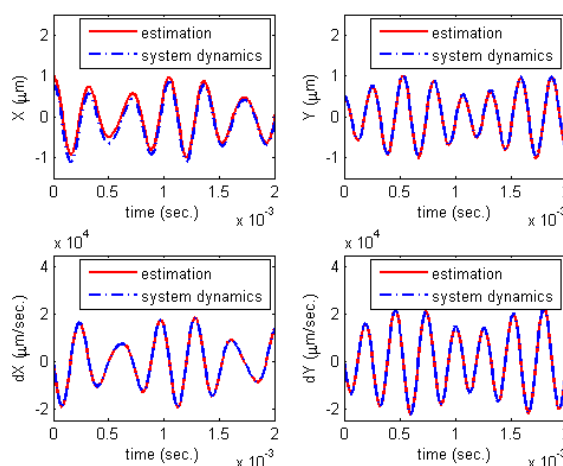


圖 5.22：以狀態觀察器搭配阻尼補償作控制回授下，觀察器估測之系統動態。

上圖為使用狀態觀察器估測到的系統動態，估測值在 0.002 秒以內即收斂到正確值。由 X 與 Y 可以看出其補償後的動態在 x 軸與 y 軸的振動頻率不同外，各自仍有低頻訊號，以阻尼補償下之系統的解析解可知，兩個較高的頻率應是由不匹配的兩軸彈性係數與耦合彈性係數造成(或由開路系統模擬可知，兩軸的共振頻率已偏移到 2.893 kHz 與 3.758 kHz 附近，由上圖也可判斷出 X 的頻率略小於 3 kHz，而 Y 的頻率則略小於 4 kHz)，而低頻應該是由轉動引起的兩軸能量傳遞所產生，因此可推測阻尼補償使得陀螺儀動態中保留了角速度資訊。

圖 5.23 左上角為控制後質量塊的運動軌跡，與圖 5.14 與圖 5.18 比較之下，明顯比參考模型控制下的動態不規則且不固定(為清楚顯示其軌跡，圖中僅畫出 0.25-0.3 秒之軌跡，實際軌跡幾乎佈滿整個四邊型)，因此系統動態也必定具備兩個以上的頻率，但由於估測速度快，在阻尼項被正確估測並補償前消耗掉的系統能量並不多，因此質量塊的

振幅並未明顯的縮小。而其他為狀態觀察器估測到的系統參數，約在 0.05 秒以內收斂，在沒有量測雜訊下，參數估測皆收斂到正確值。

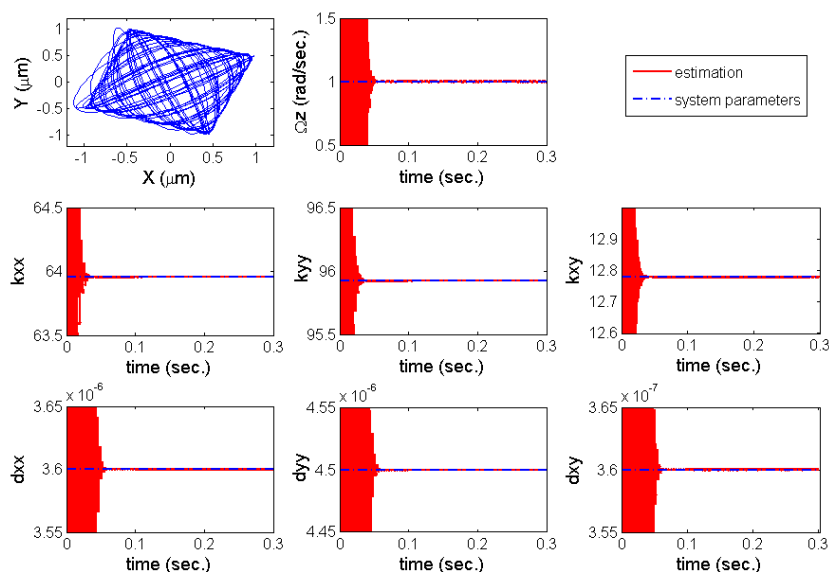


圖 5.23：以狀態觀察器搭配阻尼補償作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。

相同的條件下，使用參考模型法對陀螺儀作補償，與狀態觀察器作即時參數估測，系統以 1 rad/sec 的角速度轉動，觀察器增益則設計為 $l_{m31} = l_{m42} = 12$ 。參數估測所需的兩個頻率則改設定為原本系統設計的 3 kHz 與 3.674 kHz，模擬結果如圖 5.24 與圖 5.25 所示。圖 5.24 為使用狀態觀察器估測到的系統動態，收斂的速度比使用阻尼補償稍慢，但所有動態同樣約在 0.002 秒以內即收斂到正確值。由 X 與 Y 可以看出其補償後的振動頻率為 3 kHz 與略大於 3 kHz 的頻率，與系統設計相符。

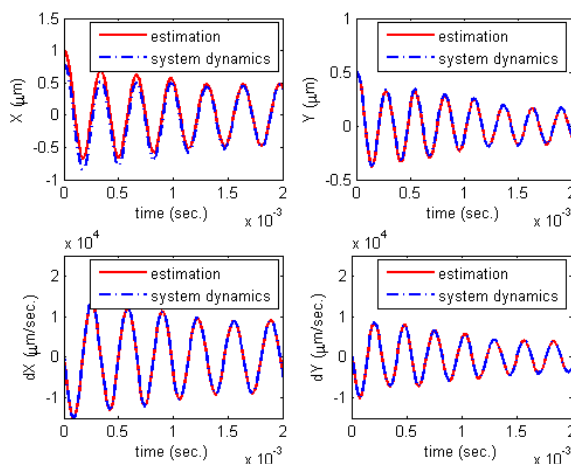


圖 5.24：以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，觀察器估測之系統動態。

圖 5.25 左上角為控制後質量塊的運動軌跡，為兩個固定頻率振動的模式，與圖 5.18 類似，但振幅則明顯縮小，主要原因應是此例中參數收斂較慢，因此在參數估測尚未完成之前，系統能量即遭未補償完全的阻尼項消耗。而其他為狀態觀察器估測到的系統參數，約在 0.2 秒以內收斂，在沒有量測雜訊下，參數估測都完全收斂到正確值上。

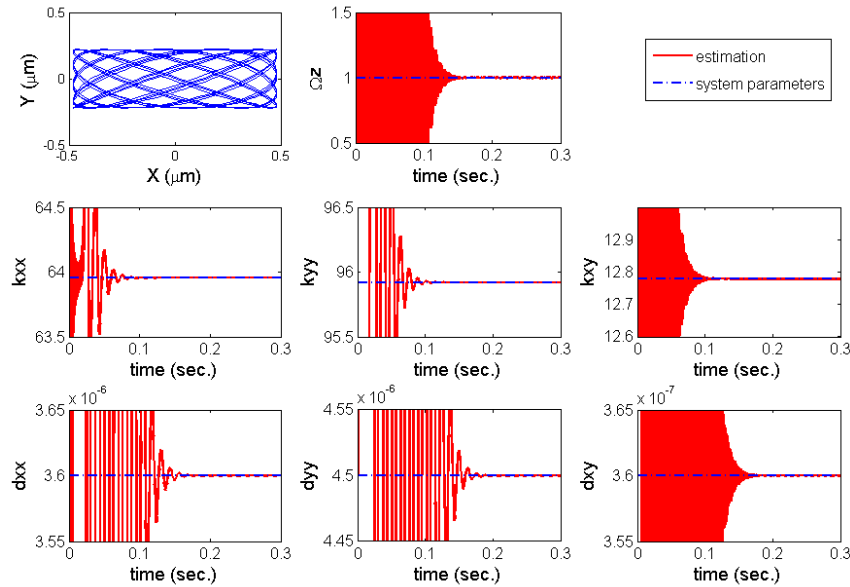


圖 5.25：以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。

為避免系統能量在估測過程消耗過多使質量塊振動縮小而影響估測精度，在相同的條件下，在參考模型法中加入能量控制，並使用狀態觀察器作即時參數估測，觀察器增益為 $l_{E11}=l_{E22}=l_{E33}=l_{E44}=12$ ，兩個參考頻率同樣為 3 kHz 與 3.674 kHz，模擬結果如圖 5.26 與圖 5.27。

圖 5.26 為使用狀態觀察器估測到的系統動態，收斂的速度比上一個例子稍快，所有動態同樣約在 0.002 秒以內即收斂到正確值。其振動的頻率與上一節相同，但振幅則由於能量控制的使用，沒有明顯的變動。圖 5.27 左上角為控制後質量塊的運動軌跡，明顯與參考模型法不同，另外，在加入能量控制的控制後，雖然與前例使用相同的模擬條件，但質量塊的振幅明顯比未使用能量控制的狀況下大。狀態觀察器估測到的系統參數，約在 0.1 秒收斂，雖估測速度明顯較上例快，但阻尼項仍然在 0.1 秒時才收斂，卻

未消耗太多系統能量，推測應是能量控制發揮功能。在沒有量測雜訊下，所有參數估測都收斂到正確值上，但仍可以在 0.1 秒以後觀察到小幅度的抖動。

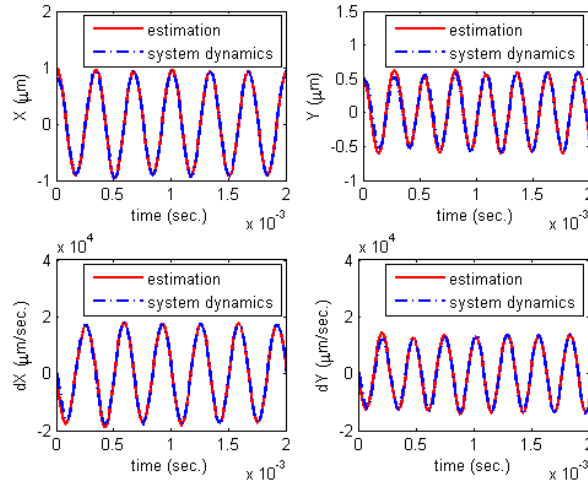


圖 5.26：加入能量控制，以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，觀察器估測之

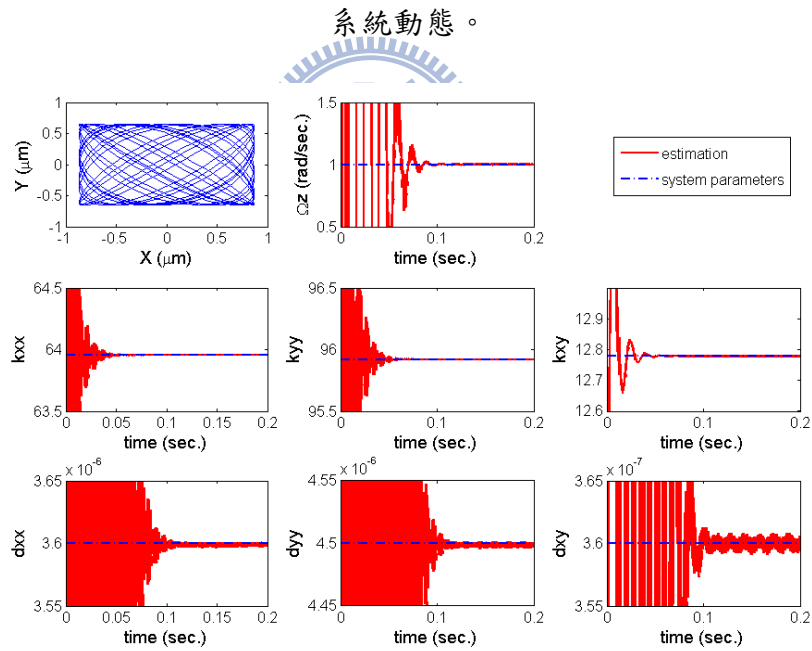


圖 5.27：加入能量控制，以狀態觀察器搭配參考模型法作控制回授下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。

5.4.4 結果討論

與理想陀螺儀量測感測軸振幅的方法相較之下，估測角速度感測受到雜訊的影響更嚴重，主要原因有兩點：(1) 量測雜訊在參數估測中會直接透過 e_x 與 e_y 影響估測準確

度；(2) 量測雜訊會透過回授控制訊號進入系統中，影響系統動態(也間接影響到估測動態)，而在本方法的觀察器或適應控制的參數適應律設計中，參數估測也直接與系統估測動態有關。

第一個原因無法避免，其中一個可能的解決方法如前面介紹，可以加入低通濾波器將雜訊濾除，但勢必引入某些程度的相位落後，然而，使用低通濾波器除了造成相位落後外，其頻寬也將決定系統的感測頻寬，某些程度上也影響了角速度量測的精確度/解析度。理論上通帶愈寬感測頻寬愈快，但通過的雜訊也愈多；而通帶越窄感測頻寬越慢，但相對的角速度估測將愈不易受到雜訊影響而愈精確。另外一個可能的解決方法，則是使用不同的演算法設計觀察器，如具雜訊抑制功能的擴增型卡曼濾波器，如圖 5.28 所示，在速度量測訊噪比約為 10，系統以 1 rad/sec.的角速度轉動下，以擴增型卡曼濾波器設計之觀察器，其角速度估測精確度明顯優於以本論文之設計為基礎的估測精確度。

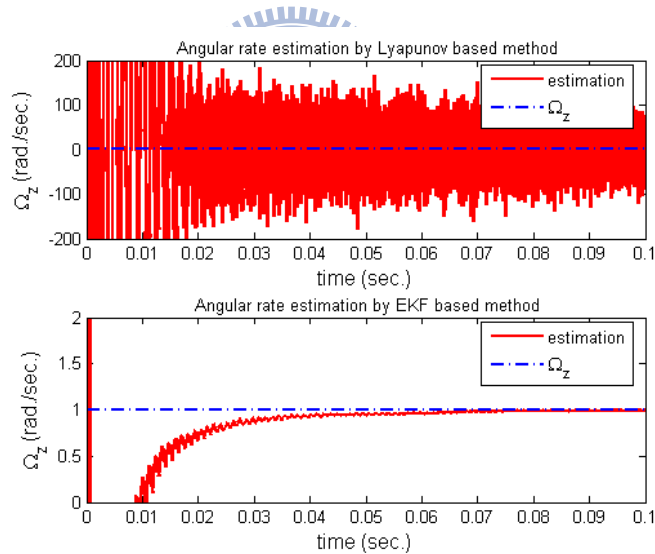


圖 5.28：在速度量測訊噪比約為 10 的情況下，以不同演算法設計觀察器增益所估測到之角速度。上圖使用本論文之控制器，下圖使用擴增型卡曼濾波器。

第二個原因牽涉到回授控制法則的設計，有機會透過更適當的設計來最佳化，由圖 5.15 中的角速度估測受雜訊影響的程度，明顯較圖 5.20 中直接以狀態回授控制估測的角速度要嚴重許多可以看出。以適應控制法為例，我們係使用順滑模態選擇控制回授，在順滑模態控制設計中順滑層大小的設計，影響控制的切換頻率、控制力的大小等，理論

上若控制器可以承受高頻切換，則順滑層越小，控制將越精確，當然相對的控制輸入也會越大。透過以下的數值模擬來說明。順滑層厚度不同於 5.4.1 節中設計的 0.1，圖 5.29(a) 與圖 5.29(b) 分別採用 $\rho = 0.01$ 與 $\nu = 0.5$ ，以 $\rho = 0.01$ 的控制器設計中，其角速度估測精確度明顯優於以 $\rho = 0.5$ 的設計。而同樣以圖 5.16 之低通濾波器過濾後，圖 5.29(a) 在 0.5 秒後可達約 $3^\circ/\text{sec}$ 的解析度，而圖 5.29(b) 在 0.5 秒後之解析度約 $7^\circ/\text{sec}$ 。但需要注意的是， $\Phi = 0.01$ 的設計在 0.1 秒以前估測的震盪在過濾後最大約為 $1160^\circ/\text{sec}$ ，而 $\Phi = 0.5$ 的設計則約 $600^\circ/\text{sec}$ (未顯示在圖上)，因此無可避免的，在順滑層越小的設計下，其控制震盪將越劇烈，控制輸入也越大。

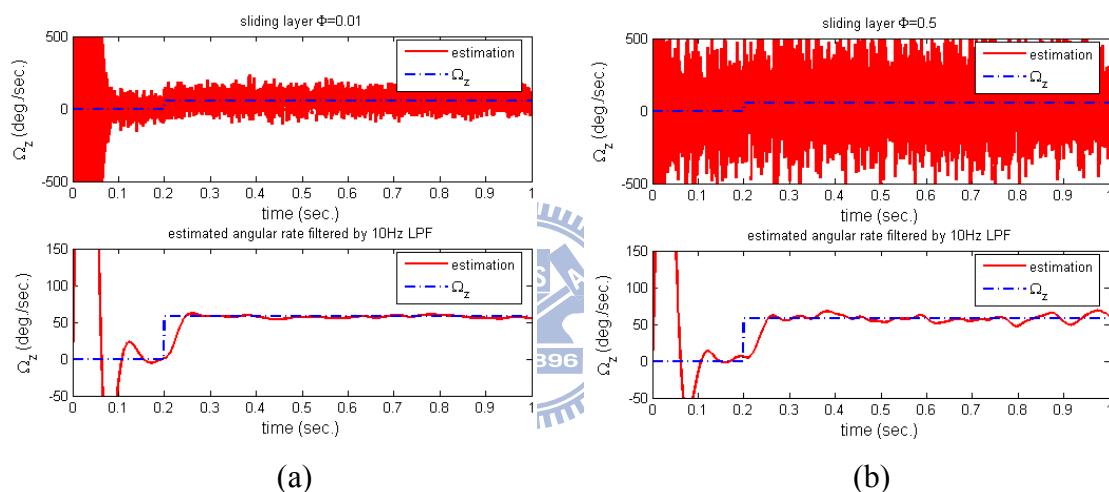


圖 5.29：適應性順滑模態控制法中，不同順滑層厚度對角速度估測精確度之影響。(a) 順滑層厚度為 0.01；(b) 順滑層厚度為 0.5。

藉由前兩節的模擬，印證了本論文提出的新式控制器可以達成一般適應控制法的功能，但因為控制設計的不同，圖 5.14 與圖 5.18 之軌跡略有不同，原因是適應控制法是將系統控制到參考模型上，因此受控系統動態將確實被控制到參考模型上，也就是說，在適應控制法中，甚至可以透過參考模型的初始值決定系統運動的軌跡，而本論文提出的替代方法，則是將系統動態補償到期望的振動頻率上，並無法精確控制其軌跡。所幸在陀螺儀控制中，主要目的是利用系統動態來達到角速度估測，由前面的推導可知，只要確定系統動態持續有兩個以上頻率，即可達成正確參數估測的目的，精確的軌跡控制並非主要目標，也因此本論文才得以發展出阻尼補償等其他回授控制方式。

在比較不同回授方法的模擬中，若將參考模型法的兩個頻率皆設定為 3 kHz，模擬結果將如圖 5.30 與圖 5.31。由圖 5.30 的 X 與 Y 或由圖 5.31 左上角的振動軌跡可以知道，在此控制下的系統動態僅有一個頻率，而在動態只存在一個頻率的情況下，系統為不可觀察，因此系統參數估測皆收斂到錯誤的值。但值得注意的是，如同第三章的證明，只要 $k_{xx} \cdot k_{yy} \neq k_{xy}^2$ ，四個系統動態皆為全域可觀察，因此就算在參數估測皆錯誤的情況下，系統動態的估測仍可以收斂到正確值上。

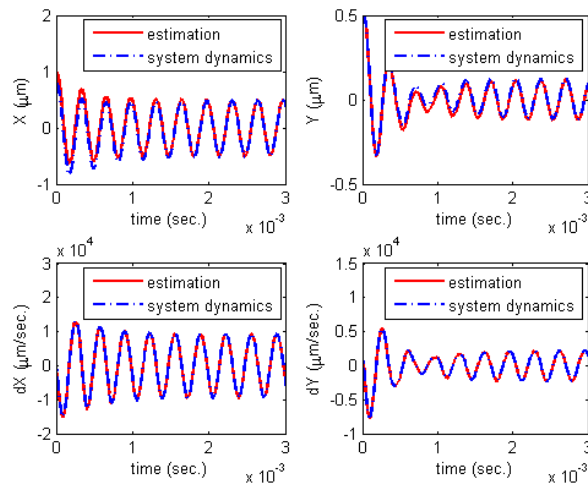


圖 5.30：參考模型法控制中參考模型頻率設定為匹配下，觀察器估測之系統動態。

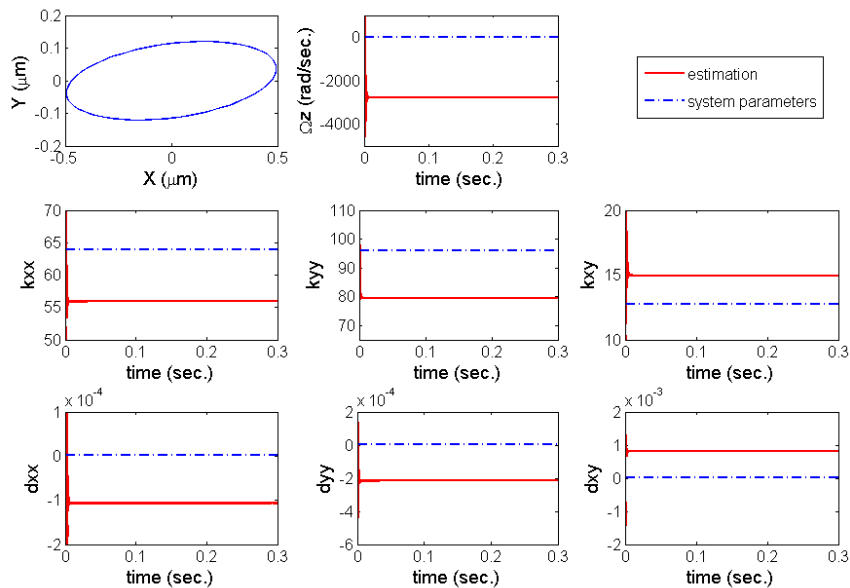


圖 5.31：參考模型之頻率設定為匹配下，控制後之質量塊運動軌跡與觀察器估測之系統參數。

由第三章的證明中，李昂普諾夫候選函數遞減的速度與觀察器增益直接相關，換句話說，整體參數估測收斂的速度與觀察器增益的大小有關，將圖 5.19-5.20 與圖 5.24-5.25 中的參考模型法相比，後者的設計將觀察器增益降為 12，收斂速度也因此明顯變慢。此外，除了觀察器增益會直接影響參數估測的速度以外，系統動態提供的「刺激」也會影響估測，圖 5.24-5.25 的例子中，兩個頻率的差距較圖 5.19-5.20 的例子接近，因此提供較少刺激的情況下，收斂速度也必然會降低。為了更進一步了解這個現象，可以對觀察性矩陣的奇異值來研究此特性。在相同的模擬條件下，圖 5.23、5.25 與 5.27 的觀察性矩陣可以得到如下之分解結果。

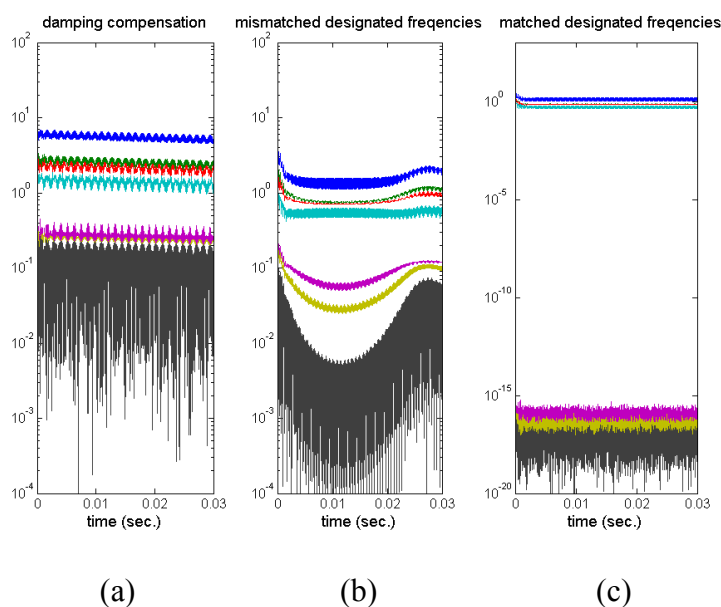


圖 5.32：三個不同控制回授下，觀察性矩陣的奇異值分解。(a) 阻尼補償控制；(b) 兩軸頻率設定不同之參考模型控制；(c) 兩軸頻率設定相同之參考模型控制。

由圖 5.32 可以看出，在參數估測收斂錯誤的例子中，其奇異值最大與最小差距超過 10^{15} (最右邊)，在矩陣的判斷上已經可以判定為非滿秩，因此確實為不可觀察；而參數正確收斂的兩個例子中，收斂速度較快的阻尼補償，奇異值最大與最小差距在 10^2 以內，而收斂速度相對較慢的參考模型法，奇異值最大與最小則接近 10^3 。

六、新式直接角度量測陀螺儀控制系統

本論文提出的新式陀螺儀控制系統，不同於常見的適應控制法，由於將參數估測與回授控制分開設計，在應用上最關鍵的特色，除了可以根據不同需求選擇不同的設計方法以外(如選用擴增型卡曼濾波器以獲得雜訊抑制)，在適當的回授控制下，可以讓控制下的系統動態保留角速度資訊，以達成直接角度量測。值得注意的是，由於角速度為未知參數，無法在參考模型中事先指定，適應控制法中使用參考模型設計的方式將無法直接被使用來達成直接角度量測的目的，換句話說，傳統適應控制法設計的陀螺儀控制系統，其動態中將無法保留轉動角度的資訊，因此，目前並無文獻提出可以同時達成即時參數估測與直接角度量測的陀螺儀系統控制方法。不同於一般需要多個階段「分別」校正陀螺儀變異參數的方法，本論文提出之新式陀螺儀控制系統將可達成線上直接補償的功能。本章將此直接角度量測獨立於前幾章角速度量測的應用，但方法與前述類似，僅需修正回授控制的設計，而理論上在第三章中的每一個模型經過適當的控制修正後，都可適用於直接角度量測。



6.1 新式角度量測系統設計

6.1.1 回授控制設計

同樣可以使用第三章中設計的狀態觀察器與觀察器增益來估測系統狀態，不過為了將動態控制成可用來直接量測轉動的動態，控制輸入則需要進一步修改成：

$$U_t = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \begin{bmatrix} \hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{xy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xx}\hat{x} + \hat{k}_{xy}\hat{y} - k_{Ax}\hat{x} + \eta_x \\ \hat{d}_{xy}\dot{\hat{x}} + \hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{xy}\hat{x} + \hat{k}_{yy}\hat{y} - k_{Ay}\hat{y} + \eta_y \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$U_e = \begin{bmatrix} u_{ex} \\ u_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_x} (\hat{d}_{xx}\dot{\hat{x}} + \hat{k}_{xx}\hat{x} + \hat{k}_{xy}\hat{y} - k_{Ax}\hat{x} + \eta_x) \\ \frac{1}{\hat{\sigma}_y} (\hat{d}_{yy}\dot{\hat{y}} + \hat{k}_{yy}\hat{y} + \hat{k}_{yx}\hat{x} - k_{Ay}\hat{y} + \eta_y) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

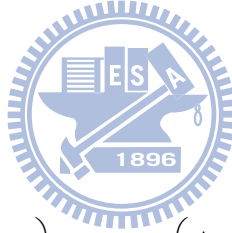
以上的控制輸入與參考模型法類似，差別在不補償科氏加速度項，讓系統動態保留角速度(旋轉角度)資訊，而為了使振動頻率匹配，則必須選擇 $k_{Ax} = k_{Ay} = k$ 。如式(4.29)中的分析，若無輔助控制訊號，此時系統參數估測所需的兩個頻率將僅由角速度造成(詳見式(4.30)之 ω_1 與 ω_2)，因此在物體不轉動時，系統參數將變成不可觀察。所幸輔助訊號 η_x 與 η_y 使系統動態在此滿足了估測所需的條件，使系統參數在角速度為零的情況下仍為可觀察。在兩軸共振頻率匹配下，將由耦合彈性係數或角速度(理論上)產生，但若耦合彈性係數也被消除下，以單一質量塊設計為例，系統估測動態將如下所示：

$$\begin{aligned}\ddot{\hat{x}} + k\hat{x} &= 2\hat{\Omega}_z \dot{\hat{y}} + \eta_x \\ \ddot{\hat{y}} + k\hat{y} &= -2\hat{\Omega}_z \dot{\hat{x}} + \eta_y\end{aligned}\quad (6.3)$$

若令 $\eta_x = \sin(\omega_{ax}t)$ 與 $\eta_y = \sin(\omega_{ay}t)$ ，則上式的解析解為：

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{x}_h + \hat{x}_p \\ \hat{y} &= \hat{y}_h + \hat{y}_p\end{aligned}\quad (6.4)$$

其中



$$\hat{x}_h = \left(\frac{A_{mx}}{2} - \frac{\hat{\Omega}_z A_{mx}}{2\sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}} \right) \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{A_{mx}}{2} + \frac{\hat{\Omega}_z A_{mx}}{2\sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}} \right) \cos(\omega_2 t)$$

$$\hat{x}_p = G_{x1} \sin(\omega_{ax}t) + G_{x2} \cos(\omega_{ay}t)$$

$$\hat{y}_h = -\left(\frac{kA_{mx}}{2\omega_1 \sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}} \right) \sin(\omega_1 t) + \left(\frac{kA_{mx}}{2\omega_2 \sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}} \right) \sin(\omega_2 t)$$

$$\hat{y}_p = G_{y1} \sin(\omega_{ax}t) + G_{y2} \cos(\omega_{ay}t)$$

$$\omega_1 = \sqrt{k + 2\hat{\Omega}_z^2 + 2\hat{\Omega}_z \sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{k + 2\hat{\Omega}_z^2 - 2\hat{\Omega}_z \sqrt{k + \hat{\Omega}_z^2}}$$

$$G_{x1} = \frac{k - \omega_{ax}^2}{k^2 - 2k\omega_{ax}^2 - 4\hat{\Omega}_z^2 \omega_{ax}^2 + \omega_{ax}^4}, \quad G_{x2} = \frac{2\hat{\Omega}_z \omega_{ay}}{k^2 - 2k\omega_{ay}^2 - 4\hat{\Omega}_z^2 \omega_{ay}^2 + \omega_{ay}^4}$$

$$G_{y1} = \frac{k - \omega_{ay}^2}{k^2 - 2k\omega_{ay}^2 - 4\hat{\Omega}_z^2\omega_{ay}^2 + \omega_{ay}^4}, \quad G_{y2} = \frac{-2\hat{\Omega}_z\omega_{ax}}{k^2 - 2k\omega_{ax}^2 - 4\hat{\Omega}_z^2\omega_{ax}^2 + \omega_{ax}^4}$$

上式中 \hat{x}_h 與 \hat{y}_h 為齊性解，而 \hat{x}_p 與 \hat{y}_p 為特解。由解析解可以分析出，就算因為轉動角速度太小或為零，而造成 ω_1 與 ω_2 的差距不夠大或剩單一頻率 ($\omega_1 = \omega_2$)，而無法有效幫助參數估測，輔助訊號 η_x 與 η_y 所帶來與不同於系統動態的額外頻率，同樣對前面其他參數的估測有所幫助，甚至在 $\eta_x = \eta_y$ 的情況下，都可以使觀察性矩陣為滿秩。

式(6.3)即是以單一質量塊設計並採(6.1)作為控制輸入的系統估測動態。在使用第三章提出的狀態觀察器與觀察器增益作參數估測，並搭配(6.1)作為回授控制訊號下的系統，其穩定性也已經在上一章證明過，在此不再贅述。

使用理想振動式陀螺儀的動態，搭配式(2.13)來即時計算出轉動角度將可有效避免積分誤差，但控制下的系統估測動態(6.3)並非所謂的理想動態，無法直接用其動態來計算轉動角度。為此將需要額外的訊號處理方法，以下提出兩種方法。

6.1.2 方法一：應用低通濾波器之架構

當 $\hat{\Omega}_z = 0$ 與 $\eta_x = \eta_y = 0$ 的特殊狀況下，式(6.3)的解可以用以下的方式表示：

$$\begin{aligned} \hat{x} &= a \cos \theta \cos \phi - b \sin \theta \sin \phi \\ \hat{y} &= a \cos \theta \sin \phi + b \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\hat{x}} &= \sqrt{k}(-a \sin \theta \cos \phi - b \cos \theta \sin \phi) \\ \dot{\hat{y}} &= \sqrt{k}(-a \sin \theta \sin \phi + b \cos \theta \cos \phi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中 $\theta = \sqrt{k}t + \theta_0$ ； a 、 b 、 ϕ 與 θ 為常數，其大小與初始值有關。上式的示意圖如下，

其中 a 與 b 分別為橢圓的長軸與短軸， ϕ 為橢圓相對於 x-y 座標軸的角度。

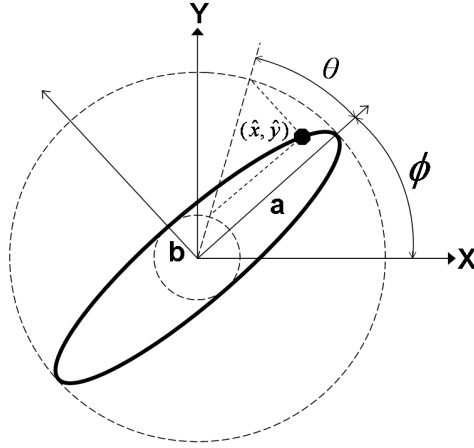


圖 6.1：當系統無旋轉以及輔助訊號為零時之陀螺儀質量塊振動軌跡。[34]

B. Friedland 與 M. Hutton 在[34]分析陀螺儀動態，提出了理想與包含非理想效應下陀螺儀動態的解析解(但都是在沒有 η_x 與 η_y 的狀況下)，除了 a 、 b 、 ϕ 與 θ 為時變外，該解析解的形式與式(6.4)相同。為了分析含有輔助訊號的系統動態，可以仿效其分析過程。

在 a 、 b 、 ϕ 與 θ 為時變的情況下，式(6.3)的解可以用另一種方式表示如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\Omega}_z b \sin 2\theta \\ \hat{\Omega}_z a \sin 2\theta \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\hat{\Omega}_z (b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta)}{a^2 - b^2} \\ \frac{-2\hat{\Omega}_z ab \cos 2\theta}{a^2 - b^2} + \sqrt{k} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{-1}{\sqrt{k}(a^2 - b^2)} \begin{bmatrix} -b \cos \theta & a \sin \theta \\ a \cos \theta & -b \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

其中 $\dot{\phi}$ 可以再進一步歸納成：

$$\dot{\phi} = -\hat{\Omega}_z + F_{1H} + F_{2H} \quad (6.7)$$

而上式中的 F_{1H} 與 F_{2H} 為

$$F_{1H} = \frac{\hat{\Omega}_z \cos 2\theta (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$$

$$F_{2H} = \frac{-1}{\sqrt{k}(a^2 - b^2)} \begin{bmatrix} -b \cos \theta & a \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}$$

大多數的微機電陀螺儀可量測的角速度頻寬約在 100 Hz 以內 [4]，因此若將質量塊的振動(\sqrt{k})操作在遠高於這個頻率範圍，根據式(6.6)， $\dot{\theta} \approx \sqrt{k}$ 。另外在式(6.7)中， $\hat{\Omega}_z$ 顯然是頻率最低的訊號； F_{1H} 為 $\hat{\Omega}_z$ 經過 $2\sqrt{k}$ 調變後的高頻訊號；而 F_{2H} 為 η_x 與 η_y 經過 \sqrt{k} 與 $\hat{\Omega}_z$ 混頻後的高頻訊號。因此，若將輔助訊號 η_x 與 η_y 設計在遠離 \sqrt{k} 與 Ω_z 的頻率上，其混合出來的頻率將不會落到低頻的部份(也就是角速度的頻率範圍)。換句話說，只要選用適當的低通濾波器，就可以將 $\hat{\Omega}_z$ 從 $\dot{\phi}$ 中過濾出來：

$$\phi = \int \dot{\phi} dt = \int -\hat{\Omega}_z dt + \int F_{1H}(\bullet) dt + \int F_{2H}(\bullet) dt \quad (6.8)$$

$$\int -\hat{\Omega}_z dt = LPF(\phi)$$

其中 $LPF(\bullet)$ 表示通過低通濾波器的訊號。經由以上分析可以知道，就算原本的理想動態中額外多了輔助訊號，並非理想動態，但只要適當地限制輔助訊號的頻率範圍，其在系統動態造成的影響將可以用簡單的低通濾波器來濾除。

值得注意的是，要求得轉動角度並不需要如上述程序般(先利用系統動態求出 $\dot{\phi}$ ，再過濾式(6.7)，並積分過濾後的訊號來求得轉動角度)，而可以直接將估測到的系統動態帶入如式(1.27)的關係式，而直接計算出轉動角度：

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(k \cdot \hat{x} \cdot \hat{y} + \dot{\hat{x}} \cdot \dot{\hat{y}})}{k(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + (\dot{\hat{x}}^2 - \dot{\hat{y}}^2)} \quad (6.9)$$

因此在不透過積分的情況下，可以用即時的估測動態求得即時的角速度，如此將大幅減低積分造成的誤差累積。

綜合以上討論，本訊號處理方法的架構圖如下所示：

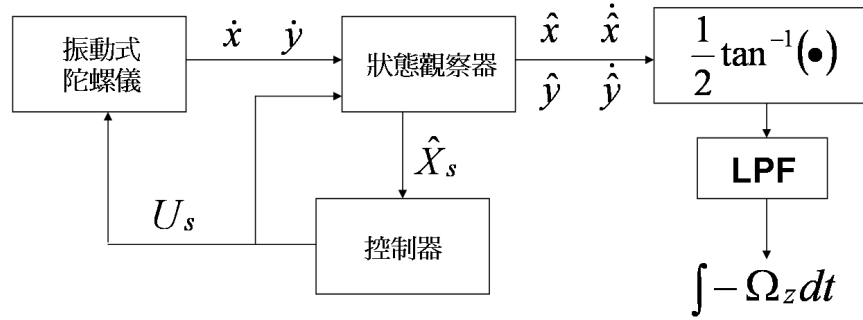


圖 6.2：應用低通濾波器之訊號處理架構。

藉由本論文提出的新式控制系統設計，我們可以一邊補償系統瑕疵並將陀螺儀質量塊的振動控制到指定的頻率上，一邊利用狀態觀察器估測出質量塊的完整狀態；而估測狀態中的動態可以用來計算轉動角度，如式(6.9)所示；計算出來的結果再經過低通濾波器處理，處理後的訊號理論上將與直接積分估測狀態中的角速度所得到的結果一樣，如式(6.8)所示。但需要注意的是，式(6.9)是以估測動態計算轉動角度，所以算出來的角度應為「估測角度」($\hat{\phi}$ ，即 $\int -\hat{\Omega}_z dt$)，如果狀態觀察器可以正確的估測出所有狀態(包含角速度)，即 $\hat{\Omega}_z \rightarrow \Omega_z$ ，本方法就可以成功地計算出轉動角度(ϕ ，即 $\int -\Omega_z dt$)，而不需要透過積分運算。

6.1.3 方法二：應用帶通濾波器之架構

不同於上述的分析，式(6.3)的解析解(6.4)所示，若 $\hat{\Omega}_z$ 具有非零的頻率，在 \hat{x}_h 與 \hat{y}_h 都為 $\hat{\Omega}_z$ 經過 \sqrt{k} 調變後的高頻訊號，而 \hat{x}_p 與 \hat{y}_p 的頻率則視輔助訊號 η_x 與 η_y 的選擇而定。如上一節所述，可以將輔助訊號設計在遠離 \sqrt{k} 與 Ω_z 的頻率上，如此一來，輔助訊號的影響將可以在 \hat{x} 與 \hat{y} 中被消除：

$$\begin{aligned}\hat{x}_h &= BPF(\hat{x}) \\ \hat{y}_h &= BPF(\hat{y})\end{aligned}\tag{6.10}$$

其中 $BPF(\bullet)$ 表示通過帶通濾波器的訊號。因此透過帶通濾波器的使用，可以從含有輔助訊號的狀況下直接擷取出如式(2.12)的理想動態，而直接計算轉動角度。訊號處理方法的架構圖如下所示：

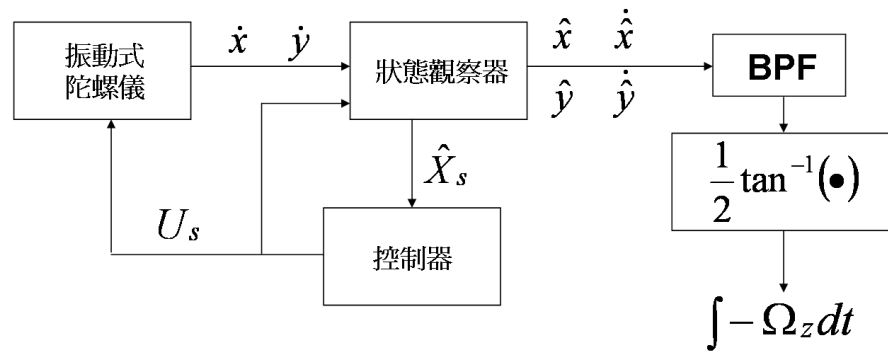
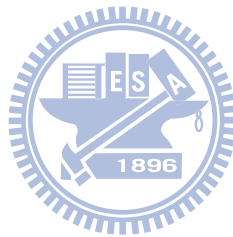


圖 6.3：應用帶通濾波器之訊號處理架構。



七、直接角度量測陀螺儀控制系統模擬

7.1 直接角度量測

以表 5.1 為模擬參數之單一質量塊設計為例，同樣使用(4.4)的狀態觀察器，以(4.11)的觀察器增益，並搭配(6.1)中的 U_t 作為控制回授。系統從 0.5 秒開始以 $200\sin(2\pi \times 10t)$ $^\circ/\text{sec}$ 的變動角速度旋轉，其他控制器相關參數則以 $l_{231} = l_{242} = 20$ 、 $\eta_x = \eta_y = 7.277\sin(2\pi \times 500t)\mu\text{N}$ 的設計，而兩軸的參考頻率設定匹配，皆為 3.2 kHz。此處使用參考模型法，並且為了將陀螺儀動態控制成理想動態，兩軸的參考頻率被設定為匹配，依照第三章的證明，此頻率的選擇將使觀察器無法正確地估測到所有系統參數，但所幸有輔助訊號額外的頻率，除了用來幫助質量塊估測外，更使得其他所有參數皆為可觀察。在速度量測訊噪比為 1000 的情況下，以表 5.1 的參數模擬結果如下：

圖 7.1 為狀態觀察器估測到的系統動態，與第四章的例子一樣，系統動態(為全域可觀察)皆可以被快速且正確地估測到。由 X 與 Y 同樣可以明顯看到一相對低頻(頻率約為 500 Hz)的訊號，其來源為輔助控制訊號。

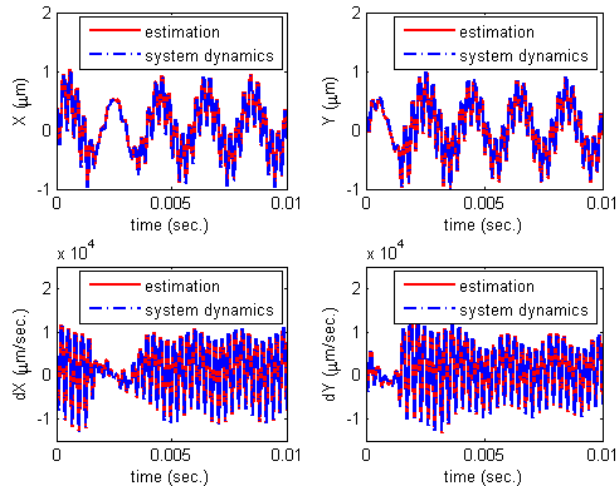


圖 7.1：以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測，狀態觀察器估測之系統動態。

圖 7.2 則為觀察器估測到的系統參數，約在 0.15 秒以內收斂。另外，角速度以弦波

的方式改變的狀況下，估測也可以跟上變動，但同樣嚴重受到雜訊的影響。在這個模擬條件下，0.8 秒以後，角速度估測的標準差為 $217.5^\circ/\text{sec}$ ，而參數(M 、 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為(6.8×10^{-5} 、 1.8×10^{-4} 、 1.6×10^{-4} 、 8.3×10^{-4} 、 0.11 、 6.78×10^{-2} 、 1.4)。

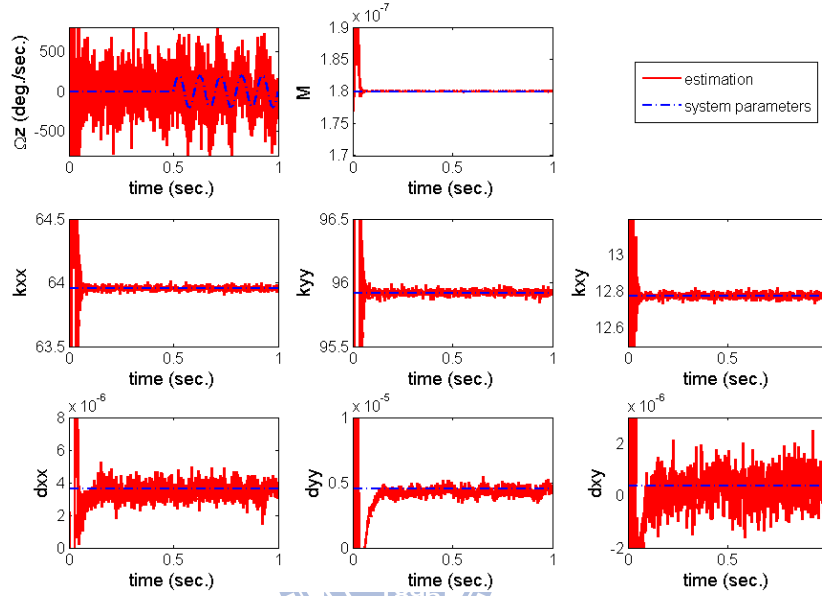


圖 7.2：以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測，狀態觀察器估測之系統參數。

圖 7.3 為控制器作用下，陀螺儀質量塊的運動軌跡(為了更清楚顯示其運動情況，圖中僅畫出 0.7 到 0.75 秒之間的軌跡)。而由此軌跡可以知道，在理想動態中原本的進動被輔助訊號所打亂，因此甚至無法直接「看出」轉動的發生，因此需要更進一步的訊號處理程序。

依照(6.4)的解析解，陀螺儀動態的 3.2 kHz 與輔助訊號的 500 Hz 為相加的方式，因此較直覺的方法應該是直接用帶通濾波器將 3.2 kHz 動態附近的頻率取出，頻寬則由角速度變動頻率(ω_z)決定，理論上在系統被精準的控制下，只要取出 $3.2k \pm \omega_z \text{ Hz}$ 以內的頻率即可。上述的方法即 6.1.3 節所提出的方法二，若以 $3.2k \pm 200 \text{ Hz}$ 的帶通濾波器為例，以過濾後之陀螺儀動態計算角度，結果如圖 7.4。

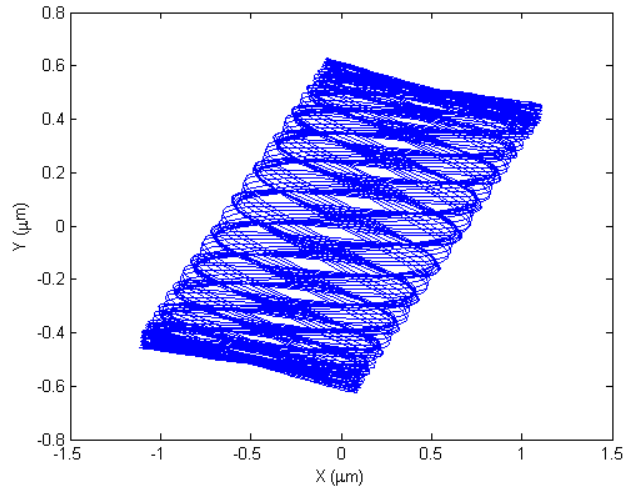


圖 7.3：以單一質量塊設計為基礎之陀螺儀控制，以(6.1)為回授控制作直接角度量測下，質量塊之運動軌跡，X、Y 為旋轉座標。

由圖 7.4(b)上圖可知，實際系統動態(如圖 7.3)在經過帶通濾波器處理之後，重新將過濾後的 x 與 y 軸軌跡畫出來，已經可以明顯看出轉動(密集的扇形部分)，而中間稍微混亂的動態應是在控制過程所造成。而圖 7.4(b)下圖則顯示計算出來的轉動角度，從 0.4 秒開始計算，大致上可以將轉動角度的估測誤差維持在 $1^\circ/\text{sec}$ 以內，但由圖中也可以明顯看到角度估測帶有些微高頻雜訊，應是感測電路中的白雜訊通過帶通濾波器所造成。

另外，也可以使用如 5.1.2 節所提出的方法一來計算轉動角度。如上個例子，頻寬仍由角速度變動頻率(ω_z)決定，若 ω_z 為已知，理論上在系統被精準的控制下，只要取出 ω_z Hz 以內的頻率即可。若以通帶為 200 Hz 的低通濾波器為例，過濾後之轉動角度如圖 7.5。

由圖 7.5(b)上圖可以看到，直接以圖 7.3 的動態計算轉動角度，明顯含有大量高於角速度變動頻率的「雜訊」(此處的雜訊並非感測端的高頻白雜訊，而是由回授控制本身的輔助訊號所引起)，而由圖中仍可看出角度變動的趨勢，在經過低通濾波器處理後(圖 7.5(b)下圖)，轉動角度的估算則相當精確，但依舊存在低通濾波器帶來的相位落後，應用左圖的低通濾波器，在 10 Hz 的訊號下，相位落後約為 8 度。

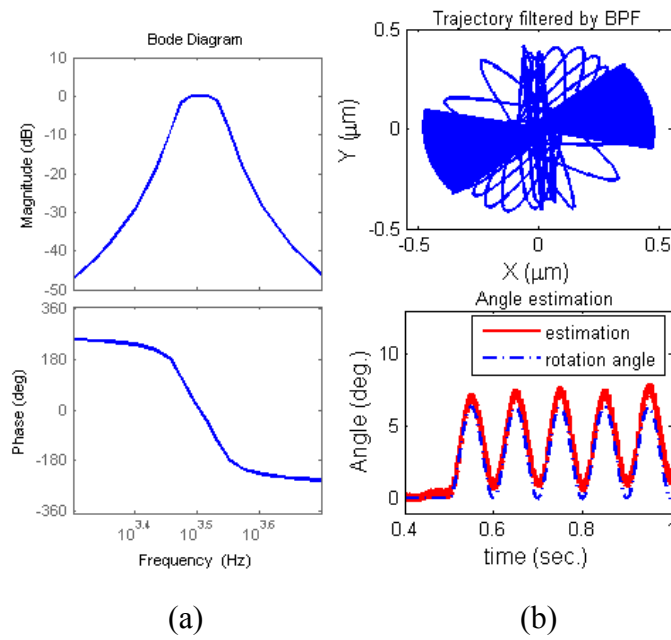


圖 7.4：將控制下之陀螺儀動態以應用帶通濾波器的架構處理後，在經過如(6.9)的關係式計算出轉動角度。(a) 通帶為 3000-3400 Hz 之帶通濾波器頻率響應圖；(b) 上圖為過濾後之假想系統動態；下圖為計算出來的角速度。

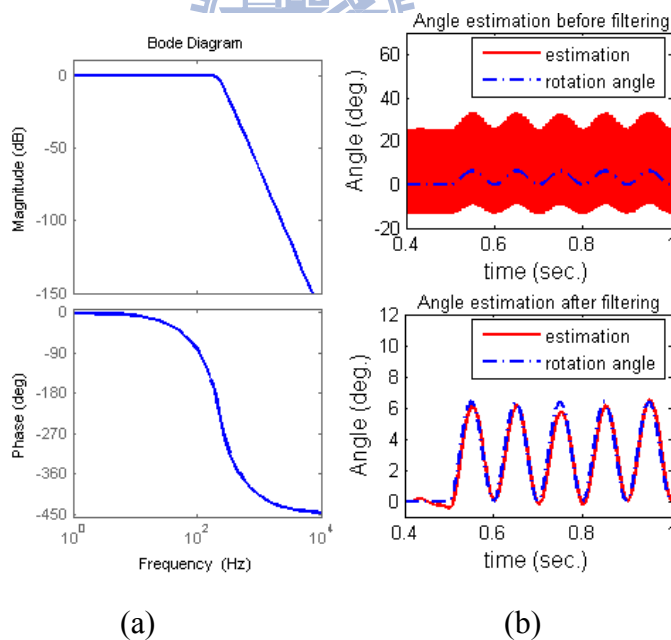


圖 7.5：將控制下之陀螺儀動態直接以(6.9)的關係式計算出轉動角度，再以低通濾波器過濾後之結果。(a) 通帶為 200 Hz 之低通濾波器頻率響應圖；(b) 上圖為以系統動態直接計算的角度；下圖為經過低通濾波器處理後的結果。

為了更進一步了解方法一，可以分析圖 7.5(b)的頻率，如圖 7.6 所示。由圖中大致上可以看到三個集團，即是 200 Hz 以下、2.7 kHz 與 3.7 kHz 以及 6.4 kHz 附近的頻率，根據式(6.7)的推導，這三個集團分別是來自於轉動角度、 F_{2H} 與 F_{1H} ，因此代表轉動角度的低頻訊號將可以使用通帶為 200 Hz 以下的低通濾波器過濾出來。如圖 7.6 的下圖所示。由於濾波器的通帶需求理論上為方法二的一半(模擬中亦設定為方法二的一半)，因此過濾出來的轉動角度明顯較不易受白雜訊的影響。

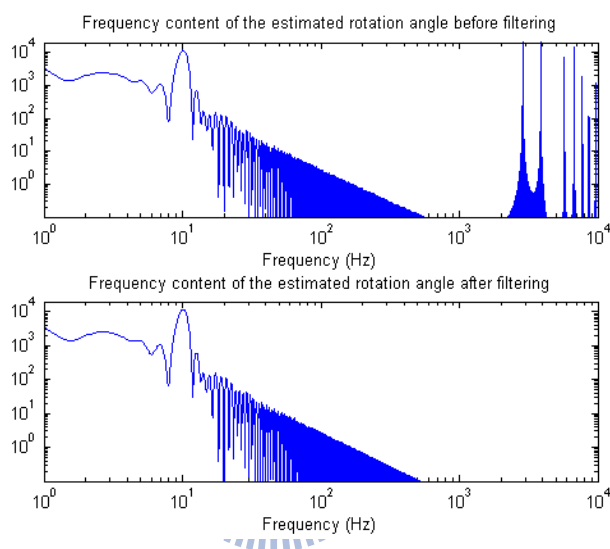


圖 7.6：以方法一作角度計算下之頻譜分析。上圖為經過低通濾波器之前；下圖為經過低通濾波器之後。

另外，直接使用陀螺儀動態計算轉動角度，就是希望避開因對角速度作積分的過程可能造成的誤差累積，因此圖 7.7 將兩者作一比較。為了更清楚比較直接計算與積分的差別，我們將方法一中因低通濾波器造成的相位落後補償回來。由以上的模擬結果顯示，在這個例子中，以方法一所做的角度估算可以得到的估算標準差約為 0.23° ，而由積分估測角速度所得到的結果則在一秒內產生了約 1.5° 的飄移。

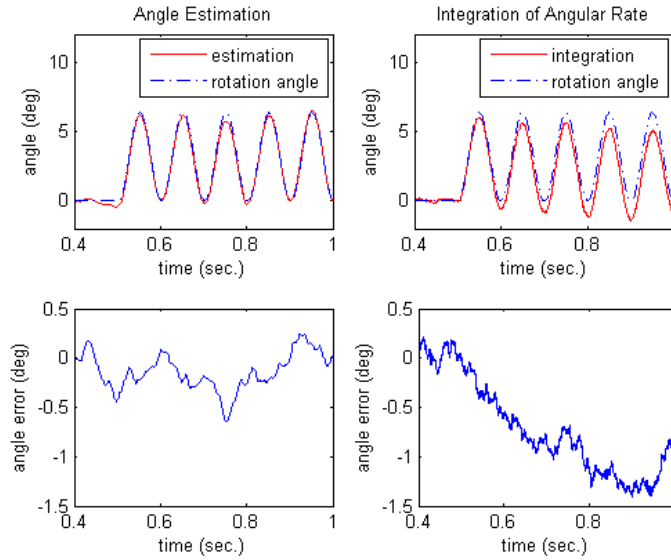


圖 7.7：使用方法一的角速度估算與直接積分估測角速度之比較。

7.2 系統產生變異下之直接角度量測

一般以振動式陀螺儀作直接角度量測的方法都需要離線校正的階段，而本方法以線上直接補償最大的好處就是，一旦在量測過程中系統產生變動，本方法可以在操作狀態下短時間內再度進行補償，並持續進行角度量測的工作。假設操作過程中，因為陀螺儀封裝漏氣或周圍溫度變動造成阻尼係數突然改變，一般方法即需要停機進行校正，否則將引起系統動態的混亂，而使用本方法操作則如以下模擬所示。

與前個例子相同的設計下，角速度在 0.35 秒開始出現變動，並在 0.65 秒後開始以 $200\sin(2\pi \times 10t)$ °/sec 的角速度轉動，而阻尼係數在 0.5 秒時突然發生大幅度的改變時，由圖 7.8 可知，使用本論文提出的方法，可以在短時間內隨即再次估測到變動後新的系統參數，而估測結果同樣受到雜訊的影響。在這個模擬條件下，0.8 秒以後，角速度估測的標準差為 212.9 °/sec，而參數(M 、 k_{xx} 、 k_{yy} 、 k_{xy} 、 d_{xx} 、 d_{yy} 、 d_{xy})估測相對於正確值的誤差為(7×10^{-5} 、 1.9×10^{-4} 、 1.7×10^{-4} 、 7.9×10^{-4} 、0.11、0.07、1.41)。

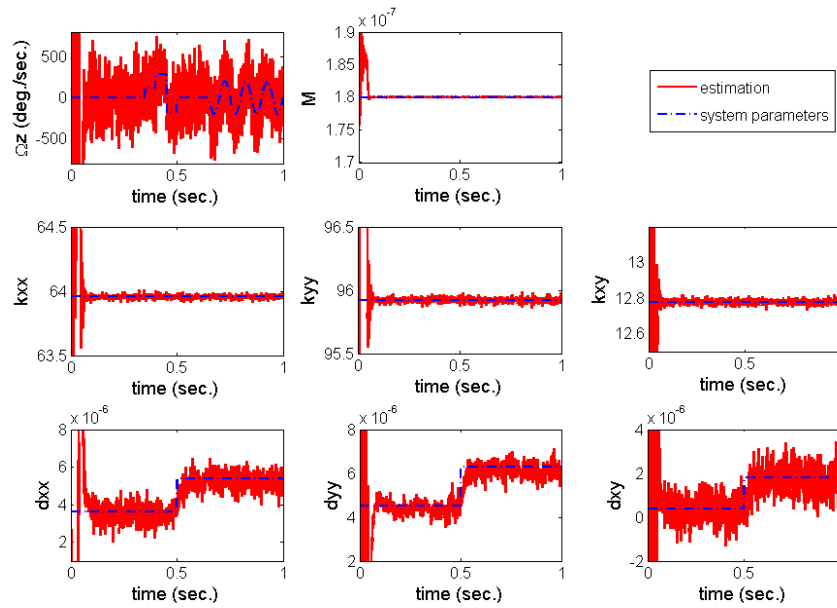


圖 7.8： 使用本論文提出的新式角度量測系統，在阻尼係數因環境變動發生改變下，狀態觀察器估測的系統參數。

圖 7.9 則顯示在這個狀況下，以方法一的估算結果，同樣以圖 7.5(a)的低通濾波器過濾。由圖中可以看到，在 0.5 秒時出現了短暫的偏移，產生約一度的偏差，但在 0.1 秒內隨即又穩定下來，並繼續估算轉動角度，但持續帶有該偏差量。

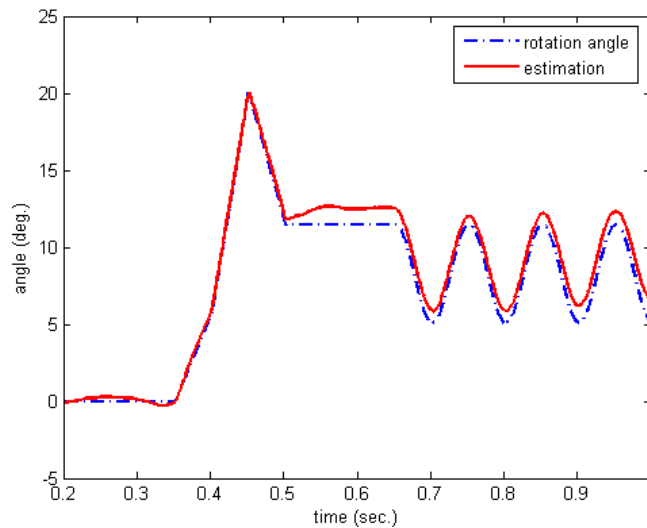


圖 7.9： 使用本論文提出的新式角度量測系統，在 0.5 秒時阻尼係數因環境變動發生改變下，使用方法一做角速度估算的結果。

7.3 結果討論

由圖 7.7 的模擬顯示，以陀螺儀質量塊動態直接估算轉動角度，仍帶有約 0.23° 的誤差，造成誤差的可能原因有兩個：(1) 由於量測雜訊使系統估測「動態」產生誤差，以此帶有誤差的估測動態透過式(6.9)的計算下，同樣可能使角度估算結果也帶有一定的誤差量；(2) 由於量測雜訊使系統估測「參數」產生誤差，因此在使用式(6.1)做回授控制下，並未完全準確地將系統控制成如式(2.12)的理想動態，因而造成角速度估算的錯誤。

為了釐清此問題，我們模擬真正的理想動態，並將該動態加入雜訊後再以式(6.9)進行角速度估算，結果顯示在同樣的雜訊大小下，估測角度的誤差僅約為 0.037° ，因此角度估算誤差應該主要來自於因系統參數估測誤差造成的動態補償誤差，尤其是受量測雜訊影響較嚴重的阻尼項係數。針對這個問題可能的解決方法如先前所提，可以使用較佳的觀察器設計，如擴增型卡曼濾波器，在估測參數較不易受雜訊影響的狀況下，降低受控系統動態與理想動態間的誤差，將可大幅減低角度估算的錯誤。此外，使用方法一與方法二所估算出來的轉動角度略有差別，如圖 7.4 與圖 7.5 所示，理論上方法二所需的頻寬為方法一的兩倍，因此使用低通濾波器的方法一，因受雜訊影響較小，將有較準確的估算結果。

八、 結論與未來方向

8.1 結論

本論文針對微機電振動式陀螺儀設計一套控制系統，以改良的狀態觀察器進行系統動態與參數估測，並依此估測值對陀螺儀進行機械結構與感測電路的瑕疵補償，在搭配適當的控制與訊號處理方法下，可以不透過角速度積分的方式而直接得到物體轉動角度，因此可使用振動式陀螺儀同時作角速度以及角度的量測。本方法所能補償的機械結構瑕疵包括：振動質量塊質量未知、系統剛性係數未知、系統阻尼係數未知、跨軸動態耦合、感測介面的差分電容對不匹配；感測電路瑕疵包括：寄生電容、運算放大器的輸入偏壓、電路雜訊。

本論文所提出的作法是利用一改良狀態觀察器，將陀螺儀的系統動態與系統參數一併估測。所需要的量測訊號僅為質量塊在兩軸方向上的位置或速度，可估測的狀態包括：質量塊在兩軸的位置與速度、振動質量塊質量、主軸與跨軸的剛性係數、主軸與跨軸的阻尼係數、以及上述由感測介面與電路瑕疵所造成的輸出偏差(Bias or drift)訊號。本論文藉由系統觀察性(Observability)來探討正確估測出上述所有未知量的條件：即陀螺儀質量塊軌跡必須存在有兩個(含)以上的頻率；此外，在振動質量塊質量未知的情況下，若要正確估測振動質量塊質量與其他參數，則必須要在回授控制中加入一獨立於系統狀態(State)外的控制訊號。此外，為了以參數估測的方式建立陀螺儀控制系統，受控的單一質量塊設計陀螺儀機械結構必須儘可能設計使兩跨軸的阻尼係數相同，而退耦式雙質量塊設計中兩跨軸阻尼係數必須與兩軸質量大小成正比。然而，在實際系統中不易達成此設計要求下，亦可以採用品質因子較高的設計，降低因跨軸阻尼不相同所造成角速度的估測誤差，由於本論文以參數估測的方式作角速度量測，此舉將不會因提高品質因子而降低感測頻寬。

本論文利用所提出的回授控制法則來控制質量塊軌跡以符合系統參數估測的條件。此外，更可藉由不同控制法則的設計來達到不同質量塊軌跡的實現，進而檢驗不同

軌跡下系統參數估測的性能表現。所實現的軌跡控制包括：類似適應控制設計中使用的參考模型法、直接補償阻尼的方法、以及維持整體能量的控制方法。所得的具體結論包括：(1) 在退耦式陀螺儀設計中，因跨軸的干擾較單一質量塊式設計輕微，若僅以阻尼補償的方法控制，補償後的系統動態將使參數估測的速度較慢，因此必須改以不同的設計方式(加入輔助訊號或搭配能量控制)來提升參數估測速度。(2) 本論文所提出的控制方法可完成參考模型法的質量塊軌跡，其軌跡類似先前文獻的適應控制設計法，惟軌跡的振幅較適應控制法略小，因此可能降低角速度的感測精度。(3) 本論文提出的控制系統有可能因為阻尼項的補償速度太慢，而造成系統能量損耗，使得陀螺儀質量塊的振幅變小甚至停止。在此狀況下，必須採用本論文提出的能量控制法設計，以確保陀螺儀質量塊的操作於最大可能的振幅，以提高角速度的感測精度。

本論文針對所提出的控制方法中的狀態觀察器提出一新式的設計，此設計並可藉由 Lyapunov 直接法來證明其收斂性。除了採用此一觀察器外，本控制方法亦可與其它現有的狀態觀察器進行整合，以獲取其它狀態觀察器的優點。本論文以「擴增型卡曼濾波器」為例進行參數估測，藉由卡曼濾波器具抗雜訊干擾的能力來大幅提升系統參數估測與回授控制的品質。在數值模擬的印證中，相較於陀螺儀以「開路」操作並且假設陀螺儀無機械結構瑕疵與感測電路瑕疵的狀況下，本方法可在陀螺儀所有結構參數都未知(或變動)且感測介面與電路存在瑕疵下，改善角速度感測精確度達六倍；改善角速度的感測頻寬改善達十倍。

傳統的適應控制法設計方法無法應用於陀螺儀的「直接角度量測」中，因為無法事先在參考模型中指定角速度。而本論文所提出的控制方法可以不補償系統的角速度，因此可以在不影響陀螺儀「進動」的條件下補償陀螺儀系統的瑕疵，進而直接獲得角度。在分析此受控系統動態後，本論文亦提出兩種直接角度量測的訊號處理方法，分別為使用低通濾波器與帶通濾波器的架構，兩種架構都可有效由此受控的系統動態中擷取出轉動角度，但低通濾波器的作法較佳因為所需要的頻寬較小，角度量測精度因此較佳。在數值模擬的例子中，以本論文提出的轉動角度估算方法，在角速度以 $200\sin(2\pi \times 10t)^\circ/\text{sec}$ 快速變動下，相較於同樣條件下以角速度積分的結果，本方法可以

有效的獲得轉動角度且無誤差累積的問題。且當系統阻尼係數因環境變異造成 $50\%(d_{xx})$ 、 $40\%(d_{yy})$ 、以及 $400\%(d_{xy})$ 的變動時，本方法仍可在 0.1 秒內完成補償，並繼續角度估算的工作，無須進行離線校正。

8.2 未來方向

在經過本論文的研究探討後，許多相關問題需要更進一步研究與改良，後續相關的研究方向如下：

- 本論文已大幅減少微機電陀螺儀控制系統設計中的假設，但目前我們仍假設量測訊號中的比例(Scale)正確，僅可容許偏移的誤差，為達成線上補償以及免離線校正的陀螺儀控制系統，仍需要設法估測量測訊號中可能的比例誤差；
- 不同的觀察器設計演算法可以進一步使用並比較，以找到較適合實現的方法，解決本論文的設計法易受雜訊影響估測效能，而擴增型卡曼濾波器運算量太大的問題；
- 實驗印證可分為四部份進行：一、首先印證以演算法補償電路瑕疵的部份；二、以離線的方式先印證使用狀態觀察器估測系統參數的方法，並估計取樣頻率的需求，以利最後作線上估測；三、先初步在不進行參數估測下做即時控制，以降低運算量，並測試實際架構於線上控制的適用性；四、最後逐步增加估測參數的數量，以完成全參數估測的目標。

參考文獻

- [1] 易立達高科技網, <http://www.hope.com.tw/>
- [2] 維基百科全書, <http://en.wikipedia.org/wiki/Gyroscope>
- [3] A. M. Shkel, “Micromachined Gyroscopes: Challenges, Design Solutions, and Oppurtunities,” *Smart Structure and Materials 2001, Proceedings of SPIE*, Vol. 4334, pp. 74-85, 2001.
- [4] S.E. Alper and T. Akin, “A Single-Crystal Silicon Symmetrical and Decoupled MEMS Gyroscope on an Insulating Substrate,” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 14, No. 4, pp. 707-717, 2005.
- [5] J.A. Geen, S.J. Sherman, J.F. Chang, and S.R. Lewis, “Single-chip Surface Micromachined Integrated Gyroscope with 50°/h Allan Deviation,” *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 37, No. 12, pp. 1860-1866, 2002.
- [6] A.S. Sharma, F.M. Zaman, B.V. Amini, and F. Ayazi, “A High-Q In-Plane SOI Tuning Fork Gyroscope,” *IEEE Sensors Conference*, pp. 467-470, 2004.
- [7] C. Acar and A. Shkel, *MEMS Vibratory Gyroscopes—Structural Approaches to Improve Robustness*, Springer, 2009.
- [8] S. Park, *Adaptive Control Strategies for MEMS Gyroscopes*, Doctoral Thesis, U.C. Berkeley, 2000.
- [9] M.M. Rodriguez, *Analysis of Structural Damping*, Master Thesis, Lulea University of Technology, Sweden.
- [10] Y.-H. Cho, A.P. Pisano, and R.T. Howe, “Viscous Damping Model for Laterally Oscillation Microstructures,” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 3, No. 2, pp. 81-86, 1994.
- [11] J.B. Starr, “Squeeze-film Damping in Solid-State Accelerometers,” *IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, pp. 44-47, 1990.
- [12] B.E. Boser, “Electronics for Micromachined Inertial Sensors,” *IEEE International Conference on Solid-State Sensors and Actuators (Transducers '97)*, Chicago, USA, pp. 1169-1172, 1997.
- [13] Z. Kádár, *Integrated Resonant Magnetic Field Sensor*, Doctoral Thesis, Delft Univ., 1997.
- [14] A. Bakker, K. Thiele, and J.H. Huijsing, “A CMOS Nested-Chopper Instrumentation Amplifier with 100-nV Offset,” *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 35, No. 12, pp. 1877-1883, 2000.
- [15] T. Murphy, “Using Auto-Zero Amplifiers: Optimizing Circuits with Ultra-Precision Op Amps,” Analog Devices, Inc., 2000.
<http://www.planetanalog.com/showArticle?articleID=12801360>
- [16] C.C. Enz and G.C. Temes, “Circuit Techniques for Reducing the Effects of Op-amp Imperfections: Auto-zeroing, Correlated Double Sampling, and Chopper Stabilization,”

Proc. IEEE, Vol. 84, No. 11, pp.1584-1614, 1996.

- [17] M. Tavakoli and R. Sarpeshkar, "An Offset-Canceling Low-Noise Lock-In Architecture for Capacitive Sensing," *Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 38, No. 2, pp. 244-253, 2003.
- [18] A. M. Shkel, R. T. Howe, and R. Horowitz, "Modeling and Simulation of Micromachined Gyroscopes in the Presence of Imperfection", *Proc. of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM 99)*, San Juan, Puerto Rico, U. S. A., Apr. 19th -21st, 1999, pp. 605-608.
- [19] M.S. Weinberg and A. Kourepenis, "Error Source in In-Plane Silicon Tuning-Fork MEMS Gyroscopes," *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 15, No. 3, pp. 479-491, 2006.
- [20] B. Choi, S. Park, H. Ko, S.-J. Paik, Y. Park, G. Lim, A. Lee, S.-C. Lee, W. Carr, D. Setiadi, R. Mozulay, and D. Cho, "The first sub-degree/hr bias stability, silicon-microfabricated gyroscope," *IEEE International Conference on Solid-State Sensors and Actuators (Transducers '05)*, Seoul, Korea, 2005.
- [21] K. Tanaka, Y. Mochida, M. Sugimoto, K. Moriya, T. Hasegawa, K. Atsuchi and K. Ohwada, "A Micromachined Vibrating Gyroscope," *Sensors and Actuators A*, 50, pp. 111-115, 1995.
- [22] H. Kawai, K.-I. Atsuchi, M. Tamura, and K. Ohwada, "High-resolution microgyroscope using vibratory motion adjustment technology," *Sensors and Actuators A*, 90, pp. 153-159, 2001.
- [23] J. Bernstein, S. Cho, A.T. King, A. Kourepenis, P. Maciel and M. Weinberg, "A Micromachined Comb-Drive Tuning Fork Rate Gyroscope," *MEMS'93*, pp. 143-148, 1993.
- [24] C. Acar and A.M. Shkel, "Inherently Robust Micromachined Gyroscopes With 2-DOF Sense-Mode Oscillator," *Journal of Microelectromechanical systems*, Vol. 15, No. 2, pp. 380-387, 2006.
- [25] C.C. Painter and A.M. Shkel, "Structural and thermal modeling of a z-axis rate integrating gyroscope," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13, pp. 229-237, 2003.
- [26] L. Dong, Q. Zheng and Z. Gao, "On Control System Design for the Conventional Mode of Operation of Vibrational Gyroscopes," *IEEE Sensors Journal*, Vol. 8, pp. 1871-1878, 2008.
- [27] C.C. Painter and A.M. Shkel, "Experimental Evaluation of a Control System for an Absolute Angle Measuring Micromachined Gyroscope," *IEEE Sensors Conference*, pp. 1084-1087, 2005.
- [28] S. Park, R. Horowitz and C.-W. Tan, "Dynamics and Control of a MEMS Angle Measuring Gyroscope," *Sensors and Actuators A*, 144, pp. 56-63, 2008.
- [29] D. Piyabongkarn, R. Rajamani and M. Greminger, "The Development of a MEMS

- Gyroscope for Absolute Angle Measurement,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13, No. 2, pp. 185-195, 2005.
- [30] S. Sung, W.-T. Sung, C. Kim, S. Yun, and Y.J. Lee, “On the Mode-Matched Control of MEMS Vibratory Gyroscope via Phase-Domain Analysis and Design,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 14, No. 4, pp. 446-455, 2009.
 - [31] R.P. Leland, “Adaptive Mode Tuning for Vibrational Gyroscopes,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 2, pp. 242-247, 2003.
 - [32] C. Batur, T. Sreeramreddy and Q. Khasawneh, “Sliding Mode Control of a Simulated MEMS Gyroscope,” *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4160-4165, 2005.
 - [33] A.M. Shkel, R. Horowitz, A.A. Seshia, S. Park and R.T. Howe, “Dynamics and Control of Micromachined Gyroscopes,” *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2119-2124, 1999.
 - [34] B. Friedland and M. Hutton, “Theory and Error Analysis of Vibrating-member Gyroscope,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 4, pp. 545-556, 1978.
 - [35] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice Hall, 1993.
 - [36] Y. Bar-Shalom, X. R. Li and T. Kirubarajan, *Estimation With Applications to Tracking and Navigations*, John Wiley & Sons, 2003.
 - [37] S.K. Spurgeon, “Sliding Mode Observers : A Survey,” *International Journal of Systems Science*, Vol. 39, Issue 8, pp. 751-764, 2008.
 - [38] Q. Xia, M. Rao, Y. Ying, and S.X. Shen, “A New State Estimation Algorithm—Adaptive Fading Kalman Filter,” *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1216-1221, 1992.
 - [39] J.-J.E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
 - [40] X. Yun, C. Aparicio, E.R. Bachmann, and R.B. McGhee, “Implementation and Experimental Results of a Quaternion-Based Kalman Filter for Human Body Motion Tracking,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 317-322, 2005.
 - [41] J.L. Marins, X. Yun, E.R. Bachmann, R.B. McGhee, and M.J. Zyda, “An Extended Kalman Filter for Quaternion-Based Orientation Estimation Using MARG Sensors,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2003-2011, 2001.
 - [42] L.R. Ray, “Nonlinear State and Tire Force Estimation for Advanced Vehicle Control,” *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 117-124, 1995.
 - [43] B.M. Bell and F.W. Cathey, “The Iterated Kalman Filter Update as a Gauss-Newton Method,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 294-297, 1993.