

國立交通大學  
光電工程研究所

博士論文

使用新穎取樣技術之全場外差干涉儀

The full-field heterodyne interferometry  
with novel sampling scheme

研究生：謝鴻志

指導教授：蘇德欽

中華民國 一 百 年 六 月

# 使用新穎取樣技術之全場外差干涉儀

研究生：謝鴻志

指導教授：蘇德欽 教授

國立交通大學 光電工程研究所

## 摘要

以取樣原理的角度來探討全場外差干涉術及其應用在各類物理參數的量測。在取樣頻率滿足 Nyquist 取樣速率的條件下，量測大階高物體表面形貌及折射率分佈等。接著提出並證明在取樣頻率低於 Nyquist 取樣速率的條件，仍然可以還原出原本的信號及其相位。並提出以普通相機來做全場外差干涉術的最佳化取樣條件，並以量測相位延遲做為實驗佐證。

大階高物體之表面形貌的量測方法，是結合雙波長干涉術與外差干涉術。將準直擴束的外差光源入射至 Twyman-Green 干涉儀的光學架構中並得到干涉信號之相位值，之後由兩臂光程差與雙波長的合成波長之相位值的關係進而解得大階高物體之表面形貌。在折射率分佈量測方法中，提出一種斜入射旋光外差干涉術的方式來進行。將旋光外差光源以斜入射角入射至待測樣本表面，反射光在通過檢偏板時產生干涉信號。在得到干涉信號之相位值後，由 Fresnel 公式可推得相位與折射率之間的關係，進而解出二維折射率分佈。

在取樣頻率可低於 Nyquist 取樣速率的理論中，首先以數學模型推導相機擷取干涉信號時的狀況，再利用弦波擬合法計算相位。接著，在推導的過程中，可以用 Fourier transform 及矩陣運算的方式來得到取樣頻率及外差頻率之間的限制條件。而後，在相位解析誤差為  $0.05^\circ$  之下，給定了一組最佳實驗條件。可以做為以普通相機來做全場外差干涉術的一個參考。接著則是利用此最佳實驗條件，以共光程干涉儀的架構來量測二維相位延遲分佈，使外差光束通過待測樣本與檢偏板，將所得到的相位分佈扣除參考信號之相位後，則可求得二維相位延遲分佈。

本論文所提出的量測方法有光學操作簡單、高量測解析度及高重現性等優點。此外，以取樣頻率低於 Nyquist 取樣速率的最佳實驗條件進術量測時，在不失去外差干涉術的準確度之下，可大幅降低實驗所需成本。

# **The full-field heterodyne interferometry**

## **with novel sampling scheme**

Student: Hung-Chih Hsieh

Advisor: Prof. Der-Chin Su

Institute of Electro-Optical Engineering  
National Chiao Tung University

### **Abstract**

In order to apply the heterodyne interferometry to the full-field measurement by using a digital camera, the relations between the camera sampling frequency and the heterodyne frequency are investigated based on the procedures to derive the associated phases. We find that the full-field heterodyne interferometry can be operated whether the sampling conditions meet the Nyquist sampling theorem or not. The large step height and the refractive index distribution are performed in order with the conventional Nyquist sampling theorem. Then, the optimal conditions for a commonly used CCD camera are proposed to reduce the cost. The full-field phase retardation distribution of a wave plate is measured to demonstrate their validities.

To measure the height distribution, an alternative full-field interferometric profilometry is proposed by combining the two-wavelength interferometry and the heterodyne interferometry. A collimated heterodyne light is introduced into a modified Twyman-Green interferometer, and its phase and profile can be obtained. In the measurement of the full-field refractive index distribution, the circular heterodyne light is incident on the sample obliquely. The reflected light passes through an analyzer and its associated phases are derived from the interference signals. The estimated data are substituted into the special equations derived from Fresnel's equations, and the full-field refractive index distribution of the sample can be obtained.

The processes to derive the associated phases from the data of a series of recorded frames are performed, two optimal sampling conditions for a common-used CCD camera are proposed. The full-field phase retardation of a wave plate is measured by using a common path heterodyne interferometry to show the validities.

The above methods have several merits such as easy operation, high resolution and rapid measurement.

## 誌 謝

能夠順利完成這本論文，首先最要感謝的是我的指導老師 蘇德欽教授。自碩士班開始至博士班畢業這七年的研究生活中，老師秉持著「教學本土化，研究國際化」的言教與身教實在令我受益良多，讓我有更開闊的心胸與視野作學術上的研究，並在休閒旅遊與健康保健方面更是有獨特的收穫。

其次，我要感謝實驗室畢業的學長陳彥良博士，本論文前半段都以陳博士發展的理論為基礎所做的進一步研究，也感謝陳博士在我研究的過程中給予的幫助。感謝精密光學量測實驗室(原全像實驗室)的夥伴們，吳旺聰、張巍耀及徐凡等人，在研究、修課及日常生活中的陪伴與協助，有了你們，在實驗室的生活是彩色的，願全像實驗室精神與我們同在。

接著，我要感謝我的家人，母親 楊招英女士，您就像是現代孟母一般，讓我能夠有個良好的學習環境，並且辛苦默默地支持我完成學業；感謝我的姐姐們謝君慧、謝君霞及謝君琳，謝謝妳們替媽媽對我做了良好的管教，除了讓我能夠在學習及成長的路上一路無憂之外，也讓我能夠一直走在正道上。感謝大姐夫陳漢琰先生，謝謝你對我的鼓勵與幫助，讓我對人生中的事情與看法有所長進。還有感謝我家的狗兒子夏夏，謝謝你帶給我們的歡樂，讓我們能輕鬆快樂渡過每一天。

最後，將本論文獻給我在天國的父親 謝文城先生，謝謝爸爸讓我能夠記住做人的道理，謝謝爸爸讓我能夠有勇氣面對人生中的挫折。希望爸爸能夠與我及全家人一同分享此榮耀！

## 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌 謝.....	iii
目 錄.....	iv
圖 目 錄.....	vi
表 目 錄.....	ix
第一章 序論.....	1
參考文獻.....	4
第二章 滿足取樣定理之全場外差干涉術.....	6
2.1 引言.....	6
2.2 取樣定理.....	6
2.3 外差干涉術之原理及外差光源.....	10
2.3.1 外差干涉術原理.....	10
2.3.2 外差光源.....	11
2.4 全場外差干涉術.....	14
2.4.1 信號的擷取.....	14
2.4.2 相位計算.....	17
2.4.3 絕對相位解析方法.....	20
2.5 全場外差干涉術的誤差分析.....	24
2.5.1 相機取樣誤差.....	24
2.5.2 偏極混合誤差.....	25
2.6 小結.....	25
2.7 參考文獻.....	26
第三章 大階高物體之表面形貌之量測.....	29
3.1 引言.....	29
3.2 原理.....	29
3.2.1 干涉信號的相位.....	29
3.2.2 雙波長干涉術方法.....	32
3.3 實驗與結果.....	33
3.4 討論.....	36
3.5 小結.....	37
3.6 參考文獻.....	39
第四章 斜入射量測 GRIN Lens 之折射率分佈.....	42

4.1 引言.....	42
4.2 原理.....	42
4.3 實驗與結果.....	45
4.4 討論.....	47
4.5 小結.....	48
4.6 參考文獻.....	50
第五章 不滿足取樣定理之全場外差干涉術.....	53
5.1 引言.....	53
5.2 擷取干涉信號及相位解析方法.....	54
5.3 取樣頻率的限制條件.....	62
5.3.1 Martix approach.....	62
5.3.2 Fourier transformation approach.....	64
5.4 低取樣時的最佳化取樣條件.....	70
5.4.1 $m$ 對 $r'/r$ 造成的影響.....	70
5.4.2 最佳取樣條件.....	70
5.5 討論.....	72
5.6 小結.....	73
5.7 參考文獻.....	75
第六章 量測四分之一波片之二維相位延遲分佈.....	78
6.1 引言.....	78
6.2 原理.....	79
6.3 實驗與結果.....	82
6.4 討論.....	85
6.5 小結.....	87
6.6 參考文獻.....	88
第七章 結論.....	91
簡    歷.....	93
著    作.....	94

## 圖 目 錄

Fig. 2.1	對連續信號取樣的示意圖.....	7
Fig. 2.2	以圖形表示對時間信號的取樣.....	8
Fig. 2.3	$X_s(f)$ 在頻域空間上取樣的過程.....	8
Fig. 2.4	頻域空間分佈圖 (a) $f_s > 2f_B$ ; (b) $f_s < 2f_B$ .....	9
Fig. 2.5	外加鋸齒波電壓示意圖.....	12
Fig. 2.6	外差光源架構圖.....	13
Fig. 2.7	旋光外差光源架構圖.....	13
Fig. 2.8	相機(a)拍照介面； (b)程式區塊.....	16
Fig. 2.9	在 $n$ 張拍攝影像相對應同一像素上，每個像素皆記錄一序列( $n$ 個)的干涉光強度.....	18
Fig. 2.10	分別引入額外相位( $0^\circ \sim 180^\circ$ )時，光強度之變化情形。 $V_\pi = 148\text{ V}$ ， $V = 120\text{ V}$ .....	22
Fig. 2.11	尋找最接近連續弦波片段斷點處之方法示意圖。(a) $P_{m+1} > C_m + T$ ; (b) $P_{m+1} < C_m + T$ .....	22
Fig. 2.12	於斷點處插入空白補償時段並進行弦波擬合.....	23
Fig. 3.1	本方法的光學系統架構圖。TLD:可調波長二極體雷射； EOM: 電光晶體調制器； FG: 函數產生器； LVA:線性電壓放大器； BE: 準直擴束器； PBS: 偏極分光鏡； Q1, Q2: 四分之一波片； M: 平面鏡； S: 待測樣本； AN: 檢偏鏡； IL: 成像透鏡 C: 快速 CMOS 相機。.....	30
Fig. 3.2	波長為 $\lambda_a = 633.00$ 時之相位分佈圖.....	34
Fig. 3.3	波長為 $\lambda_b = 635.00$ 時之相位分佈圖.....	34
Fig. 3.4	合成波長的相位二維分佈圖.....	35
Fig. 3.5	待測樣本的高度分佈圖.....	35
Fig. 3.6	沿著 Fig. 3.5 中點線所畫出的一維高度分佈圖.....	36
Fig. 3.7	重覆量測之相位誤差結果.....	37



Fig. 4.1	本方法的光學系統架構圖。LS: 雷射光源； EOM: 電光晶體調制器； FG: 函數產生器； LVA: 線性電壓放大器； Q: 四分之一波片； G: 折射率漸變透鏡(GRIN Lens); AN: 檢偏鏡； IL: 成像透鏡； MO: 顯微物鏡； DL: doublet; C: 快速 CMOS 相機。.....	43
Fig. 4.2	GRIN Lens 的二維折射率分佈圖@ $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .....	46
Fig. 4.3	GRIN Lens 的折射率等折射率圖@ $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .....	46
Fig. 4.4	$\Delta n$ 對 $n$ 的關係曲線.....	47
Fig. 4.5	以垂直入射方式量測 GRIN Lens 之二維折射率分布量測結果.....	49
Fig. 5.1	(a)相機取樣頻率高於外差頻率的取樣示意圖；(b)取樣後的取樣點分佈圖.....	55
Fig. 5.2	(a)相機取樣頻率低於外差頻率的取樣示意圖；(b)取樣後的取樣點分佈圖.....	56
Fig. 5.3	本方法的流程圖.....	61
Fig. 5.4	當 $N \geq 3$ 時，不同 $m$ 值，其 $\det(D_0)$ 與 $s$ 的關係.....	63
Fig. 5.5	不同 $f_s$ 及 $f$ 的關係其頻率空間的分佈圖。(a) $f_s > 2f$ ；(b) $f_s = 2f$ ；(c) $f < f_s < 2f$ ；(d) $f_s = f$ ；(e) $f_s = \frac{1}{2}f$ ；(f) $f_s = \frac{N}{2}f$ .....	67
Fig. 5.6	有限長時間頻域空間分佈圖.....	69
Fig. 5.7	不同 $m$ 值之下， $r'/r$ 對 $fa'$ 的關係曲線.....	71
Fig. 5.8	當 $fa' \cong 0.43$ ， $m = 1$ ， $u = 0.5$ ， $n = 8 \text{ bit}$ ，及 $\phi_0 = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, \text{ and } 80^\circ$ 時擬合的相位誤差與 $N$ 的關係.....	72
Fig. 6.1	量測全場相位延遲之光路架構圖。LS：雷射光源；EO：電光晶體調制器；LVA: 線性電壓放大器；FG：訊號產生器；MO：顯微物鏡；PH：針孔；CL：準直透鏡；S：待測樣本；AN：檢偏板；IL：成像透鏡；C：CMOS 相機；PC：個人電腦.....	80
Fig. 6.2	座標分別在(a) (200, 200)及 (b) (375, 200)的相素所得的取樣強度.....	83



Fig. 6.3 (a)全場相位的量測結果；(b) Fig. 6.3(a)中虛線所代表的一維相位延遲曲線.....84



## 表目錄

Table 2.1	相位計算判斷表.....	19
Table 5.1	不同的 $m$ 值其 $r'/r$ 的最大值所對應的 $fa'$ 值.....	71



# 第一章 序論

干涉量測術是基於電磁波的干涉理論[1]，通過檢測相干電磁波的干涉圖樣、頻率、振幅、相位等屬性，將其應用於各種相關量測的技術的統稱。用於實現干涉量測術的儀器被稱作干涉儀[2]。在當今多個科研領域，干涉量測術都發揮著重要作用，包括工程測量學、光纖光學、天文學等。一般而言，利用光學的方式以非破壞性及非接觸性量測光學參數可分為兩大類，即強度型量測[3-5]與相位型量測[6-8]。前者多半是量測入射光及反射光的強度比，由所得的反射率等參數進一步地分析待測物的相關光學參數；而後者則是量測干涉信號的相位，並且由相位與待測物的光學參數之間的關係可得到相對應的光學參數。強度型量測的缺點眾所皆知，極容易受到背景光強度影度的影響造成量測解析度下降。因此，本論文的内容著重於相位型量測的外差干涉術(heterodyne interferometry)。

外差干涉術由於具有快速量測及高精確度等優點，因此被廣泛地應用在距離的量測[9,10]及表面粗糙度檢測[11,12]。在 1990 年代，也將外差干涉術配合全反射的條件來量測液體的折射率[13,14]或是量測磁頭滑動器的飛行高度及其等效複數折射率[15,16]。

在外差干涉術中，其干涉信號為一弦波信號。傳統上是以光偵測器來擷取此干涉信號。光偵測器是屬於單點式的量測，若要得到大範圍的資訊，則必需利用橫向掃瞄的方式來取得二維的資訊。因此，在陣列式感光元件(如 CCD 或 CMOS)發明前，要得到待測物的二維資訊量測是一項十分耗時的工作。即使如此，在外差干涉術中，光偵測器還是有其無法取代的地位。如前段文章所述，外差干涉術為一相位型量測的干涉儀，因此如何得到干涉信號的相位是很重要的課題。當然，目前有許多常見的方式，諸如 four-frame integrating bucket method [17]、N-frame integrating bucket method [18]、Fourier transformation method 等，都廣為一般研究學者所使用。即使這些方法可由擷取到的信號解析出相位，但若將擷取到的信號，在時間軸上依序排列，則會發現無法還原出原本的弦波干涉信號。

因此，弦波擬合法就是很簡單又方便的方式，可以直接用光偵測器擷取干涉信號，再將所擷取到的信號在時間軸上依序排列，則可得到一個弦波信號。最後再由弦波擬合的方式來得到最佳的弦波及相位。在以光偵測器作為擷取信號工作的外差干涉術中，上述解析相位過程十分容易達成。因為以弦波擬合來還原信號的資訊(包含信號的波形及相位)，必需考慮到光偵測器的取樣頻率與被取樣的弦波信號頻率之間的關係。由取樣定理我們可以知道，取樣頻率至少要高於被取樣頻率的兩倍或以上，才可以還原出原本的波形。而這中間常常被忽略的地方就是，取樣原理是假設無限長時間取樣。因此，在實際上當然不可能達成無限長時間取樣的條件，也因此就會造成信號還原及相位解析的誤差。而一般的光偵測器，取樣的頻率可達到 250 MHz 甚至更高，因此其信號還原及相位解析的誤差非常地小，幾乎可以被忽略。

當我們將光偵測器改為 CCD 或 CMOS 相機時，雖然可以直接獲得二維的資訊，可是在解析相位的時候則必需考慮信號還原及相位解析的誤差，就無法像光偵測器一樣將此忽略。因此，在第二章時，首先介紹取樣定理，敘述 Nyquist 取樣速率及取樣頻率與信號還原的關係；其次，說明外差干涉術的基本原理，並且介紹本論文中使用到的外差光源；而後則介紹利用相機做為全場外差干涉術的取樣工具時所使用的控制軟體及程式；接著敘述相位計算及絕對相位計算的方式；最後則是全場外差干涉術的誤差來源估計。

第三章及第四章則根據第二章所提及的全場外差理論及方法所做的應用。第三章則為大階高物體之表面形貌之量測。首先介紹量測的原理，包含干涉信號的相位及利用雙波長干涉術的方法來求得大階高的技術。接著實驗及說明其量測所得到的實驗結果，最後則對誤差做進一步的討論。

第四章則為斜入射量測 GRIN lens 之折射率分佈。本章首先說明量測 GRIN lens 的方法優缺點；而後詳細說明本方法的原理，即 GRIN lens 之折射率與干涉信號相位間的關係。接著實驗及說明其量測所得到的實驗結果，而最後則是對誤差做進一步的分析。

接下來，因為目前 CCD 或 CMOS 的取樣頻率並不像光偵測器一樣可達到 250 MHz 的取樣速率。即使有，成本一定十分高昂，對於想從事全場外差干涉術的研究學者而言，這將是一道很高的門檻。所以窮則變，變則通，前述的 four-frame integrating bucket method 與 N-frame integrating bucket method 的方法，雖然它們取樣後的圖形並不像是弦波信號，但是卻可以用普通的相機來擷取干涉信號，而不需要使用昂貴的科學用快速相機(scientific camera)，降低實驗的成本。

另一個思考的方向，就是弦波擬合法在此方面的應用價值。所以第五章則講述如不滿足取樣定理的全場外差干涉術，並推導出將相機操作在低取樣(取樣頻率低於外差頻率的兩倍)之下的最佳取樣條件。首先以數學模型推導相機擷取干涉信號時的狀況，再利用弦波擬合法計算相位。接著，在推導的過程中，可以用 Fourier transform 及矩陣運算的方式來得到取樣頻率及外差頻率之間的限制條件。而後，在相位解析誤差為  $0.05^\circ$  之下，給定了一組最佳化的實驗條件。可以做為以普通相機來做全場外差干涉術的一個參考。

第六章以第五章所提出的低取樣時的最佳條件來量測四分之一波片的相位延遲，以驗證第五章所提出的理論其正確性。首先講述實驗的原理；接著實驗及說明其實驗結果；最後則為誤差的討論。

在最後一章將對本研究作一個總結。以取樣理論為基礎來看全場外差干涉術，並以弦波擬合法作為相位解析工具，那麼取樣理論不只被局限在 Nyquist 取樣速率的條件，甚至可以被擴充至低取樣的條件，並且大幅降低實驗所需的成本。最後歸納本研究成果之結論。

## 参考文献

1. M. Born and E. Wolf, "Principle of Optics", 7<sup>th</sup> ed. Chap. 7, (Cambridge), 286-411 (1999).
2. P. Hariharan, "Optical interferometry," 2<sup>nd</sup> ed. Chap. 1, (Academic press), 1-6 (2003).
3. M. Lublow and H. J. Lewerenz, "Real-time monitoring of SiO<sub>2</sub>/Si(1 1 1) interlayer etching by Brewster-angle reflectometry," *Surface Science* **602**,1677-1687 (2008)
4. Y. Watanabe and M. Sato, "Three-dimensional wide-field optical coherence tomography using an ultrahigh-speed CMOS camera," *Opt. Commun.* **281**, 1889-1895 (2008).
5. X. Zhou, K. Y. Liu, N. Zhang, and C. Tan, "Simultaneous characterization of the shape and refractive index of transparent living cells by an optical aperture," *Appl. Opt.* **49**, 6416-6424 (2010).
6. J. A. N. Buytaert and J. J. J Dirckx, "Moire profilometry using liquid crystals for projection and demodulation," *Opt. Express* **16**, 179-193 (2008).
7. K. Hibino, B. F. Oreb, P. S. Fairman, and J. Burke, "Simultaneous measurement of surface shape and variation in optical thickness of a transparent parallel plate in wavelength-scanning Fizeau interferometer," *Appl. Opt.* **43**, 1241-1249 (2004).
8. T. Yoshizawa and T. Tomisawa, "Shadow moire topography by means of the phase-shift method," *Opt. Eng.* **32**, 1668-1674 (1993).
9. E. Collett, "Polarized light: fundamentals and applications," (Marcel Dekker, New York), 515-556 (1993).
10. H. Kikuta, K. Iwata, and R. Nagata, "Distance measurement by the wavelength shift of laser diode light", *Appl. Opt.* **25**, 2976-2980 (1986).

11. E. Gelmini, U. Minomi, and F. Docchio, "Tunable, double-wavelength heterodyne detection interferometer for absolute distance measurement", *Opt. Lett.* **19**, 213-215 (1994).
12. G. E. Sommargren, "Optical heterodyne profilometry", *Appl. Opt.* **20**, 610-618 (1981).
13. D. Pantzer, J. Politch, and L. Ek, "Heterodyne profiling instrument for the angstrom region", *Appl. Opt.* **25**, 4168-4172 (1986).
14. D. C. Su, J. Y. Lee, and M. H. Chiu, "New type of liquid refractometer", *Opt. Eng.* **37**, 2795-2797 (1998).
15. C. C. Hsu, K. H. Chen, and D. C. Su, "Normal incidence refractometer", *Opt. Commun.* **218**, 205-211 (2003).
16. B. K. A. Ngoi, K. Venkatakrishnan, and B. Tan, "Scanning laser differential-heterodyne interferometer for flying-height measurement," *Appl. Opt.* **39**, 578-584 (2000).
17. Y. L. Lo, H. W. Chih, C. Y. Yeh, and T. C. Yu, "Full-field heterodyne polariscope with an image signal processing method for principal axis and phase retardation measurements," *Appl. Opt.* **45**, 8006-8012 (2006).
18. O. Sasaki, H. Okazaki, and M. Sakai, "Sinusoidal phase modulating interferometer using the integrating-bucket method," *Appl. Opt.* **26**, 1089-1093 (1987).



## 第二章 滿足取樣定理之全場外差干涉術

### 2.1 引言

外差干涉術已發展成為一項重要的量測工具[1,2]，它具有量測速度快、精確度高及避免背景光雜訊的影響等優點。過去本實驗室的研究是利用電光晶體調制器(electro-optic modulator)產生外差光源[3]，並將其應用於表面輪廓量測[4]、微小位移量測[5]、折射率量測[6,7]、絕對距離量測[8]、小角度[9,10]及液體濃度[11,12]及厚度[13,14]等量測等。然而，上述的研究方法皆為單點的量測，若要得到全場(二維)的資訊，則必須做橫向掃瞄，相當耗時。全場外差干涉術是利用快速相機來做為光偵測器，以擷取全場的干涉信號。而外差干涉信號是屬於強度隨時間變化的弦波信號，因此將相機的每個畫素所擷取到的信號在時間軸上排成一系列可得到每個畫素相對應的弦波信號。此弦波信號的相位大小與待測物的光學參數有關，因此如何解析得到此弦波信號的相位大小為全場外差干涉術的重要課題。除此之外，相較於傳統單點量測的外差干涉術而言，全場外差干涉術因為使用相機做為干涉信號擷取的工具，因此必須考慮到相機的拍照頻率與外差頻率是否滿足取樣定理；本章將根據上述內容進一步說明，首先 2.2 節簡單介紹取樣定理，接著在 2.3 節介紹外差干涉術原理，在 2.4 節中則是對全場外差干涉術的信號擷取及相位解析的方法作探討。

### 2.2 取樣定理[15]

訊號在取樣時常常會引起交疊(aliasing)現象，而導致訊號失真，為了避免這種情形發生，訊號在取樣時之取樣頻率必須不小於有效取樣頻率，至於有效取樣頻率則需參照訊號取樣定理的規定，訊號取樣定理又稱為 Nyquist 取樣定理[16]。

對連續時間的訊號以有規律之區間取樣，可以用一個週期性脈衝函數  $p(t)$  乘上被取樣的連續訊號  $x(t)$  來表示，如 Fig. 2.1 所示。其週期性脈衝函數  $p(t)$  的定義為

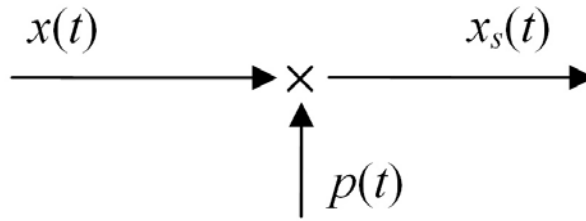


Fig. 2.1 對連續信號取樣的示意圖

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad (2.1)$$

其中  $T_s$  為取樣時間間隔。而取樣過後的信號  $x_s(t)$  則可以數學式表示為

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fig. 2.2 則為對連續時間訊號  $x(t)$  在時域空間的取樣過程示意圖。將時域空間上的取樣訊號  $x_s(t)$  轉換成頻域空間的信號  $X_s(f)$ ，而兩個在時域空間上相乘的信號，轉換到頻域空間時則成為此二信號的捲積(convolution)。因此，將 Eq. (2.2) 做 Fourier transform 可得

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) \otimes P(f) \\ &= X(f) \otimes \left[ \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{T_s}\right) \right] \\ &= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s), \end{aligned} \quad (2.3)$$

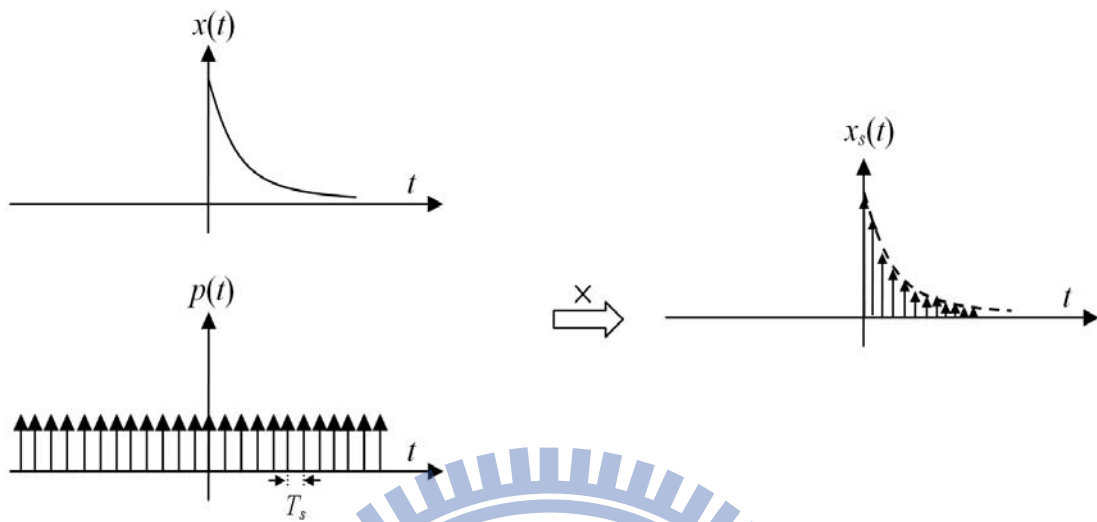


Fig. 2.2 以圖形表示對時間信號的取樣

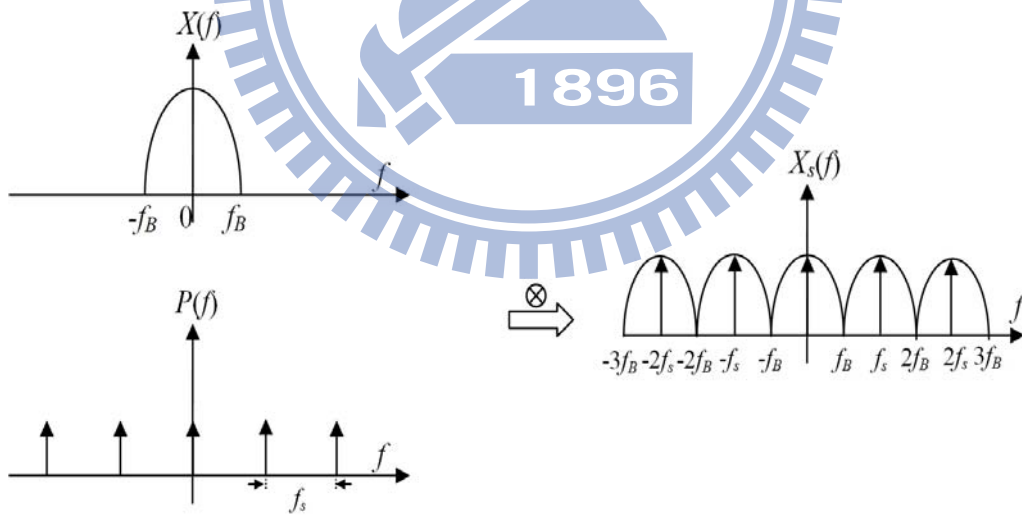


Fig. 2.3  $X_s(f)$  在頻域空間上取樣的過程

其中  $X(f)$  及  $P(f)$  分別為  $x(t)$  及  $p(t)$  的 Fourier transform 後的信號； $f_s = \frac{1}{T_s}$  為取樣頻率。  $X_s(f)$  在頻域空間上取樣的過程，則如 Fig. 2.3 所示。假設  $X(f)$  的最高頻率為  $f_B$ ，頻寬為  $2f_B$ 。當取樣頻率  $f_s = 2f_B$  時，即等於兩倍的最高頻率時，訊號頻譜會依照取樣頻率  $f_s$  為週期，重覆此一訊號頻譜。此時若加上適合的低通濾波器，則可完整的重建原本訊號。若取樣頻率加大，使得  $f_s > 2f_B$ ，如 Fig. 2.4(a) 所示，相鄰頻譜的距離則會加大，更適合低通濾波器擷取訊號，進而完成重建訊號。而當取樣頻率  $f_s < 2f_B$  時，則相鄰頻譜會發生重疊現象，如 Fig. 2.4(b) 所示。此時用濾波器沒辦法擷取出原本的訊號，所以無法還原訊號。因此，為了避免重疊現象的產生，取樣頻率必須大於等於被取樣訊號的最高頻率的兩倍，意即  $f_s \geq 2f_B$ ，此即為 Nyquist 取樣速率(Nyquist sampling rate)[17]。

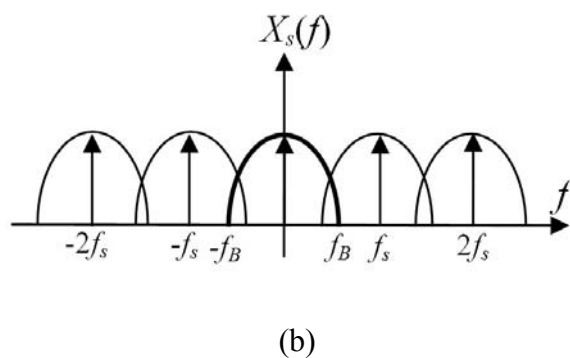
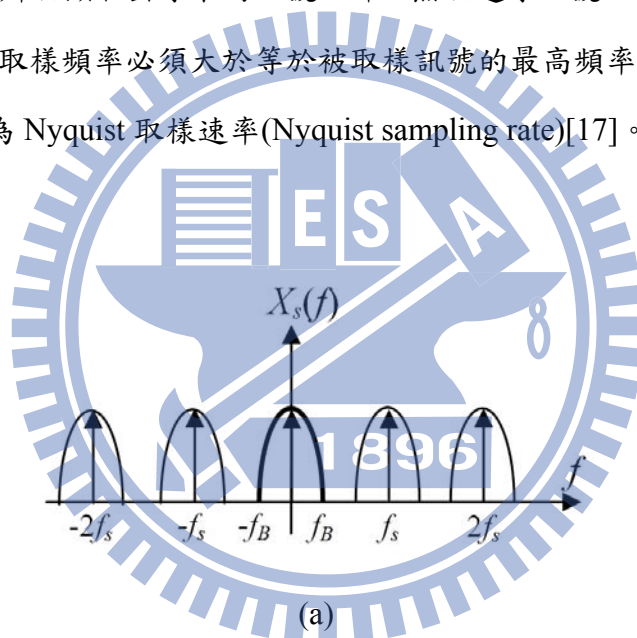


Fig. 2.4 頻域空間分佈圖 (a)  $f_s > 2f_B$  ; (b)  $f_s < 2f_B$

## 2.3 外差干涉術之原理及外差光源

### 2.3.1 外差干涉術原理

在外差干涉術中，假設兩光波的電場形式分別為

$$E_1(t) = a_1 e^{i\omega_1 t} , \quad (2.4)$$

及

$$E_2(t) = a_2 e^{i(\omega_2 t + \phi)} , \quad (2.5)$$

其中  $a_{1,2}$  與  $\omega_{1,2}$  分別表示電場  $E_1$  及  $E_2$  的振幅大小及角頻率， $\phi$  為電場  $E_1$  及  $E_2$  間的相位差大小。當兩波互相重疊干涉時，光偵測器上所得的光強度為

$$\begin{aligned} I(t) &= |E_1 + E_2|^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega t + \phi) \\ &= I_0 [1 + \gamma \cos(2\pi f t + \phi)] , \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中  $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$  為電場  $E_1$  及  $E_2$  間的角頻率差； $f$  為外差頻率，它與  $\omega$  間的關係可表示為  $\omega = 2\pi f$ 。 $I_0$  及  $\gamma$  分別是平均強度及干涉信號的對比度。由於光偵測器輸出的電子訊號強度正比於其接收的光強度，所以處理電子訊號就等同於處理光學干涉訊號。由 Eq. (2.6) 可知干涉訊號為一連續的弦波訊號，兩波的相位差  $\phi$  則被保留在此弦波訊號的相位項裡。將此干涉訊號與一個具有相同角頻率  $\omega$  的參考訊號相互比較後，便可求得  $\phi$  的大小。

### 2.3.2 外差光源

本研究中所使用的外差光源皆以電光晶體調制器作為移頻器，可分為線性外差光源和旋光外差光源，這兩種光源的差別在於旋光外差光源比線性外差光源多加一片四分之一波片，說明如下：

#### (a) 線性外差光源

一般常用的電光晶體材料有 ADP (NH<sub>4</sub>H<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>)、KDP 等[18,19]，當外加電壓於電光晶體時，會使電光晶體產生雙折射效應。此時若有一線性偏振光通過此電光晶體，則 p-偏光及 s-偏光因為雙折射效應，所以受到的折射率亦不同，使得兩偏振光之間產生相位延遲(phase retardation)，其大小為

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{V_z}{V_\pi} \pi, \quad (2.7)$$

其中  $\Gamma_0$  為未加電壓時的相位延遲大小， $V_z$  為外加電壓且  $V_\pi$  為電光晶體的半波電壓。而快軸在水平方向的電光晶體其相位延遲的 Jones 矩陣可寫成[20]

$$EOM(\Gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

若使用一振幅為  $V_\pi$ ，頻率為  $f$ ，波形如 Fig. 2.5 所示之鋸齒波電壓信號  $V_z(t)$  來驅動電光晶體，其數學形式可表示為

$$V_z(t) = \frac{2V_\pi}{T}(t - mT) + (V_b - V_\pi), \quad (2.9)$$

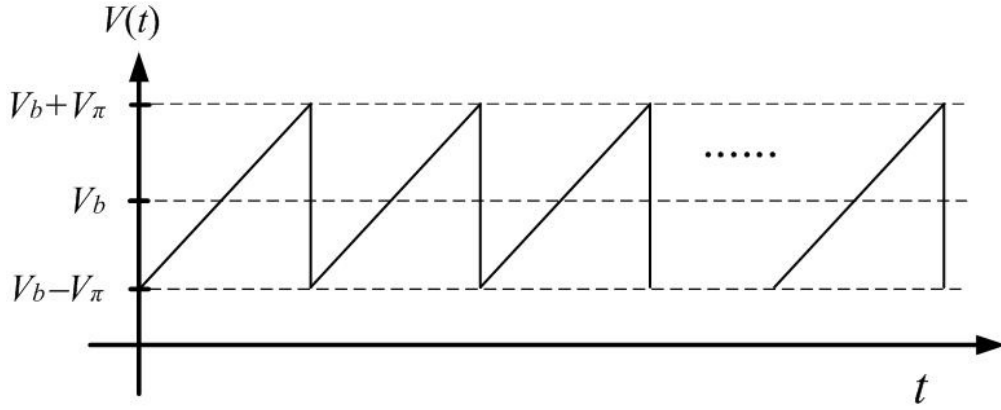


Fig. 2.5 外加鋸齒波電壓示意圖

其中  $mT \leq t \leq (m+1)T$ ， $m$  為整數， $T=1/f$  為鋸齒波訊號之週期， $V_b$  為鋸齒波直流部分。將 Eq. (2.9) 代入 Eq. (2.7) 後，可得隨時間改變的相位延遲量為

$$\Gamma(t) = \frac{2V_\pi}{T}(t - mT) + \pi \left( \frac{V_b - V_\pi}{V_\pi} \right) + \Gamma_0 \quad (2.10)$$

在 Eq. (2.10) 中，可以調整適當的直流電壓  $V_b$  的大小，使得後面兩項為零。此時 Eq. (2.8) 可改寫為

$$EOM(\omega t) = \begin{pmatrix} e^{-im\pi} e^{i\frac{2\pi f}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{im\pi} e^{-i\frac{2\pi f}{2}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

其中  $\omega = 2\pi f$ 。如 Fig. 2.6 所示，為了方便起見，定義  $z$  軸為光前進方向， $y$  軸為紙面向上的方向。若使偏振方向與  $x$  軸夾角為  $45^\circ$  之線性偏振光通過電光晶體



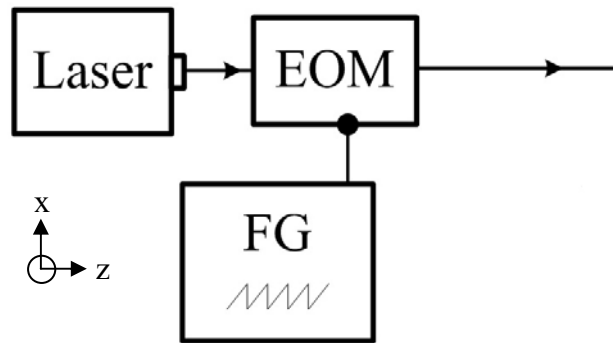


Fig. 2.6 外差光源架構圖

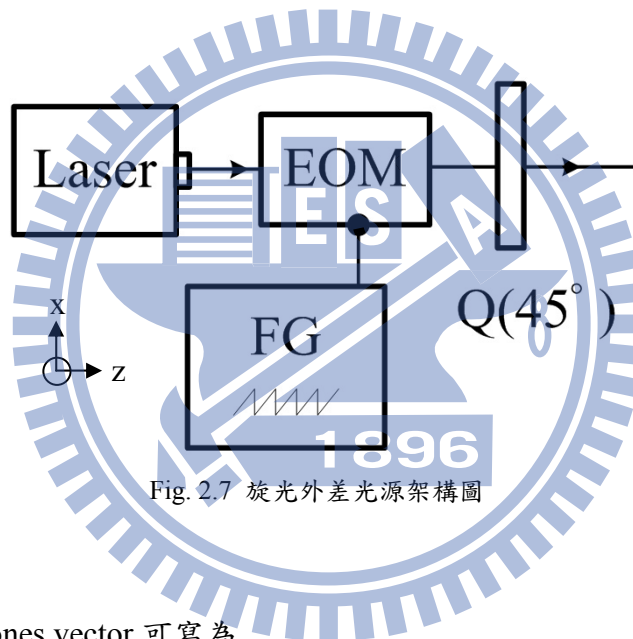


Fig. 2.7 旋光外差光源架構圖

後，其電場的 Jones vector 可寫為

$$\begin{aligned}
 E_0 &= EOM \cdot E_{in} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} \\ e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t},
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中  $\omega_0$  為雷射光的角頻率，而  $E_{in}$  為入射光的電場。由 Eq. (2.12) 可知，經過電光晶體調制的線性偏光會變成在 p-偏光與 s-偏光間具有解頻率差大小為  $\omega$  的線性外差光源。

### (b) 旋光外差光源

本研究中所使用的旋光外差光源同樣是使用電光晶體調制器作為移頻器，其架構如 Fig. 2.7 所示。與線性外差光源的差別在於光通過電光晶體調制器後，加入一快軸與 x 軸夾角為  $45^\circ$  的四分之一波片 Q。因此，若使偏振方向與 x 軸夾角為  $45^\circ$  之線性偏振光通過快軸在 x 軸上的電光晶體及四分之一波片後，電場的 Jones vector 變為[21]

$$\begin{aligned}
 E_{0c} &= Q(45^\circ) \cdot EOM \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}t} e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{i\omega_0 t}, \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

其中  $Q$  為四分之一波片之 Jones 矩陣。在此注意由於我們入射光電場形式選擇為  $e^{i\omega_0 t}$ ，因此 Eq. (2.13) 的第一項為右旋偏光而第二項為左旋偏光，且右旋光與左旋光之間具有  $\omega$  的角頻差，因此稱為旋光外差光源。

## 2.4 全場外差干涉術

### 2.4.1 信號的擷取

根據 2.1 節所述，全場外差干涉術是以快速相機來做為光偵測器，擷取全場的干涉信號。因此，快速相機的拍照控制便成為首要工作。在本研究中，相機的

控制皆由軟體 LabVIEW (National Instruments Corporation) 來執行。

程式的控制畫面 Fig. 2.8(a) 所示。當相機設定好所需拍照張數及拍照存檔的資料夾路徑後，執行程式，則會顯示總拍照時間以及在設定好的資料夾中可找到拍攝的相片資料。Fig. 2.8(b) 則為相機控制程式的程式碼，分為六大步驟：(i) 首先告知 LabVIEW 在電腦上的影像擷取卡的名字(在本研究中為 img0)，並讓 LabVIEW 初始化影像擷取卡，使其呈待命狀態；(ii) 利用迴圈的方式，預先在相機的記憶體上逐一建立欲拍攝相片的空間，包含相片的名字及數目，並設定相片的灰階數為 8 bit，若相機有更高的灰階數則在此處做更改。在此步驟相機還未開始拍攝照片，只是預先建立好檔案及其所需的空間；(iii) 設定相機的拍照方式，在本研究中，我們需要拍攝連續的影像。因此需要以連續擷取(Grab)的方式來拍照；(iv) 利用迴圈的方式，將影像逐一拍攝下來。在開始擷取影像前程式會先紀錄時間，而擷取完畢後程式再記錄一次時間。將兩次時間相減則可得到總拍照時間；(v) 利用迴圈的方式，將拍攝所得的照片逐一命名，並存入電腦中；(vi) 告訴 LabVIEW 結束影像擷取卡的工作。

由於不同介面(如 1394 介面及 camera link 介面)所使用的子函式不同，因此 Fig. 2.8(b) 只適用於 camera link 介面的相機所使用。然而，上述的六大步驟皆適用於不同介面的相機，只是需要找出相對應的子函式來替換。



(a)

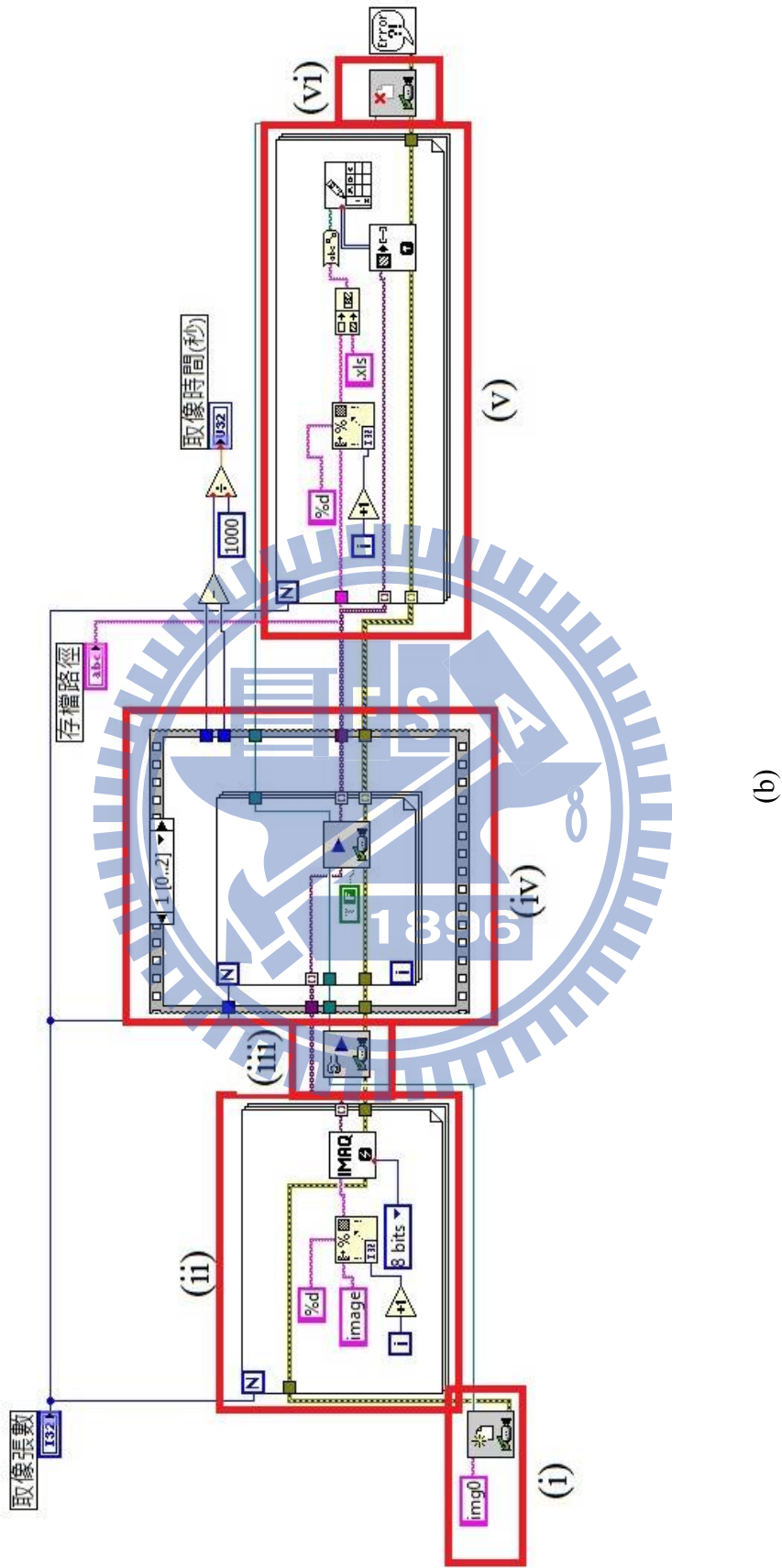


Fig. 2.8 相機的(a)拍照介面；(b)程式區塊

## 2.4.2 相位計算[22]

將相機某個畫素的取樣資料在時間軸上排列，則為一系列的點組合的弦波信號，如 Fig. 2.9 所示。並且可以進一步的用擬合的方式來得到最佳弦波。將此弦波定義為  $I'(t_k)$ ，其方程式可寫為

$$\begin{aligned} I'(t_k) &= A_0 \cos(2\pi ft_k) + B_0 \sin(2\pi ft_k) + C_0, \\ &= \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \cos(2\pi ft_k + \phi') \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中

$$\phi' = \tan^{-1}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right); \quad (2.15)$$

$A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  為常數。根據最小平方方法[23]，可以找出最小的平方差

$$S = \sum_{k=1}^n [I_{kg} - I'(t_k)]^2. \quad (2.16)$$

其中  $I_{kg}$  為實驗上由相機所取得的干涉信號強度值。將上式對  $A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  做偏微分，然後取零，則可以得到一組線性方程式

$$D_0 x = y, \quad (2.17)$$

其中

$$D_0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \cos(2\pi ft_k) & \sum_{k=1}^n \cos^2(2\pi ft_k) & \sum_{k=1}^n \cos(2\pi ft_k) \sin(2\pi ft_k) \\ \sum_{k=1}^n \sin(2\pi ft_k) & \sum_{k=1}^n \cos(2\pi ft_k) \sin(2\pi ft_k) & \sum_{k=1}^n \sin^2(2\pi ft_k) \\ n & \sum_{k=1}^n \cos(2\pi ft_k) & \sum_{k=1}^n \sin(2\pi ft_k) \end{pmatrix}; \quad (2.18)$$

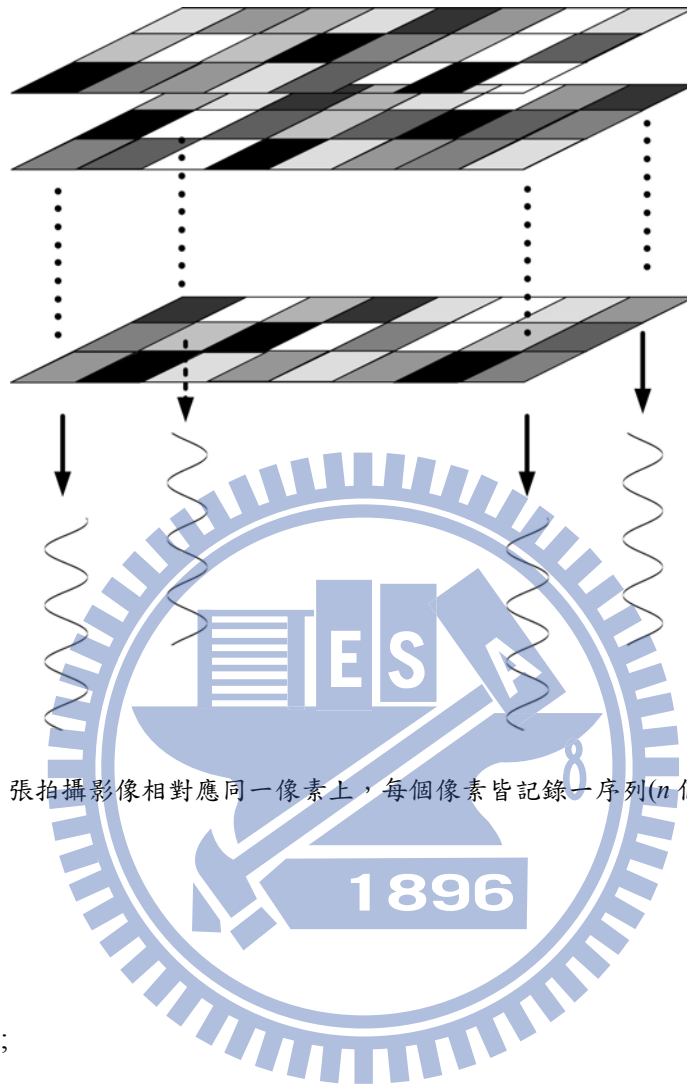


Fig. 2.9 在  $n$  張拍攝影像相對應同一像素上，每個像素皆記錄一序列( $n$  個)的干涉光強度

$$x = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}; \quad (2.19)$$

及

$$y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n I_{kg} \cos(2\pi ft_k) \\ \sum_{k=1}^n I_{kg} \sin(2\pi ft_k) \\ \sum_{k=1}^n I_{kg} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

因此，我們有

$$x = D_0^{-1}y, \quad (2.21)$$

其中  $D_0^{-1}$  表示  $D_0$  的反矩陣。從上式可以算出  $A_0$  及  $B_0$  的大小，並且代入 Eq. (2.15)，即可計算得到該像素  $(x,y)$  位置的相位差值  $\phi(x,y)$ 。若將上述過程用於其他像素上，則可得到全場相位分佈的情形。

Table 2.1 相位計算判斷表

	判斷式	象限判斷	相位計算修正式
if	$\begin{cases} A_0 > 0 \Rightarrow \cos \phi' > 0 \\ B_0 = 0 \Rightarrow \sin \phi' = 0 \end{cases}$	+x 軸	$\phi' = 0$
	$\begin{cases} A_0 > 0 \Rightarrow \cos \phi' > 0 \\ B_0 < 0 \Rightarrow \sin \phi' > 0 \end{cases}$	第一象限	$\phi' = \tan^{-1} \left( -\frac{B_0}{A_0} \right)$
	$\begin{cases} A_0 = 0 \Rightarrow \cos \phi' = 0 \\ B_0 < 0 \Rightarrow \sin \phi' > 0 \end{cases}$	+y 軸	$\phi' = \frac{\pi}{2}$
	$\begin{cases} A_0 < 0 \Rightarrow \cos \phi' < 0 \\ B_0 < 0 \Rightarrow \sin \phi' > 0 \end{cases}$	第二象限	$\phi' = \tan^{-1} \left( -\frac{B_0}{A_0} \right) + \pi$
	$\begin{cases} A_0 < 0 \Rightarrow \cos \phi' < 0 \\ B_0 = 0 \Rightarrow \sin \phi' = 0 \end{cases}$	-x 軸	$\phi' = \pi$
	$\begin{cases} A_0 < 0 \Rightarrow \cos \phi' < 0 \\ B_0 > 0 \Rightarrow \sin \phi' < 0 \end{cases}$	第三象限	$\phi' = \tan^{-1} \left( -\frac{B_0}{A_0} \right) + \pi$
	$\begin{cases} A_0 = 0 \Rightarrow \cos \phi' = 0 \\ B_0 > 0 \Rightarrow \sin \phi' < 0 \end{cases}$	-y 軸	$\phi' = \frac{3\pi}{2}$
	$\begin{cases} A_0 > 0 \Rightarrow \cos \phi' > 0 \\ B_0 > 0 \Rightarrow \sin \phi' < 0 \end{cases}$	第四象限	$\phi' = \tan^{-1} \left( -\frac{B_0}{A_0} \right) + 2\pi$



要特別注意的是計算相位時是利用 Eq. (2.15) 的反正切函數(arctan)來運算，以本研究使用的程式 LabVIEW (National Instruments Corporation) 及 Matlab (MathWorks Inc.) 等而言，反正切函數的值域皆落在  $-\pi/2 \sim \pi/2$  間。這個值域範圍並沒有考慮到  $A_0$  及  $B_0$  的正負號問題，所以在相位計算程式寫作上必需將此問題考慮進去，因此可以將計算相位的值域擴充到  $0 \sim 2\pi$ ，而本研究的相位判斷式列於 Table 2.1 中。而經由 Table 2.1 的相位判斷式計算後的相位其值域為  $0 \sim 2\pi$ ，這並不是唯一的值域範圍，亦可以其它的判斷式將相位的值域代換成  $-\pi \sim \pi$ 。

### 2.4.3 絕對相位的解析方法[24]

如 2.3.2 節介紹，利用調整電光晶體的外加電壓大小可改變外差光源 s-與 p-偏光間的相位延遲，此相位延遲如 Eq. (2.10) 所示。其中  $\Gamma_0$  可經實驗量測並加以扣除，且可將  $V_b$  調整為零。根據上述調整，電光晶體之相位延遲可改寫為

$$\Gamma = \frac{V}{V_\pi} (2\pi f t - 2\pi m - \pi); \quad (2.22)$$

傳統外差干涉儀是操作在外加電壓  $V = V_\pi$  時，因此會得到連續的弦波信號。若給定的外加電壓  $V < V_\pi$ ，則 Eq. (2.22) 可改寫成

$$\Gamma = 2\pi f_0 t - \phi_0; \quad (2.23)$$

其中

$$f_0 = \left(\frac{V}{V_\pi}\right) f, \quad (2.24)$$

且

$$\phi_0 = \left(\frac{V}{V_\pi}\right) (2\pi m + \pi) = \pi \frac{V}{V_\pi}. \quad (2.25)$$

可經由計算得到。當此外差光源再經與 x 軸夾 45° 之檢偏板產生干涉後，在第  $m$  個調制週期( $mT$ )內，其光強度可表示為

$$I(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\Gamma)] = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi f_0 t - \phi_0)], \quad mT \leq t \leq (m+1)T \quad (2.26)$$

Eq. (2.26) 中的光強度以弦波方式變化，而此弦波的頻率為  $f_0$ 。另外，由 Eq. (2.24) 的關係式可知，此弦波頻率  $f_0$  必小於輸入鋸齒波信號頻率  $f$ 。因此在第  $m$  個單一週期( $mT$ )內，EO 之相位延遲必定無法完成  $2\pi$  之變化，而在與其下一週期  $(m+1)T$  之交界處產生斷點，且其弦波干涉信號亦會隨之產生斷點。

由 Eq. (2.25) 可知，於初始狀態且未引入其他相位改變時，斷點處之相位  $\phi_0$  為固定值，其值可由外加電壓及半波電壓的大小的比值得到。當引入其他相位  $\phi$  後，相位延遲量為  $\Gamma + \phi$ ，其干涉信號之相位發生改變，然而斷點出現之時間序列仍然不變，因此於斷點處之相位則會隨之產生改變，此相位改變即為絕對相位值。此時 Eq. (2.26) 可改寫成連續函數方式表示為

$$I(t) = \frac{1}{2} \{ [1 + \cos(2\pi f_0 t - \phi_0 + \phi)] \cdot \text{rect}[(t - 1/2)f] \} * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[t - (m + 1/2)/f]; \quad (2.27)$$

其中  $\text{rect}$  表為矩形函數(rectangular function)，且符號「\*」表示捲積(convolution) 運算。假設  $V_\pi = 148 \text{ V}$  且  $V = 120 \text{ V}$ ，Fig. 2.10 為當 Eq. (2.27) 具有不同的相位改變  $\phi$  時， $I(t)$  之變化情形。要找到斷點的位置，則將 Eq. (2.27) 做二次微分運算，極值(local maximum or minimum) 位置即為斷點(不連續) 位置，依據上述位置可切割每個弦波片段，每個片段均有前斷點及後斷點，上一個片段後斷點與下一個片段前斷點會重合。然而由於相機離散取樣的原因，其取樣結果如 Fig. 2.11 所示，其中「·」代表取樣之處。由於取樣頻率與外差頻率間不一定為整數倍的關係，因此每個片段的前斷點不一定剛好落在函數理想斷點的位置。因此為找出最接近

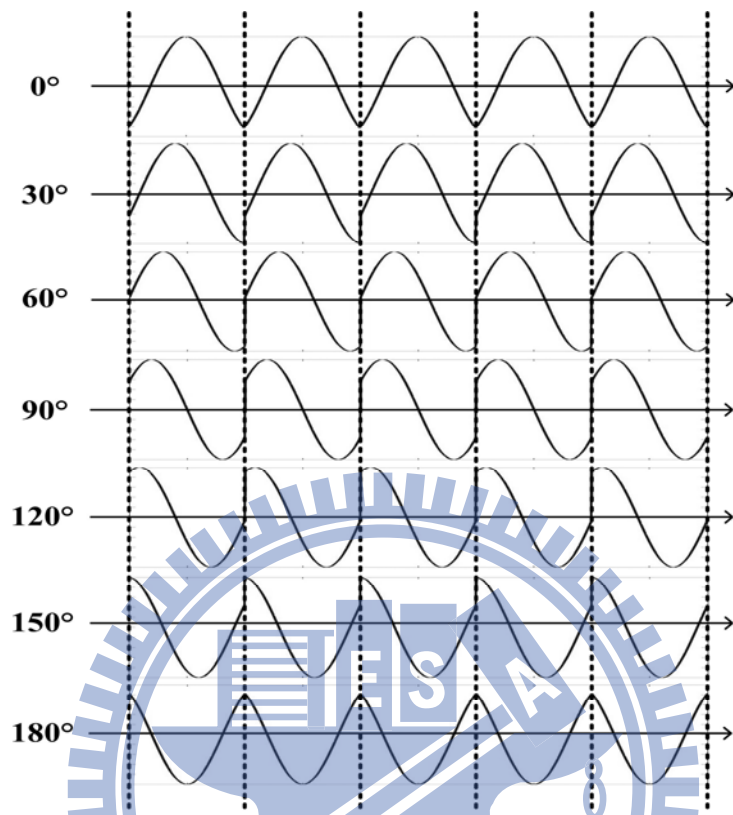


Fig. 2.10 分別引入額外相位(0°~180°)時，光強度之變化情形。 $V_{\pi}=148\text{ V}$ ， $V=120\text{ V}$

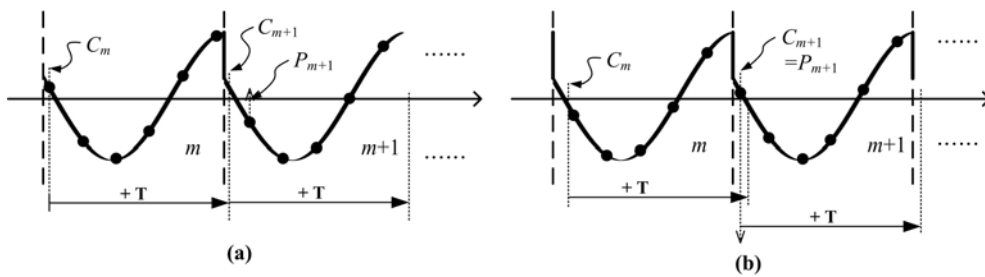


Fig. 2.11 尋找最接近連續弦波片段斷點處之方法示意圖。(a)  $P_{m+1} > C_m + T$  ; (b)

$$P_{m+1} < C_m + T$$

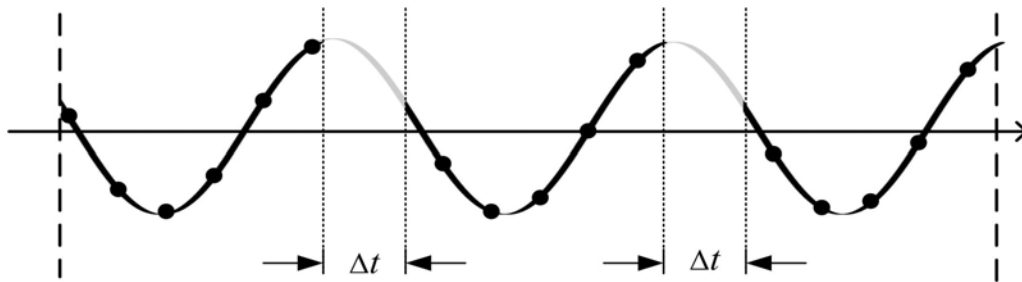


Fig. 2.12 於斷點處插入空白補償時段並進行弦波擬合

連續函數之斷點位置，我們使用疊代法來找出最佳斷點的片段，說明如下：在此先定義  $P_m$  表示取出第  $m$  個弦波片段中之第 1 個取樣點位置，且定義  $C_m$  表示第  $m$  個片段內的時間比較點。假設初始條件  $C_1 = P_1$ ，利用 Eqs. (2.28) 與 (2.29) 聯立判斷式將  $m = 1, 2, 3, \dots$  逐一代入運算後， $C_m$  之值將愈來愈接近連續函數之斷點位置。

$$C_{m+1} = C_m + T, \quad \text{if } P_{m+1} > C_m + T; \quad (2.28)$$

$$C_{m+1} = P_{m+1}, \quad \text{if } P_{m+1} \leq C_m + T. \quad (2.29)$$

Fig. 2.11 為上述兩判斷式之示意圖。其中 Fig. 2.11(a) 表示 Eq. (2.28) 之情形，即若  $P_m$  的時間  $C_m$  加上一個週期  $T$  後，如果比下一個片段的前斷點  $P_{m+1}$  的時間點  $C_{m+1}$  還小的話，那麼就表示  $P_m$  比  $P_{m+1}$  更接近理論的斷點，則將  $P_m$  保留下來繼續與下一個週期的前斷點比較；相反得情形則如 Fig. 2.11(b) 所示，也就是 Eq. (2.29) 之情形，與 Eq. (2.28) 情形相反，若  $P_m$  的時間  $C_m$  加上一個週期  $T$  後，如果比下一個片段的前斷點  $P_{m+1}$  的時間點  $C_{m+1}$  還大的話，那麼就表示  $P_{m+1}$  比  $P_m$  更接近理論的斷點，則將  $P_m$  捨棄，而  $P_{m+1}$  則被選為新的比較點，繼續與下一個週期的前斷點比較。待所有片段皆經上述逐一比較判斷後，找出一個滿足 Eq. (2.28) 與 Eq. (2.29) 之片段  $i$ ，則片段  $i$  即為最接近理論相位之弦波片段。將片段  $i$  做時間軸之位移且使得

$P_i = 0$ ，則片段  $i$  之函數可單獨表示為

$$I_i(t) = \frac{1}{2} \{ [1 + \cos(2\pi f_0 t - \phi_0 + \phi)] \cdot \text{rect}[(t - 1/2)f] \}; \quad (2.30)$$

其餘片段亦進行相同的時間軸位移，並在各斷點處分別插入一空白補償時段  $\Delta t$ ，且  $\Delta t = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}$ ，為弦波理論週期與電壓信號週期之差異，如 Fig. 2.12 所示。

此時可得補償後之波形為

$$I_c(t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\pi f_0 t - \phi_0 + \phi)]. \quad (2.31)$$

將 Fig. 2.12 中各離散點以最小平方擬合法進行弦波擬合，可求出絕對相位改變量  $\phi$ 。

## 2.5 全場外差干涉術的誤差分析

全場外差干涉術的相位量測誤差主要來源有(1)相機取樣誤差，與(2)偏極混合誤差，茲分成以下兩小節加以討論。

### 2.5.1 相機取樣誤差[25]

此項誤差會與外差干涉信號的頻率、相機的記錄時間、拍照頻率、曝光時間以及相機灰階數有關。Jian 等人以數學模型積分運算模擬數位相機的取樣方式，並改變上述與誤差有關的各項變數後，以數值分析方法計算得到相位誤差量的估計值[25]。並且在合理的相位誤差估計值下，提出實驗上外差頻率與取樣頻率比的最佳條件：即取樣頻率為外差頻率的 15 倍。在本論文中，使用 Jian 等人所發表的最佳實驗條件[25]，因此相機取樣誤差  $\Delta\phi_s$  估計約為  $0.036^\circ$ 。

### 2.5.2 偏極混合誤差[26-28]

當光線通過如檢偏板與偏極分光鏡等偏光元件時，常會發生偏極混合 (polarization mixing) 的現象。此項誤差主要是由於光通過偏振片時，s-偏光與 p-偏光的分光不完全所致。假設偏極板調整在 p-偏光方向，則除了主要的 p-偏光會通過之外，還會耦合一小部分的 s-偏光，反之亦然。此偏極混合誤差可根據偏極板產品規格中的消光係數進一步估算其修正量。在本研究中使用的偏極板 (Japan Sigma Koki, Ltd.) 的消光係數為  $1 \times 10^{-5}$ ，經修正後，估計偏極混合誤差可降至  $\Delta\phi_p = 0.03^\circ$  [29]。

## 2.6 小結

在本章中說明了 Nyquist 取樣定理，以及使用電光晶體調制作為移頻器之外差光源種類。接著說明外差干涉術的基本原理及全場量測時的相機控制方法；在相位演算方面則是介紹三參數弦波擬合法及絕對相位測量法。最後則是全場外差干涉術的誤差來源估計。

## 2.7 參考文獻

1. T. Tkaczyk and R. Jozwicki, "Full-field heterodyne interferometer for shape measurement: experimental characteristics of the system," *Opt. Eng.* **42** 2391-2399 (2003).
2. M. C. Pitter, C. W. See and M. G. Somekh, "Full-field heterodyne interference microscope with spatially incoherent illumination," *Opt. Lett.* **29** 1200-1202 (2004).
3. D. C. Su, M. H. Chiu and C. D. Chen, "Simple two frequency laser," *Prec. Eng.* **18** 161-163 (1996).
4. Y. L. Chen, Z. C. Jian, H. C. Hsieh, W. T. Wu, and D. C. Su, "Nano-roughness measurements with a modified Linnik microscope and the uses of full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **47**, 125601 (2008).
5. D. C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, "A heterodyne interferometer using an electro-optic modulator for measuring small displacements", *J. Opt.*, **27**, 19-23 (1996).
6. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Refractive Index Measurement Based on the Effects of the Total Internal Reflection and the Uses of the Heterodyne Interferometry", *Appl. Opt.* **36**, 2936-2939 (1997).
7. D. C. Su, J. Y. Lee, and M. H. Chiu, "New Type of Liquid Refractometer", *Opt. Eng.* **37**, 2795-2797 (1998).
8. J. Y. Lee, M. H. Chiu, and D. C. Su, "Central fringe identification using a heterodyne interferometric technique and a tunable laser-diode", *Opt. Commun.* **128**, 193-196 (1996).
9. M. H. Chiu and D. C. Su, "Angle measurement using total-internal-reflection heterodyne interferometry", *Opt. Eng.* **36**, 1750-1753 (1997).



10. M. H. Chiu and D. C. Su, "Improved technique for measuring small angle", *Appl. Opt.* **36**, 7104-7106 (1997).
11. K. H. Chen, C. C. Hsu, and D. C. Su, "Measurement of the concentration of a solution with the surface plasmon resonance heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **42**, 1884-1887 (2003).
12. K. H. Chen, C. C. Hsu, and D. C. Su, "Interferometric optical sensor for measuring glucose concentration," *Appl. Opt.* **42**, 5774-5776 (2003).
13. Z. C. Jian, C. C. Hsu, and D. C. Su, "Improved technique for measuring refractive index and thickness for a transparent plate," *Opt. Commun.* **226**, 135-140 (2003).
14. K. H. Chen, C. C. Hsu, and D. C. Su, "A method for measuring the complex refractive index and thickness of a thin metal film," *Appl. Phys. B* **77**, 839-842 (2003).
15. H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Trans. AIEE* **47**, 617-644 (1928).
16. B. Widrow, "A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory," *IRE Trans. Circuit theory* **3**, 266-276 (1956).
17. H. J. Landau, "Sampling, data transmission, and the Nyquist rate," *Proc. IEEE* **55**, 1701-1706 (1967).
18. H. Takasaki, M. Isobe, T. Masaki, A. Konda, T. Agatasuma, and Y. Watanable, "An automatic retardation meter for automatic polarimetry by means of an ADP polarization modulator", *Appl. Opt.* **3**, 371-377 (1964).
19. B. H. Billings, "The electro-optic effect in uniaxial crystal of the type  $\text{XH}_2\text{PO}_4$ . I. Theoretical", *J. Opt. Sci. Am.* **39**, 127-133 (1949).
20. A. Yariv and P. Yeh, "*Optical waves in crystals*," (John Wiley & Sons, Inc.), Chap.5, 121-154 (1984).

21. E. Collett, "*Polarized light: fundamentals and applications*," (Marcel Dekker), Chap. 10, 187-218 (1992).
22. H. C. Hsieh, Y. L. Chen, Z. C. Jian, W. T. Wu, and D. C. Su, "Two-wavelength full-field heterodyne interferometric profilometry," *Meas. Sci. Technol.* **20**, 025307 (2009).
23. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters *IEEE Std.* **1241-2000**, 25-29 (2000).
24. Y. L. Chen and D. C. Su, "Method for determining full-field absolute phases in the common-path heterodyne interferometer with an electro-optic modulator," *Appl. Opt.* **47**, 6518-6523 (2008).
25. Z. C. Jian, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, P. J. Hsieh, and D. C. Su, "Optimal condition for full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **46**, 115604 (2007).
26. C. M. Wu and R. D. Deslattes, "Analytical modeling of the periodic nonlinearity in heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **37**, 6696-6700 (1998).
27. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **14**, 91-98 (1992).
28. A. E. Rosenbluth and N. Bobroff, "Optical sources of nonlinearity in heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **12**, 7-11 (1990).
29. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Complex refractive-index measurement based on Fresnel's equations and uses of heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **38**, 4047-4052 (1999).

## 第三章 大階高物體之表面形貌之量測

### 3.1 引言

許多科學及工業領域對於物體表面的形貌及粗糙度需要高精密度及省時的測量方法。使用單色光的干涉輪廓儀提供了極佳的縱向解析度，但是如果測量的範圍在光程差超過一個波長的情形下，會有相位 $2\pi$ 不準確度的問題。Phase unwrapping 技術可以用來解開平滑表面的相位不準確度問題，但是若待測物表面有突然的高低變化則此法會失敗。為了克服這個問題，好幾種非接觸式與非破壞性光學方法被提出[1-12]，且都具有良好的實驗結果。在本研究中，提出一種全場外差干涉術結合了雙波長干涉儀[13,14]及外差干涉儀[15,16]。來自外差光源的光被準直擴束後進入被修正的 Twyman-Green 干涉儀中，全場的干涉信號被快速 CMOS 相機所接收。相機的每個畫素都記錄一系列被取樣的點，且每個點都對應一組弦波信號。基於最小平方法擬合過程[17,18]，可以得到最佳擬合的弦波，且其對應的相位可以被得到。將此相位與一個參考點作比較，則此畫素的相對相位可以得到。接著用不同的波長的光源做同樣的量測，則可以得到對應於等效波長的相對相位，此即為雙波長干涉技術。將此過程應用於其他畫素，那麼他們的相對相位亦可由相似的過程被求出。因此，待測樣品的輪廓就可以被求出來。我們已驗證此方法的正確性，且此法同時具有雙波長干涉儀及外差干涉儀的優點。

### 3.2 原理

#### 3.2.1 干涉信號的相位

此方法的光學架構如 Fig. 3.1 所示。在此法中，使用的外差光源[14]包含有一波長可調式雷射二極體(TLD)，電光晶體調制器(EO)，函數產生器(FG)，線性電壓放大器(LVA)。為了方便起見，定義 z 軸為光前進的方向，而 y 軸為垂直紙

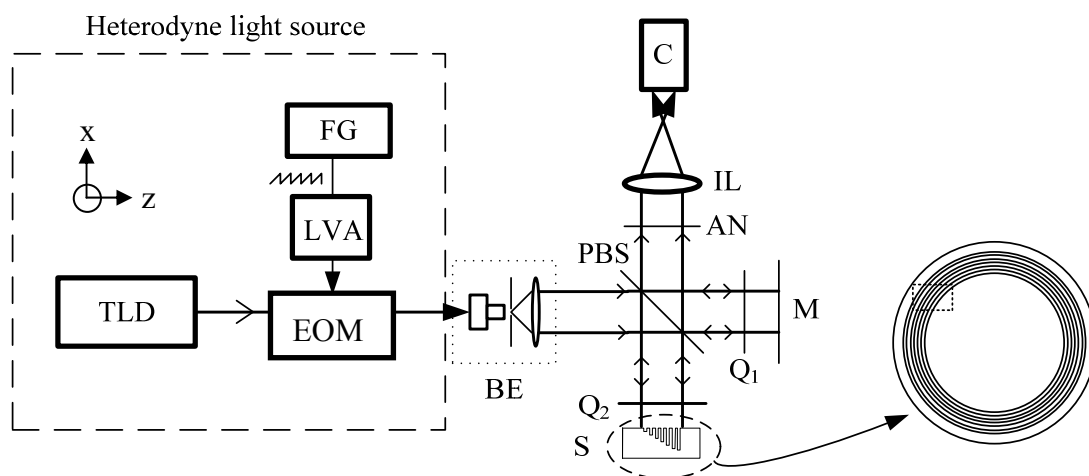


Fig. 3.1 本方法的光學系統架構圖。TLD:可調波長二極體雷射；EO: 電光晶體調制器；FG: 函數產生器；LVA:線性電壓放大器；BE: 準直擴束器；PBS: 偏極分光鏡；Q1, Q2: 四分之一波片；M: 平面鏡；S: 待測樣本；AN: 檢偏鏡；IL: 成像透鏡C: 快速 CMOS 相機。

面向上的方向。從此光源射出的光，其 s 與 p 偏光間有著  $f$  的頻差，其 Jones's 向量可被寫為

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi ft} \\ e^{-i\pi ft} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t}, \quad (3.1)$$

其中  $f_0$  為光的頻率。此光通過一擴束器(BE)進入改良過的 Twyman-Green 干涉儀中，此干涉儀包含 polarization beam-splitter(PBS)，兩個快軸與 x 軸為 45 度的四分之一波片(Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub>)，一參考面鏡(M)，測試樣品(S)，檢偏板(AN)，成像鏡組(L)，及 CMOS 相機(C)。在此干涉儀中，光被分成反射的測試光及透射的參考光。它們的路徑分別為 PBS → Q<sub>2</sub> → S → Q<sub>2</sub> → PBS → AN (測試光)及 PBS → Q<sub>1</sub> → M → Q<sub>1</sub> → PBS → AN (參考光)。因此， $E_t$  及  $E_r$  可被表示為

$$\begin{aligned}
E_t &= AN(45^\circ) \cdot R_{PBS} \cdot Q_2(-45^\circ) \cdot S \cdot Q_2(45^\circ) \cdot T_{PBS} \cdot E \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_s e^{i \frac{4\pi\Delta d(x,y)}{\lambda}} & 0 \\ 0 & r_s e^{i \frac{4\pi\Delta d(x,y)}{\lambda}} \end{pmatrix} \times \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi ft} \\ e^{-i\pi ft} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t} \\
&= \frac{ir_s}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\pi ft + \frac{4\pi\Delta d(x,y)}{\lambda})} e^{i2\pi f_0 t}, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
E_r &= AN(45^\circ) \cdot T_{PBS} \cdot Q_1(-45^\circ) \cdot M \cdot Q_1(45^\circ) \cdot R_{PBS} \cdot E \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_m & 0 \\ 0 & r_m \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi ft} \\ e^{-i\pi ft} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t} \\
&= -\frac{ir_m}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi ft} e^{i2\pi f_0 t}, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

其中  $T_{PBS}$  及  $R_{PBS}$  為 PBS 的穿透矩陣及反射矩陣， $2\Delta d(x,y)$  為兩臂間的光程差， $r_m$

及  $r_s$  則為面鏡及樣品的反射係數； $\lambda$  為光源的波長。測試光與參考光在檢偏板上

干涉以產生隨時間改變的干涉信號，此干涉信號以 CMOS 快速相機擷取，則此

干涉信號的強度可以被表示為

$$\begin{aligned}
I &= |E_t + E_r|^2 \\
&= I_0 + \gamma \cos(2\pi ft + \phi), \tag{3.4}
\end{aligned}$$

其中

$$I_0 = \frac{1}{16}(r_s^2 + r_m^2), \quad (3.5)$$

及

$$\gamma = -\frac{r_s r_m}{8}, \quad (3.6)$$

其中相位項  $e^{i2\pi f_0 t}$  在計算強度的過程中可以被消去。 $\phi$  為干涉信號的相位差，可被表示為

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{4\pi\Delta d(x, y)}{\lambda} \\ &= \phi_1(x_r, y_r) + \phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

在此  $\phi_1(x_r, y_r)$  為 M 上參考點  $(x_r, y_r)$  的相位差，且此相位差的值與光學架構有關。

另一方面， $\phi_2(x, y)$  為我們主要量測的對像，可以被表示為

$$\phi_2(x, y) = \frac{4\pi h(x, y)}{\lambda}, \quad (3.8)$$

其中  $h(x, y)$  為樣品相對  $(x_r, y_r)$  的高度分佈。

### 3.2.2 雙波長干涉術方法

在本研究中，使用雙波長干涉術來克服由於階高突然變化，使得相位改變量超過  $2\pi$  造成相位不連續。如果在波長為  $\lambda_a$  及  $\lambda_b$  時， $\phi_2(x, y)$  可以分別表示為

$\phi_a(x, y)$  及  $\phi_b(x, y)$ ，則我們有

$$h(x, y) = \frac{\phi_b(x, y) - \phi_a(x, y)}{4\pi} \Lambda, \quad (3.9)$$

其中  $\Lambda$  為等效波長，並可被表示為

$$\Lambda = \frac{\lambda_a \lambda_b}{|\lambda_a - \lambda_b|}. \quad (3.10)$$

如果將兩個不同波長  $\lambda_a$  及  $\lambda_b$  的值選擇的很接近，則等效波長  $\Lambda$  的值與此二個波長比較起來相對來說會顯得大很多。更進一步來說，由於階高變化所引起的相位模糊(phase unambiguity)的容許範圍就可以更大。因此當  $\phi_a(x, y)$ 、 $\phi_b(x, y)$  及  $\Lambda$  皆由實驗量測及計算出來時，則  $h(x, y)$  可由從 Eqs. (3.9)及(3.10)計算得到。

### 3.3 實驗與結果

實驗中使用可調波長雷射(New Focus/Model 6304)其波長變化解析度為 0.02 nm，並且設定二個不同的波長  $\lambda_a = 633.00$  nm,  $\lambda_b = 635.00$  nm 輸出。在此二波長下，由 Eq. (3.10)可計算得  $\Lambda = 401.955 \mu\text{m}$ 。CMOS 快速相機 (Baslar/A504k) 使用的畫素為  $350 \times 100$  且灰階數為 8bit，拍照的條件則分別設定為  $f_s = 450$  fps、 $\Delta t = 1\text{ms}$  及  $T = 1\text{s}$ 。Fig. 3.2 及 Fig. 3.3 分別為波長  $\lambda_a$  及  $\lambda_b$  的干涉信號相位分佈圖。在此二相位分佈圖中可看出，由於面鏡傾斜及大階高的關係，所以產生 phase wrapped 的現象。因此利用雙波長方法來消除這個現象，並且以相素(10, 10)做為參考點。最後 Fig. 3.4 以相素(10, 10)為參考點的合成波長的相位二維分佈圖。再將此結果代入 Eqs. (3.9)及(3.10)即可求出待測樣品的高度分佈，如 Fig. 3.5 所示。由於參考點設在(10, 10)的地方，因此此處的高度為 0。為了方便閱讀，Fig. 3.6 的實線顯示了在 Fig. 3.5 中沿著點線所畫出的一維高度分佈圖。可看出五個階高的分佈，由右至左大約分別為 -15、-25、-35、-50，及  $-90 \mu\text{m}$ 。而由於實



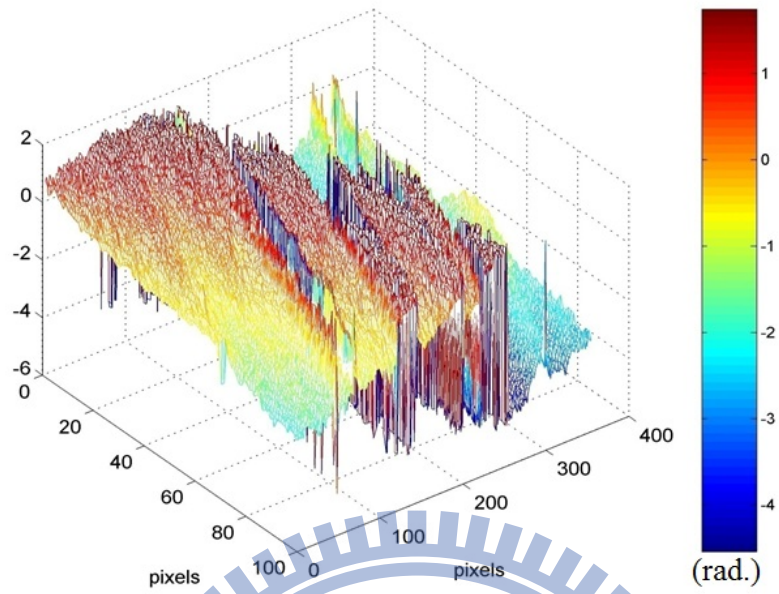


Fig. 3.2 波長為  $\lambda_a = 633.00$  時之相位分佈圖

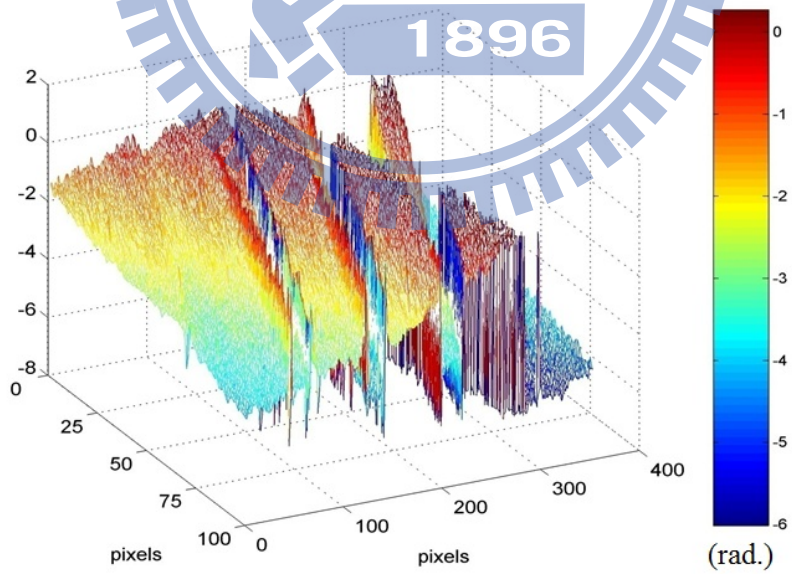


Fig. 3.3 波長為  $\lambda_b = 635.00$  時之相位分佈圖



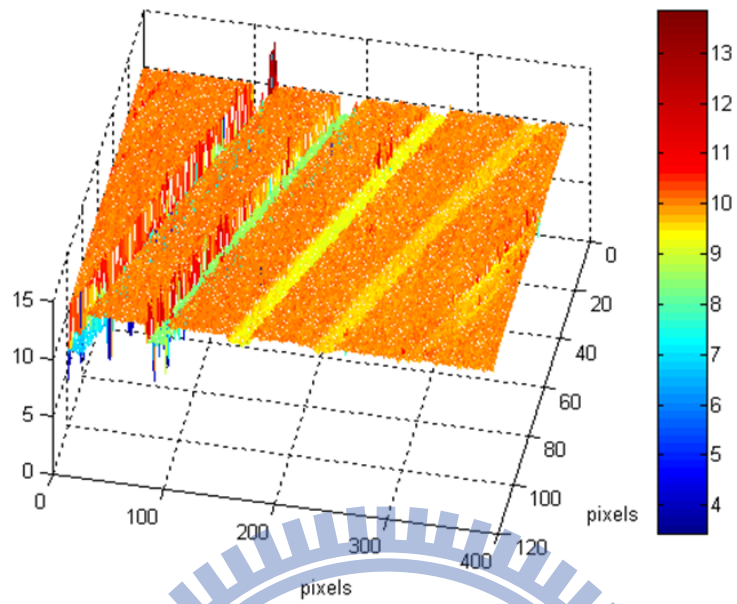


Fig. 3.4 合成波長的相位二維分佈圖

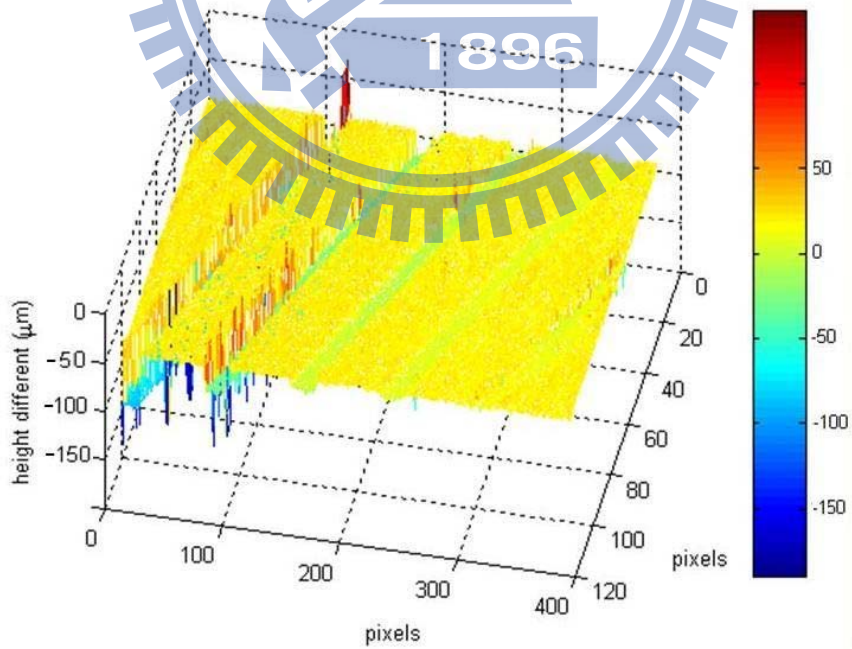


Fig. 3.5 待測樣本的高度分佈圖

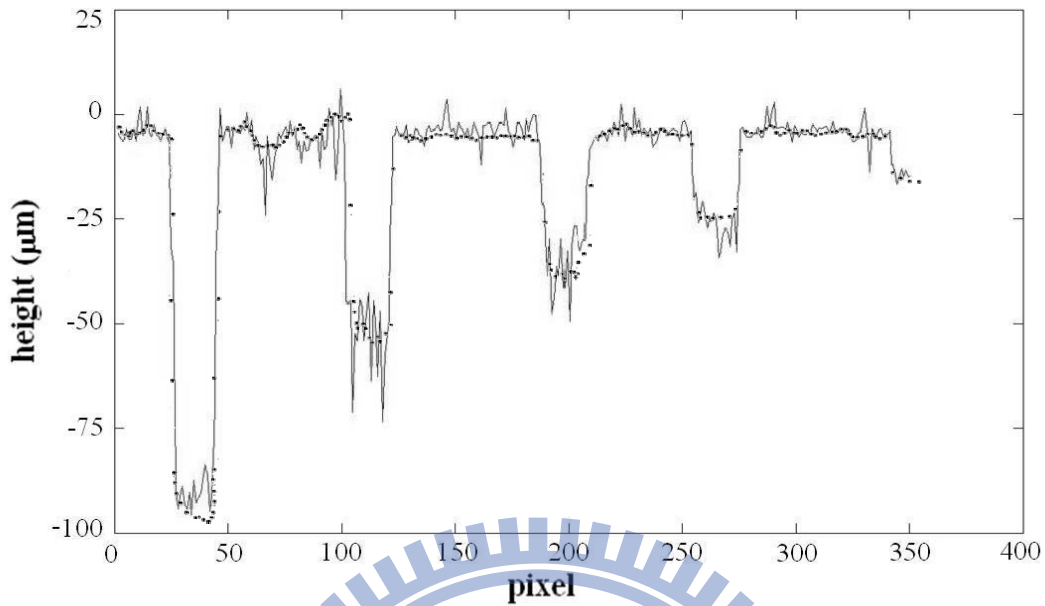


Fig. 3.6 沿著 Fig. 3.5 中點線所畫出的一維高度分佈圖

驗中所使用的樣本其表面的階高是經由機械加工處理而得，因此其表面可看出經機械加工後的痕跡。我們另外以接觸式探針量測儀(Kosaka Lab/ET-4100)量測，結果如 Fig. 3.6 虛線所示。由 Fig. 3.6 中可知，兩者的相關係數函數(cross correlation function)高達 90.3%。由於對整體量測結果來說，具有不同量測結果的資料點，佔所有資料點的比例小於 10%，因此兩者的量測結果皆為可接受的結果。

### 3.4 討論

由 Eqs. (3.8)及(3.9)可知

$$\delta h_1 = \frac{\partial h}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial h}{\partial \lambda} \delta \lambda, \quad (3.11)$$

及

$$\delta h_2 = \frac{\partial h}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial h}{\partial \Lambda} \delta \Lambda, \quad (3.12)$$

其中  $\delta \Lambda$  為  $\Lambda$  的誤差，它可被表示為  $\delta \Lambda = (\partial \Lambda / \partial \lambda_a) \delta \lambda_a + (\partial \Lambda / \partial \lambda_b) \delta \lambda_b$ ；而  $\delta \lambda$  為  $\lambda$  的

誤差大小； $\delta\phi$  為  $\phi$  的誤差； $\delta h_1$  及  $\delta h_2$  分別表示在  $h$  在平滑區域及階高不連續區域的誤差大小。相位誤差  $\delta\phi$  的大小來源包括：相機取樣誤差  $\delta\phi_1$  [20]，偏振混合誤差  $\delta\phi_2$  [21,22] 及環境擾動所造成的相位誤差  $\delta\phi_3$ 。實驗中所有的參數，包括  $f$ ， $f_s$ ， $T$  及  $g$  都會影響  $\delta\phi_1$  的大小。當  $T$ ， $g$  及  $f_s/f$  的大小增加時， $\delta\phi_1$  的值會減小，但資料處理所需的時間會增加。如果  $Tf$  為大於 1 的整數，那麼相同的資料會被紀錄  $Tf$  次。因此，理論上  $\delta\phi_1$  很難再被減少。為了要減少由於外差頻率  $f$  的不穩定所造成的誤差，在實驗中我們選擇  $Tf=30$  的條件。在此條件下， $\delta\phi_1$  可被縮減至  $0.036^\circ$  [20]。其次，本實驗中所使用的 AN (Newport Inc.) 其消光比為  $1 \times 10^{-5}$ ，因此  $\delta\phi_2$  可以被減少至  $0.027^\circ$ 。根據實驗所使用的可調波長雷射的型錄，可知  $\delta\lambda_a = \delta\lambda_b \approx 0.02 \text{ nm}$ ，所以我們可得  $\delta\Lambda = 12.68 \text{ nm}$ 。在我們實際的量測中，環境振動及空氣擾動皆會對實驗結果造成影響，估計的方法為將樣本置於量測位置後，對同一個位置進行相位量測，由於整個系統的參數並無改變，因此重覆量測所得之相位誤差結果，在扣除因相位解析及偏振混合引起的相位誤差後，即得到由環境擾動所引起的相位誤差大小，如 Fig. 3.7 所示。由圖中可知，在不同量測次數下，環境擾動對相位量測的影響量的大小。因此，可將環境擾動造成的相位誤差

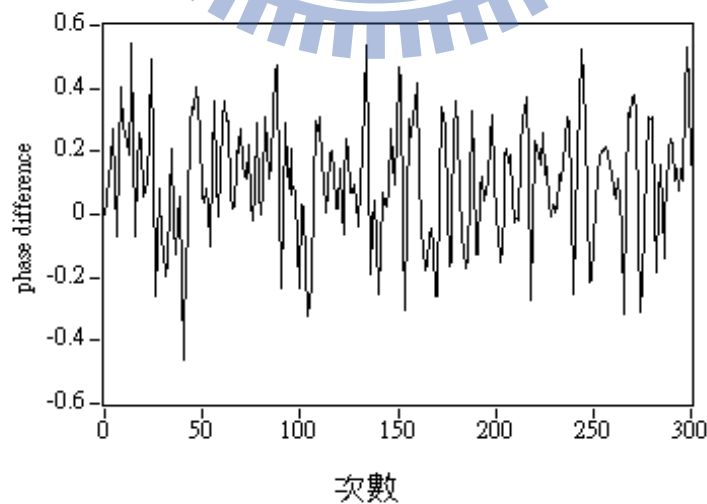


Fig. 3.7 重覆量測之相位誤差結果

估計為  $\delta\phi_3 \approx 1^\circ$ 。因此，實驗的總相位誤差大小為  $\delta\phi = \delta\phi_1 + \delta\phi_2 + \delta\phi_3 \approx 1.063^\circ$ 。所以根據實驗條件可計算出  $\delta h_1 = 0.9 \text{ nm}$  (with  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) 及  $\delta h_2 = 0.3 \text{ }\mu\text{m}$  (with  $\Lambda = 200.977 \text{ }\mu\text{m}$ )。因此，此方法同時具有雙波長干涉術及外差干涉術的優點，即可以雙波長的方式增加等效波長，而將  $2\pi$  的相位模糊度增大，進而可量測大的階高物體。除此之外，以雙波長的方式來計算高度分佈時，如果沒有選擇固定的參考點位置，則量測的結果會隨著光學系統的架設改變而改變。雖然量測結果會不同，但是整體的形貌會是一致的。為了確保良好的實驗重現性，我們建議最好是在量測時在 S 上選擇一個方便的區域做為參考點的所在。

### 3.5 小結

在本章中，提出一種全場外差干涉術結合了雙波長干涉儀及外差干涉儀。從外差光源而來的光被準直擴束後進入以 PBS 作為分光鏡的 Twyman-Green 干涉儀中，在 AN 上所形成的全場的干涉信號被快速 CMOS 相機所接收。相機的每個畫素都記錄一系列被取樣的點，且每個取樣點在時間軸上的排列都可對應一組弦波信號。基於三參數弦波擬合法(最小平方法擬合過程)，可以得到最佳擬合的弦波，且其對應的相位亦可以被得到。將此相位與待測物表面的一個參考畫素作比較，則對應於此畫素的相對相位可以得到。接著將 TLD 改變不同的波長做同樣的量測，則可以再次得到相對應的相對相位。因此由些二波長的相位分佈圖，可以計算出對應於等效波長的相對相位，此即為雙波長干涉技術。將此過程應用於其他畫素，那麼他們的相對相位亦可由相似的過程被求出。因此，待測樣品的輪廓就可以被求出來。我們已測試此方法的正確性，且此法同時具有雙波長干涉儀及外差干涉儀的優點。

### 3.6 参考文献

1. Malacara D., “*Optical Shop Testing*,” (John Wiley) 3<sup>rd</sup> ed., Chap. 15 (2007).
2. M. Akiba, K. P. Chan and N. Tanno, “Full-field optical coherence tomography by two-dimensional heterodyne detection with a pair of CCD cameras,” *Opt. Lett.* **28** 816-818 (2003).
3. K. Creath, “Step height measurement using two-wavelength phase-shifting interferometry,” *Appl. Opt.* **26**, 2810-2816 (1987).
4. S. Yokoyama, J. Ohnishi, S. Iwasaki, K. Seta, H. Matsumoto and N. Suzuki, “Real-time and high-resolution absolute-distance measurement using a two-wavelength superheterodyne interferometer,” *Meas. Sci. Technol.* **10** 1233-1239 (1999).
5. K. Wang and L. Zeng, “Two-dimensional surface profile imaging technique based on a double-grating frequency shifter,” *Appl. Opt.* **44** 4625-4630 (2005).
6. J. Schmit and P. Hariharan, “Two wavelength interferometric profilometry with a phase-step error-compensating algorithm,” *Opt. Eng.* **45** 115602 (2006).
7. M. Roy, C. J. R. Sheppard and P. Hariharan, “Low-coherence interference microscopy using a ferro-electric liquid crystal phase-modulator,” *Opt. Express* **12** 2512-2516 (2004).
8. K. Petr, “A simple interferometric method for determining the flatness of large optical flats with 1 nm repeatability,” *Meas. Sci. Technol.* **19** 107001 (2008).
9. H. Han, “Achieving traceability and sub-nanometer uncertainty using interferometric techniques,” *Meas. Sci. Technol.* **19** 084002 (2008).
10. F. Gao, R. K. Leach, J. Petzing and J. M. Coupland, “Surface measurement errors using commercial scanning white light interferometers,” *Meas. Sci. Technol.* **19** 015303 (2007).

11. L. C. Chen, Y. T. Huang, H. W. Lai, J. L. Chen and C. C. Chang, "Innovative automatic resonant mode identification for nano-scale dynamic full-field characterization of MEMS using interferometric fringe analysis," *Meas. Sci. Technol.* **19** 125303 (2008).
12. A. A. Dorrington, M. J. Cree, A. D. Payne, R. M. Conroy and D. A. Carnegie, "Achieving sub-millimetre precision with a solid-state full-field heterodyning range imaging camera," *Meas. Sci. Technol.* **18** 2809-2816 (2007).
13. Y. Bitou, "Two-wavelength phase-shifting interferometry with a superimposed grating displayed on an electrically addressed spatial light modulator," *Appl. Opt.* **44** 1577-1581 (2005).
14. T. Suzuki, T. Yazawa and O. Sasaki, "Two-wavelength laser diode interferometer with time-sharing sinusoidal phase modulation," *Appl. Opt.* **41** 1972-1976 (2002).
15. T. Tkaczyk and R. Jozwicki, "Full-field heterodyne interferometer for shape measurement: experimental characteristics of the system," *Opt. Eng.* **42** 2391-2399 (2003).
16. M. C. Pitter, C. W. See and M. G. Somekh, "Full-field heterodyne interference microscope with spatially incoherent illumination," *Opt. Lett.* **29** 1200-1202 (2004).
17. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters *IEEE Std. 1241-2000* 25-29 (2000).
18. C. T. Farrell and M. A. Player, "Phase-step insensitive algorithms for phase-shifting interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **5** 648-652 (1994).
19. D. C. Su, M. H. Chiu and C. D. Chen, "Simple two frequency laser," *Prec. Eng.* **18** 161-163 (1996).

20. Z. C. Jian, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, P. J. Hsieh and D. C. Su, "An optimal condition for the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **46** 115604 (2007).
21. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **14** 91-98 (1992).
22. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic errors in laser heterodyne interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **4** 1173-1176 (1993).





## 第四章 斜入射量測 GRIN Lens 之折射率分佈

### 4.1 引言

折射率漸變透鏡(GRIN lens)在電信通訊(telecommunication)、工業、醫學以及生醫感測(biomedical sensing)等應用上扮演重要的角色[1,2]，因此在設計、製作及評估 GRIN lens 的功能及品質主要依據其折射率分佈的均勻性。以非破壞性的方式精確量測 GRIN lens 的折射率分佈是一項重要且基礎的工作。有許多方法[3-8]被提出來，都有良好的結果。其中以 Dragomir 等人的方法[3]結果較佳，他們以 Quantitative Phase Tomography (QPT) 的方法量測出 GRIN lens 的三維折射率分佈，且解析度可達  $10^{-4}$ 。然而，QPT 雖然能夠得到很好的結果，但在量測時必須將樣品浸泡在與 GRIN lens 表面的折射率相配的匹配液中進行量測，這就表示 GRIN lens 表面的折射率必須事先被精確的知道或猜測[9]。除此之外，QPT 雖然可以量測 3D 的折射率分佈，但其需要將樣品旋轉並記錄多組數據，增加實驗的複雜度及處理時間。在本文中，提出一種不同的方式，可快速並精確得到 GRIN Lens 表面的二維折射率分佈。一從旋光外差光源而來的光束入射至 GRIN lens，反射光通過一檢偏板，由快速 CMOS 相機來擷取二維干涉信號，每個相素都記錄一組取樣過後的弦波信號，其相位與 GRIN lens 的折射率有關。接著這些弦波信號經由最小平方弦波擬合法[10-12]，可得到最佳的擬合弦波及其相位。將所得到的干涉信號的相位，代入以 Fresnel's equations [13]所計算得到特別公式，可以得到 GRIN lens 的二維折射率分佈。我們也利用此法量測一個 GRIN lens，證實了本方法的可行性。本方法同時具有共光程干涉術[14]及全場外差干涉術[15]的優點，即高穩定性、架設容易、量測快速、高解析度等優點。

### 4.2 原理

本方法的實驗架構如 Fig. 4.1 所示。為了方便起見，z 軸設定為光前進的方



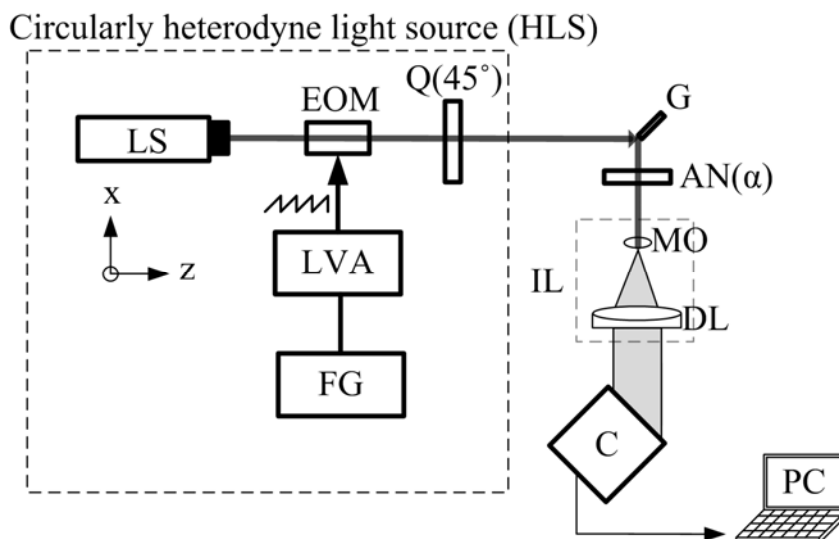


Fig. 4.1 本方法的光學系統架構圖。LS: 雷射光源； EOM: 電光晶體調制器； FG: 函數產生器； LVA: 線性電壓放大器； Q: 四分之一波片； G: 折射率漸變透鏡(GRIN Lens); AN: 檢偏鏡； IL: 成像透鏡； MO: 顯微物鏡； DL: doublet; C: 快速 CMOS 相機。

向，而 y 軸則為垂直紙面向外的方向。來自旋光外差光源的光束，其電場的 Jones vector 可寫成[15]

$$E_{CHLS} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\pi f t} e^{i2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi f t} e^{i2\pi f_0 t}, \quad (4.1)$$

其中  $f_0$  則為入射光的頻率。由 Eq. (4.1) 可知，第一項為右旋光分量及第二項為左旋光分量且它們之間具有  $f$  的差頻。此光束以  $45^\circ$  入射至折射率分佈為  $n(x,y)$  的 GRIN lens (G) 上，反射光通過透光軸與 x 軸夾角為  $45^\circ$  的檢偏板 (AN)、由顯微物鏡 (MO) 與耦合透鏡 (DL) 所組成的成像透鏡組 (IL)；IL 將 G 成像於 CMOS 相機 (C) 之感測面上，並將光強度記錄下來。因此到達 C 處光的電場可表示為

$$\begin{aligned}
E_C &= AN(45^\circ)GE \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 45^\circ & \sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \cos 45^\circ & \sin^2 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\pi f t} + ie^{-i\pi f t} \\ ie^{i\pi f t} + e^{-i\pi f t} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_p (e^{i\pi f t} + ie^{-i\pi f t}) + r_s (ie^{i\pi f t} + e^{-i\pi f t}) \\ r_p (e^{i\pi f t} + ie^{-i\pi f t}) + r_s (ie^{i\pi f t} + e^{-i\pi f t}) \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t}, \tag{4.2}
\end{aligned}$$

其中  $AN$  及  $G$  分別是  $AN$  及  $G$  的 Jones matrices，而  $r_s$  及  $r_p$  分別是  $G$  對 s 偏光與 p 偏光的振幅反射係數，且可以表示為

$$r_p = \frac{n \cos 45^\circ - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{n}}{n \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{n}}, \tag{4.3}$$

及

$$r_s = \frac{\cos 45^\circ - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{\cos 45^\circ}}{\cos 45^\circ + \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 45^\circ}}{\cos 45^\circ}}. \tag{4.4}$$

因此，在 C 所拍攝到的干涉信號的強度可以表示為

$$\begin{aligned}
I &= |E_C|^2 \\
&= \frac{1}{16} \left| \frac{r_p (e^{i\pi f t} + ie^{-i\pi f t}) + r_s (ie^{i\pi f t} + e^{-i\pi f t})}{r_p (e^{i\pi f t} + ie^{-i\pi f t}) + r_s (ie^{i\pi f t} + e^{-i\pi f t})} \right|^2 \\
&= \frac{r_p^2 + r_s^2}{4} + \frac{1}{4} \left[ (r_p^2 - r_s^2) \sin(2\pi f t) + 2r_p r_s \cos(2\pi f t) \right] \\
&= I_0 (1 + \gamma \cos(\Gamma + \phi)) = A \cos(2\pi f t) + B \sin(2\pi f t) + C, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

其中  $I_0 = \frac{1}{4}(r_p^2 + r_s^2)$ ， $\gamma = 1/I_0$ ， $A$ 、 $B$  及  $C$  為實數；而  $\phi$  是此干涉信號的相位，

可以表示為

$$\phi(x, y) = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2n^2-1}}{1-n^2}\right), \quad (4.6)$$

將 Eq. (4.6) 改寫為

$$n(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\sec^2 \phi(x, y) + \sec \phi(x, y) \tan \phi(x, y)}, & \text{if } 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\sec^2 \phi(x, y) - \sec \phi(x, y) \tan \phi(x, y)}, & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \phi < 0 \end{cases}, \quad (4.7)$$

由 Eq. (4.7) 可知，當  $\theta$  及  $\alpha$  為已知時，可以藉由將測量到的相位  $\phi(x, y)$  代入 Eq. (4.7)，進而準確求出二維折射率分佈  $n(x, y)$ 。

在量測相位  $\phi(x, y)$  時，利用拍照頻率為  $f_s$  的相機 C，其曝光時間為  $\Delta t$ ，在拍照時間為  $t_1, t_2 \dots t_m$  的情形下總共拍攝  $m$  張照片。每個畫素皆記錄一序列的弦波信號的取樣干涉光強度分別為  $I_1, I_2 \dots I_n$ ，再利用 IEEE 1241 三參數弦波擬合法（最小平方法）求出  $\phi$  [9-11]，若將此方法應用於所有的像素上，則可得到二維相位分佈  $\phi(x, y)$ ，代入 Eq. (4.7) 則可求出折射率分佈  $n(x, y)$ 。

### 4.3 實驗與結果

為了驗證此方法的可行性，對直徑為 1.8mm 的 GRIN Lens (AC Photonics, Inc./ALC-18) 進行量測。在本方法中所使用的旋光外差光源(CHLS)[15]，是由 He-Ne 雷射光源(LS，波長為 632.8nm)、電光晶體 (EOM，New Focus/Model 4002)、函數產生器(FG)及線性電壓放大器(LVA)所組成。EOM 的半波電壓  $V_\pi = 148\text{V}$ ，驅動 EOM 的鋸齒波其電壓的振幅及頻率分別為  $V = 120\text{V}$ ， $f = 30\text{Hz}$ ；IL 的放大率(magnification)為 4 倍。灰階數  $g = 8\text{bit}$ 、畫素為  $600 \times 600$

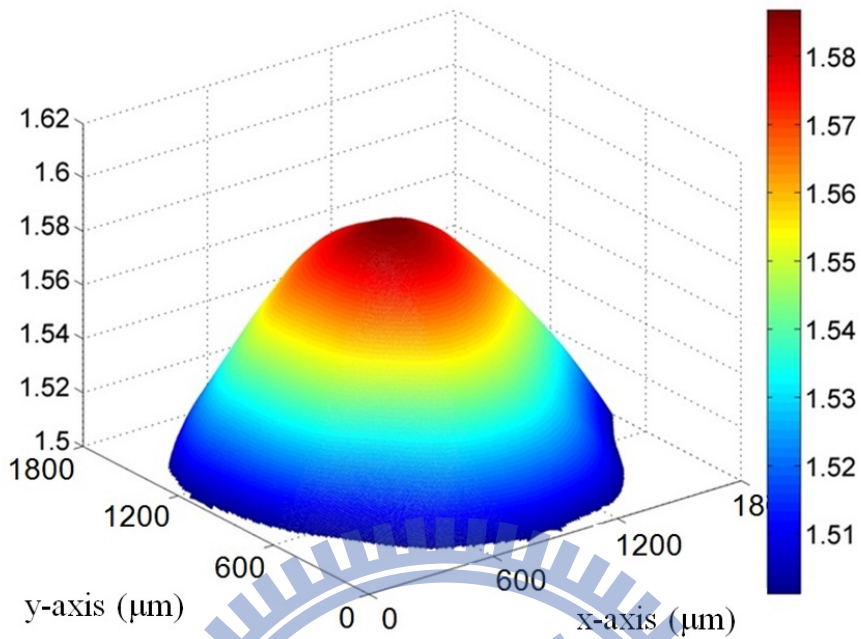


Fig. 4.2 GRIN Lens 的二維折射率分佈圖@  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$

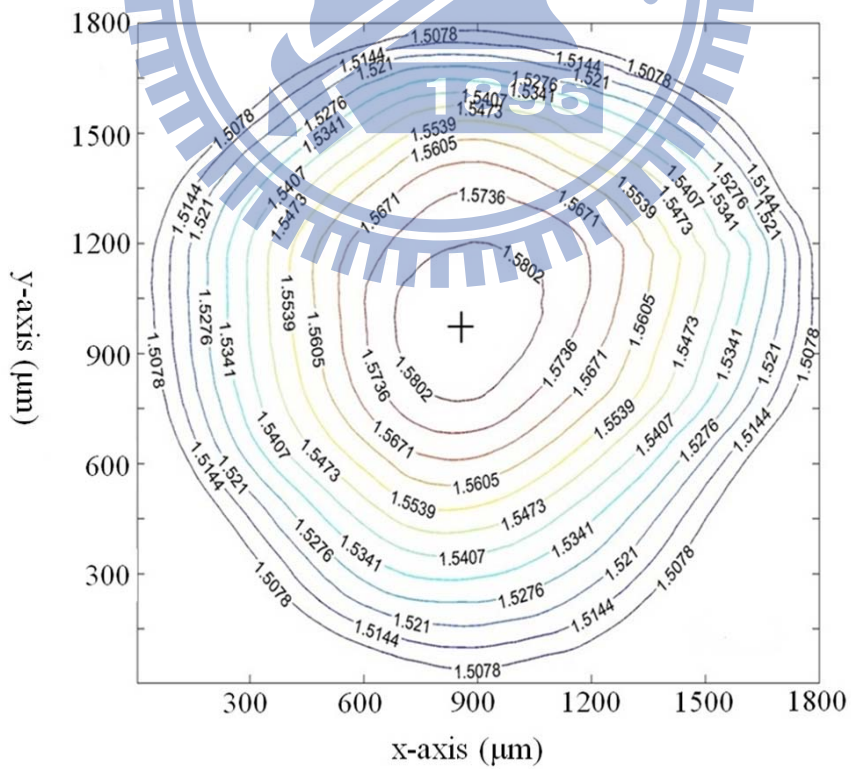


Fig. 4.3 GRIN Lens 的折射率等折射率圖@  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$

的 CMOS 相機(Baslar/A504K)在取樣頻率  $f_s = 450 \text{ Hz}$ ，曝光時間  $\Delta t = 1 \text{ ms}$ ，拍照時間  $T = 1 \text{ sec}$  的條件下擷取干涉信號。實驗中所取得的干涉圖形被送入個人電腦，並且以 Matlab (MathWorks Inc.)軟體做分析。將量測到的相位結果  $\phi(x, y)$  代入 Eq. (4.7)，可以得到折射率二維分佈圖，如 Fig. 4.2 所示。Fig. 4.3 則為二維折射率「等折射率線」圖。

#### 4.4 討論

為了得到此方法的解析度，將 Eq. (4.7)對  $\phi$  及  $\theta$  微分，可得

$$\Delta n = \left| \frac{\partial n}{\partial \theta} \right| \Delta \theta + \left| \frac{\partial n}{\partial \phi} \right| \Delta \phi, \quad (4.8)$$

其中  $\Delta n$  為折射率誤差； $\Delta \theta$  為入射角度誤差，其來源主要為光學系統在架設時對入射角的偏差。在本實驗中， $\Delta \theta$  的大小由所使用的旋轉平台(SIGMA/SGSP-160YAW)來控制，其解析度約為  $0.01^\circ$ ；接著， $\Delta \phi$  為相位解析的誤差，其

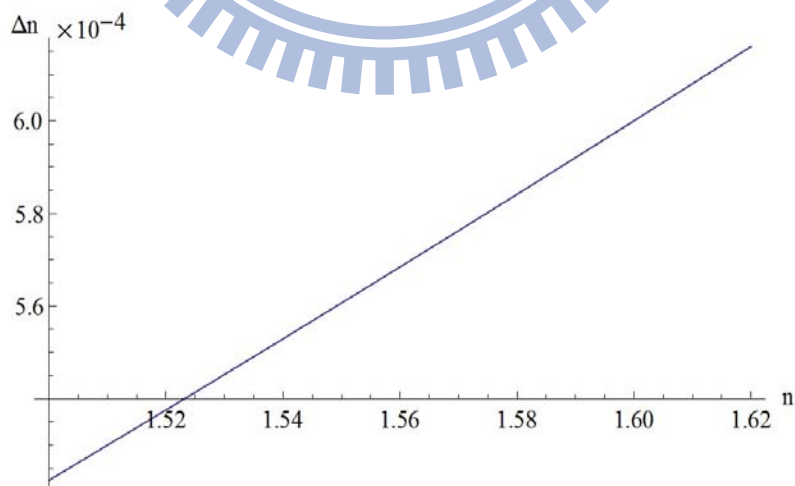


Fig. 4.4  $\Delta n$  對  $n$  的關係曲線

主要來源有幾項：取樣誤差  $\delta\phi_1$  [16]、偏振混合誤差  $\delta\phi_2$  [18,19]及特徵相位誤差  $\delta\phi_3$  [13]。實驗上所有的參數  $f$ ， $f_s$ ， $T$  及  $g$  皆會影響  $\delta\phi_1$ 。當  $T$ ， $g$ ，及  $f_s/f$  增加時  $\delta\phi_1$  會減小，且此時資料處理是耗時的。如果  $Tf$  是整數且大於 1，則相同的干涉信號會被動複記錄  $Tf$  次。因此在理論上  $\delta\phi_1$  很難再變小。為了減小外差頻率  $f$  的不穩定所造成的影響，實驗中我們選擇  $Tf = 30$ 。在我們的實驗條件下， $\delta\phi_1$  可以被減少至  $0.036^\circ$ 。實驗中所使用的偏振片(Newport Inc.)消光比為  $1 \times 10^{-3}$ ，因此  $\delta\phi_2$  可以被縮減為  $0.027^\circ$ 。 $V$  及  $V_\pi$  的誤差會對相位造成一個特徵誤差  $\delta\phi_3$ 。實驗中使用的 VPS 其解析度為  $\Delta V_1 = 0.016V$ ；而  $V_\pi$  可以被測量而得[20]，其誤差估計為  $\Delta V_2 = 0.015V$ 。因此  $\delta\phi_3$  可被減少為  $\delta\phi_3 = 0.03^\circ$ 。因此，相位解析誤差為  $\delta\phi = \delta\phi_1 + \delta\phi_2 + \delta\phi_3 \approx 0.093^\circ$ 。將  $\delta\phi$  及實驗條件代入 Eq. (4.8) 中，可得到不同折射率下的折射率解析度，如 Fig. 4.4 所示。由圖中可看出最佳解析度發生在  $n = 1.6$  時，且  $\Delta n = 6 \times 10^{-4}$ 。

為了同時收集及放大自 GRIN lens 反射的平行光，必須使用由顯微物鏡(MO)及 doublet (DL)所組成的成像透鏡組 IL。由於 IL 是無聚焦光學系統，因此 GRIN lens 必須傾斜地放在 MO 的前焦平面上，而 CMOS 相機應該被放置在 DL 的後焦平面上。在我們的實驗中，此成像透鏡組的橫向放大率為 -4。再者，由於 IL 是共焦光學系統，所以 GRIN lens 必須傾斜地放置在 MO 的前焦平面上，而 CMOS 相機的成像面則必須傾斜地放置於 DL 的後焦平面上。因為 IL 有景深範圍限制，因此本方法無法量測面積過大的樣本。而 GRIN lens 的大小剛好可以使得 IL 的景深被忽略不計。

為了驗證本方法的正確性，我們將此實驗結果與垂直入射式量測 GRIN Lens 折射率分佈的結果[21]做比較，而其實驗結果如 Fig. 4.5 所示[21]。由兩次的實驗結果可知所量測的 GRIN Lens 其中心點有偏離的現象。除此之外，在我們的實驗中，由於入射光為斜入射至樣本表面，因此在還原影像時，必須做角度修正；而垂直入射量測方式則不需要做此一動作。然而相對於垂直入射量測的方式，本實驗的光學架構則較為簡單，且實驗操作上也較為快速。



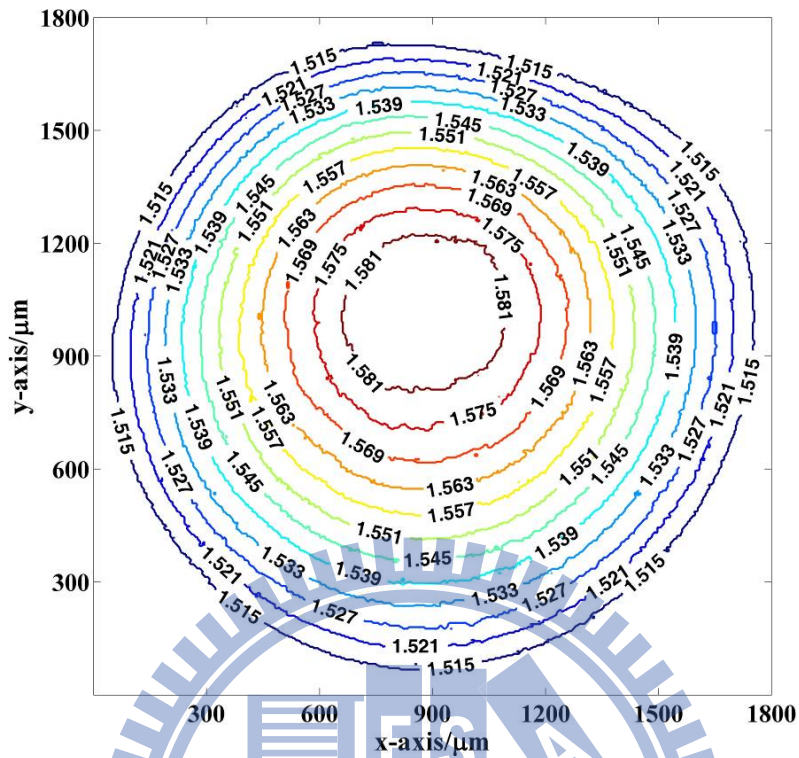


Fig. 4.5 以垂直入射方式量測 GRIN Lens 之二維折射率分布量測結果

#### 4.5 小結

本方法是基於共光程干涉術及全場外差干涉術。一從 HLS 而來的光束經過 Q 後入射至 G 上，而後反射光通過 AN，最後由 C 來擷取二維干涉信號，並且經由最小平方弦波擬合法，得到最佳的擬合弦波及其相位差。將所得到的干涉信號的相位差，代入以 Fresnel's equations 所計算得到特別公式，最後可以得到 GRIN lens 的二維折射率分佈。本方法的正確性被証實。本方法同時具有共光程干涉儀及外差干涉儀的優點。

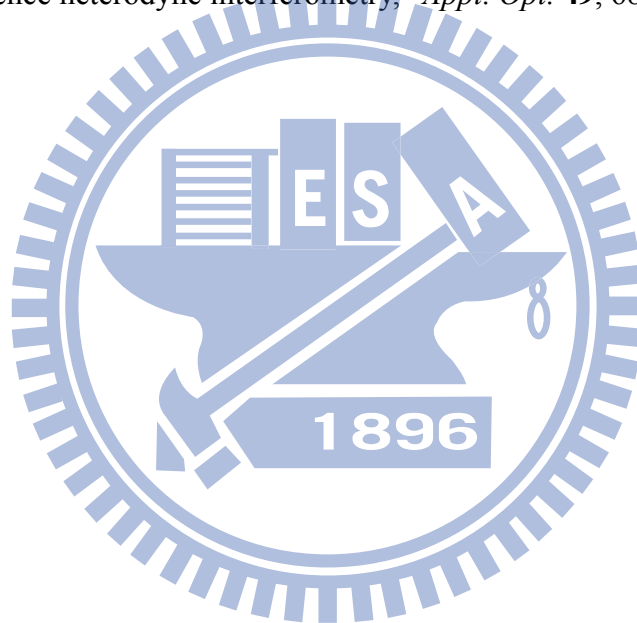
## 4.6 參考文獻

1. X. Li and W. Yu, "Deep tissue microscopic imaging of the kidney with a gradient-index lens system," *Opt. Commun.* **281**, 1833-1840 (2008).
2. M. Zickar, W. Noell, C. Marxer, and N. de Rooij, "MEMS compatible micro-GRIN lenses for fiber to chip coupling of light," *Opt. Express* **14**, 4237-4249 (2006).
3. N. M. Dragomir, X. M. Goh, and A. Roberts, "Three-dimensional refractive index reconstruction with quantitative phase tomography," *Microsc. Res. Tech.* **71**, 5-10 (2008).
4. D. Vazquez, E. Acosta, G. Smith, and L. Garner, "Tomographic method for measurement of the radient refractive index of the crystalline lens. II The rotationally symmetrical lens," *Opt. Soc. Am. A* **23**, 2551- 2565 (2006).
5. Y. F. Chao and K. Y. Lee, "Index Profile of Radial Gradient Index Lens Measured by Imaging Ellipsometric Technique," *Jap. Jour. Appl. Opt.* **44**, 1111-1114 (2005).
6. Z. Liu, X. Dong, Q. Chen, C. Yin, Y. Xu, and Y. Zheng, "Nondestructive measurement of an optical fiber refractive-index profile by a transmitted-light differential interference contact microscope," *Appl. Opt.* **43**, 1485- 1492 (2004).
7. M. Ray, S. K. Sarkar, A. Basuray, and N. SoodBiswas, " Measurement of refractive index profile of GRIN glasses," *SPIE* **4417**, 483- 488(2001).
8. C. E. Jones, D. A. Atchison, R. Meder, and J. M. Pope, "Refractive index distribution and optical properties of the isolated human lens measured using magnetic resonance imaging (MRI)," *Vision Research* **45**, 2352- 2366 (2005).



9. E. Acosta, R. Flores, D. Vazquez, S. Rios, L. Garner, and G. Smith, "Tomographic method for measurement of the refractive index profile of optical fibre performs and rod GRIN lenses," *Jpn. J. Appl. Phys.* **41**, 4821-4824 (2002).
10. Y. L. Chen and D. C. Su, "Method for determining full-field absolute phases in the common-path heterodyne interferometer with an electro-optic modulator," *Appl. Opt.* **47**, 6518-6523 (2008).
11. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters, *IEEE Std.* **1241-2000**, 25-29 (2000).
12. C. T. Farrell and M. A. Player, "Phase-step insensitive algorithms for phase-shifting interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **5**, 648-652 (1994).
13. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon, Oxford, UK), 7<sup>th</sup> ed., p.40 (1999).
14. P. K. Rastogi, *Optical Measurement Techniques and Applications*, (Artech House, Boston,), p. 101 (1997).
15. J. Y. Lin, K. H. Chen, and J. H. Chen, "Optical method for measuring optical rotation angle and refractive index of chiral solution," *Appl. Opt.* **46**, 8134-8139 (2007).
16. D. C. Su, M. H. Chiu, and C. D. Chen, "Simple two frequency laser," *Prec. Eng.* **18**, 161-163 (1996).
17. Z. C. Jian, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, P. J. Hsieh and D. C. Su, "An optimal condition for the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **46**, 115604 (2004).
18. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **14**, 91-98 (1992).

19. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic errors in laser heterodyne interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **4**, 1173-1176 (1993).
20. Q. Dou, H. Ma, G. Jia, Z. Chen, K. Cao, and T. Zhang, "Study on measurement of linear electro-optic coefficient of a minute irregular octahedron cBN wafer," *Opt. Laser Technol.* **39**, 647-651 (2007).
21. Y. L. Chen, H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, and D. C. Su, "An alternative method for measuring the full-field refractive index of a GRIN lens with the normal incidence heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **49**, 6888-6892 (2010).



## 第五章 不滿足取樣定理之全場外差干涉術

### 5.1 引言

在全場外差干涉術中，是由相機來記錄干涉圖形的強度。每一畫素相當於一個頻道，可記錄下一序列的數位弦波強度，再經由三參數弦波擬合法(最小平方擬合法)[1-3]得到最佳的擬合弦波及相位。由取樣原理[4-6]可知，若要完整的重現原來的波形，則相機的取樣頻率必須要大於被重建波形頻率的二倍以上。因此，在 Jian 等人的論文中[7]根據此項準則定出了一組最佳化的條件，即在取樣總時間為一個外差信號週期之下，相機的拍照頻率為外差信號的 15 倍，則由取樣所造成的相位誤差為  $0.036^\circ$ 。由於取樣原理中所考慮的被重建波形在 Fourier domain 中為多個頻率所組成的複雜信號，為了避免混疊效應(aliasing effect)的產生，才會有大於 Nyquist sampling rate [4]的條件。而外差干涉信號為單一頻率的弦波信號，此信號在 Fourier domain 中為三個 delta 函數所構成，因此對取樣頻率而言應有更為寬鬆的條件[8-10]。

本研究首先詳細描述出相機在外差干涉術中的取樣程序，並擴充可使用的取樣頻率範圍，推導出即使不滿足取樣原理的條件，仍可使用三參數弦波擬合法求得其波形及相位。首先計算相機每個相素所擷取的信號強度，即時間取樣和數位灰階化取樣後的信號強度。再利用三參數弦波擬合法求得最佳的擬合弦波及其相位。最後將此相位與原信號的相位相比以求得理論上的相位誤差。在推導的過程中，我們發現當拍照頻率小於二倍的外差頻率時，仍然可以還原被取樣信號之相位。但是，並非所有的拍照頻率都可以被接受，它將有所限制，本研究將導出此限制條件。除此之外，本研究也提出普通 CCD 相機使用在外差干涉術中的最佳條件，且此最佳條件亦符合本文所導出的限制條件。相較於其他全場外差干涉術的研究[11,12]，本研究所提出的最佳條件，具有大幅降低實驗成本的優點。

## 5.2 擷取干涉信號及相位解析方法

外差干涉術中的干涉信號，其表示如下

$$y(t) = I_0(1 + r \cos(2\pi ft + \phi_0)), \quad (5.1)$$

其中  $r$  為此弦波信號的對比度， $f$  為外差信號的頻率， $\phi_0$  為相位。如 Fig. 5.1(a) 所示，以相機來擷取此弦波信號時，其拍攝頻率為  $f_s$ ，即拍照週期為  $t_s = 1/f_s$ ；每次曝光時間為  $a$ ，在一般情形下， $a < 1/f$ ；在拍攝總時間為  $T$  內，此信號共被拍攝  $N$  張照片，並且將這些照片編號從 0 到  $N-1$ 。而  $T$  與  $N$  的關係可以寫為

$$T = Nt_s. \quad (5.2)$$

因此，輸入信號經曝光積分後在相機某個畫素上得到第  $k$  個取樣點的強度分佈為 [13]

$$\begin{aligned} y_c(kt_s) &= \frac{1}{a} \int_{kt_s}^{kt_s+a} I_0(1 + r \cos(2\pi ft + \phi_0)) dt \\ &= I_0 [1 + r'' \cos(2\pi fkt_s + \psi)], \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中

$$r'' = r \operatorname{sinc}(fa), \quad (5.4)$$

且

$$\psi = \phi_0 + \pi fa. \quad (5.5)$$

因此，原干涉信號的相位可由下式求得

$$\phi_0 = \psi - \pi fa \quad (5.6)$$

由 Eq. (5.3) 可知，被取樣後的函數可寫為

$$y_s(t) = y_0 [1 + r \cos(2\pi ft + \phi_0 + \pi fa)] \text{comb}\left(\frac{t}{t_s}\right), \quad (5.7)$$

其中  $\text{comb}\left(\frac{t}{t_s}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nt_s)$ 。如 Fig. 5.1(b) 所示，當干涉信號經由相機取樣後，原干涉信號的對比度及相位會改變，分別如 Eqs. (5.4) 及 (5.5) 所示。在光偵測器做為擷取信號工具的取樣原理上，是假設取樣時以 Delta 函數取樣，因此  $a$  假設為 0，所以在取樣的過程中對比度及相位的影響可以忽略。然而，由於 CCD 取

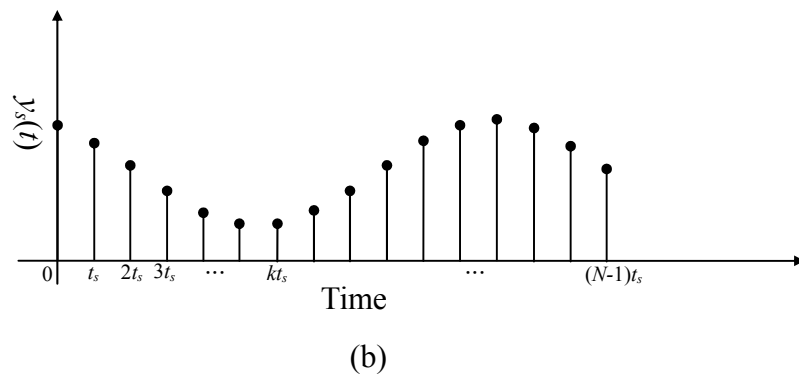
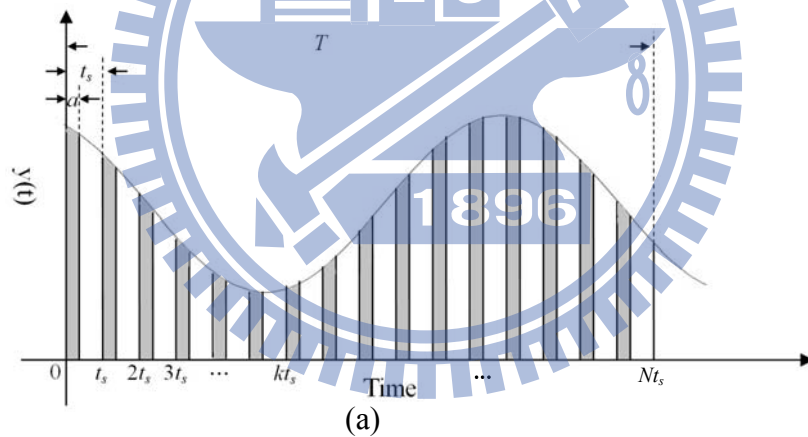


Fig. 5.1 (a)相機取樣頻率高於外差頻率的取樣示意圖；(b)取樣後的取樣點分佈圖

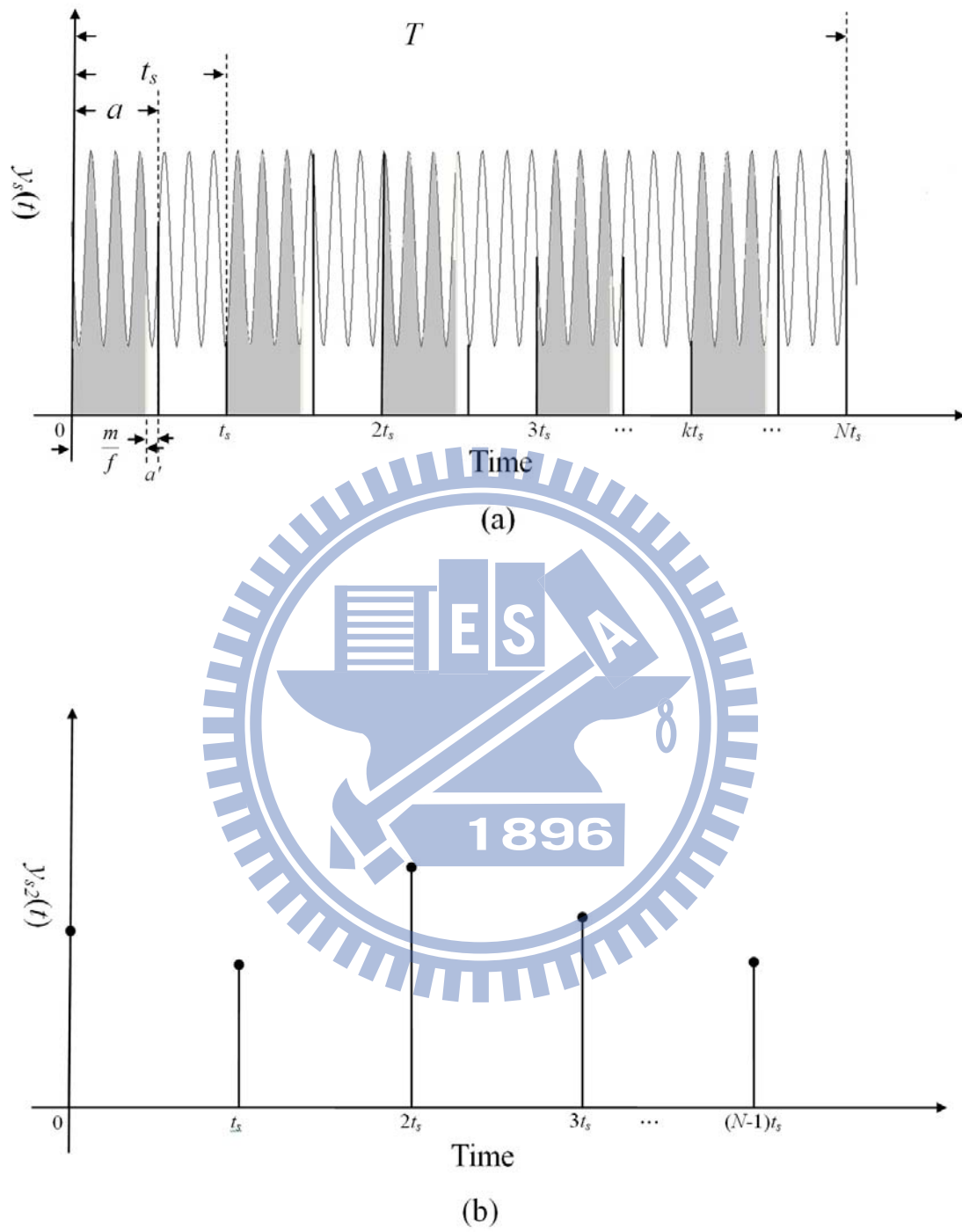


Fig. 5.2 (a)相機取樣頻率低於外差頻率的取樣示意圖；(b)取樣後的取樣點分佈圖

樣時， $a$  不等於 0，因此相位會被增加  $\pi fa$ ，此為已知量，可在計算相位時扣除以求得不受曝光時間影響的相位。

然而，當曝光時間大於外差信號週期時，即  $a > 1/f$ ，在一次曝光的時間中會有大於一個外差週期的信號被積分，如 Fig. 5.2(a) 所示。若此相機的拍攝頻率為  $f_s$  且曝光時間為  $a$ ，則可將  $a$  寫為

$$a = \frac{m + a'}{f}, \quad (5.8)$$

其中  $m$  為非負整數且  $a'$  為小數。Eq. (5.8) 表示在一次曝光的時間內，有  $m$  個外差信號的週期的時間被平均，如 Fig. 5.2(a) 中在  $a$  裡的灰色部份；而  $a'$  則為扣除此  $m$  個週期後的剩餘積分時間，如 Fig. 5.2(a) 中在  $a$  裡的白色部份，且  $a' < 1/f$ 。當  $m = 0$  時，信號取樣情形如 Fig. 5.1(a) 所示；當  $m \geq 1$  時，信號取樣情形則如 Fig. 5.2(a) 所示，在一次曝光時間中有  $(m + a')$  個干涉信號週期被積分。因此，輸入信號經曝光積分後在相機某個畫素上得到第  $k$  個取樣點的強度分佈為

$$\begin{aligned} y_c(kt_s) &= \frac{1}{(m + a')/f} \int_{kt_s}^{kt_s + (m + a')/f} I_0(1 + r \cos(2\pi ft + \phi_0)) dt \\ &= I_0 [1 + r' \cos(2\pi fkt_s + \Psi)], \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中  $t_s = 1/f_s$  為拍照週期；對比度則變為

$$r' = \frac{r \sin(\pi a')}{m\pi + \pi a'}, \quad (5.10)$$

且取樣後的相位  $\Psi$  可寫為

$$\Psi = \phi_0 + \pi a' , \quad (5.11)$$

被取樣後的函數可寫為

$$y_{s2}(t) = y_0 [1 + r' \cos(2\pi ft + \Psi)] \text{comb}\left(\frac{t}{t_s}\right) , \quad (5.12)$$

將相機拍攝到的光強度  $y_c$  以  $n$  個 bit 數取樣[14-16]，因此灰階化後的光強度可寫為

$$y_d = \text{round}\left(\frac{y_c}{2I_0} \times 2^n\right) , \quad (5.13)$$

其中  $\text{round}()$  為四捨五入算符。接著，將 Eq. (5.13) 以三參數弦波擬合法[17,18]來得到最佳擬合的弦波及相位。最佳擬合弦波可表示為

$$\begin{aligned} y_f(t_k) &= A_0 \cos(2\pi ft_k) + B_0 \sin(2\pi ft_k) + C_0 \\ &= \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \cos(2\pi ft_k + \psi') + C_0 , \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中  $A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  為實數；擬合弦波的相位  $\psi'$  可表示為

$$\psi' = \tan^{-1}(-B_0 / A_0) , \quad (5.15)$$

根據最小平方法， $A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  可以藉由將下式的最小化而得



$$L = \sum_{k=0}^{N-1} [y_d(t_k) - y_f(t_k)]^2 \quad (5.16)$$

將 Eq. (5.16) 對  $A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  做偏微分運算，並計算微分後等於零的方程式，則可以得到三個方程式的線性系統

$$D_0 x = W \quad (5.17)$$

其中

$$D_0 = \begin{pmatrix} F & H & P \\ H & G & Q \\ P & Q & N \end{pmatrix}, \quad (5.18a)$$

$$x = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}, \quad (5.18b)$$

及

$$W = \begin{pmatrix} R \\ S \\ U \end{pmatrix}. \quad (5.18c)$$

其中

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(2\pi ft_k), \quad G = \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(2\pi ft_k) \\ H &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi ft_k) \sin(2\pi ft_k), \quad P = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\pi ft_k) \\ Q &= \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\pi ft_k), \quad R = \sum_{k=0}^{N-1} y_d \cos(2\pi ft_k) \\ S &= \sum_{k=0}^{N-1} y_d \sin(2\pi ft_k), \quad U = \sum_{k=0}^{N-1} y_d \end{aligned} \quad (5.19)$$

最後，可利用  $x = D_0^{-1} y$  可以計算得到  $x$ ；其中  $D_0^{-1}$  為  $D_0$  的反矩陣。因此  $x$  可解得

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} NGR - Q^2R + PQS - NHS + QHU - PGU \\ PQR - NHR + NFS - P^2S + PHU - QFU \\ QHR - PGR + PHS - QFS + FGU - H^2U \end{pmatrix}}{NFG - Q^2F + PQH - NH^2 + PQH - P^2G}, \quad (5.20)$$

相位  $\psi'$  可由  $\tan^{-1}(-B_0 / A_0)$  求得，而寫為

$$\psi' = \tan^{-1}\left(-\frac{PQR - NHR + NFS - P^2S + PHU - QFU}{NGR - Q^2R + PQS - NHS + QHU - PGU}\right). \quad (5.21)$$

將  $A_0$ 、 $B_0$  及  $C_0$  代入 Eq. (5.14)，則可得擬合後的最佳弦波。因此由 Eq. (5.11) 可知，所量測的相位  $\phi_0'$  為

$$\phi_0' = \psi' - \pi\alpha', \quad (5.22)$$

相位誤差的大小為

$$\delta\phi = \phi_0' - \phi_0. \quad (5.23)$$

最後，判斷  $\delta\phi$  是否為實驗可容忍的相位誤差大小，若「是」的話，則此設定的數組合被接受；反之，若為「否」的話，則重新設定參數組合，直到相位誤差為可接受的範圍為止。為了讓讀者更易瞭解，將整個過程寫成如 Fig. 5.3 所示的流程圖。

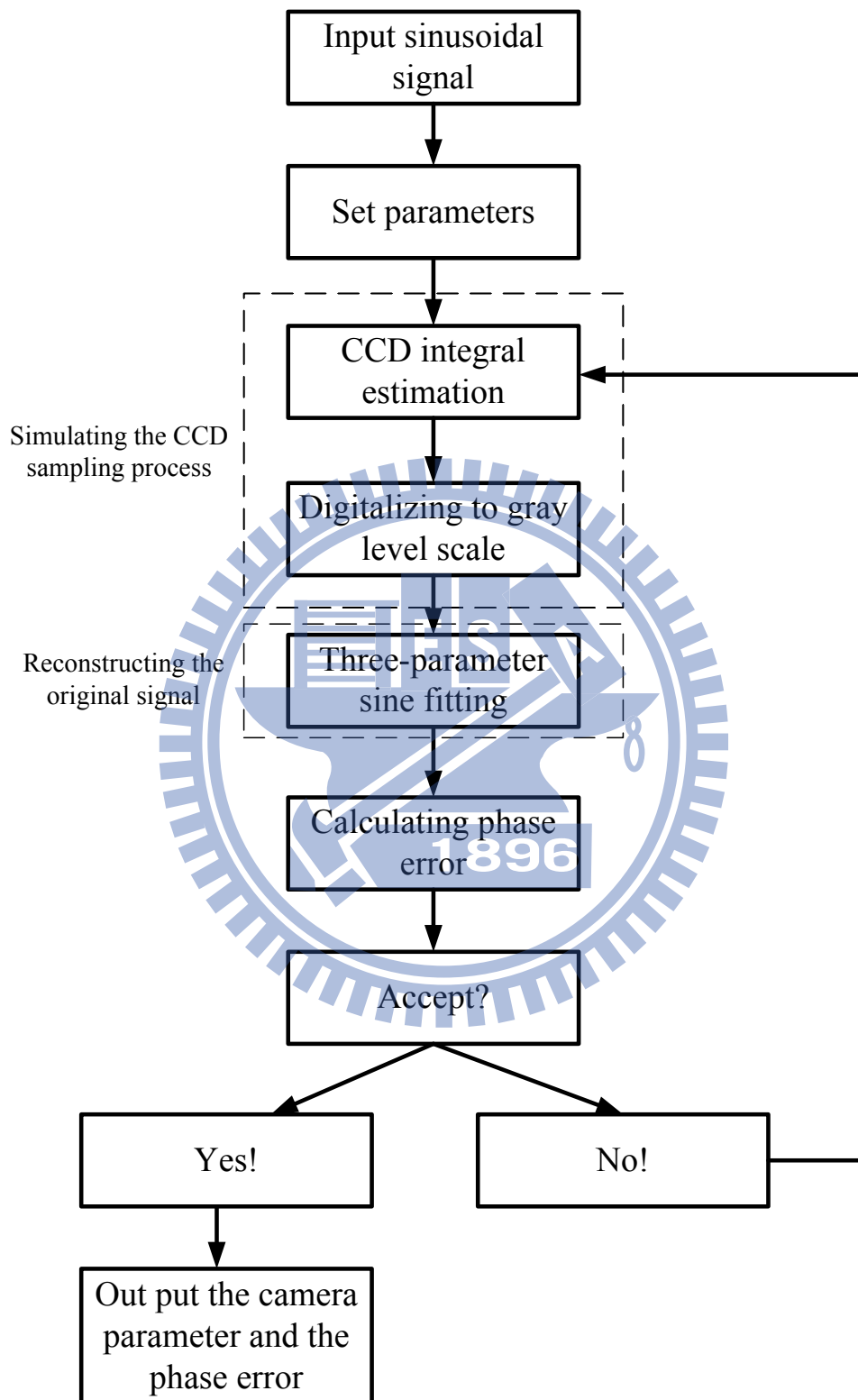


Fig. 5.3 本方法的流程圖

### 5.3 取樣頻率的限制條件

#### 5.3.1 Matrix approach

若 Eq. (5.17) 可以找到解，即 Eq. (5.20)，則表示可找出最佳擬合弦波及相位。因此若要 Eq. (5.17) 有解，則  $\det(D_0) \neq 0$ ，其中  $\det(\cdot)$  為 determinant 算符。當  $N=1$  時，我們可得

$$\det(D_0)|_{N=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.24)$$

而當  $N=2$  時，

$$\det(D_0)|_{N=2} = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(\pi fT) & \sin(\pi fT) \cos(\pi fT) & 1 + \cos(\pi fT) \\ \sin(\pi fT) \cos(\pi fT) & \sin^2(\pi fT) & \sin(\pi fT) \\ 1 + \cos(\pi fT) & \sin(\pi fT) & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.25)$$

由 Eqs. (5.24) 及 (5.25) 可知，當  $N=1$  及  $2$  時， $\det(D_0)|_{N=1,2} = 0$ ，因此無法利用三參數擬合法擬合出最佳弦波。要得到  $N \geq 3$  的結果，必須計算 Eq. (5.18a) 的 determinant 的通式以求得廣義的結果。因此可得

$$\det(D_0) = \frac{1}{32} \left( 8N^3 + N \cot^2(\pi s) - 9N \csc(\pi s) - \frac{1}{2} N (7 + \cos(4\pi s) - 8 \cos(4N\pi s)) \times \right. \\ \left. \csc^2(2\pi s) + \frac{4 \csc^3(\pi s)}{\cos(\pi s)} (4 \cos(N\pi s) \sin^3(N\pi s) + N \cos(2N\pi s) \sin(2\pi s)) \right), \quad (5.26)$$

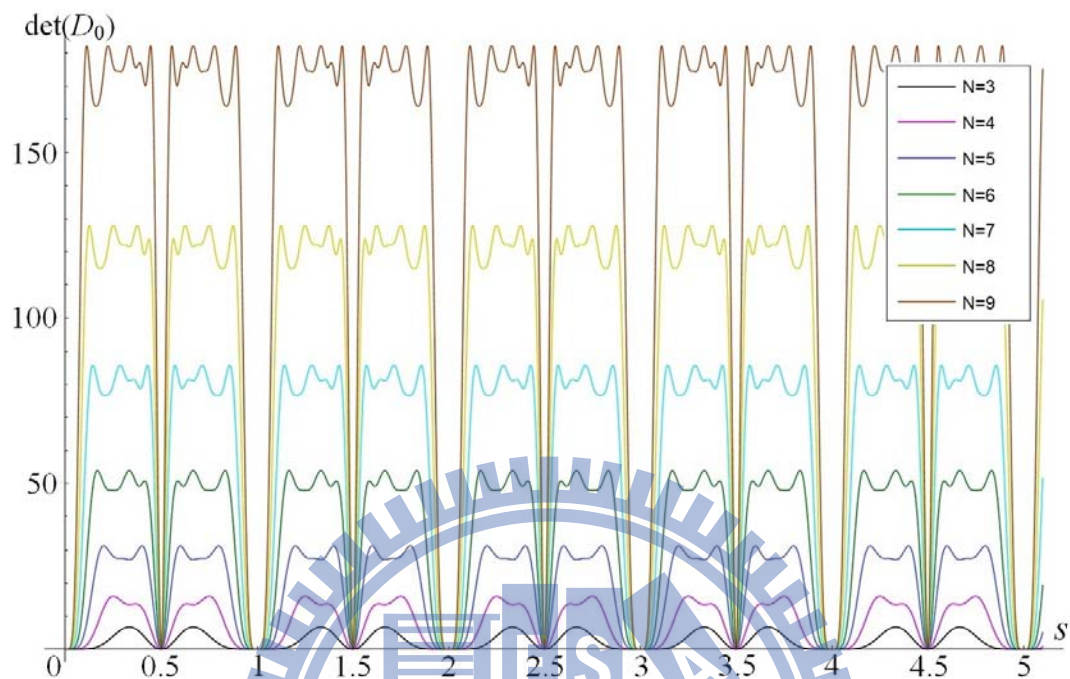


Fig. 5.4 當  $N \geq 3$  時，不同  $m$  值，其  $\det(D_0)$  與  $s$  的關係

其中  $s = f / f_s$ 。由於 Eq. (5.26) 為一超越函數(transcendental function)，因此沒有代數解(algebraic solution)，但是可以由觀察函數的圖形來得到數值解(numerical solution)。Fig. 5.4 顯示出當  $N \geq 3$  時，不同  $m$  值，其  $\det(D_0)$  與  $s$  的關係圖。從圖中可以看出，當  $0 < s < 0.5$  時，即  $f_s > 2f$ ，此時  $\det(D_0) \neq 0$ ，因此 Eq. (5.17) 可以求解，此一結果與取樣理論的敘述吻合；而當不滿足取樣理論的情形發生時，也就是  $s > 0.5$  的情形下，由圖中發現除了  $s$  為  $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2} \dots$  等時都會使得  $\det(D_0) = 0$  之外，其餘的  $s$  值所得到的  $\det(D_0) \neq 0$ 。因此若要以三參數擬合法來求得最佳擬合弦波及相位，則必需滿足下列條件：

$$\begin{cases} N \geq 3; \\ \frac{f}{f_s} = s \neq \frac{N}{2}, \end{cases} \quad (5.27)$$

其中  $N$  為自然數。

### 5.3.2 Fourier transformation approach

Eq. (5.27) 中對於取樣頻率與外差頻率比值的限制條件的結果亦可由 Fourier transformation 來得到。為了方便了解，我們先從無限長取樣時間的情形來說明。一弦波經由無限長時間的取樣，取樣後的函數可由 Eq. (5.12) 表示。將 Eq. (5.12) 做 Fourier transform 後可得

$$Y_{sT} = \left( y_0 \delta(f_t) + \frac{y_0 T'}{2} (\delta(f_t - f) + \delta(f_t + f)) e^{i \left( \frac{f_t}{f} \Psi \right)} \right) \otimes (t_s \text{comb}(t_s f_t)), \quad (5.28)$$

其中  $\otimes$  表示 convolution 符號； $f_t$  為頻域空間的頻率。 $Y_{sT}$  是由三個 delta 函數且以週期為  $f_s$  重覆出現所組成，我們將重覆出現的三個 sinc 函數分組，並標示為 0,1,2...，且以各種顏色做區別，以 Fig. 5.5(a) 表示。根據取樣理論， $Y_{sT}$  必須沒有混疊效應的產生，才能完全重建出原來的波形。但是此處所需重建的波形為一單一頻率的弦波函數，因此在頻域空間中的波形是三個重覆出現且沒有寬度的 delta 函數，因此只要這些 delta 函數沒有重疊，則不會有混疊效應(aliasing effect) 的產生。如 Fig. 5.5(a) 所示，當  $f_s > 2f$ ，則如同取樣理論描述各組頻率不會有重疊的現象；Fig. 5.5(b) 則顯示當  $f_s = 2f$  時的情形，此時每一組的左右兩邊的 delta 函數都會與左右相鄰組別各自的左右兩邊的 delta 函數完全重疊，因此混疊效應使得我們無法從頻率空間中提取出重建波形所需要的頻率。

由於重建的波形是弦波函數的關係，使得我們可以不理會 Nyquist sampling rate，即  $f_s > 2f$  的條件。Fig. 5.5(c) 為  $f < f_s < 2f$  的行情，在此種行情下，由於 delta 函數並沒有混疊現象的產生，因此還是可以提取出所需要的頻率以完整的

重建波形。

當  $f_s < 2f$  時，並不是所有的  $f_s$  都可使用，Fig. 5.5(d)、(e)分別為  $f_s = f$  及  $f_s = \frac{1}{2}f$  的情形，很明顯地在這兩個情況下，不同組的頻率有完全重疊的現象，因此混疊效應再一次使我們無法從頻率空間中提取出重建波形所需要的頻率。

根據以上幾種情形，必定存在某些  $s$  值， $s = f / f_s$ ，使得不同組的頻率有完全重疊的現象，因而造成無法重建波形的結果。為了得到這些  $s$  值，考慮 Fig. 5.5(f) 的情形，假設第  $r$  組中間的峰值會與第  $q$  組右邊峰值完全重疊，而第  $p$  組的中間峰值與第  $q$  組的左邊峰值完全重疊。因此我們可得以下關係

$$rf_s = qf_s + f ; \quad (5.29a)$$

$$pf_s = qf_s - f , \quad (5.29b)$$

將 Eqs. (5.29a)與(5.29b)解聯立方程式，則可得

$$s = \frac{f}{f_s} = \frac{r-p}{2} , \quad (5.30)$$

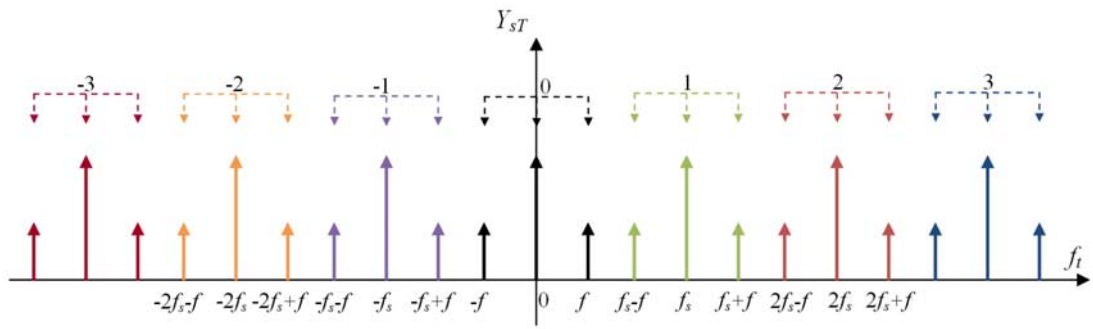
因為  $r$  大於  $p$ ，因此  $r-p \in \mathbb{N}$ 。Eq. (5.30)可改寫為

$$s = \frac{\mathbb{N}}{2} 。 \quad (5.31)$$

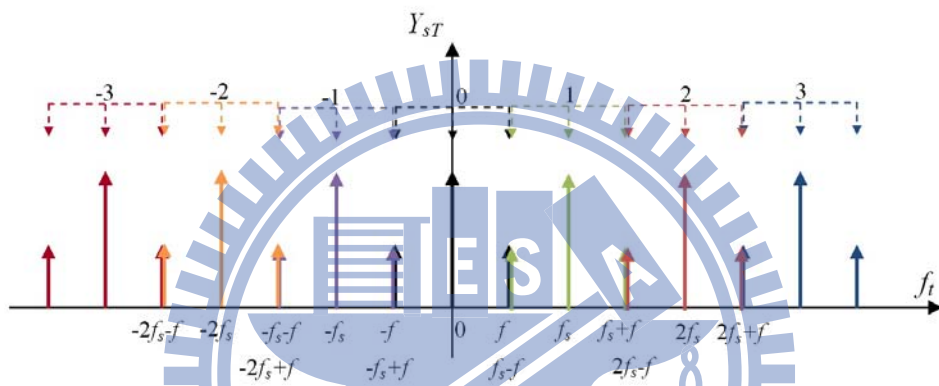
此一結果表示當  $s = \mathbb{N}/2$  的時後，取樣波形在頻率空間中會出現完全重疊的情形，因此即使由於弦波函數的關係，使取樣理論可以不被滿足，即  $f_s < 2f$ ，但還是有 Eq. (5.31)的限制條件，而此限制條件與 Eq. (5.27)中對於取樣頻率與外差頻率比值的限制條件的結果完全吻合。

接著，討論一般真實取樣的情形，即取樣時間不為無限長。當取樣時間不會

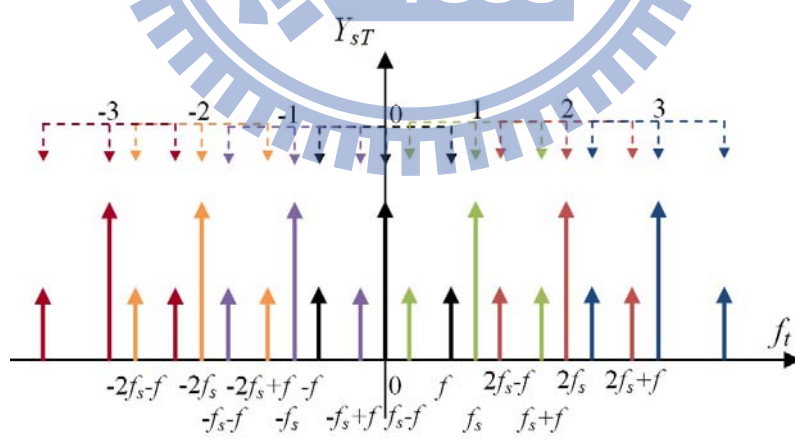




(a)



(b)



(c)

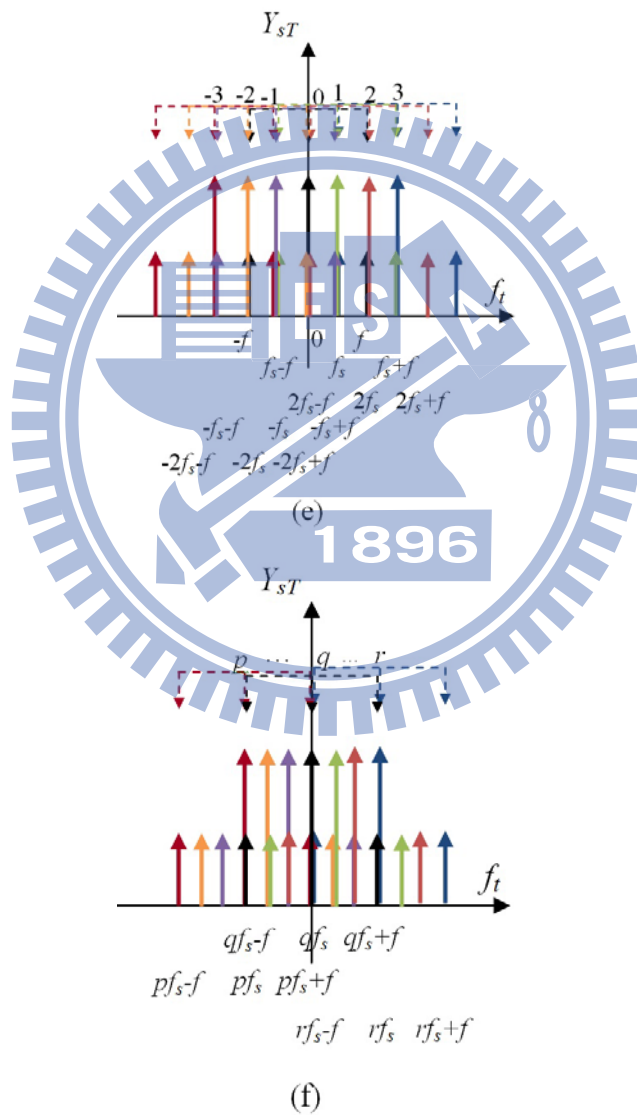
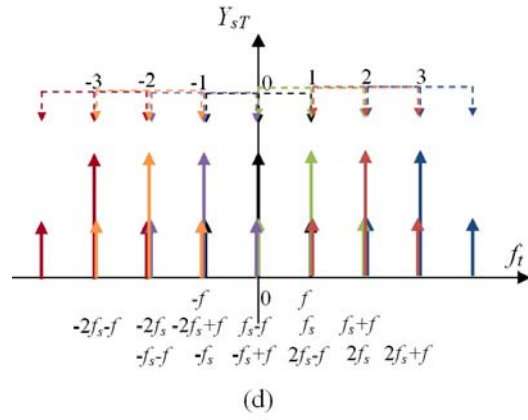


Fig. 5.5 不同  $f_s$  及  $f$  的關係其頻率空間的分佈圖。(a)  $f_s > 2f$  ; (b)  $f_s = 2f$  ; (c)  $f < f_s < 2f$  ;

(d)  $f_s = f$  ; (e)  $f_s = \frac{1}{2}f$  ; (f)  $f_s = \frac{N}{2}f$

無限長時，在拍照的時間為  $t=0 \sim T$  之下，被取樣後的函數可被視為與一矩形函數相乘

$$y_{sT} = y_{s2} \cdot \text{rect}\left(\frac{t-(T/2)}{T}\right) \\ = \left[ y_0 [1+r' \cos(2\pi ft + \Psi)] \text{comb}\left(\frac{t}{t_s}\right) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{t-(T/2)}{T}\right), \quad (5.32)$$

其中  $\text{rect}(\cdot)$  為截斷函數。將 Eq. (5.32) 做 Fourier transform，可得

$$Y_{sT2} = \left[ \left( y_0 \delta(f_t) + \frac{y_0 r'}{2} (\delta(f_t - f) + \delta(f_t + f)) e^{i\left(\frac{f_t}{f}\right)\Psi} \right) \otimes (t_s \text{comb}(t_s f_t)) \right] \\ \otimes (T \text{sinc}(Tf_t) e^{i\pi f_t T}), \quad (5.33)$$

$Y_{sT2}$  與  $Y_{sT}$  十分類似，兩者不同的地方在於  $Y_{sT2}$  並非是由重覆出現的三個 delta 函數所組成，而是由三個 sinc 函數且以週期為  $f_s$  重覆出現所組成，以 Fig. 5.6(a) 表示。由於 sinc 函數互相重疊的關係，因此波形重建會產生誤差，而誤差的大小將由此來決定。由 Eq. (5.33) 可知，這些 sinc 函數的帶寬是由取樣時間  $T$  決定，當  $T$  變大時，sinc 函數的帶寬變小，那麼每個 sinc 函數將更接近於 delta 函數，若將 Fig. 5.6(a) 的  $T$  變大，則所得到的圖形將如 Fig. 5.6(b) 所示。因此，只要  $T$  足夠大，讓每一組的 sinc 函數的帶寬夠小，混疊的情形所造成的誤差將會減小，

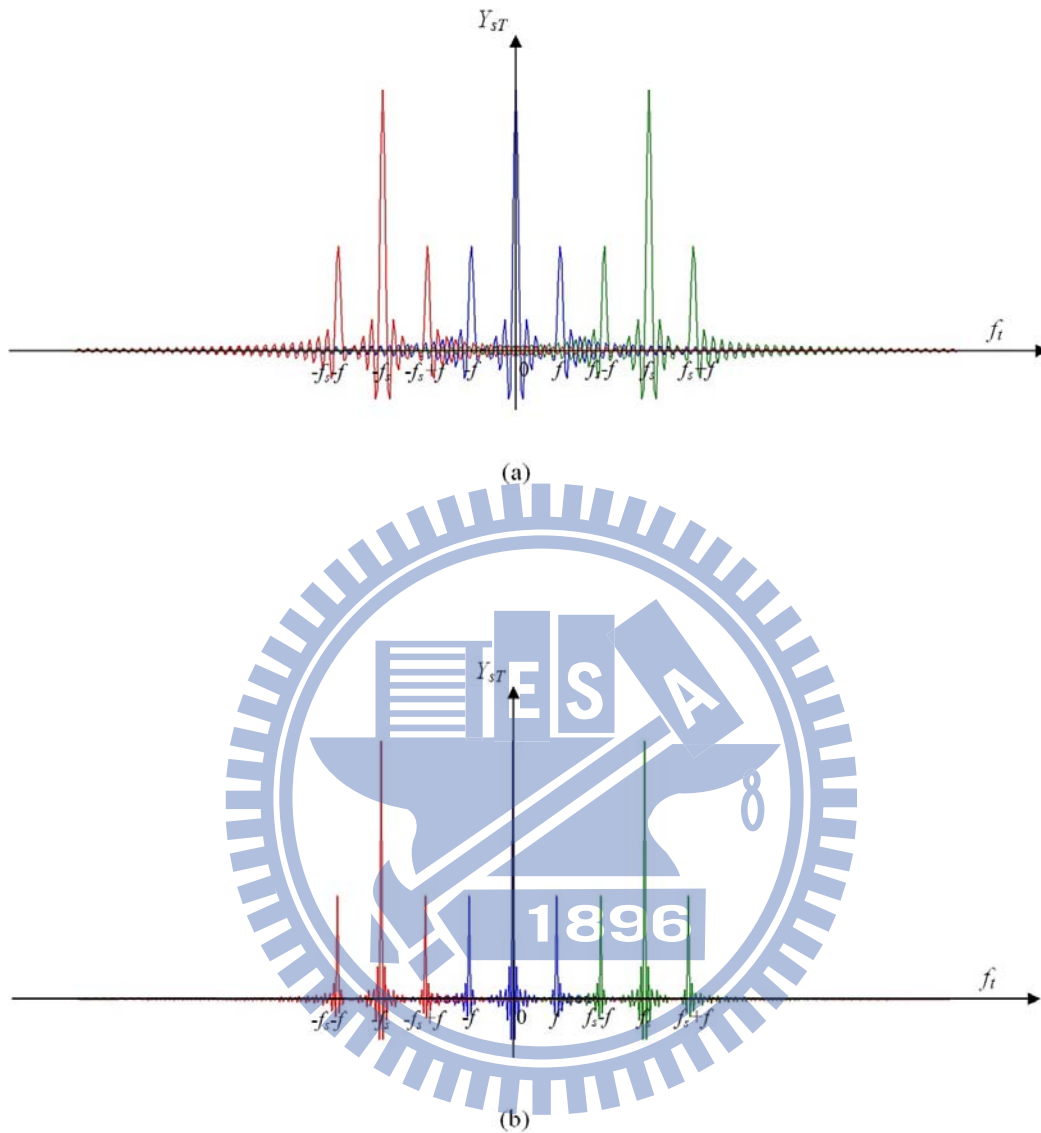


Fig. 5.6 有限長時間頻域空間分佈圖

那麼就可以得到可接受範圍的相位誤差。上述  $Y_{ST}$  的分析結果亦可適用於  $Y_{ST2}$ ，且根據 Eq. (5.31) 當  $s = N/2$  的時後， $Y_{ST2}$  的主要峰值完全重疊，即使  $T$  再大，也會由於取樣波形在頻率空間中完全的重疊，而無法提取所需要的頻率來重建波形。

## 5.4 低取樣時的最佳化取樣條件

### 5.4.1 $m$ 對 $r'/r$ 造成的影響

由 Fig. 5.2 及 Eq. (5.10) 可看出，取樣後的強度分佈及擬合後的波形與原來的波形比較，對比度有很大的差異。然而，對於外差干涉術而言，僅需要精確地知道相位即可。由 Eq. (5.9) 可知，當信號被取樣後，其對比度會改變為如 Eq. (5.10) 所示。Fig. 5.7 顯示不同  $m$  值之下， $r'/r$  對  $fa'$  的關係。當  $m$  越大時，取樣後的波形其對比度會下降，因此相機的灰階數無法全部被使用，會造成相位計算的誤差。要使  $r'$  降低所造成的影響達到最小，那麼灰階數的利用範圍必須為最大值，因此  $r'$  為最大值。但不同的  $m$  值其  $r'/r$  的最大值所對應的  $fa'$  值一直在改變，如 Table 5.1 所示。當  $m$  越大的時後， $r'$  的最大值所對應的  $fa'$  值會趨近於 0.5。但  $fa'$  不可等於 0.5，這是由於當  $fa'=0.5$  時，對所有的  $m$  來說， $s = N/2$ ，將不滿足 Eq. (5.27) 的條件。再者，要使相機灰階數的利用範圍達到最大，則  $r'/r$  為最大值，此時  $m=1$  及  $fa' \cong 0.43$ 。

### 5.4.2 最佳取樣條件

定義  $u = f_s a$ ，這是相機的曝光時間在一個拍照時間週期所佔的比例。以一般市面上的數位相機而言，常見的規格是  $u = 0.5$  及  $n = 8$  bit。因此，綜合以上的條件，可得相機拍照頻率與外差頻率的關係為  $f_s \cong 5f/14$ 。除此之外，還可以藉由提高取樣總時間  $T$  來減少因對比度下降所造成的取樣誤差。如 Fig. 5.8 所示，當  $fa' \cong 0.43$ ， $m=1$ ， $u=0.5$ ， $n=8$  bit，及  $\phi_0 = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, \text{ and } 80^\circ$  時擬合的相位誤差與  $N$  的關係。當  $N \geq 120$  時，相位誤差會被縮減到  $0.05^\circ$  以下。這樣的取樣誤差已經可以拿來做為實際上的應用量測，所以我們提出一個相機拍照頻率低於 Nyquist sampling rate 的最佳條件

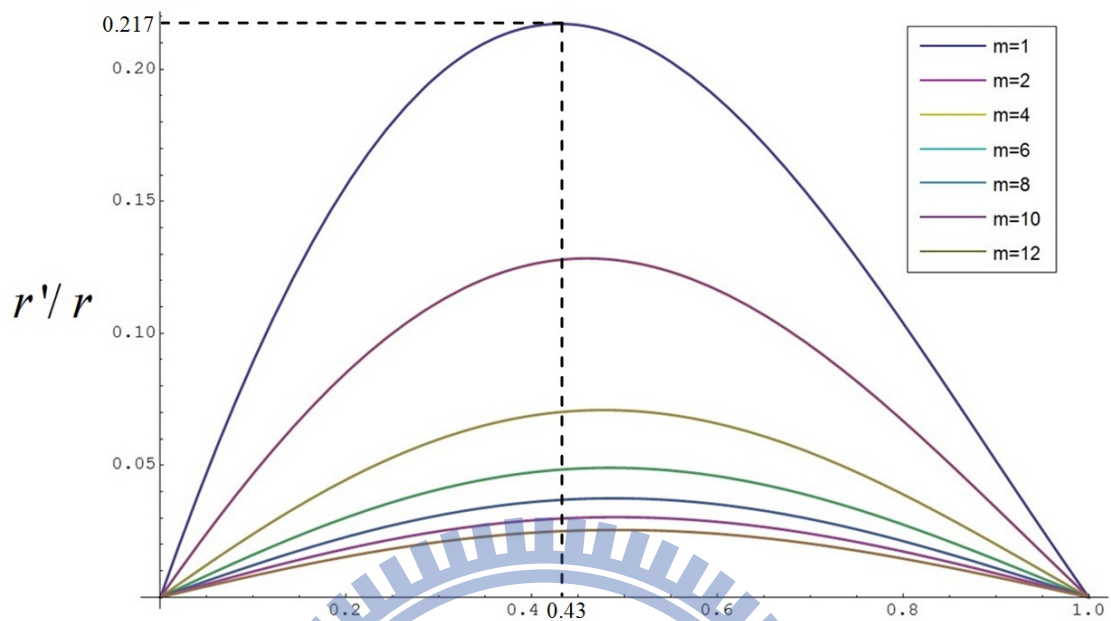


Fig. 5.7 不同  $m$  值之下， $r'/r$  對  $fa'$  的關係曲線

Table 5.1 The value of  $fa'$  for the maximum of  $r'/r$  under different  $m$  value

$m$	$fa'$	$m$	$fa'$
1	0.4303	10	0.4903
2	0.4591	15	0.4934
3	0.4709	20	0.4951
4	0.4774	30	0.4967
5	0.4815	40	0.4975

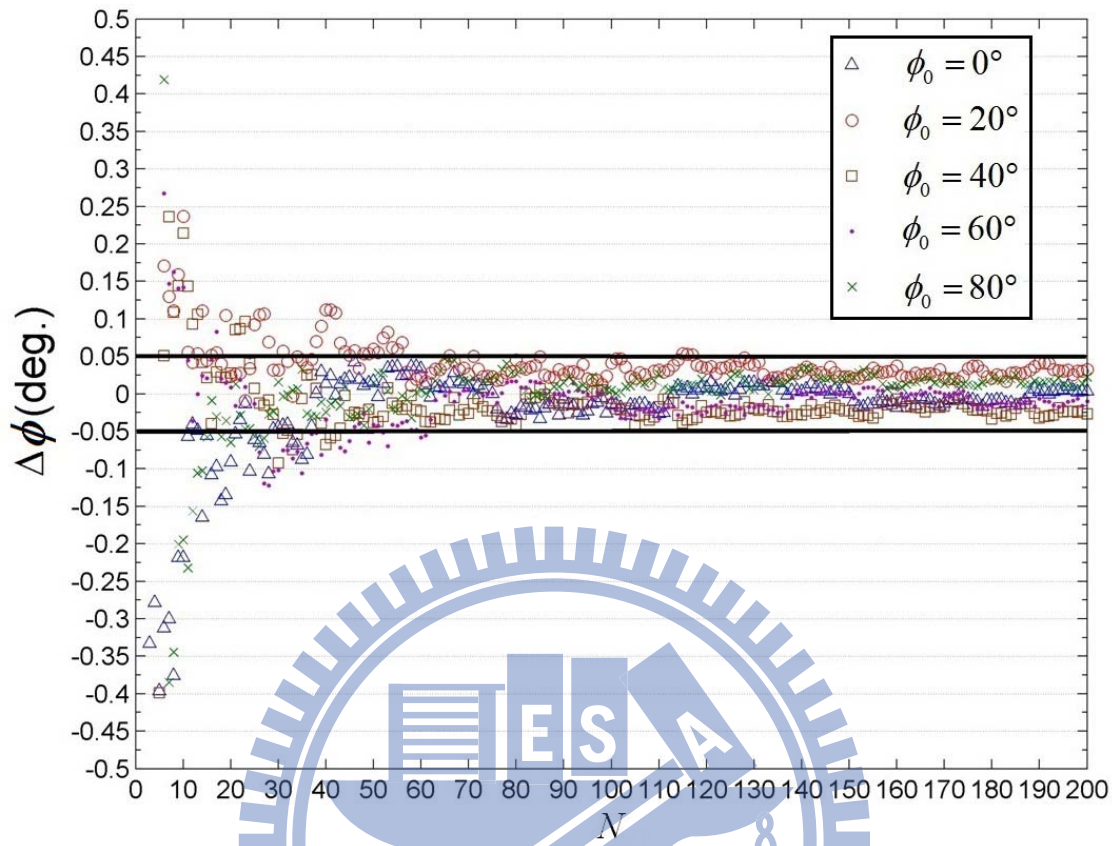


Fig. 5.8 當  $fa' \cong 0.43$  ,  $m=1$  ,  $u=0.5$  ,  $n=8$  bit , 及  $\phi_0 = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, \text{ and } 80^\circ$  時擬合的相

位誤差與  $N$  的關係

$$\begin{cases} f_s = \frac{5}{14} f; \\ N \geq 120, \end{cases} \quad (5.34)$$

## 5.5 討論

在實際應用上，一般市售相機其  $n=8$  bit ,  $u=0.5$  , 及  $f_s=30$  Hz , 在這些條件下，由 Eq. (5.34)可知外差頻率  $f=84$  Hz 。在此外差頻率之下，已可有效的避免環境擾動對干涉信號造成影響，特別是在有 isolator 的場合做實驗時[5]。此外，根據先前的文章中所提出的條件，當  $f=84$  Hz 時，若要有相同的取樣相位

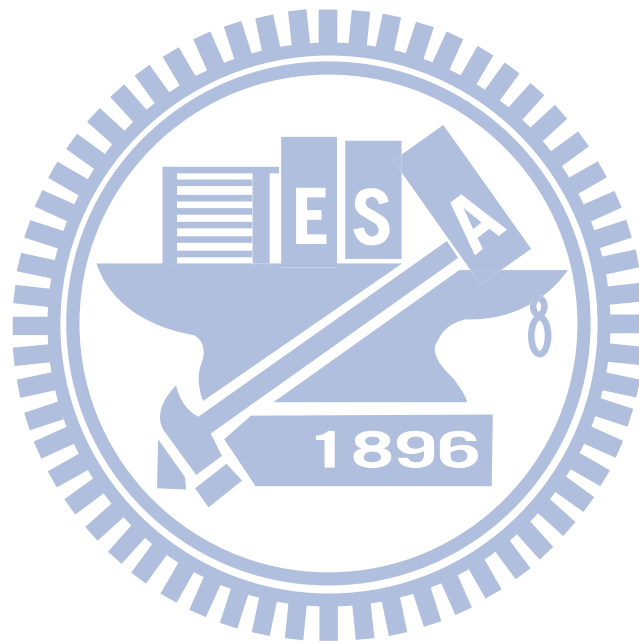


誤差，則  $f_s = 15f = 1260$  Hz。一般而言，低價的相機無法有如此高的拍照速度，必須使用高速相機。根據我們所知，擁有此拍照速度的相機其價格為同畫素普通速度相機的數十倍。其次，前作中提出的最佳條件裡， $T = 1/f$ ，因此取樣的總數  $N = 15$ ；與本文提出的最佳條件比較，若  $f_s = 30$  Hz 的情形下，要達到相同的解析度則  $N \geq 120$ 。雖然總取樣的數目增加，但是以 8 bit 及畫素大小為  $800 \times 600$  的相片來說， $N = 15$  (約 3 Mb) 及  $N = 120$  (約 24 Mb) 的相片容量對現在的電腦而言所佔的硬碟容量皆很小，幾乎不會增加任何成本。因此，在取樣所造成相同的相位誤差之下，本文中所提出的條件可大幅節省實驗成本。

## 5.6 小結

一般市售相機通常以  $n = 8$  bit， $u = 0.5$ ，及  $f_s = 30$  Hz 的條件在全場外差干涉儀中作為取樣工具。本章推導出相機在外差干涉術中的取樣程序，並提出即使不滿足取樣原理的條件，仍可使用三參數弦波擬合法及 Fourier sine and cosine transforms 求得波形及相位，將擬合的相位與原信號的相位相比以求得理論上的相位誤差。此外，雖然取樣頻率在低於外差頻率的兩倍時，可以得到干涉信號的相位，但是並非所有的取樣頻率對外差頻率比都可使用。本研究利用 Fourier transform 方法及矩陣運算的方式，都可以分別得到取樣頻率與外差頻率的限制條件。除此之外，以 Fourier transform 方法及矩陣運算的方式只能獲得可還原干

涉信號及相位的最低限制，但在實際應用上，必需設定相位解析的誤差。因此，在相位誤差設定在 $0.05^\circ$ 時，可以模擬定出如 Eq. (5.34)的最佳條件，可以做為用市面上容易取得且便宜的低速相機用來從事此方面研究的參考。



## 5.7 參考文獻

1. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters *IEEE Std. 1241-2000*, 25-29 (2000).
2. C. P. Brophy, "Effect of intensity error correlation on the computed phase of phase-shifting interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 537-541 (1990).
3. H. C Hsieh., Y. L. Chen, Zhi-Chen Jian, W. T. Wu and D. C. Su, "Two-wavelength full-field heterodyne interferometric profilometry," *Meas. Sci. Technol.* **20**, 025307 (2009).
4. H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Trans. AIEE* **47**, 617-644 (1928).
5. B. Widrow, "A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory," *IRE Trans. Circuit theory* **3**, 266-276 (1956).
6. H. J. Landau, "Sampling, data transmission, and the Nyquist rate," *Proc. IEEE* **55**, 1701-1706 (1967).
7. Z. C. Jian, Y. L. Chen, H. C. Hsieh, P. J. Hsieh and D. C. Su, "An optimal condition for the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **46**, 115604 (2004).

8. T. Nakata and T. Ninomiya, "A charge-coupled-device-based heterodyne technique for parallel photodisplacement imaging," *J. Appl. Phys.* **96**, 6970-6980 (2004).
9. T. Nakata and T. Ninomiya, "General solution of undersampling frequency conversion and its optimization for parallel photodisplacement imaging," *Appl. Opt.* **45**, 7579-7589 (2006).
10. H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, Y. L. Chen, and D. C. Su, "Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.*, article in press.
11. T. Tkaczyk, R. Jozwicki, "Full-field heterodyne interferometer for shape measurement: experimental characteristics of the system," *Opt. Eng.* **42**, 2391-2399 (2003).
12. P. Egan, M. J. Connelly, F. Lakestani, and M. P. Whelan, "Random depth access full-field heterodyne low-coherence interferometry utilizing acousto-optic modulation and a complementary metal-oxide semiconductor camera," *Opt. Lett.* **31**, 912-914 (2006).
13. Y. Watanabe and M. Sato, "Three-dimensional wide-field optical coherence tomography using an ultrahigh-speed CMOS camera," *Opt. Commun.* **281**, 1889-1895 (2008).

14. O. A. Skydan, F. Lilley, M. J. Lalor, and D. R. Burton, "Quantization error of CCD cameras and their influence on phase calculation in fringe pattern analysis," *Appl. Opt.* **42**, 5302-5307 (2003).
15. B. Zhao, "A statistical method for fringe intensity-correlated error in phase-shifting measurement: the effect of quantization error on the N-bucket algorithm," *Meas. Sci. Technol.* **8**, 147-153 (1997).
16. C. P. Brophy, "Effect of intensity error correlation on the computed phase of phase-shifting interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 537-541 (1989).
17. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters *IEEE Std. 1241-2000*, 25-29 (2000).
18. F. C. Alegria and A. C. serra, "Uncertainty of the estimates of sine wave fitting of digital data in the presence of additive noise," IMTC 2006 Italy, 1643-1647 (2006).

## 第六章 量測四分之一波片之二維相位延遲分佈

### 6.1 引言

當外差干涉術擴展到全場量測時，為了節省因掃瞄所耗費的時間，因而使用快速相機來擷取干涉信號[1-2]。然而，科學用的快速相機的成本過高，以致於造成全場外差干涉術在實驗中的一種門檻。因此，在第五章中提出並且以理論方式証明了即使取樣頻率不滿足 Nyquist 取樣速率，即取樣頻率低於兩倍外差頻率，還是可以利用三參數弦波擬合法來得到外差干涉信號的相位。除此之外，還提出了以普通市售相機在低取樣條件時，仍然可做為全場外差干涉術取樣工具的最佳取樣條件[3]。但也僅止於理論上的探討，本章將直接利用第五章所提出的最佳取樣條件，以市面上容易取得之低價位相機，對四分之一波片進行全場相位延遲的量測。

光學材料的雙折射特性經常被應用在許多研究領域中，諸如石英晶體及液晶等。精確地量測出雙折射材料的快軸與慢軸間的相位延遲，對於光電及平面顯示器等之相關產業來說是一項必要的檢測技術。在過去有多位研究學者開發了數種測量雙折材料的相位延遲的方法[4-15]，並有很好的量測結果。然而除了 Lo[14]與 Chen[15]的方法之外，其餘的方法都僅限於單一探測點的量測方法。雖然 Lo 的方法可用在雙折材料的全場相位延遲分佈的量測，但是該方法是使用類似移相干涉技術[16]的方法。雖然其光源及干涉信號皆為外差信號，但在擷取干涉信號時必須精確地將干涉信號的一個完整週期等分成四等分，並分別紀錄四個連續且紀錄時間為四分之一週期的光強度。而後再將擷取到的信號做進一步的計算得到干涉信號的相位。此種解析相位的方式稱為 four-frame integrating-bucket method [14]，所得到的影像及處理的技術類似四步移相干涉術。然而這個方法也確實可以做為普通低速相機在全場外差干涉術應用的一種方式，但就是需要犧牲解析度來達到解析相位的效果(相位解析度約為  $0.35^\circ$ )。為了改進量測準確度，Chen 提出了以全場外差干涉術來量測全場相位延遲的方法[15]。與 Lo 不同的是，為了

達到與傳統外差干涉術具有相同的相位解析度，在 Chen 的實驗中使用了快速 CMOS 相機來擷取干涉信號。如第二章的相位解析法所述，其所擷取到的干涉光強度會呈現一序列之弦波訊號，最後以三參數弦波擬合法還原出外差干涉信號的弦波及相位。因此，該方法確實提高了量測的解析度(相位解析度約為  $0.01^\circ$ )，並且同時具有共光程干涉術及外差干涉術的優點。然而，快速 CMOS 相機的造價並不便宜，使得實驗的成本提高許多。因此，本方法將 Chen 的方法進行改良，實驗架構與其類似，但干涉信號的擷取是以第五章所述之低取樣時的最佳化條件做為取樣頻率及外差頻率選擇的依據，並且利用三參數弦波擬合法，還原出原干涉信號的相位大小。並且利用普通的相機來達到與 Chen 的實驗有相同的相位解析度。除了同時具有共光程干涉術及外差干涉術的優點之外，還可以大幅降低實驗的成本。

本章在 6.2 節中描述此方法之原理；在 6.3 節中展示以四分之一波片做為待測對象的測量結果，並在 6.4 節中做誤差分析的探討。

## 6.2 原理

本方法的實驗架構圖如 Fig. 6.1 所示，一線性偏極雷射光通過由訊號產生器 FG 與線性電壓放大器 LVA 所驅動的電光晶體調制器 EO，驅動 EO 的電壓訊號是頻率為  $f$  且振幅等於 EO 半波電壓  $V_\pi$  的鋸齒波訊號。此光束經過顯微物鏡 MO 與針孔 PH，再由一準直透鏡 CL 準直後，通過待測樣本 S 與檢偏板 AN，最後經由成像透鏡 IL 將影像成像於一快速 CMOS 相機 C 上。S 為我們常用的圓形波片，它可由 IL 進行成像，S 的影像則會落於 C 的感測平面上。若光源沒有通過 S 的區域而直接照射在 C 上，則稱此區域為 Region I。Region I 是做為參考信號使用。而通過 S 並以 IL 成像至感測平面上的區域就標示成 Region II，做為測試信號使用。若在 Region I 與 Region II 裡像素的電場大小分別為  $E_t$  與  $E_r$ ，則其光強度就分別為  $I_t = |E_t|^2$  以及  $I_r = |E_r|^2$ ，其中  $I_t$  與  $I_r$  分別表示測試訊號與參考訊號。



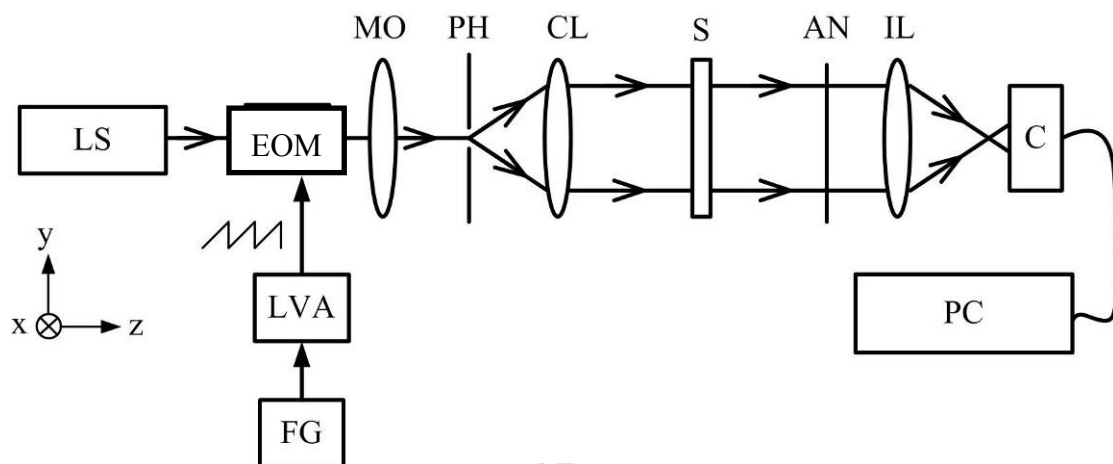


Fig. 6.1 量測全場相位延遲之光路架構圖。LS：雷射光源；EOM：電光晶體調制器；LVA：線性電壓放大器；FG：訊號產生器；MO：顯微物鏡；PH：針孔；CL：準直透鏡；S：待測樣本；AN：檢偏板；IL：成像透鏡；C：CMOS 相機；PC：個人電腦

為方便起見，在此我們定義  $+z$  軸為光前進方向，且  $x$  軸為垂直紙面向下的方向。首先使雷射光的線性偏極方向與  $x$  軸夾  $45^\circ$  角，且電光調制器 EOM 的快軸與 S 的快軸皆沿  $x$  方向。若 AN 的穿透軸方向調整至與  $x$  軸夾  $45^\circ$ ，則  $E_t$  與  $E_r$  的 Jones 向量可推導如下 [17]

$$\begin{aligned}
 E_t &= AN \cdot S \cdot EOM \cdot E_o \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi f t} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi f t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi f t + \psi}{2})} + e^{-i(\frac{2\pi f t + \psi}{2})} \\ e^{i(\frac{2\pi f t + \psi}{2})} - e^{-i(\frac{2\pi f t + \psi}{2})} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t}, \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
E_r &= AN \cdot EOM \cdot E_o \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi ft} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi ft} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\frac{2\pi ft}{2})} + e^{-i(\frac{2\pi ft}{2})} \\ e^{i(\frac{2\pi ft}{2})} + e^{-i(\frac{2\pi ft}{2})} \end{pmatrix} e^{i2\pi f_0 t}, \tag{6.2}
\end{aligned}$$

其中  $f_0$  代表光頻率而  $\psi$  表示由 S 造成的相位延遲，其相關的光強度可以分別表示為

$$I_t = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\pi ft + \psi + \phi_r)], \tag{6.3}$$

以及

$$I_r = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\pi ft + \phi_r)], \tag{6.4}$$

其中  $\phi_r$  為初始相位。由於  $I_t$  與  $I_r$  皆為弦波訊號，可根據 5.2 節的方法解出全場相位延遲分佈  $\psi(x, y)$ 。另外，為了增加量測準確度，測試訊號  $I_r$  中的參考相位  $\phi_r$  是由 Regions II 裡的所有像素的相位平均值而計算得到。

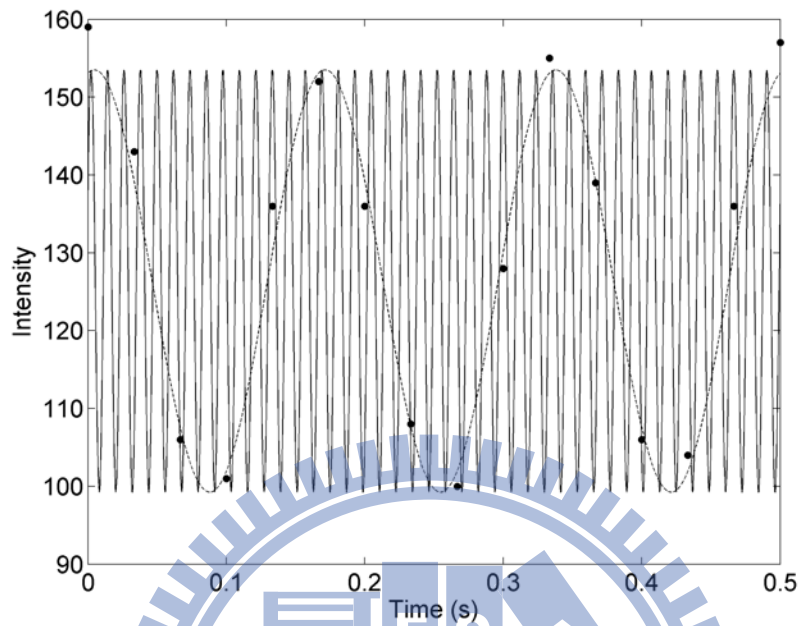
### 6.3 實驗與結果

在第五章中，針對於一般市面上的數位相機( $u = 0.5$  及  $n = 8 \text{ bit}$ )而言，我們提出相位誤差在  $0.05^\circ$  以下之 optimal conditions[8] 為

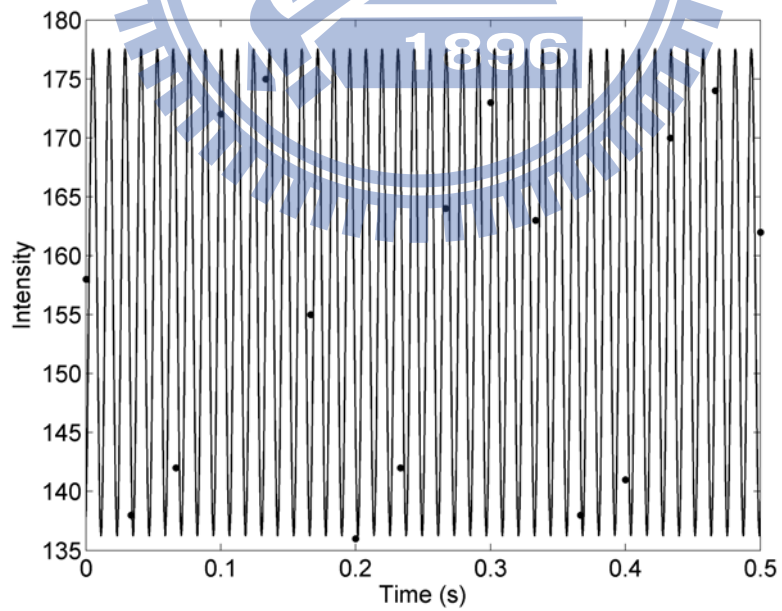
$$N \geq 120 ; \quad (6.5a)$$

$$f_s = \frac{5}{14} f . \quad (6.5b)$$

因此我們在此條件之下，對 1/4 波片(Union Optic/WPF4125) [18] 進行全場相位延遲的量測以驗證其可行性。此波片折射率( $n_e, n_o$ ) = (1.553, 1.544)，有效厚度  $d = 17.58 \mu\text{m}$  (只有石英晶體的厚度部分，不包含基板玻璃的厚度)，樣本直徑為 1 英寸，量測區域涵蓋整個樣本。上述  $n_e$  與  $n_o$  分別代表非尋常(extraordinary)與尋常(ordinary)光折射率。用來擷取干涉信號的相機(Guppy/F-080)其灰階數  $g = 8 \text{ bit}$ 、畫素為  $380 \times 380$ 、取樣頻率  $f_s = 30 \text{ Hz}$  與曝光時間  $a = 1/60 \text{ s}$ 。另外，根據 Eq. (6.5a)，設定拍照總時間  $T = 5 \text{ s}$  即  $N = 150$ 。而由 Eq. (6.5b) 可知， $f = 84 \text{ Hz}$ ，在此外差頻率下可忽略環境擾動對干涉信號造成影響[19,20]。因此，波長為  $632.8 \text{ nm}$  的 He-Ne 雷射通過電光晶體(New Focus/Model 4002)，半波電壓  $V_\pi = 148 \text{ V}$  且驅動電光晶體的鋸齒波其電壓的振幅及頻率分別為  $V = 148 \text{ V}$  及  $f = 84 \text{ Hz}$ ，後形成一 s 與 p 偏光間具有頻差為  $f$  的外差光源。干涉信號的影像由未通過 1/4 波片的 Region I 及通過 1/4 波片的 Region II 所組成。而 Region I 與 Region II 的相位差即代表 1/4 波片的相位延遲。Fig. 6.2(a)與(b)中的黑點分別是座標在(200, 200)及(375, 200)的相素所得的取樣強度，這兩點分別位於 Region I 及 Region II 中。將這些取樣數據送入個人電腦，並且以 Matlab (MathWorks Inc.) 軟體作弦波擬合之後，可分別得如實線所示的擬合波形，並可得其相位分別為  $293.17^\circ$  與  $202.88^\circ$ ，因此相位延遲為  $90.29^\circ$ 。全場相位的量測結果如 Fig. 6.3(a)所示，Fig. 6.3(b)則為 Fig. 6.3(a)中虛線所代表的一維相位延遲曲線。此外，對於 Fig. 6.3(a)的方形區域範圍



(a)



(b)

Fig. 6.2 座標分別在(a) (200, 200)及 (b) (375, 200)的相素所得的取樣強度

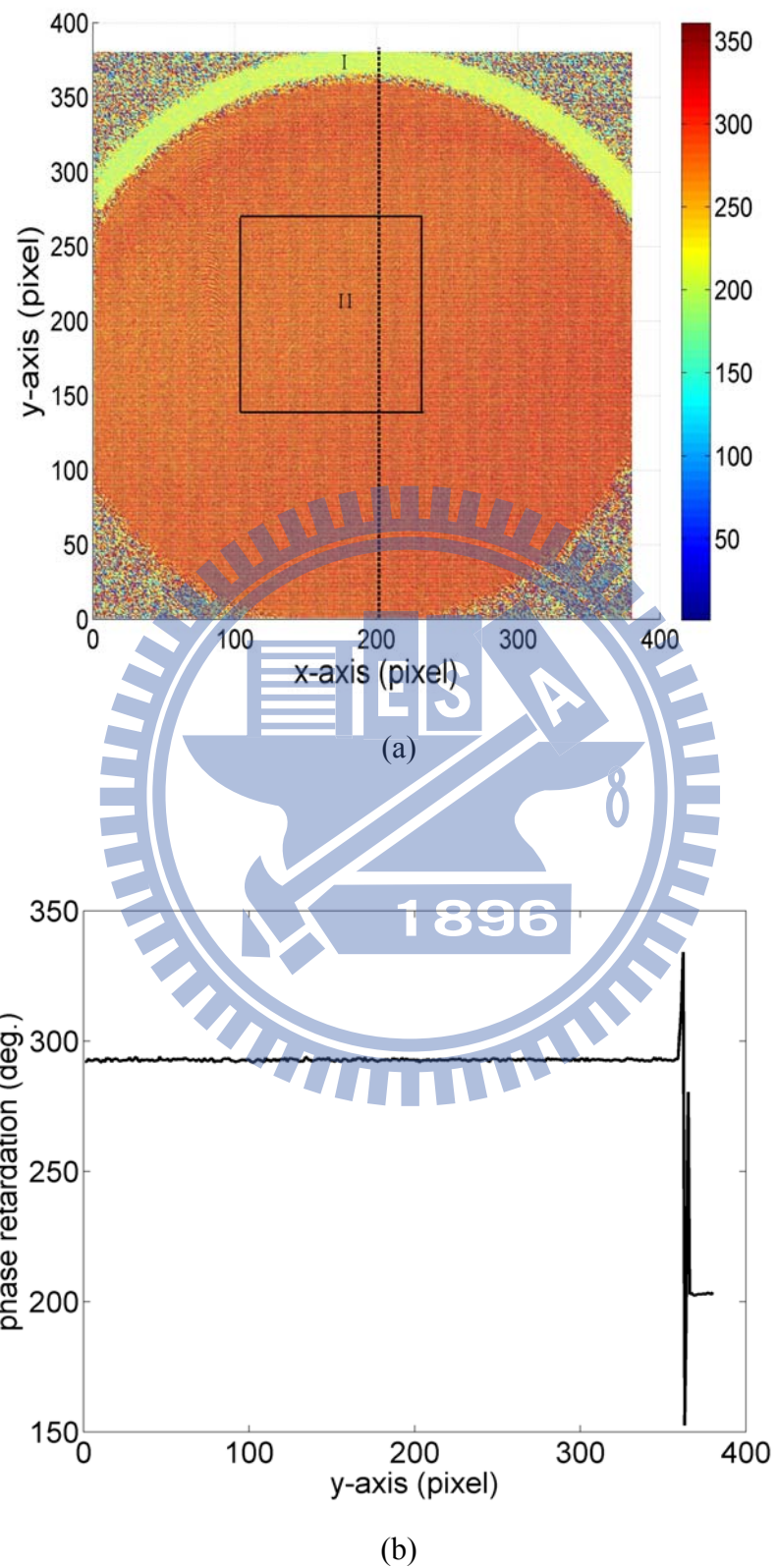


Fig. 6.3 (a)全場相位的量測結果；(b) Fig. 6.3(a)中虛線所代表的一維相位延遲曲線

(150×150 像數)，其標準差為 0.37°。此結果與 Chen[21]等人的量測結果相符合。

## 6.4 討論

本方法的相位誤差來源包含有下列幾項：取樣誤差[3]  $\Delta\phi_1$ 、偏振混合誤差[22,23]  $\Delta\phi_2$ 、方位角角度誤差[9]  $\Delta\phi_3$ 及擴束準直誤差  $\Delta\phi_4$ 等幾項，分述如下：

### (1) 取樣誤差

此項誤差的大小已詳述於第五章中，在此不再贅述。取樣誤差的大小，根據實驗的條件，則可計算得  $\Delta\phi_1 \approx 0.05^\circ$ 。

特別值得一提的是，相機取樣後的強度如 Fig. 6.2(a)中的黑點所示。可以看出這些取樣的強度在時間軸上的排列剛好為另一個弦波函數(虛線)，且頻率為  $f$  及  $f_s$  的最大公因數  $h$ 。因此，若在擬合的過程中，沒有告知擬合的頻率大小而直接擬合(即四參數擬合法)，則會得到錯誤的擬合曲線及相位。然而，在外差干涉術中，外差頻率  $f$  為已知條件，因此三參數弦波擬合法中的弦波頻率可假設為已知，可以擬合出正確的弦波及相位(實線)。

### (2) 偏振混合誤差

當光線通過如檢偏板與偏極分光鏡等偏光元件時，常會發生偏極混合(polarization mixing)的現象。假設偏極板調整在 p-偏光方向，則除了主要的 p-偏光會通過之外，還會耦合一小部分的 s-偏光，反之亦然。此偏極混合誤差可根據偏極板產品規格中的消光係數進一步估算其修正量。在本研究中使用的偏極板(Japan Sigma Koki, Ltd.)的消光係數為  $1 \times 10^{-5}$ ，經修正後，估計偏極混合誤差可降至  $\Delta\phi_2 = 0.03^\circ$ [24]。

### (3) 方位角角度誤差

此項誤差是由於EO調制器的快軸與待測雙折樣本的快軸之間沒有對準所造成，若此兩快軸之間有一夾角 $\varepsilon$ ，則此項角度誤差 $\Delta\phi_a$ 會受 $\varepsilon$ 與 $\psi$ 的影響。此項誤差可如同Chiu等人所做的估計方法[9]而得到，假設在 $\psi = 90^\circ$ 時 $|\varepsilon| = 5^\circ$ ，則可得 $\Delta\phi_3 \approx 0.03^\circ$ 。

### (4) 擴束準直誤差

此項誤差是與光束準直的優劣有關，若光束的中央部分調整成垂直方向進入待測波片，則假設光束外圍部分會以 $\Delta\theta$ 角度入射波片。根據Chang的技術[24]，可改進此準直光的品質達到 $\Delta\theta = 0.02^\circ$ 。若光傳波方向與雙折樣本的光軸方向夾角為 $\theta$ ，則可將有效非尋常光折射率 $n_e(\theta)$ 表示如下[25]

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}, \quad (6.6)$$

因此，相關的準直誤差 $\Delta\phi_c$ 可寫成

$$\Delta\phi_c = \frac{[n_e(\theta) - n_o]d}{\lambda} \times 360^\circ; \quad (6.7)$$

其中 $\lambda$ 為光波長。若將我們的實驗條件 $(n_e, n_o) = (1.553, 1.544)$ 、 $d = 17.58 \mu\text{m}$ 、 $\theta = 90^\circ \pm 0.02^\circ$ 以及 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 代入Eqs. (6.6)與(6.7)，則可以得到

$\Delta\phi_4 \approx (1.1 \times 10^{-5})^\circ$ 。此外，Region II的干涉訊號對比度會由於乘上係數 $\cos(\Delta\theta)$ 而降低，當 $\Delta\theta$ 小於 $10^\circ$ 時，對比度幾乎不變，因此，光束的準直品質幾乎不會



影響 Region II 的相位量測結果。

總合以上的誤差來源，本方法的理論相位誤差大小為

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 + \Delta\phi_4 \approx 0.1^\circ。$$

## 6.5 小結

本方法將 Chen 的方法進行改良，實驗架構與其類似，但干涉信號的擷取是以第五章所述之低取樣時的最佳化條件做為取樣頻率及外差頻率選擇的依據，並且利用三參數弦波擬合法，還原出干涉信號的相位大小。並且利用普通的相機來達到與 Chen 的實驗有相同的相位解析度。實驗中對 1/4 波片進行全場相位延遲的量測以驗證其可行性。除了同時具有共光程干涉術及外差干涉術的優點之外，還可以大幅降低實驗的成本。

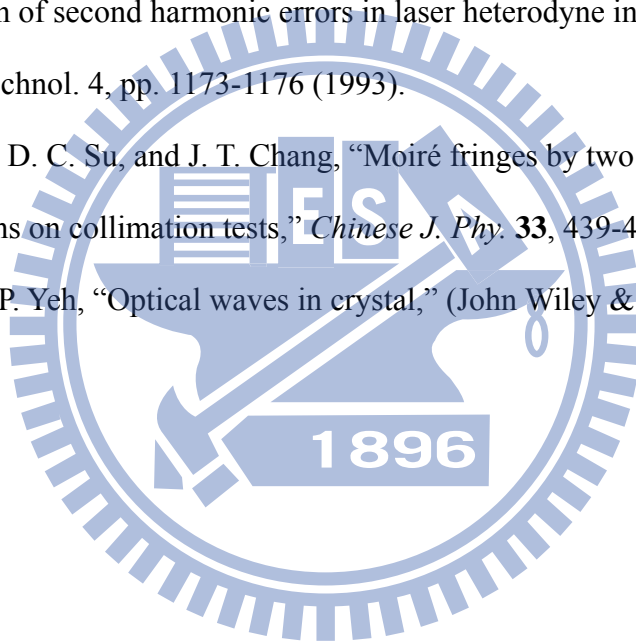


## 6.6 參考文獻

1. T. Nakata and T. Ninomiya, "A charge-coupled-device-based heterodyne technique for parallel photodisplacement imaging," *J. Appl. Phys.* **96**, 6970-6980 (2004).
2. H. C Hsieh., Y. L. Chen, Zhi-Chen Jian, W. T. Wu and D. C. Su, "Two-wavelength full-field heterodyne interferometric profilometry," *Meas. Sci. Technol.* **20**, 025307 (2009).
3. H. C. Hsieh, W. T. Wu, W. Y. Chang, Y. L. Chen, and D. C. Su, "Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry," *Opt. Eng.*, article in press.
4. B. R. Grunstra and H. B. Perkins, "A method for measurement of optical retardation angles near 90 degrees," *Appl. Opt.* **5**, 585-587 (1996).
5. C. M. McIntyre and S. E. Harris, "Achromatic wave plates for the visible spectrum," *J. Opt. Soc. Am.* **58**, 1575-1580 (1968).
6. Y. Lin, Z. Zhou and R. Wang, "Optical heterodyne measurement of the phase retardation of a quarter-wave plate," *Opt. Lett.* **13**, 553-555 (1988).
7. S. Nakadate, "High precision retardation measurement using phase detection of Young's fringes," *Appl. Opt.* **29**, 242-246 (1990).
8. M. Sypek, "A new technique for the measurement of phase retardation," *Opt. Laser Technol.* **23**, 42-44 (1991).
9. M. H. Chiu, C. D. Chen, and D. C. Su, "Method for determining the fast axis and phase retardation of a wave plate," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1924-1929 (1996).

10. C. M. Feng, Y. C. Huang, J. G. Chang, M. Chang, and C. Chou, "A true phase sensitive optical heterodyne polarimeter on glucose concentration measurement," *Opt. Commun.* **141**, 314-321 (1997).
11. A. Ma'riquez, M. Yamauchi, J. A. Davis, and D. J. Franich, "Phase measurement of a twist nematic liquid crystal spatial light modulator with a common-path interferometer," *Opt. Commun.* **190**, 129-133 (2001).
12. Y. L. Lo and P. F. Hsu, "Birefringence measurements by an electro-optic modulator using a new heterodyne scheme," *Opt. Eng.* **41**, 2764-2767 (2002).
13. Y. L. Lo, C. H. Lai, J. F. Lin, and P. F. Hsu, "Simultaneous absolute measurements of principle angle and phase retardation with a new common-path heterodyne interferometer," *Appl. Opt.* **43**, 2013-2022 (2004).
14. Y. L. Lo, H. W. Chih, C. Y. Yeh, and T. C. Yu, "Full-field heterodyne polariscope with an image signal processing method for principal axis and phase retardation measurements," *Appl. Opt.* **45**, 8006-8012 (2006).
15. Y. L. Chen and D. C. Su, "Full-field measurement of the phase retardation for birefringent elements by using common path heterodyne interferometry," *Opt. Laser Eng.* **47**, 484-487 (2009).
16. K. J. Gasvik, "Optical Metrology," 3rd ed., John Wiley, 280 (2002).
17. E. Hecht, "Optics," 4th ed., (Addison-Wesley), 376-379 (2002).
18. <http://www.u-optic.com/wpf.htm>
19. I. L. Ver and L. L. Beranek, "Noise and vibration control engineering," (Wiley), 557-578 (1992).

20. W. Booth, "How to determine your equipment needs," *Laser Focus World* **46**, 65-71 (2010).
21. Y. L. Chen and D. C. Su, "Full-field measurement of the phase retardation for birefringent elements by using common path heterodyne interferometry," *Opt. Laser Eng.* **47**, 484-487 (2009).
22. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers," *Prec. Eng.* **14**, 91-98 (1992).
23. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic errors in laser heterodyne interferometry," *Meas. Sci. Technol.* **4**, pp. 1173-1176 (1993).
24. C. W. Chang, D. C. Su, and J. T. Chang, "Moiré fringes by two spiral gratings and its applications on collimation tests," *Chinese J. Phy.* **33**, 439-449 (1995).
25. A. Yariv and P. Yeh, "Optical waves in crystal," (John Wiley & Sons), pp. 84-88 (1984).



## 第七章 結論

本研究以取樣原理的角度來探討全場外差干涉術及其應用在各類物理參數的量測。為了將外差干涉術擴展至全場的量測而不使用橫向掃瞄的方式來達到此目的，因此使用數位相機來取樣干涉信號。然而在建構全場外差干涉術時，遇到的困難如下：相機拍照速率與外差頻率間的關係對取樣誤差造成的影響為何？由於使用相機而無法同步擷取測試信號及參考信號，因此如何量測絕對相位對全場外差干涉術來說是重要的。在實驗上，如何自動化控制相機取樣及信號還原的過程，對於現代自動化量測是必需的。除此之外，為了成本上的考量，科學用高速相機昂貴的價格造成了許多研究學者進入全場外差干涉術的一項門檻。因此，在不失去外差干涉術高解析度的條件下，如何利用普通市售相機做為全場外差干涉術取樣的工具是有趣且必要的。

因此，在第二章時，首先介紹取樣定理，敘述 Nyquist 取樣速率及取樣頻率與信號還原的關係；其次，說明外差干涉術的基本原理，並且介紹本論文中使用到的外差光源；而後則介紹利用相機做為全場外差干涉術的取樣工具時所使用的控制軟體及自動控制程式；接著敘述相位計算及絕對相位計算的方式；最後則是全場外差干涉術的誤差來源估計。

第三章及第四章則根據第二章所提及的全場外差理論及方法所做的應用。第三章則為大階高物體之表面形貌之量測。首先介紹量測的原理，包含干涉信號的相位及利用雙波長干涉術的方法來求得大階高的技術。接著實驗及說明量測所得到的實驗結果，最後則對誤差做進一步的討論。

第四章則為斜入射量測 GRIN lens 之折射率分佈。本章首先簡短說明量測 GRIN lens 的方法優缺點；而後說明本方法的原理，即 GRIN lens 之折射率與干涉信號相位間的關係。接著實驗及說明量測所得到的實驗結果，並驗證此方法的可行性。最後則是對誤差做進一步的分析。

第五章則在不滿足取樣定理的全場外差干涉術中，推導出將相機操作在低取

樣(取樣頻率低於外差頻率的兩倍)之下的最佳取樣條件。首先以數學模型推導相機擷取干涉信號時的狀況，再利用弦波擬合法計算相位。接著，在推導的過程中，可以用 Fourier transform 及矩陣運算的方式來得到取樣頻率及外差頻率之間的限制條件。而後，在相位解析誤差為  $0.05^\circ$  之下，給定了一組最佳化的實驗條件。可以做為以普通相機來做全場外差干涉術的一個參考。

第六章以第五章所提出的低取樣時的最佳條件來量測四分之一波片的相位延遲，以驗證第五章所提出的理論其正確性。首先講述實驗的原理；接著實驗及說明實驗結果；最後則為誤差的討論。

綜合以上各章的理論及實驗結果，本研究可以歸納出以下幾點的成果：

1. 提出在滿足 Nyquist sampling rate 的條件下，將科學用快速相機應用於全場外差干涉術中，並將其擷取及還原干涉信號的過程以自動化過程實現。
2. 將全場外差干涉術結合雙波長干涉術，使量測範圍能夠提高，並將其應用於量測大階高物體的表面形貌。
3. 將全場外差干涉術應用於折射率的量測。在不需要參考信號的情形下，直接量測取得絕對相位的二維分佈，並將其實現在量測 GRIN lens 折射率的應用上。
4. 證明以三參數弦波擬合法來擬合弦波的相位時，取樣頻率可以不滿足取樣定理。並提出一個最佳化的實驗條件可供使用。
5. 利用普通的市售相機做為全場外差干涉術的取樣工具，並對四分之一波片進行相位量測。相較於前人所使用昂貴的科學用快速相機，本實驗幾乎只有三分之一的成本。
6. 上述方法皆基於三參數弦波擬合法計算並還原信號的相位，實驗自動化因此操作簡單，且具有高重現性。

## 簡 歷

### 基本資料：

姓 名：謝鴻志

出生日期：民國 71 年 9 月 21 日

性 別：男

血 型：A

籍 貫：台灣省苗縣

地 址：苗栗縣公館鄉鶴山村 12 鄰 75 號

電 話：037-227291

### 學歷：

學 校 / 科 系	學位	起訖年月
交通大學/光電所	博士	95 年 9 月 ~ 100 年 6 月
交通大學/光電所	碩士	93 年 9 月 ~ 95 年 9 月
成功大學/物理系	學士	89 年 9 月 ~ 93 年 6 月
建台高中		86 年 9 月 ~ 89 年 6 月



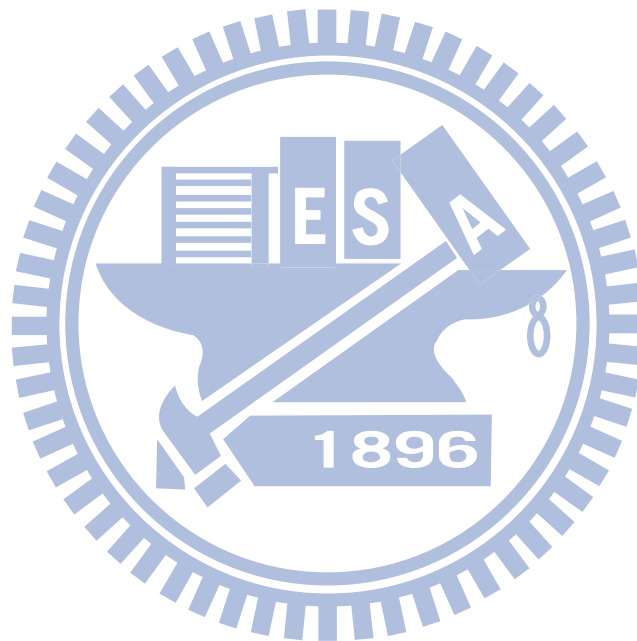
# 著作

## (A) 期刊論文

1. Zhi-Cheng Jian, Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Po-Jen Hsieh, and Der-Chin Su, "Optimal condition for full-field heterodyne interferometry," *Optical Engineering* **46**, 115604 (2007).
2. Hung-Chih Hsieh, Zhi-Chen Jian, Yen-Liang Chen, and Der-Chin Su, "A method for measuring two-dimensional refractive index distribution by using Fresnel equations and phase-shifting interferometry," *Physica Status Solidi C* **5**, 1016-1019 (2008).
3. Yen-Liang Cheng, Zhi-Cheng Jian, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, and Der-Chin Su, "Nano-roughness measurements with a modified Linnik microscope and the uses of full-field heterodyne interferometry," *Optical Engineering* **47**, 125601 (2008).
4. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Zhi-Cheng Jian, Wang-Tsung Wu, and Der-Chin Su, "Two-wavelength full-field heterodyne interferometry for measuring large step height," *Measurement Science and Technology* **20**, 025307 (2009).
5. Wang-Tsung Wu, Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, "Method for gauge block measurement with the heterodyne central fringe identification technique," *Applied Optics* **49**, 3182-3186 (2010).
6. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Bor-Jiunn Wen, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, "An alternative bend-testing technique for a flexible indium tin oxide film," *Displays* **31**, 191-195 (2010).
7. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, "Full-field refractive index distribution measurement of a gradient-index lens with heterodyne interferometry," *Measurement Science and*

*Technology* **21**, 105310 (2010).

8. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, and Der-Chin Su, “An alternative method for measuring the full-field refractive index of a gradient-index lens with the normal incidence heterodyne interferometry,” *Applied Optics* **49**, 6888-6892 (2010).
9. Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, Yen-Liang Chen, and Der-Chin Su, “Optimal sampling conditions for a common-used CCD camera in the full-field heterodyne interferometry,” *Optical Engineering*, article in press.



## (B) 研討會論文

1. 謝鴻志，簡志成，謝博任，楊惠婷，蘇德欽，“利用布魯斯特角入射觀察蓋玻片內透明物體的影像”，2005 台灣光電科技研討會，台南市，2005 年 12 月，論文集 pp. PE-SA1-023.
2. 謝博任，簡志成，謝鴻志，楊惠婷，蘇德欽，“使用全像空間偏極偏離元件的 4-埠雙向偏極獨立光學循環器”，2005 台灣光電科技研討會，台南市，2005 年 12 月，論文集 pp. E-SA-VII 11-1.
3. 簡志成，謝博任，謝鴻志，楊惠婷，蘇德欽，“使用 p 偏光全反射及移相干涉術測得二維空間折射率分佈”，2005 台灣光電科技研討會，台南市，2005 年 12 月，論文集 pp. E-FR-VIII 2-1.
4. 陳彥良，謝鴻志，簡志成，謝博任，蘇德欽，“共光程外差干涉術測量二維相位延遲分佈”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-04.
5. 謝鴻志，簡志成，謝博任，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“以旋光移相干涉術量測材料之二維折射率分佈”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-18.
6. 楊惠婷，謝鴻志，簡志成，謝博任，吳旺聰，蘇德欽，“利用雙波長移相干涉術測量二維階高分佈”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-19.

7. 謝博任，簡志成，謝鴻志，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“偏極獨立的多埠雙向光學準循環器”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EO-21.
8. 簡志成，謝博任，陳彥良，謝鴻志，楊惠婷，吳旺聰，蘇德欽，“全場外差干涉術的取樣誤差分析”，2006 台灣光電科技研討會，新竹市，2006 年 12 月，論文集 EP-094.
9. H. C. Hsieh, Z. C. Jian, Y. L. Chen, P. J. Hsieh, and Der-Chin Su, “A method for measuring two-dimensional refractive index distribution by using Fresnel equations and phase-shifting interferometry”, 4<sup>th</sup> International Conference on Spectroscopic Ellipsometry, Stockholm, Sweden, Jun. 2007.
10. 謝鴻志，陳彥良，吳旺聰，蘇德欽，“利用旋光外差干涉術量測漸變折射率透鏡之二維軸向折射率分佈”，2006 台灣光電科技研討會，台中市，2007 年 12 月，論文集 EO-025.
11. 吳旺聰，陳彥良，謝鴻志，蘇德欽，“以中央條紋定位法測量二維階高分佈”，2007 台灣光電科技研討會，台中市，2007 年 12 月，論文集 EO-038.
12. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Der-Chin Su and Ken-Yuh Hsu, “Method for determining microindenter tip topography with a scanning white light interferometer and the uses of image stitching method”, International Topical Meeting on Information Photonics 2008, Awaji, Japan, Nov. 2008.

13. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu, Der-Chin Su and Ken-Yuh Hsu, “Two-wavelength Full-field heterodyne interferometry for measuring large step height”, Japan-Taiwan Bilateral Science & Technology Symposium-Frontiers in Functional Optics-, Utsunomiya, Japan, Nov. 2008.
14. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “A method for measuring two-dimensional refractive index distribution of a GRIN lens”, 2008 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Taipei, Taiwan, Dec. 2008.
15. Wang-Tsung Wu, Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh and Der-Chin Su, “Method for measuring the thickness of a thick transparent plate”, 2008 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Taipei, Taiwan, Dec. 2008.
16. 陳彥良, 謝鴻志, 吳旺聰, 蘇德欽, “全反射式移相干涉顯微相位成像術”, 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-122.
17. 謝鴻志, 陳彥良, 吳旺聰, 蘇德欽, “垂直入射全場外差干涉術量測 GRIN Lens 的折射率分佈”, 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-126.
18. 吳旺聰, 陳彥良, 謝鴻志, 蘇德欽, “測量塊規的新法”, 2009 台灣光電科技研討會, 台北市, 2009 年 12 月, 論文集 EO-125.
19. Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “Method

for measuring the refractive index distribution of a GRIN lens with heterodyne interferometry,” Proc. SPIE 7390, 73900G 2009.

20. Yen-Liang Chen, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu and Der-Chin Su, “Full-field absolute phase measurements in the heterodyne interferometer with an electro-optic modulator,” Proc. SPIE 7390, 73900F 2009.

21. Wang-Tsung Wu, Hung-Chih Hsieh, Yen-Liang Chen, W. Y. Chang, and Der-Chin Su, “Gauge Block Measurement Using the Central Fringe Identification Technique,” 2010 7<sup>th</sup> International Conference on Optics-photonics Design & Fabrication, Yokohama, Japan, Apr. 2010.

22. Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Wei-Yao Chang, Fan-Hsi Hsu, Cheng-Fang Ho and Der-Chin Su, “Limitation of the sampling frequency in the full-field heterodyne interferometry”, 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Tainan, Taiwan, Dec. 2010.

23. Wei-Yao Chang, Hung-Chih Hsieh, Wang-Tsung Wu, Fan-Hsi Hsu, Cheng-Fang Ho and Der-Chin Su, “A Method for Measuring Surface Profile with a moving grating”, 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Tainan, Taiwan, Dec. 2010.

24. Wang-Tsung Wu, Hung-Chih Hsieh, Wei-Yao Chang, Fan-Hsi Hsu, Cheng-Fang Ho and Der-Chin Su, “Novel method for measuring the thickness of a transparent

plate”, 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan, Tainan,  
Taiwan, Dec. 2010.

