

國立交通大學

機械工程學系

碩 士 論 文

涂林模型在球座標的應用與  
西瓜表面紋路之模擬

Application of Turing Model on Spherical Coordinates  
and Pattern Simulation of Watermelon surface

研 究 生：王 俊 傑

指 導 教 授：楊 文 美 博 士

中 華 民 國 九 十 八 年 七 月

涂林模型在球座標的應用與西瓜表面紋路之模擬  
**Application of Turing Model on Spherical Coordinates  
and Pattern Simulation of Watermelon surface**

研究生：王 俊 傑

Student : Jun-Jie Wang

指導教授：楊 文 美

Advisor : Wen-Mei Yang



**A Thesis**  
**Submitted to Department of Mechanical Engineering**  
**College of Engineering**  
**National Chiao Tung University**  
**in Partial Fulfillment of The Requirements**  
**for the Degree of**  
**Master of Science**  
**in**  
**Mechanical Engineering**  
**July 2009**  
**Hsinchu, Taiwan, Republic in China**

中華民國九十八年七月

## 摘要

本研究藉由改變塗林模型反應項和擴散項的係數及初始值條件探討圖形成圖的機制，研究中使用二維球面座標系統的數學模型，使用有限體積法及尤拉法來離散化方程式，最後可模擬出球形水果的表面紋路。

結果發現初始值的分佈對塗林圖形的影響很大，例如選擇週期性或亂數分佈為初始值時，最後收斂圖形會保留部分的週期性和不對稱性，此特性剛好符合西瓜紋路主幹與分支的分佈特徵，在選擇反應項為三次項函數的條件下，利用不同的三次項組合，圖形紋路會有不同的線條分佈；再配合調整擴散項係數大小可影響紋路線條粗細的特性，最後在選擇特定的反應項和擴散項係數情況下，吾人可以局部成功地模擬出西瓜和南瓜等球形水果紋路。



## 誌謝

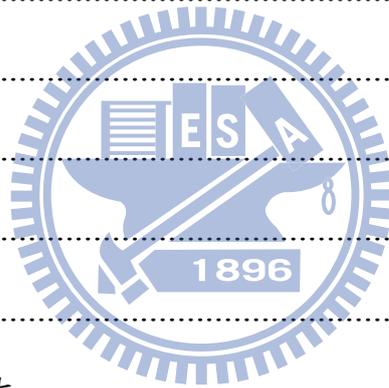
本論文可以順利完成，在此感謝指導教授楊文美博士一年多的督促與教誨，使我培養出獨立思考的能力，以及明白為人處事的道理和處理事情應有的態度，學生受益良多，謹誌於此，由衷表達感激與謝意。承蒙口試委員傅武雄教授、游明輝教授及張鴻明副教授於口試期間，給予論文指正與寶貴的意見，使本論文更為嚴謹完整，亦在此表示感謝。

感謝本實驗室博班學長豪傑、立杰和友約，碩班同學仁鈞與崔門學長林仕文大力相助和無私的奉獻，還有羽球團譯哥、王哥、文慶、穎志、逸民和古畢這些同學，和學弟妹柏瑋、啟鳴、佳芬和皓遠在生活中帶來的歡樂與鼓勵，使得研究生活更為充實有活力，並感謝在交通大學求學期間所有指導過我的師長，使我在學識的領域上有所成長，在此獻上最誠摯的謝意。

最後謹以本論文獻給我的父母和家人，感謝他們在生活上的關懷以及照顧，並在精神上全力的支持，此恩此情銘感於心。

# 目錄

摘要.....	i
誌謝.....	ii
目錄.....	iii
圖目錄.....	v
符號說明.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究目的.....	3
第二章 數學模式.....	5
2.1 塗林模型介紹.....	5
2.2 非線性項線性化.....	6
2.3 參數設定原則.....	11
2.4 波數的分析方法.....	12
第三章 數值方法.....	14
3.1 球面座標系統數值方法.....	14
3.2 初始值的選定.....	17
第四章 結果與討論.....	18
4.1 波數與塗林模型的關係.....	18
4.2 調整擴散係數大小對圖形的影響.....	20



4.3 利用亂數及週期性初始值模擬水果紋路 .....	21
第五章 結論 .....	23
參考文獻 .....	24
附錄一 .....	26



## 圖目錄

圖 1	Murray(1993)的激化-抑止系統.....	28
圖 2	Kondo(2002)以一維涂林模型說明其成圖機制.....	29
圖 3	Murray(1993)利用特徵值 $\sigma$ 在找出 $Tr\bar{A}$ 和 $ \bar{A} $ 值後，可與空間中穩定性 區塊做對應.....	30
圖 4	$H(\Lambda^2)$ 與波數 $\Lambda^2$ 的關係圖.....	31
圖 5	考慮參數 $D = 0.417$ 之涂林空間.....	32
圖 6	球面座標系統示意圖.....	33
圖 7	系統A在球表面取控制體積示意圖.....	34
圖 8	系統B在球表面取控制體積示意圖.....	35
圖 9	亂數初始值與最後收斂的圖形.....	36
圖 10	週期性初始值與最後收斂的圖形.....	37
圖 11	參數 $D = 0.417, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$ 符合涂林空間成 圖的四個條件.....	38
圖 12	參數 $D = 0.417, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$ 之波數與H函 數之關係圖.....	39
圖 13	模數 $n=5$ 之所有擾動解析解.....	40
圖 14	$D = 0.2, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$ ，網格數 $32 \times 64$ 之初始 值分佈與收斂涂林圖形.....	42
圖 15	以模數 $(1,5), (3,5)$ 和 $(5,5)$ 以 $2:3:5$ 比例組成的組合解.....	43
圖 16	參數 $D = 0.2, \delta = 0.005, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_3 = 2$ ，網格數 $32 \times 64$ 之初	

始值與涂林圖形 .....	44
圖 17 固定 $D=0.2$ 改變 $\delta = 0.001$ 線條呈細線， $\delta = 0.01$ 則呈粗線 .....	45
圖 18 參數 $\delta=0.01,0.005,0.001$ 其 H 函數的分佈情形 .....	46
圖 19 參數 $D=0.2,0.1,0.05$ 其 H 函數的分佈情形 .....	47
圖 20 $\delta = 0.005$ 改變 $D = 0.1$ 和 $D = 0.05$ 的收斂圖形 .....	48
圖 21 西瓜特性圖 .....	49
圖 22 u 值-0.3 和 1 週期性分佈及 v 介於 $\pm 0.6$ 的亂數分佈 .....	51
圖 23 $D = 0.05, \delta = 0.005, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 2$ 最後收斂之 2D及 3D涂林 圖形 .....	52
圖 24 $D = 0.3, \delta = 0.001, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 3, r_4 = 0.5$ ，網格數 $32 \times 64$ 最後收斂之 2D及 3D圖形 .....	53
圖 25 $D = 0.3, \delta = 0.001, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 3, r_4 = 0.5$ ，網格數 $96 \times 192$ 最後收斂之 2D及 3D圖形 .....	54
圖 26 $D = 0.2, \delta = 0.001, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_1 = r_4 = 1$ 之 2D及 3D圖形 .....	55
圖 27 $D = 0.02, \delta = 0.001, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_3 = 3.5$ 之 2D及 3D圖形 .....	56
圖 28 實際南瓜的紋路 .....	57

## 符 號 說 明

### 符 號

$a$	反應項微分代入基態之值
$A$	邊界表面積
$D, \delta$	改良模型之擴散項係數
$D_u, D_v$	原始模型之擴散項係數
$f, g$	方程式之反應項
$H$	波數構成之拋物線函數
$m, n$	擾動解析解之模數
$M, N$	$\theta$ 和 $\phi$ 方向取的格點數
$P$	主格點
$r$	反應項三次項係數
$t$	時間
$\Delta t$	時間步驟
$u, v$	物質濃度
$\bar{u}, \bar{v}$	基態解
$u', v'$	微擾動
$x$	任意三維空間
$\alpha, \beta$	反應項一次項係數
$\phi, \theta$	球面座標
$\Lambda^2$	波數

$\sigma$  特徵值

下標說明

$i, j$   $\theta, \phi$  方向的格點

L, R 左、右邊

min 最小值

$n, s, w, e$  主格點之上、下、左、右邊界

上標說明

$k$  數值計算第  $k$  個時間步驟



# 第一章

## 緒論

### 1.1 前言

不同種類的基因有著不同程度的差異，有些動物身上會有某種獨特的紋路，動物們可以靠著它來辨識同類進而繁衍下一代，又或者躲過掠食者的攻擊而得以生存，無論如何這些紋路對動物而言有著相當的重要性。而平日生活中會注意到的紋路如花豹的碎形環紋、斑馬的直條紋及瓢蟲和魚的點狀斑紋等等，也許是環境的變遷或者是弱肉強食的關係使得這些獨特的紋路產生，但其演變的過程是如何我們並不知道？

直到二十世紀中有位學者結合生物、數學和化學的領域提出一些想法---涂林(A. Turing)在西元1952年發表了“形態發生的化學基礎”，裡頭提到的涂林模型(Turing model)針對生物紋路提出了一種形態發生的可能模型，該模型是由一組反應項和擴散項組合而成的數學聯立方程式，在我們給予它初始狀態和邊界條件，並且調整適當的反應項和擴散項係數，最後可以模擬出某些獨特的紋路。而在生物學領域裡，到底有多少動植物的紋路可以被挖掘出來，不同的動物紋路之間是否彼此有關聯？裡頭給了我們許多的想像空間。

提到涂林模型的應用多數重心都會放在動物紋路身上，僅少數學者會應用在植物或水果紋路上，模擬水果並不會比動物紋路來的輕鬆，像是西瓜表面條紋，其紋路呈球狀分佈並且還會存在著某種週期性或對稱性，我

們如何運用涂林的型態發生機制，透過怎樣的方法可以達到原本期望的紋路是吾人目前最感興趣的地方。

## 1.2 文獻回顧

西元 1952 年涂林[1]發表了一篇文章，他提出一種假設的化學反應-擴散式，建立了一種形態發生的機制(Morphogenesis)，在此反應式中會有某種介質使得兩種不同類型的化學物質彼此擴散，而這種擴散是造成圖形對稱性破壞的驅動力，簡單的說，兩物質間的擾動放大，擴散作用驅使原本的基態失穩(Diffusion driven instability)，此時空間就會產生濃度不均勻的分佈，而經由擴散-反應式形成之圖形稱為 Turing pattern。

一開始涂林成圖的主因還未能讓大眾所接受，直到 1972 年 Meinhardt 和 Gierer[2]發現反應式中的兩個不互溶物質 A 和 B，物質 A 具有局部的自我激化增強(Local self-activation)，而 B 具有長程抑制 A 的作用(Long-range inhibition)，若定義 A 和 B 分別為激化物及抑制物，兩者相互作用是成圖的主因，此種形態發生稱為激化-抑制(Activation-inhibition)機制。

Murray(1993)[3]在Mathematical Biology書中集合了不少擴散-反應式，每個方程式經由無因次化再配合不穩定分析，可決定反應項和擴散項的係數範圍，以此區分出某些係數在特定條件下可形成穩態的圖形。此外書中還提供多種動物的涂林模型，如一維擴散反應式模擬出貝殼紋路，二維有長頸鹿、魚和斑馬等紋路圖形。

在Ermentrout, Aragón(1998)等人和Barrio(1999)等人[4-6]的文獻中，曾透過在涂林模型的反應項裡面加入二次及三次非線性項，透過改變二次及三

次項的係數大小來比較圖形的差異，當二次項係數遠大於三次項係數時，最後圖形會趨向簡單的斑點分佈；反之，三次項係數越大且遠大於二次項係數時，則圖形容易產生線條分佈。此外Barrio利用這種觀念，配合調整圖形的波數以達到不同魚類的圖紋。

從涂林的化學反應式至今已有五十多年的歷史，國內也有幾位學者對此議題感到興趣而投入研究並且帶來新的突破，像是劉瑞堂(2007)[7]提出兩階段的涂林模型，成功的模擬出花豹(Leopard)和美洲豹(Jaguar)的斑點圖紋。第一階段先獲得幼豹的斑點狀紋路，第二階段再以斑點紋路為初始值並改變相關係數，最後模擬出真實成豹的紋路。何承彥(2003)[8]指出動植物的紋路會有某種程度的對稱性，配合擾動分析可以推測在某特定的反應項下，哪些波數或模數最有機會成為涂林圖形的主要特性。另外吳哲維(2006)[9]成功使用兩種或兩種以上的涂林複合模型來建構蝴蝶斑紋。

有關於二維曲面的動物紋路目前文獻不多，早期的文獻有Varea、Aragon和Barrio(1999)[10]三位學者使用球面座標涂林模型配合亂數初始值來模擬放射狀圓形骨架和病毒；林士傑(2001)[11]也使用球面座標涂林模型模擬瓢蟲的甲殼紋路，其中初始值為全區域保持定值；同年Liaw[12]針對瓢蟲紋路初始值採區域性給值，可以更完美呈現真實瓢蟲紋路。而近年的文獻，Gjorgjieva(2007)[13]更提出三維的球座標反應擴散式，其球面半徑會隨時間增加而增長的圖紋。

### 1.3 研究目的

現階段已有不少學者模擬出魚類、瓢蟲和美洲豹等紋路，他們皆以二維直角座標來模擬實際動物的紋路，吾人認為這樣的表現方式還不夠完

整，應該連同本身的曲度也考慮進去才最真實。以球面座標系統來說，考慮模擬實體如西瓜和哈密瓜或者其它球形水果等應該能更完美呈現真實紋路。

平日常見的西瓜紋路主要由幾條直條紋的主幹所組成，在主幹的周圍會分支出較細的紋路，除此之外西瓜主幹的分佈還會有某種程度的週期性，因此在各類水果中西瓜是最具獨特性的球形水果之一。

本研究之目的在建立涂林模型的形態發生機制，透過特定的反應項及初始值設定，並建立一個球表面的二維暫態模型，在計算過程中選擇有限體積法來模擬數值解，隨著時間的增加，擴散項的擴散作用若與反應項的激化-抑制作用兩者相抵，直到方程式與時間項無關圖形收斂，我們用此涂林圖形來模擬實際的水果紋路，為往後研究球面座標的學者們帶來一些方向和觀念。



## 第二章

### 數學模式

#### 2.1 涂林模型介紹

涂林模型又稱擴散反應方程式，即由一組擴散項和含有非線性之反應項所組成，其架構為最初反應物到最後生成物之間會經過許多化學物質的反應，透過這些化學反應可寫成方程式來表達不同化學物質有濃度變化的情形，當考慮兩化學物質為  $u$  和  $v$  時，則方程式為

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + g(u, v)\end{aligned}\tag{2-1}$$

其中  $t$  為時間，若考慮二維球面座標系統半徑  $r$  保持定值，則  $u = u(\theta, \phi, t)$

及  $v = v(\theta, \phi, t)$ ， $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$ ， $f$  與  $g$  為非線性之反應

項，而  $D_u$  和  $D_v$  為擴散係數。

在涂林的形態發生中  $u$  會有自我激化以及  $u$  與  $v$  間會彼此相互作用，此屬於激化-抑制(Activation-inhibition)系統，多數的涂林模型都屬這類，如圖1所示。以六個一維的分解圖解釋此系統如圖2，實線為激化物A(Activator)和虛線為抑止物I(Inhibition)，圖2-a代表濃度分佈的初始狀態，起初物質A的濃度分佈會比I高，且A中間會略高於兩邊，可作為激化A的小擾動。等到

反應開始如圖2b，A中間會有局部的自我激化(Local activation)，濃度會越來越高，同時還帶動I濃度的上升。等到I成長到某種程度，便有能力產生抑止A的作用，兩者開始有相互牽制的情形，如圖2c中A出現了一高一低的分佈，在A自我激化最強處為濃度最高，兩旁受到I的抑止卻也出現了最低濃度，此稱為Lateral inhibition。等到A和I相互牽制的行為趨於緩和，此時波與波之間的擴散作用會越來越強烈，原本兩物質的均勻分佈最後遭到破壞而發展出一個全新的失穩態，如圖2d,e和f，利用等高線圖顯示物質濃度隨空間變化情形，一個塗林圖型就此產生。

## 2.2 非線性項線性化

塗林模型中反應項含有非線性函數不易分析，故將非線性函數近似線性函數分析，透過觀察基態附近的擾動行為，便能簡單找出在什麼情況下擾動會放大，使得均勻分佈的基態解發生失穩而產生非均勻分佈的穩態解。第一步先利用反應項在基態解附近作泰勒級數展開，考慮兩種不互溶的物質u和v，則反應式可表為

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + f(u,v) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + g(u,v)\end{aligned}\tag{2-2}$$

其中空間  $x=(x_1, x_2, x_3)$ ，假設兩物質最初狀態為穩定且均勻分佈，則基態  $\bar{u}(x,t)=c_1$  及  $\bar{v}(x,t)=c_2$ ，且  $c_1$  和  $c_2$  為兩個常數，可知道下面兩種條件

$$\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial t} = 0\tag{2-3}$$

$$\nabla^2 \bar{u}(x,t) = 0, \nabla^2 \bar{v}(x,t) = 0 \quad (2-4)$$

有了(2-3)和(2-4)式的條件以後，代回(2-2)式可得到  $f(\bar{u}, \bar{v}) = 0$  和  $g(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ ，由此找出基態解  $\bar{u}$  和  $\bar{v}$ ，然後觀察基態解附近的擾動行為，利用加入一微擾動  $u'$  和  $v'$  來作擾動分析，令  $u$  和  $v$  分別為  $u = \bar{u} + u'$  及  $v = \bar{v} + v'$  代回(2-2)式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u' + f(\bar{u} + u', \bar{v} + v') \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v' + g(\bar{u} + u', \bar{v} + v') \end{aligned} \quad (2-5)$$

對上式中的非線性項  $f$  和  $g$  泰勒級數展開如下所示

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + u', \bar{v} + v') &= f(\bar{u}, \bar{v}) + \left[ u' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \right] + \frac{1}{2!} \times \left[ u'^2 \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial^2 u} + u'v' \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u \partial v} + v'^2 \frac{\partial^2 f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial^2 v} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2-6)$$

考慮物質在基態附近的性質及小擾動  $u'$  和  $v'$  甚小可忽略上式高次項的影響

$$f(\bar{u} + u', \bar{v} + v') \approx f(\bar{u}, \bar{v}) + u' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \quad (2-7)$$

同理  $g$  也泰勒級數展開，將上式展開結果代回(2-5)式可得一組聯立線性擾動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u' + u' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v' + u' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} + v' \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \end{aligned} \quad (2-8)$$

為了方便探討微擾動的行為定義以下四個參數

$$a_{11} = \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u}, \quad a_{12} = \frac{\partial f(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v}$$

$$a_{21} = \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u}, \quad a_{22} = \frac{\partial g(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \quad (2-9)$$

上式再代回(2-8)式可得

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = D_u \nabla^2 u' + a_{11} u' + a_{12} v'$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = D_v \nabla^2 v' + a_{21} u' + a_{22} v' \quad (2-10)$$

簡化後的方程式可看出解析解的形式進一步做微擾分析，探討怎樣的條件下會使擾動放大產生基態失穩。在不同的座標系統微擾動的分析過程是一樣的，且最後得到的限制條件也相似，故在此吾人先考慮二維直角座標系統講解，並假設微擾動呈週期性

$$u' = c_1 \exp(\sigma t) \cdot \cos(mx) \cdot \cos(ny)$$

$$v' = c_2 \exp(\sigma t) \cdot \cos(mx) \cdot \cos(ny) \quad (2-11)$$

其中  $\sigma$  為特徵值，將上式代回(2-10)式並整理

$$[\sigma + D_u(m^2 + n^2 - a_{11})]c_1 - a_{12}c_2 = 0$$

$$-a_{21}c_1 + [\sigma + D_v(m^2 + n^2) - a_{22}]c_2 = 0 \quad (2-12)$$

(2-12)式為一齊次方程組，令波數  $\Lambda^2 = m^2 + n^2$ ，則  $c_1$  和  $c_2$  有非零解的條件為

$$\begin{vmatrix} \sigma - a_{11} + D_u \Lambda^2 & -a_{12} \\ -a_{21} & \sigma - a_{22} + D_v \Lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-13)$$

行列式展開可得

$$\sigma^2 + \sigma(-a_{22} + D_v\Lambda^2 - a_{11} + D_u\Lambda^2) + [(a_{11} - D_u\Lambda^2)(a_{22} - D_v\Lambda^2) - a_{12}a_{21}] = 0 \quad (2-14)$$

由(2-14)式一元二次特徵方程式可以了解圖形發展的狀態，若涂林模型成圖過程中沒有擴散項，則微擾動不會成長，圖形會呈現均勻分佈的基態解(圖形一片均勻)；反之，成圖過程中有擴散項，微擾動呈指數成長，則均勻的基態會失穩最後產生一個非均勻分佈的新穩態解，此穩態可代表動植物的紋路。首先考慮系統中沒擴散項( $D_u = D_v = 0$ )，將(2-14)式簡化為

$$\sigma^2 - (a_{11} + a_{22})\sigma + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (2-15)$$

由上式可求其解為

$$\sigma = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \quad (2-16)$$

Murray(1993)在 *Mathematical biology* 中提供了一種簡單的線性化穩定分析，依據不同性質的特徵值 $\sigma$ 可判別出空間中穩定性的情形，如圖3所示。若將特徵值表示成下式

$$\sigma = \frac{Tr\bar{A} \pm \sqrt{Tr^2\bar{A} - 4|\bar{A}|}}{2} \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned} Tr\bar{A} &\equiv a_{11} + a_{22} \\ |\bar{A}| &\equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (2-18)$$

上式中當系統中無擴散項時，圖形會收斂保持穩態，特徵質必須落在圖3的黃色區域可得下面條件

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad (2-19)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad (2-20)$$

以上兩式為無擴散項時成圖的限制條件。再來考慮系統中有擴散項 ( $D_u \neq 0, D_v \neq 0$ )，由(2-14)式可知特徵方程式為

$$\begin{aligned}\sigma^2 - Y\sigma + H &= 0 \\ Y &= a_{11} + a_{22} - \Lambda^2(D_u + D_v) \\ H &= (D_u\Lambda^2 - a_{11})(D_v\Lambda^2 - a_{22}) - a_{12}a_{21}\end{aligned}\quad (2-21)$$

由上式可求特徵值解為

$$\sigma = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4H}}{2}\quad (2-22)$$

跟據Murray的分析方法，特徵值(2-22)式可對應到圖3中兩性質分別為  $Tr\bar{A} = Y$  和  $|\bar{A}| = H$ ，且考慮函數  $Y$  與前面的兩限制條件(2-19)和(2-20)式可得  $Y > 0$ ，最後選擇  $Tr\bar{A}$  和  $|\bar{A}|$  必須落在圖3中的藍色區域，才能符合系統含有擴散項時基態會失穩的條件，吾人可得  $|\bar{A}|$  必須小於零的條件，即  $H < 0$ 。由(2-21)式的  $H$  函數展開以及  $D_u D_v > 0$ ，可知  $H$  為一開口向上的拋物線函數，對此要  $H < 0$  成立的區域比較簡單的作法就是先找出  $H$  有兩個實數的解如圖4所示

$$\Lambda^2 = \frac{(a_{22}D_u + a_{11}D_v) \pm \sqrt{(a_{22}D_u + a_{11}D_v)^2 - 4D_u D_v (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2D_u D_v}\quad (2-23)$$

若上式根號裡面的值大於零， $H(\Lambda^2)$  在  $\Lambda^2$  軸上會有兩相異實根

$$(a_{22}D_u + a_{11}D_v)^2 - 4D_u D_v (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0\quad (2-24)$$

將(2-24)式開根號並移項整理

$$(a_{22}D_u + a_{11}D_v) > 2\sqrt{D_u D_v (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} > 0\quad (2-25)$$

從上式和前面沒擴散項的條件，可知涂林模型成圖的三個限制，往後選擇反應項或擴散項係數時都將以此為依據

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11} + a_{22} < 0 \\
 (2) \quad & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \\
 (3) \quad & (a_{22}D_u + a_{11}D_v) > 2\sqrt{D_uD_v(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} > 0
 \end{aligned} \tag{2-26}$$

### 2.3 參數設定原則

從(2-26)式的成圖三個條件，若本文選擇下列方程式來做分析

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= D\delta\nabla^2u + \alpha u + \nu - N_t = D\delta\nabla^2u + f(u, \nu) \\
 \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \delta\nabla^2\nu - \alpha u + \beta\nu + N_t = \delta\nabla^2\nu + g(u, \nu)
 \end{aligned} \tag{2-27}$$

其中  $N_t = r_1u^3 + r_2u^2\nu + r_3u\nu^2 + r_4\nu^3$

令反應項  $f(u, \nu) = g(u, \nu) = 0$ ，可求得物質濃度的基態解為  $\bar{u} = 0$  且  $\bar{\nu} = 0$ ，代回(2-9)式計算  $a_{11} \sim a_{22}$  四個參數

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\partial f(0,0)}{\partial u} = \alpha \\
 a_{12} &= \frac{\partial f(0,0)}{\partial \nu} = 1 \\
 a_{21} &= \frac{\partial g(0,0)}{\partial u} = -\alpha \\
 a_{22} &= \frac{\partial g(0,0)}{\partial \nu} = \beta
 \end{aligned} \tag{2-28}$$

有了  $a_{11} \sim a_{22}$  可代入 2-2 節的三個成圖條件得到選擇參數的限制

$$\alpha + \beta < 0 \quad (2-29a)$$

$$\alpha(\beta + 1) > 0 \quad (2-29b)$$

$$D\beta + \alpha > 0 \quad (2-29c)$$

$$(D\beta + \alpha)^2 - 4D\alpha(\beta + 1) > 0 \quad (2-29d)$$

由上式四個限制條件，我們可以找出不等式交集的塗林空間(Turing space)，只有當選擇的參數落在此區域才會發生塗林失穩，產生空間上不均勻的穩態解，如圖 5 的灰色區域 A。

## 2.4 波數的分析方法

透過波數( $\Lambda^2$ )的分析預期可能組成塗林模型的擾動解析解，從中判斷最後收斂的塗林圖形具有哪些特性為本節目的；另外本文由何(2003)在直角座標的波數分析方法繼續延伸至球面座標系統。首先考慮直角座標系統透過(2-11)式的微擾分析並給予擾動解析解的形式，計算波數在什麼範圍內  $H(\Lambda^2)$  會小於零使圖形失穩。當空間為單位邊長的矩形區域時，波數  $\Lambda^2 = m^2 + n^2$ ，其中  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ，配合  $\Lambda^2_L < \Lambda^2 < \Lambda^2_R$  可以找出符合不穩定區間的模數(m,n)；外由  $\Lambda^2_{\min} = (D_u a_{22} + D_v a_{11}) / 2D_u D_v$  也可找到最強的模數，如圖4所示。若考慮二維球面座標系統半徑固定為1，則(2-11)式的解析解可改寫成下列形式

$$\begin{aligned} u' &= c_1 \cdot \exp(-D_u \Lambda^2 t) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\phi) \\ v' &= c_2 \cdot \exp(-D_v \Lambda^2 t) \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\phi) \end{aligned} \quad (2-30)$$

其中  $P_n^m(\cos \theta)$  為 Associated Legendre Function， $\Lambda^2 = n(n+1)$ ，此解析解的特性如附表一為當  $\theta \in [0, \pi]$ ， $n \in \text{integer}$ ，則  $m \leq n$ ，即要使  $P_n^m(\cos \theta)$  在  $\theta$  的有效區間內其解不會發散，則  $n$  必須大於  $m$  之整數。

整理上述假設並且將解析解代入(2-11)式的微擾分析可得

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \Lambda^2 = n(n+1) \\
 (2) \quad & m \leq n \\
 (3) \quad & \Lambda^2_{\min} = (a_{22}D_u + a_{11}D_v) / 2D_uD_v \qquad (2-31)
 \end{aligned}$$

有了這三個條件吾人便能在  $\Lambda^2_L < \Lambda^2 < \Lambda^2_R$  的範圍內找出可能成為涂林圖形的模數  $(m, n)$ ，其中在  $H$  最小值處的模數是最有可能成為主要圖形的特性。



# 第三章

## 數值方法

涂林的反應-擴散式為一種聯立微分方程式，只要給予物質濃度  $u$  和  $v$  在空間中的邊界條件及初始狀態便可求解，若無法直接得到解析解時可以數值方法求解。本文考慮二維球面座標反應擴散式如(2-1)式，令球半徑保持定值  $r=1$ ，以  $\theta$  和  $\phi$  為變數如圖 6 所示，採用的數值方法為有限體積法及尤拉法來離散化方程式。在過程中為了方便處理不同的邊界條件，本研究採取兩種不同的控制體積分 A 系統和 B 系統。

### 3.1 球面座標系統數值方法

#### (1)系統 A

對內部格點取格點體積分(2-1)式，如圖 7 所示

$$\iint_A \frac{\partial u}{\partial t} dA = D \delta \iint_A \nabla^2 u dA + \iint_A f(u, v) dA \quad (3-1)$$

在上式時間項的積分使用尤拉法求解如下

$$\iint_A \frac{\partial u}{\partial t} dA \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \Delta A \quad (3-2)$$

其中  $i$  和  $j$  代表  $\theta$  和  $\phi$  方向的格點， $k$  為時間區間  $\Delta t$  的次數， $A$  為邊界表面積， $\Delta A = \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \phi$ 。而擴散項的積分為

$$D\delta \iint_A \nabla^2 u dA \approx D\delta(E_{i,j} + F_{i,j})$$

$$E_{i,j} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} [\sin\theta_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \sin\theta_{i-\frac{1}{2}}(u_{i,j} - u_{i-1,j})]$$

$$F_{i,j} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\phi \cdot \sin\theta_i} [u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}] \quad (3-3)$$

反應項的積分為

$$\iint_A f(u,v) dA \approx f(u_{i,j}, v_{i,j}) \Delta A \quad (3-4)$$

總結以上三項積分的結果並代回(3-1)式

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \left[ \frac{D\delta}{\Delta A} (E_{i,j}^k + F_{i,j}^k) + f(u_{i,j}^k, v_{i,j}^k) \right] \quad (3-5)$$

若將球表面切成  $M \times N$  個網格， $\theta$  和  $\phi$  的格點區間分別為  $\Delta\theta = \pi/M$  及  $\Delta\phi = 2\pi/N$ ，則格點處之  $\theta_i = \Delta\theta(i+1/2)$  以及  $\phi_j = \Delta\phi \cdot j$ ，其中  $i=0, \dots, M-1$  和  $j=0, \dots, N-1$ 。重複(3-2)和(3-4)式步驟也可得  $v$  在時間及空間的離散化，於是  $u$  和  $v$  在每個格點上隨時間和空間的關係可視為已知，只要給定初始值和連續條件便可模擬塗林模型。在此考慮  $u$  和  $v$  在  $\phi=0$  及  $\phi=2\pi$  處必須重合之連續條件為

$$u_{i,0}^k = u_{i,N}^k \text{ 和 } v_{i,0}^k = v_{i,N}^k \quad (3-6)$$

另外系統 A 因為採用圖 7 控制體積的關係，本研究不考慮在球表面  $\theta$  和  $\phi$  方向有通量發生的邊界條件。

## (2)系統 B

在文獻中都提到利用邊界給予零通量的形式來模擬動物紋路，因此吾人考慮圖 8 的控制體積，僅改變  $\theta$  方向的邊界條件，此時  $\theta_i = \Delta\theta \cdot i$  以及  $\phi_j = \Delta\phi \cdot j$ ，計算範圍改為  $i=1, \dots, M-1$  和  $j=0, \dots, N-1$ 。當  $i=2, \dots, M-2$  且  $j=0, \dots, N-1$  時，積分結果會同(3-5)式所示，僅在  $i=1$  及  $i=M-1$  處，擴散項積分結果會隨邊界條件不同而改變，如採用邊界為零通量  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ ，則  $i=1$  的積分會如下所示

$$D\delta \iint_A \nabla^2 u dA \approx D\delta \left[ \frac{\Delta\phi \sin \theta_{i+0.5}}{\Delta\theta} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + F_{i,j} \right] \quad (3-7)$$

$i=M-1$  為

$$D\delta \iint_A \nabla^2 u dA \approx D\delta \left[ -\frac{\Delta\phi \sin \theta_{i-0.5}}{\Delta\theta} (u_{i-1,j} - u_{i,j}) + F_{i,j} \right] \quad (3-8)$$

此外吾人也考慮邊界條件假設南北極點保持定值  $u=v=1$ ，則  $i=1$  的積分為

$$D\delta \iint_A \nabla^2 u dA \approx D\delta (G_{i,j} + F_{i,j})$$

$$G_{i,j} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} [\sin \theta_{i+0.5} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \sin \theta_{i-0.5} (u_{i,j} - 1)] \quad (3-9)$$

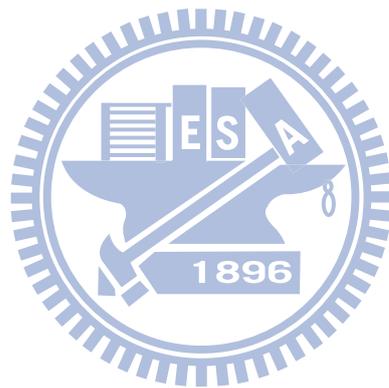
$i=M-1$  為

$$G_{i,j} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} [\sin \theta_{i+0.5} (1 - u_{i,j}) - \sin \theta_{i-0.5} (u_{i,j} - u_{i-1,j})] \quad (3-10)$$

有了擴散項積分結果以後，再代回(3-1)式便可得每個格點在時間和空間的離散化，最後配合給定初始值和連續條件便可模擬涂林模型。

## 3.2 初始值的選定

前面提到動物的紋路主要由基因所決定，而涂林模型的初始值也扮演類似的角色，可作為系統中微擾動的開端。例如有些初始值採用亂數分佈，最後涂林圖形可保留大部分的不對稱性，如圖9；又或者使用週期性的初始分佈最後也會保留部分的週期性，如圖10。在許多文獻中，針對不同的動物紋路會有不同的初始值設定，而目前國內外的學者並未有人針對初始值的設定提出有系統的解說，到底什麼樣的涂林模型或是生物圖形應該選用何種初始值分佈。



## 第四章

### 結果與討論

在本章吾人將討論球面座標系統中改變擴散係數  $D$  和  $\delta$ ，對涂林模型的紋路有何影響，在過程中我們會計算波數值，利用波數的理論分析來推算最後收斂的涂林圖形可能有哪些的特性，若能了解改變參數的影響及給予適當的初始值分佈，最後便能利用這些特性去模擬想要的西瓜或其它水果紋路。

#### 4.1 波數與涂林模型的關係

本文採用二維球面座標涂林模型來模擬生物圖紋，選定擴散項和反應項係數為  $D = 0.417, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$ ，各係數符合(2-29)式的四個限制條件如圖 11，將各係數代入(2-28)式可算出  $a_{11}, a_{12}, a_{21}$  及  $a_{22}$  的值，由這四個值配合(2-30)式的擾動解析解可做一連串的微擾分析，在分析過程中考慮系統有擴散項時可得(2-21)式，藉由此式得知  $H(\Lambda^2)$  為一拋物線開口向下的函數，且在  $H(\Lambda^2) < 0$  的區域會有擴散不穩定發生，這表示該區域內的各個模數  $(m, n)$  都是組成最後收斂圖形的可能組合，其中靠近最小波數值  $\Lambda^2_{\min}$  的模數最為強烈，也是最有可能成為主要圖形的特性。

透過限定波數值範圍的方式將離散值代入(2-21)式可以找到  $H=0$  的兩個實數解  $\Lambda^2_L$  和  $\Lambda^2_R$  如圖 12，從已知的  $\Lambda^2_L < \Lambda^2 < \Lambda^2_R$  區間，考慮(2-31)式的條件(1)和(2)可以找出所有符合基態失穩的模數，如下所示

①=====①

$$n=5 \quad \Lambda^2 = 30.00 \quad (m \leq n)$$

$$m=0 \quad n=5$$

$$m=1 \quad n=5$$

$$m=2 \quad n=5$$

$$m=3 \quad n=5$$

$$m=4 \quad n=5$$

$$m=5 \quad n=5$$

①=====①

其中  $\Lambda^2_{\min} = 30.01$ ,  $H_{\min} = -0.01534$ ,  $\Lambda^2_L = 20.2$  及  $\Lambda^2_R = 39.8$ , 在  $\Lambda^2_L < \Lambda^2 < \Lambda^2_R$  區間內總共符合模型有六組。將這六組模數代回一開始假設的擾動解析解(2-30)式, 便可得到每個模數模擬的圖形, 如圖 13a 到 f。另外由(2-31)式的條件(3)可算出最小波數值  $\Lambda^2_{\min} = 30.01$ , 當  $n=5$  正好落在  $\Lambda^2 = 30.0$  處是最接近  $\Lambda^2_{\min}$  的模數, 故(m,5)的模數都是塗林擴散-反應方程中的可能模型。

當決定上述的反應項和擴散項係數時, 若取網格數為  $32 \times 64$  及  $\Delta t = 0.001$ , 選擇系統 B 在 u 的初始狀態為固定  $\phi = \pi$  處給予 1 值, 而其餘地方為零, v 則全部為零值, 在邊界條件給南北極點處 u 和 v 值為 1, 利用有限體積法最後可得一收斂圖形, 如圖 14b 所示。由上述的波數理論嘗試分析塗林圖形的成圖機制, 在模數(1,5),(3,5)和(5,5)這三組解析解中, 將這三組值大小都縮至 0~1 並依順序以 2:3:5 的比例組合出一新的組合解如圖 15, 可發現此新組合解與數值模擬的塗林圖形兩者相符合, 這說明了波數理論的確可以掌握塗林圖形的特性。

## 4.2 調整擴散係數大小對圖形的影響

在涂林的擴散-反應方程式中選擇參數為  $D=0.2$ ,  $\alpha=0.9$ ,  $\beta=-0.91$ ,  $r_3=2$ , 當  $\delta=0.005$  時, 符合擴散不穩定區域的模數共有 372 組 ( $n=3\sim 26$ ), 利用系統 B 的有限體積法並選定網格數為  $32\times 64$  及  $\Delta t=0.005$ ,  $u$  的初始狀態選擇週期性分佈,  $v$  則為全區域零值, 邊界條件為保持南北極點  $u$  和  $v$  為 1, 最後可得一收斂圖形如圖 16 所示, 以此為標準吾人將調整  $\delta$  值大小來做比較。

當  $\delta$  值調小時, 若取  $\delta=0.001$  則符合的模數共有 1809 組 ( $n=6\sim 59$ ), 模組數明顯變多使得圖形線條具多樣化且呈細線條分佈; 若取  $\delta=0.01$ ,  $\delta$  值變大, 符合的模組數僅有 184 組 ( $n=3\sim 18$ ), 最後圖形線條呈現簡單的粗線條分佈, 如圖 17。以上兩種現象都算合理的, 從劉(2007)在直角座標涂林模型中提到, 當  $D$  保持定值而  $\delta$  值減小時 ( $\delta=0.01, 0.005, 0.001$ ),  $H(\Lambda^2)<0$  的區域會變大, 即模擬的波數區間也會變大, 如圖 18。這樣的結果會造成最小波數往右移 ( $\Lambda^2_{\min}=184, 368, 1840$ ), 座落在  $\Lambda^2_{\min}$  處的模數將為主要模型, 偏向比較大的模數發展 ( $n=13, 18, 42$ ), 此時波長會越來越短, 線條就會越來越細; 反之,  $\delta$  值增加, 波長變長圖形線條就會偏向較粗的紋路, 此理論亦適用於球面座標涂林模型。

同樣的作法, 當我們以上述的  $\delta=0.005$ ,  $D=0.2$  的結果為基準, 沿用相同的反應項係數和初始值分佈, 並調整  $D$  值漸小 ( $D=0.2, 0.1, 0.05$ ), 可發現模組數變多,  $\Lambda^2$  區間自然也變大, 如圖 19 所示, 表示圖形線條將變細, 最後我們可以得到  $D=0.1$  和  $0.05$  的收斂圖形, 如圖 20, 與基準相比較發現圖形線條有變細的趨勢, 但效果並沒有比改變  $\delta$  值大小來的好, 較重要的作

用在於  $D$  值的減小會使得  $u$  值的震盪幅度加深，加強了主模的強度，此特性可利用在兩階段塗林模型，震盪大經由第一階段收斂的塗林圖形強度就越強，若第二階段再以第一階段的圖形當初始值，最後的結果可以保留第一階段圖形的部份特性；例如劉(2007)的美洲豹紋就是利用第一階段塗林模型以模擬出環狀紋路，第二階段再以環狀圖形當初始值並改變反應項係數來進行破碎圓環的動作，最後可得豹的玫瑰花紋；或許本文可以考慮使用這種兩階段的作法來模擬其它的水果紋路。

### 4.3 利用亂數及週期性初始值模擬水果紋路

從前面知道西瓜紋路具有一些特性：(1)主幹會呈週期性的分佈連結到南北極點，且在南北極點附近會生成一圈圓環圍繞，如圖 21a；(2)主幹會無規律性長出許多細的分支，如圖 21b；(3)主幹本身有小部分的分岔或斷裂情形，如圖 21c 及 d；(4)主幹與主幹之間分支會連結在一起，如圖 21e，總結這四種特性，發現西瓜紋路本身是個具有週期性且同時擁有散亂分佈的獨特紋路。

吾人先考慮文獻上常使用的零通量邊界條件來模擬西瓜，選擇初始值  $u$  為 -0.3 和 1 週期性的分佈， $v$  為介於  $\pm 0.6$  的亂數如圖 22，由系統 B 的有限體積法來離散化，在參數  $D=0.05$ ,  $\delta = 0.005$ ,  $\alpha = 0.93$ ,  $\beta = -0.97$ ，反應項  $r_3 = 2$ ，取網格  $32 \times 64$  和  $\Delta t = 0.01$ ，最後可得圖 23，其中裡頭的 3D 圖形以零值為界限給予兩種假色彩(深綠和淺綠)；從圖可知已有西瓜紋路(1)和(2)的特性，但網格密度還不夠完整表達其分支的情形。

當嘗試將網格提高到  $96 \times 192$  時，發現調整不同的反應項係數或  $\Delta t$  大小

都不易得到圖形有收斂的情形，因此我們改使用南北極點保持定值  $u = v = 2$  的邊界條件，在參數  $D=0.3, \delta = 0.001, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 3, r_4 = 0.5$ ，網格數為  $32 \times 64$ ，初值  $u$  為 0 和 0.5 的週期分佈及  $v$  為介於  $\pm 0.5$  之亂數，而此邊界條件可允許的  $\Delta t$  較大，故取  $\Delta t = 0.05$  其收斂情形會比零通量來的快，最後可得圖 24 的結果。若將網格數再提高到  $96 \times 192$ ，取  $\Delta t = 0.004$ ，模擬的結果為圖 25，從圖中我們已經可以局部模擬出西瓜的四個特性，唯一美中不足之處是在主幹與分支之間的線條粗細區分不夠清楚。

吾人也利用系統 A 嘗試模擬西瓜紋路，差別在於不用給任何邊界條件，僅需初始值及連續條件，在  $D = 0.2, \delta = 0.001, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_1 = r_4 = 1$ ，網格為  $96 \times 192$  和  $\Delta t = 0.0002$ ，初始值  $u$  為 0 和 1 的週期分佈及  $v$  為介於  $\pm 0.5$  之亂數，最後結果如圖 26，從圖中發現也有西瓜(2)和(4)的特性，缺點是系統 A 的作法不易有主幹全都連結南北極點的情形，如西瓜(1)的特性。有時也有例外，若僅改變上述的反應項係數為  $r_3 = 3.5$  且調整  $D = 0.02$ ，網格數一樣，除了初始值  $u$  額外，在靠南北極端之處都給予 1 的值，其餘分佈同上， $\Delta t = 0.0002$  最後在 929495 次收斂可得圖 27，此處的紋路僅只有(1)的特性不太像西瓜紋路，若以零值來分淺黃和深綠色以表示 3D 圖形，紋路比較符合南瓜的特性如圖 28，其中南瓜的特性為主幹會連結南北極點且主幹之間有不對稱性的碎形分佈。

在使用了系統 A 和 B 的方法以後，吾人發現利用系統 B 的有限體積法，並且配合定值的邊界條件，在特定的參數設定下，其涂林模型模擬出來的結果比較容易有西瓜紋路的特性產生，吾人主要以此系統來模擬西瓜紋路；另外一個優點是因為可允許的  $\Delta t$  較大，故收斂速度也比較快，可以減短程式收斂的時間。

# 第五章

## 結 論

本文藉由有限體積法來離散化球面座標涂林模型，透過調整擴散項和反應項的係數並給予適當的初始值分佈，最後收斂的涂林圖形與實際的球形水果紋路做比對。綜合前一章的結果，可得以下結論：

1. 在已知擴散項和反應項係數的情況下，吾人經由波數分析和找出擾動方程式的解析解形式，並找出擴散不穩定區域的模數，可推測涂林圖形可能有哪些特性，此結果與何(2003)一致。
2. 當我們調整擴散項係數 $\delta$ 值漸小時，符合模數變多，波長會越來越短，圖形線條就會變細；反之， $\delta$ 值變大，線條則變粗。若改變 $D$ 值漸小時，會使得 $u$ 值的震盪加深，此特性可用於兩階的段涂林模型，其結果與劉(2007)一致。
3. 利用初始值給予週期性和亂數的分佈，在系統 B 的定值邊界條件下，參數為 $D=0.3, \delta=0.001, \alpha=0.93, \beta=-0.97, r_3=3, r_4=0.5$ ，可以局部模擬出西瓜的紋路。
4. 同樣利用週期性和亂數的初始值，採用系統 A 的分析方法，在參數 $D=0.02, \delta=0.001, \alpha=0.9, \beta=-0.91, r_3=3.5$ 下，吾人可以模擬出南瓜的紋路。

## 參考文獻

- [1] A. M. Turing, “THE Chemical Basis of Morphogenesis”, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B237*, 37, 1952.
- [2] A. Gierer and H. Meinhardt, “A Theory of Biological Pattern Formation”, 1972.
- [3] J. D., Murray, *Mathematical Biology*, second corrected edition, Springer, 1993.
- [4] B. Ermentrout, “Stripes or Spots Nonlinear Effects in Bifurcation of Reaction-Diffusion Equations on The Square”, *Mathematical and Physical Sciences*, Vol.434, No. 1891, p413-417, 1991.
- [5] J. L. Aragón, C. Vraea, R. A. Barrio and P. K. Maini, “Spatial Patterning in Modified Turing Systems: Application to Pigmentation Patterns on Marine Fish”, 1998.
- [6] R. A. Barrio, C. Varea and J. L. Aragón, “A Two-dimensional Numerical Study of Spatial Pattern Formation in Interacting Turing Systems”, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol.61, 483-505, 1999.
- [7] 劉瑞堂, “以涂林模型模擬生物圖形”, 國立中興大學物理學系博士論文, 2007。
- [8] 何承彥, “熱擴散方程與線性化Turing方程式之數值模擬分析”, 國立中正大學物理系碩士論文, 2003。
- [9] 吳哲維, “蝴蝶斑紋之有限元素模擬與分析”, 國立台灣大學生物產業機電工程學研究所碩士論文, 2006。
- [10] C. Varea, J. L. Aragón and R. A. Barrio, “Turing Pattern on A Sphere”, *Physical Review E*, Vol. 60, pp. 4588-4563, 1999.

- [11] 林士傑，“Turing模型在生物圖形上的應用”，國立彰化師範大學物理研究所碩士論文，2001。
- [12] S. S. Liaw, C. C. Yang, R. T. Liu and J. T. Hongl, “Turing Model for The Patterns of Lady Beetles”, *Physical Review E* 64, 041909, 2001.
- [13] J. Gjorgjieva, “Turing Patterns on Growing Spheres: The Exponential Case”, *Discrete Contin. Dyn. Syst, Series A*, suppl, p. 436-445, 2007.



## 附錄一

在求擾動方程式解析解的過程中，Lapalce 方程式  $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$  以球面座標系統表示如下

$$\nabla^2 f = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1)$$

假設解形式為  $f(r, \theta, \phi) = r^n \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ ，代回(1)式可簡化為

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n(n+1)\Theta\Phi = 0 \quad (2)$$

其中  $n=0,1,2,\dots$ ，對上式採用 separation variable method 解之

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (3)$$

$$n(n+1)\sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] = m^2 \quad (4)$$

可以由(3)式求得  $\Phi(\phi)$  的解，再整理(4)式可得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \Theta + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (5)$$

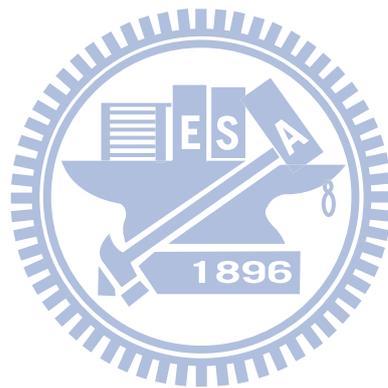
上式解為  $\Theta = P_n^m(\cos \theta)$ ， $P_n^m$  稱為 Associated Legendre Function 展開如下所示

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \cdot \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} [P_n(\cos \theta)] \quad (6)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (7)$$

(6)式中的整數  $n$  可以決定  $\theta$  方向的特性，整數  $m$  可以決定  $\phi$  方向的特性，並

且  $m \leq n$ 。以  $P_5^0 \sim P_5^5$  為例如圖 13，可以觀察出 Associated Legendre Function 的一些規律性，當  $m=0$  時，在二維球面座標圖形中會出現許多深淺不一的直條紋，在  $\theta$  方向上會有無限多條分支線；當  $m \neq n$  且  $m > 0$  時， $m$  在  $\phi$  方向上會有  $2 \times m$  條分支線， $m$  越大分支線就會越多，而  $\theta$  方向會有  $n-m$  條分支線；而當  $m=n$  時，同樣在  $\phi$  方向上會有  $2 \times m$  條分支線，即圖形會帶有  $m$  個週期的橫條紋，而此類紋路若展成球表面分佈，可以觀察出具有對稱性和週期性的直條紋，恰好與某些水果紋路相對應。



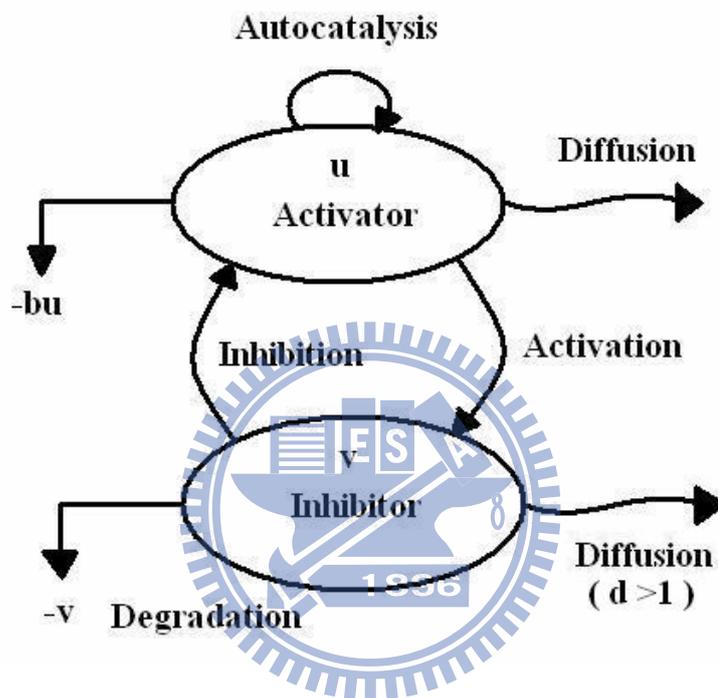


圖 1 激化-抑止系統，其中 Autocatalysis 表示  $u$  的自我激化，Degradation 為  $u$  和  $v$  的衰減，圖取自 Murray(1993)使用方程式為  $u_t = a - bu + u^2/v + \nabla^2 u$ ， $v_t = u^2 - v + d\nabla^2 v$ 。

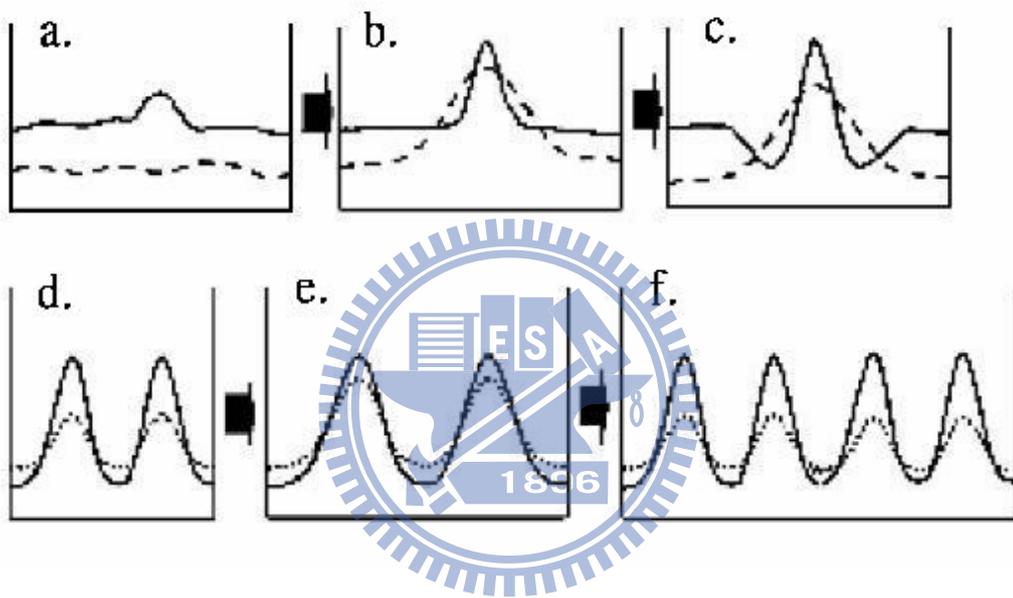


圖 2 以一維涂林化學反應式表示激化抑制系統(Activation - inhibition), Kondo(2002)。

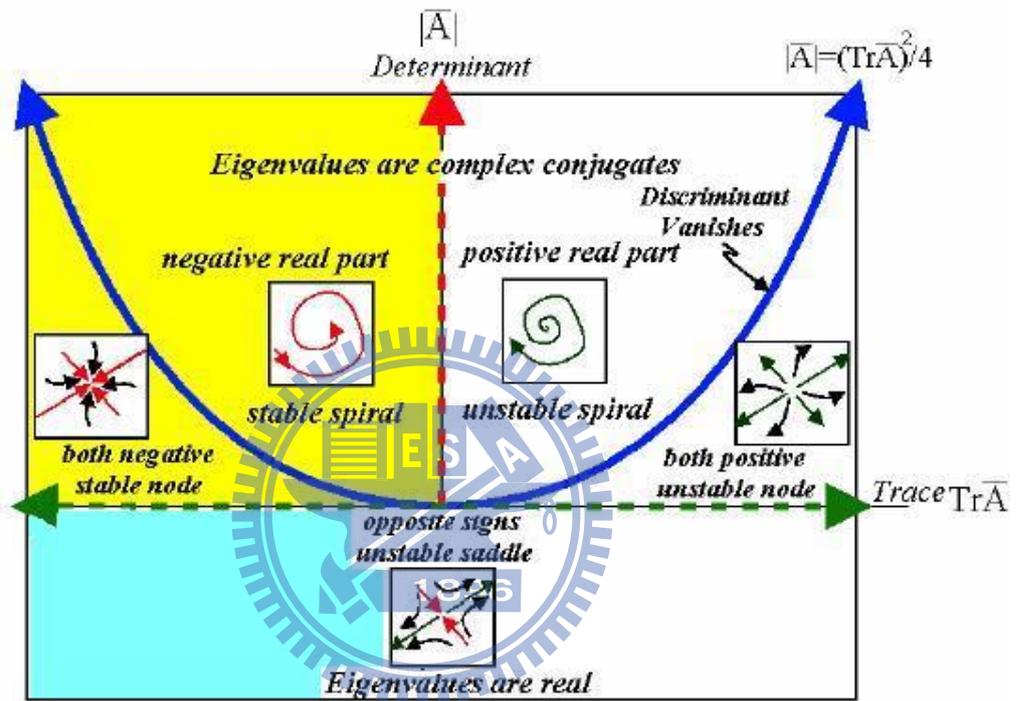


圖 3 線性化後不同性質的特徵值  $\sigma$  在找出  $\text{Tr}\bar{A}$  和  $|\bar{A}|$  值後，可與空間中穩定性區塊做對應，Murray(1993)。

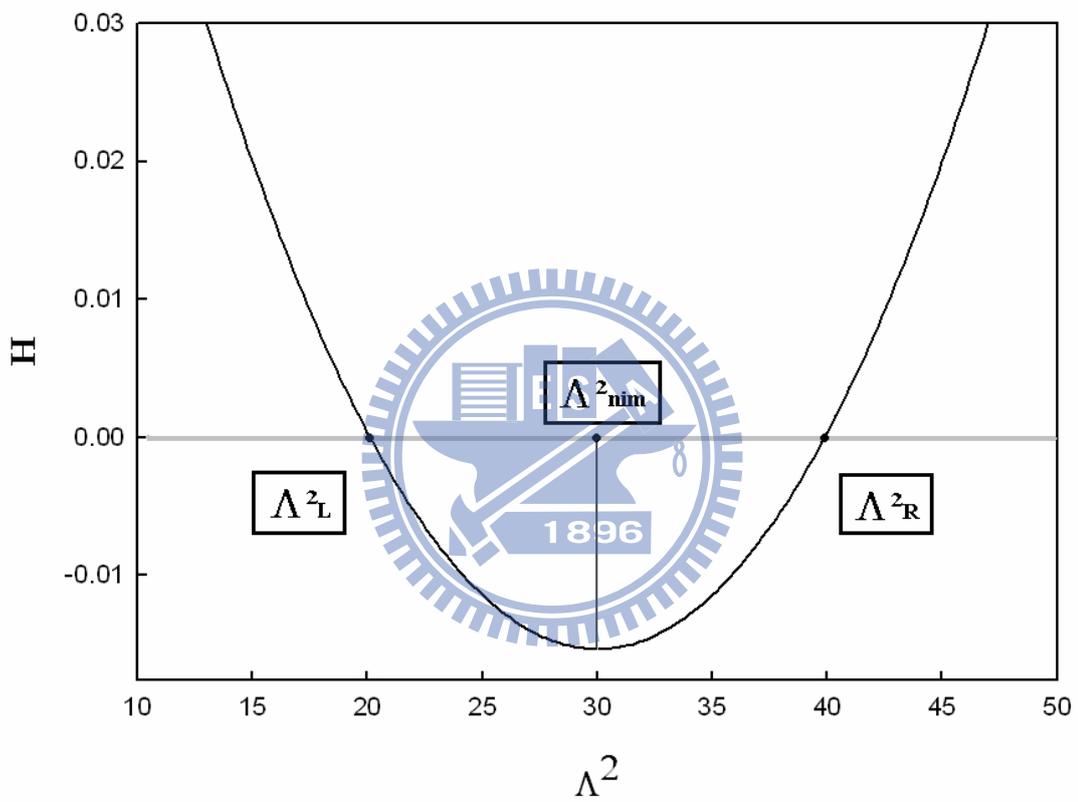


圖 4  $H(\Lambda^2)$ 與波數  $\Lambda^2$ 的關係圖，當波數介於 $[\Lambda^2_L, \Lambda^2_R]$ 時， $H$ 會小於零，且在 $H$ 最小值處會有產生 $\Lambda^2_{min}$ 。

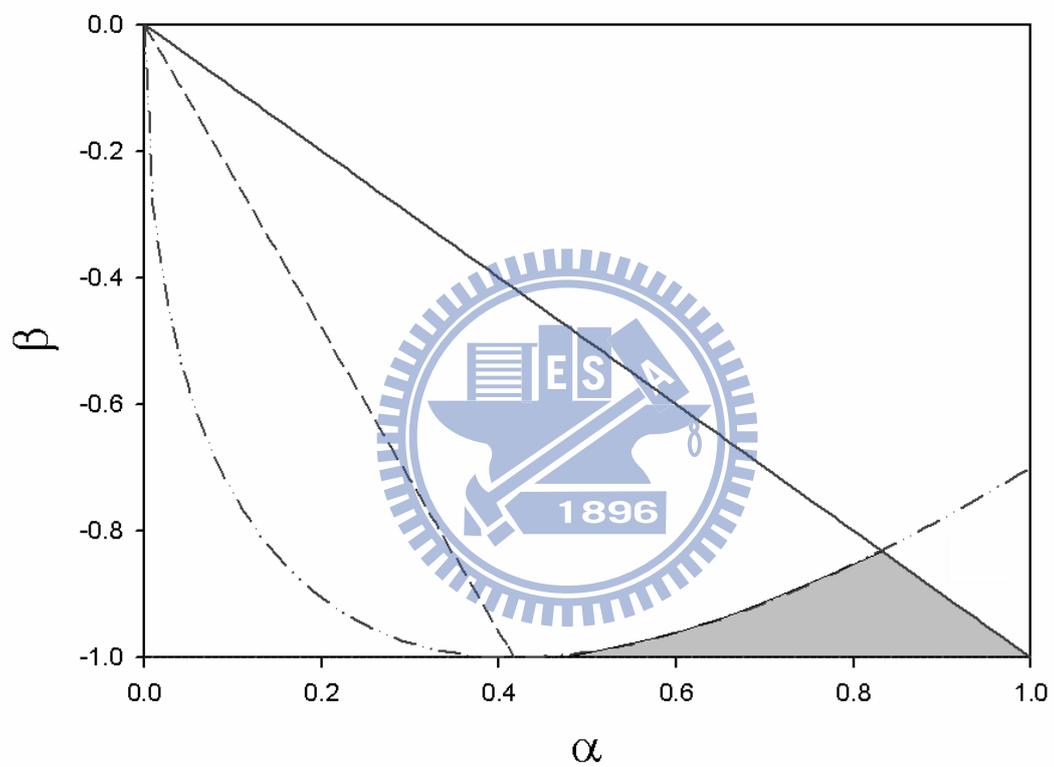


圖 5 考慮參數  $D = 0.417$  畫出(2-29)式四個不等式的每一條界線，圖中灰色區域為同時滿足(2-29)式之塗林空間。

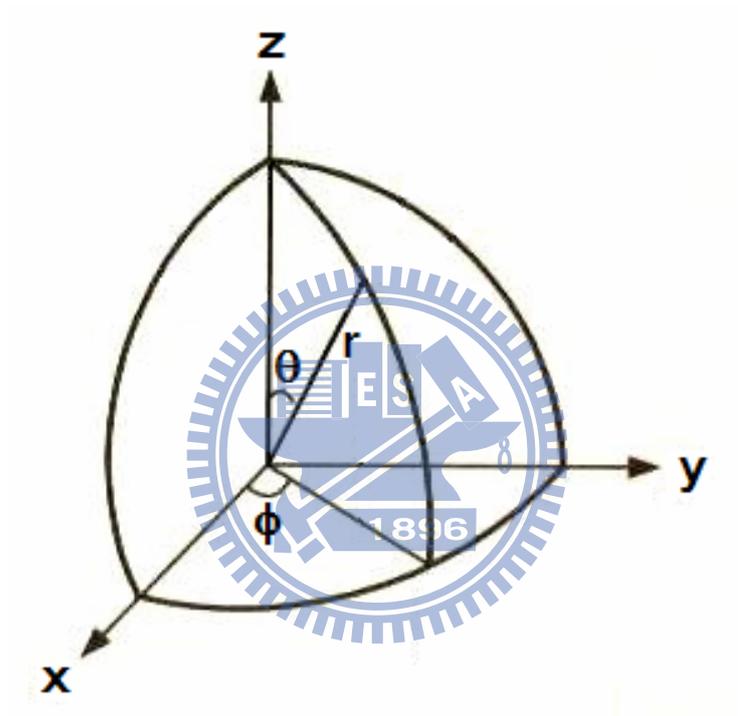


圖 6 球面座標系統示意圖，其中  $\theta \in [0, \pi]$  且  $\phi \in [0, 2\pi]$ 。

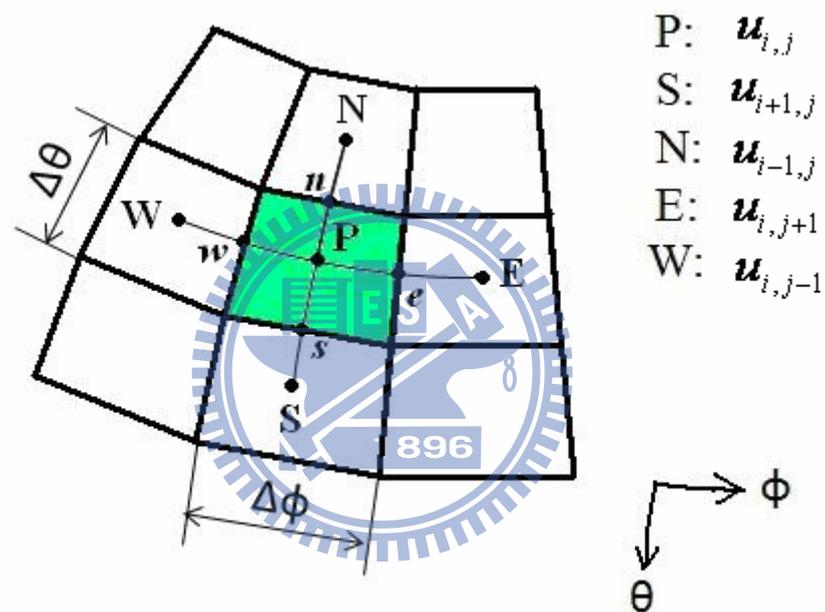


圖 7 系統 A 在球表面取控制體積示意圖，其中綠色區域為主格點 P 的控制體積。

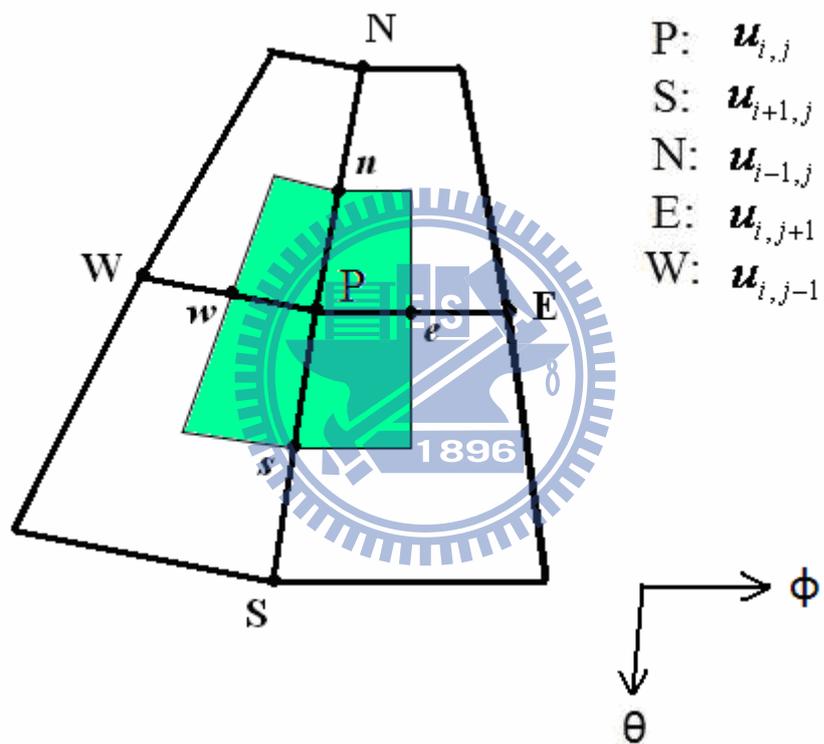


圖 8 系統 B 在球表面取控制體積示意圖，其中綠色區域為格點 P 的控制體積。

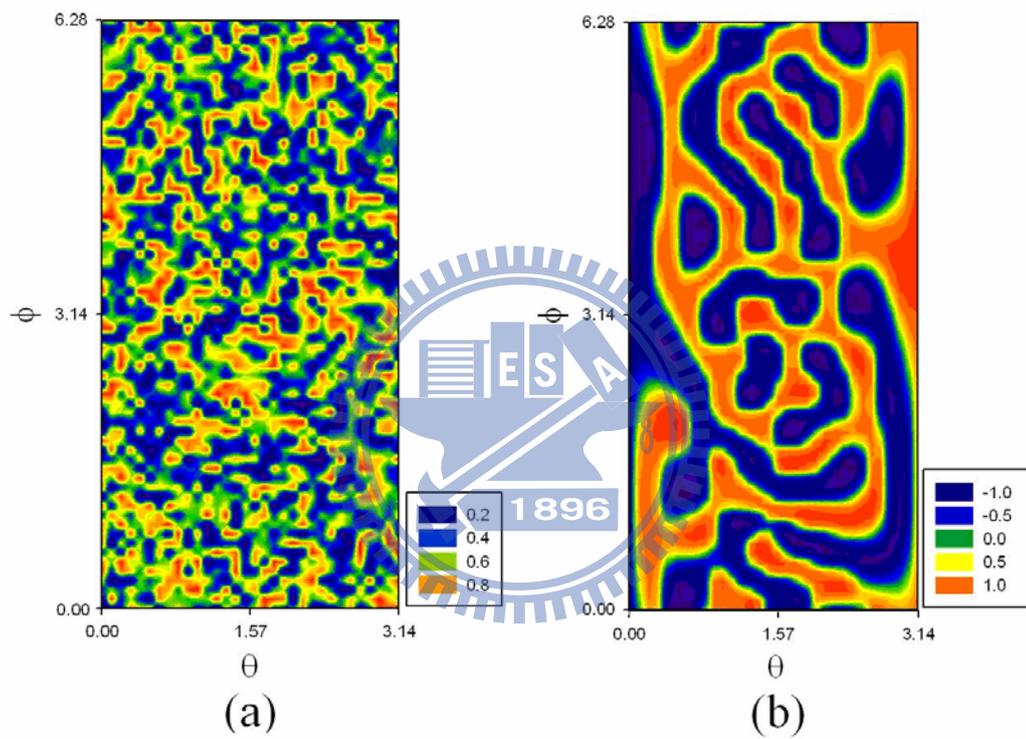


圖 9 涂林模型的(a)亂數分佈初始值，(b)數值計算最後收斂的圖形。

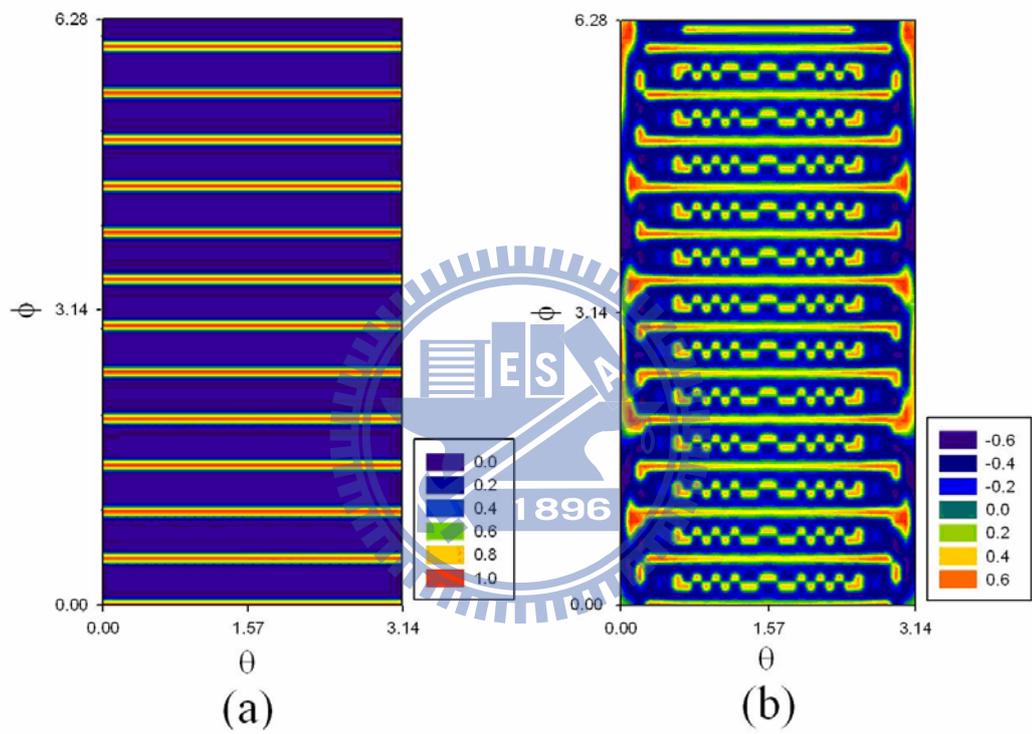


圖10 塗林模型的(a)週期分佈初始值，(b)數值計算最後收斂的圖形。

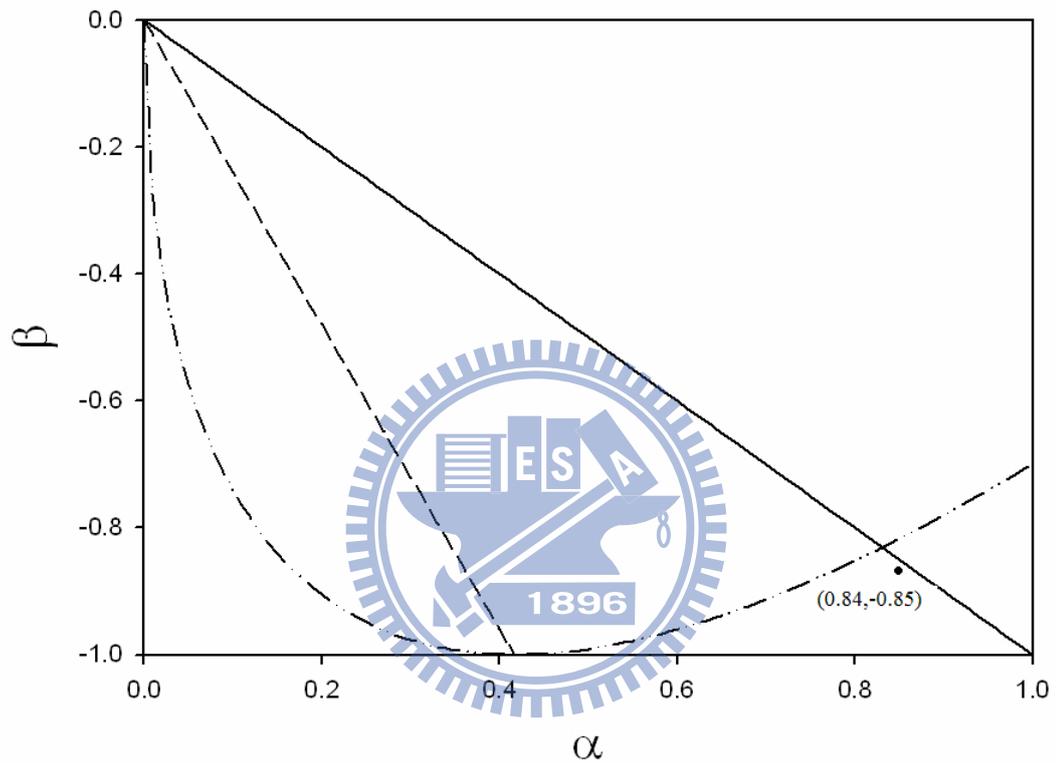


圖 11 參數  $D = 0.417, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85$  及  $r_3 = 3.5$  畫出四個不等式的每一條界線， $\alpha$  和  $\beta$  點落在塗林空間中符合成圖的四個條件。

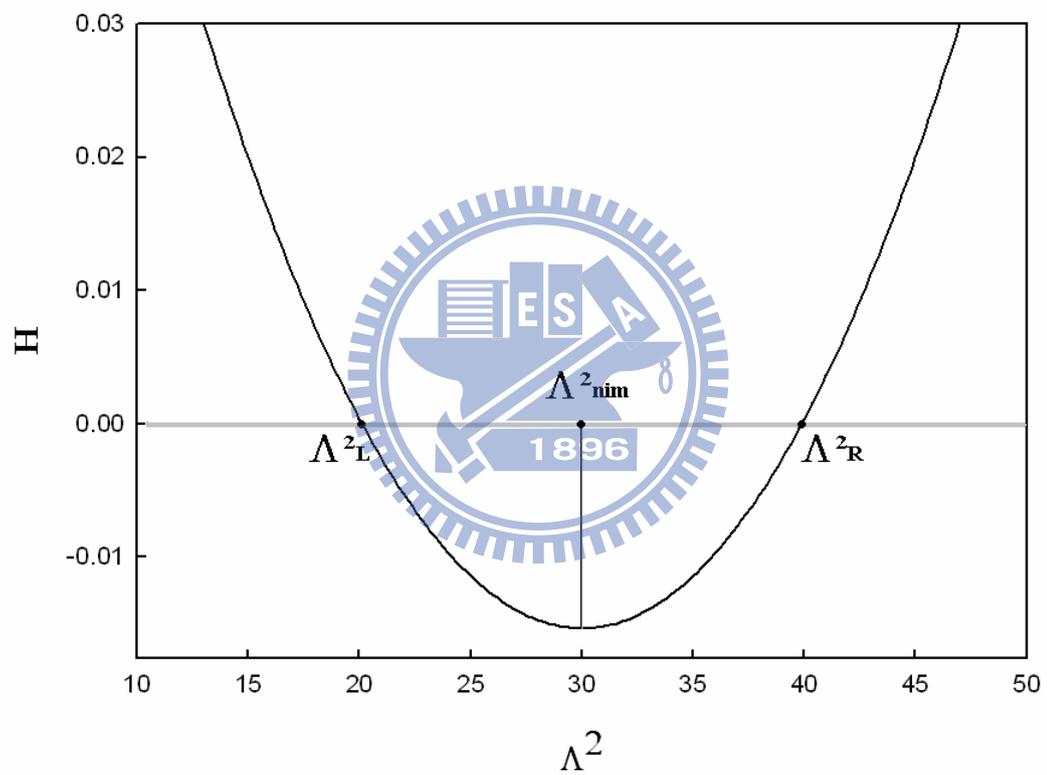


圖 12 參數  $D = 0.417, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$  時波數與  $H$  函數之關係圖。

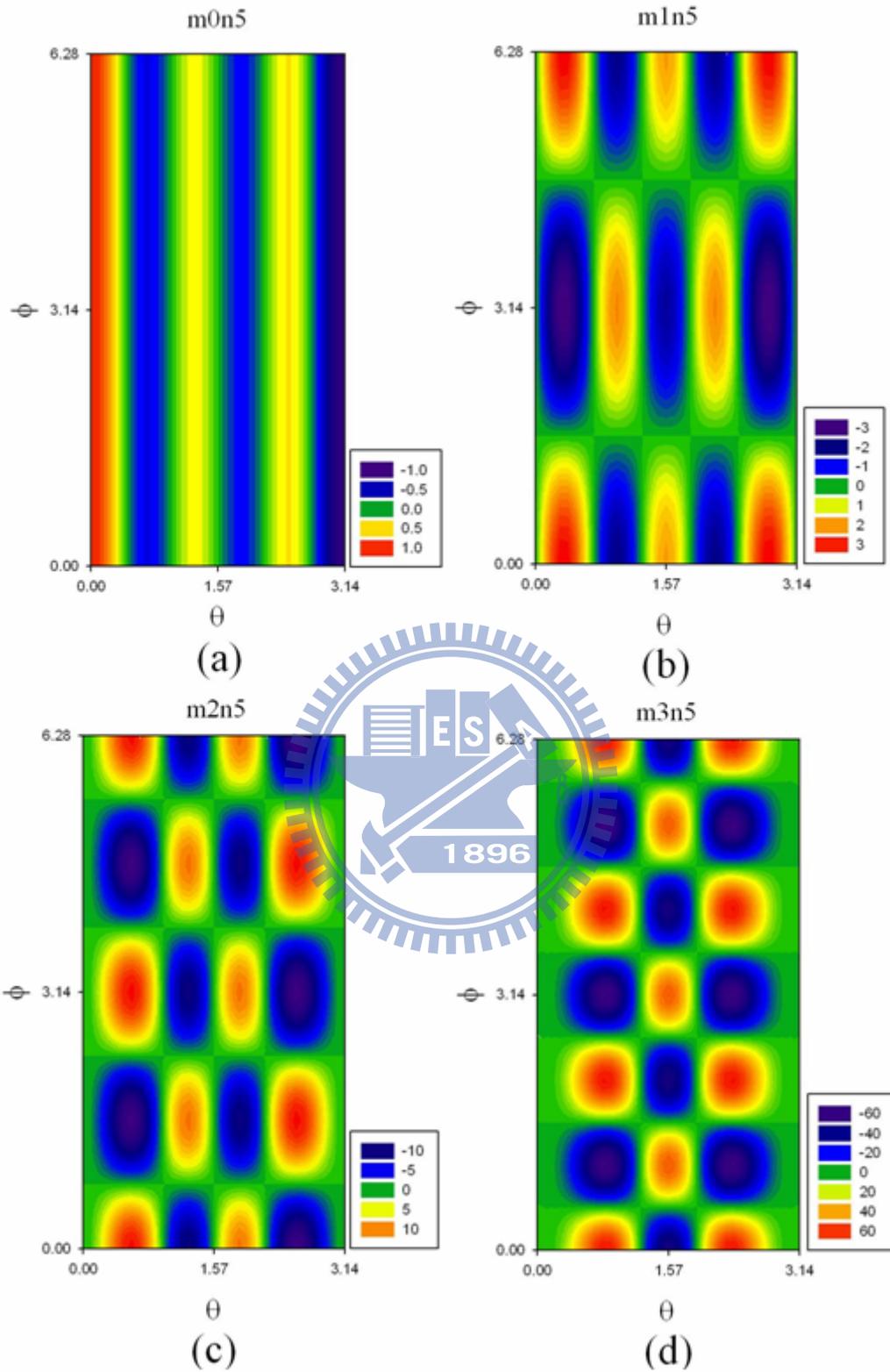
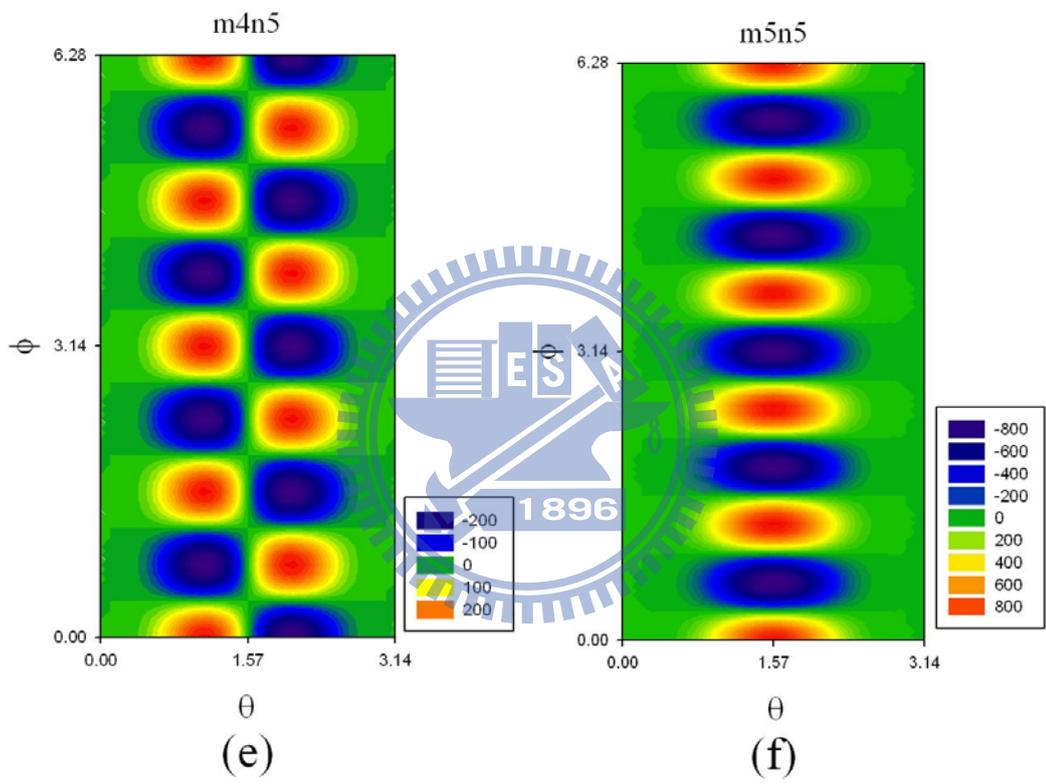


圖 13 模數(a) $(m,n)=(0,5)$ , (b) $(m,n)=(1,5)$ , (c) $(m,n)=(2,5)$ , (d) $(m,n)=(3,5)$ , (e) $(m,n)=(4,5)$ , (f) $(m,n)=(5,5)$ 。



續上頁

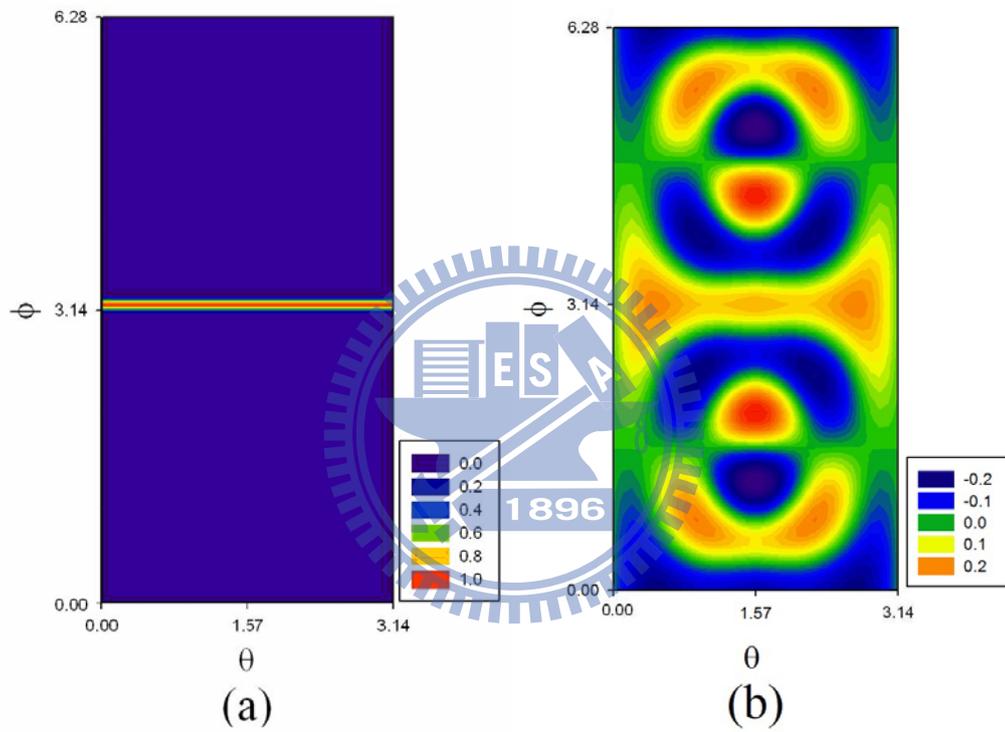


圖 14 參數  $D = 0.2, \delta = 0.0194, \alpha = 0.84, \beta = -0.85, r_3 = 3.5$ ，網格數取  $32 \times 64$  且  $\Delta t = 0.001$ ；(a)  $u$  的初始值分佈 (b) 最後收斂的塗林圖形。

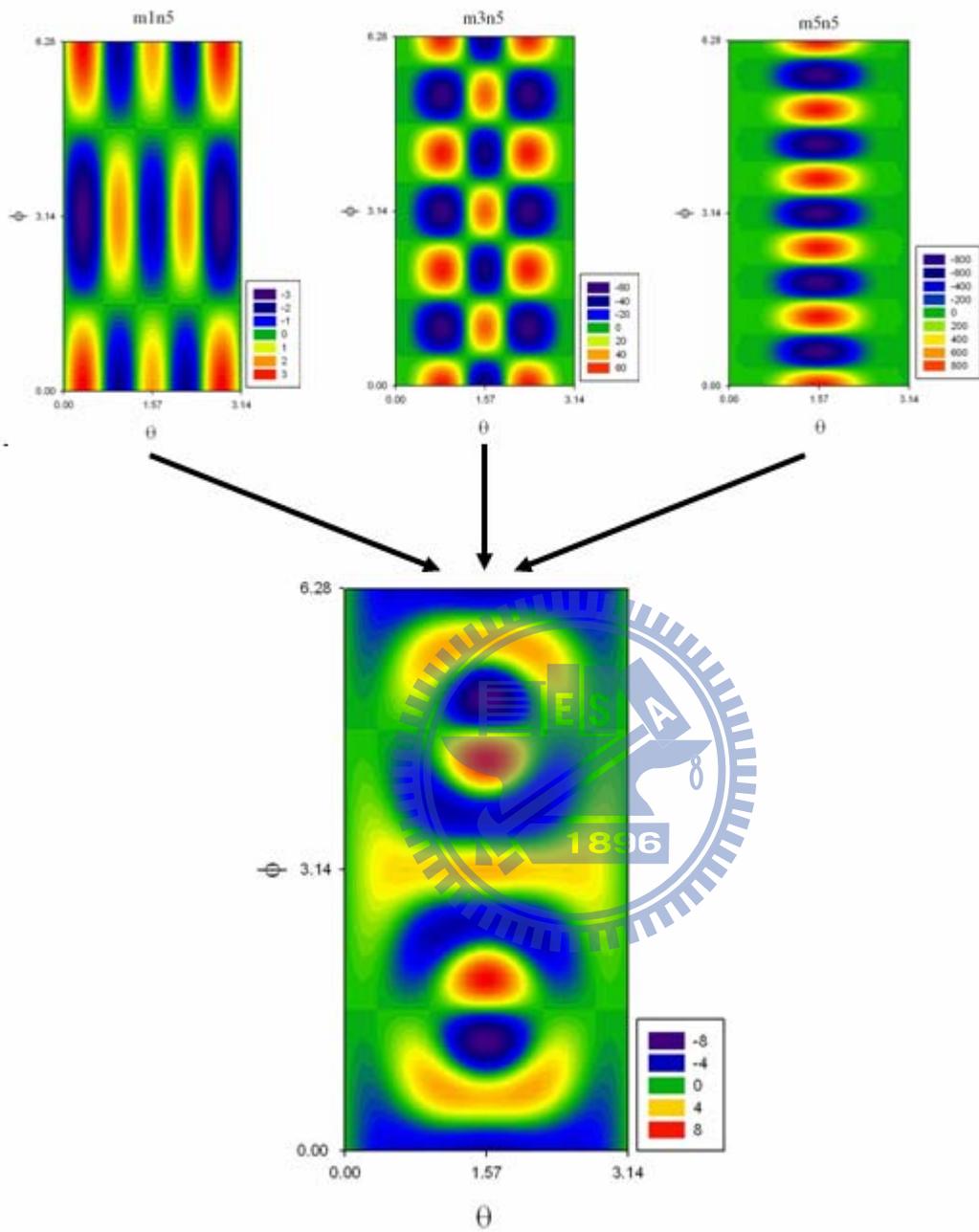


圖 15 利用模數(1,5),(3,5)和(5,5)以 2:3:5 比例所組成一新的組合解。

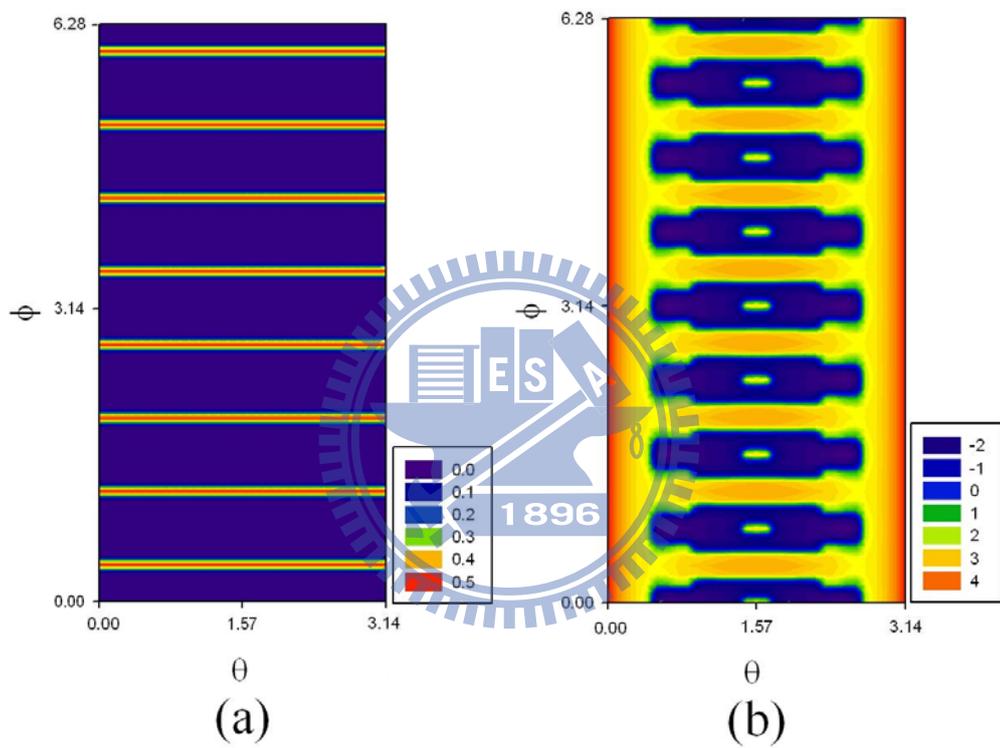


圖 16 參數  $D = 0.2, \delta = 0.005, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_3 = 2$ ，網格數  $32 \times 64$  且  $\Delta t = 0.005$  (a)週期性初始值(b)收斂之塗林圖形。

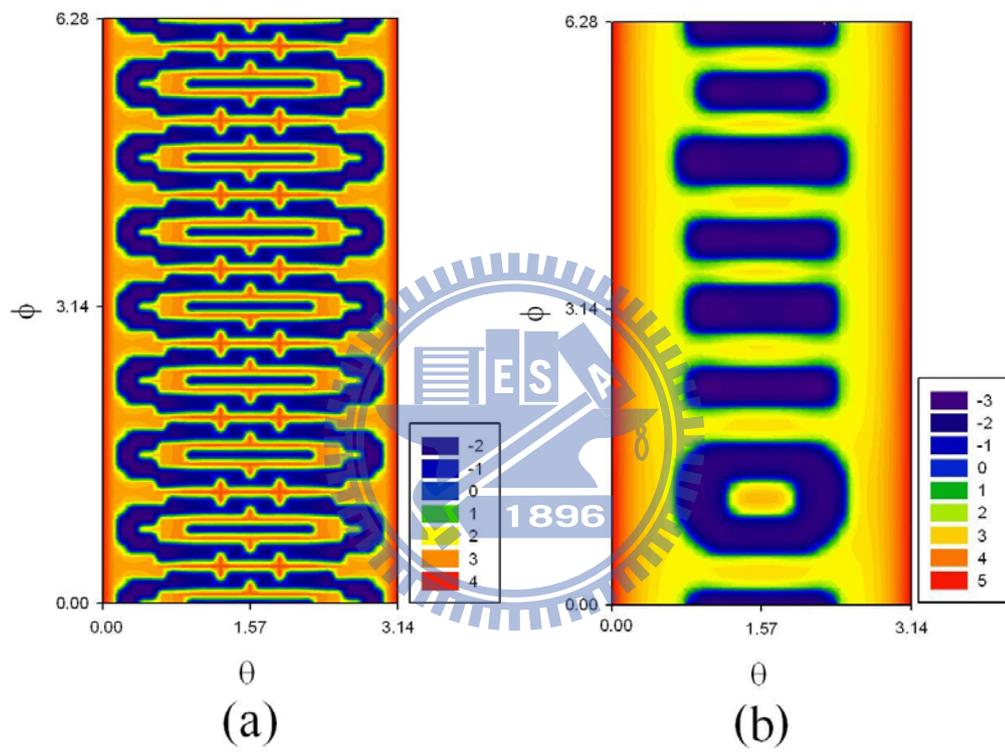


圖 17 固定  $D=0.2$  改變(a)  $\delta=0.001$  圖形線條呈細線分佈(b)  $\delta=0.01$  線條呈粗線分佈。

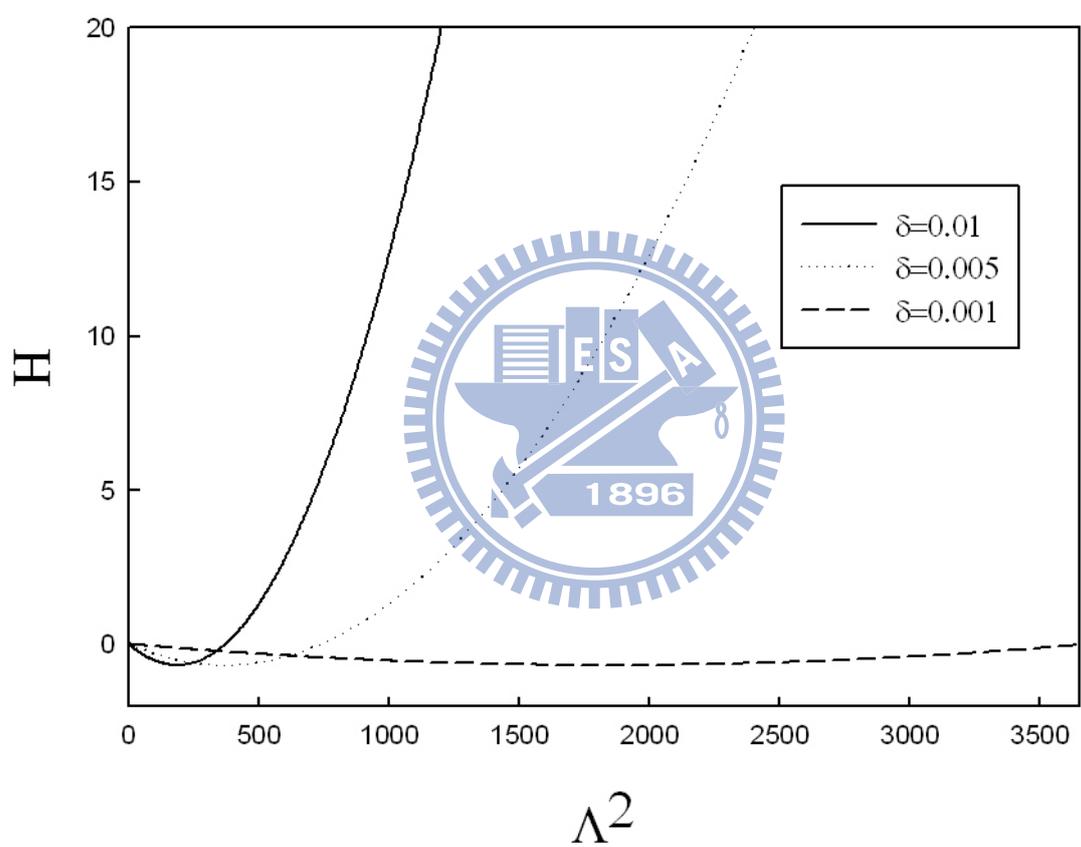


圖 18 參數  $\delta=0.01, 0.005, 0.001$  其  $H$  函數的分佈情形。

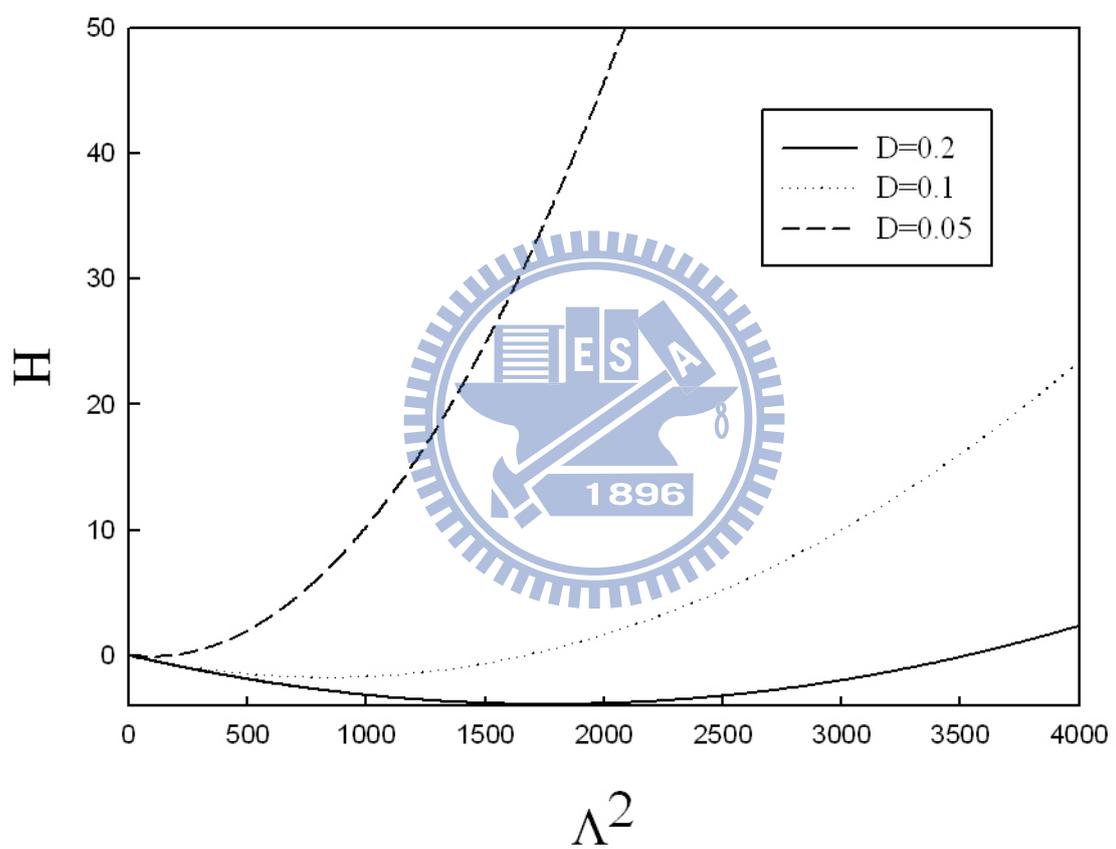


圖 19 參數  $D=0.2, 0.1, 0.05$  其  $H$  函數的分佈情形。

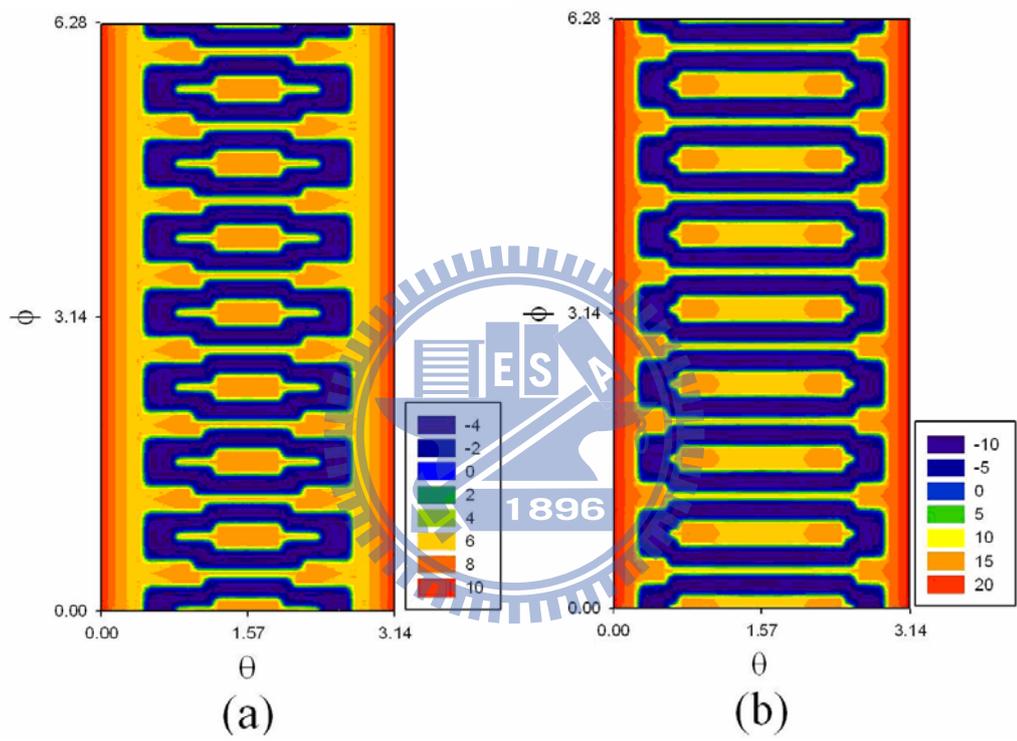


圖 20  $\delta = 0.005$ ，改變(a) $D=0.1$  的收斂圖形(b) $D=0.05$  的收斂圖形。

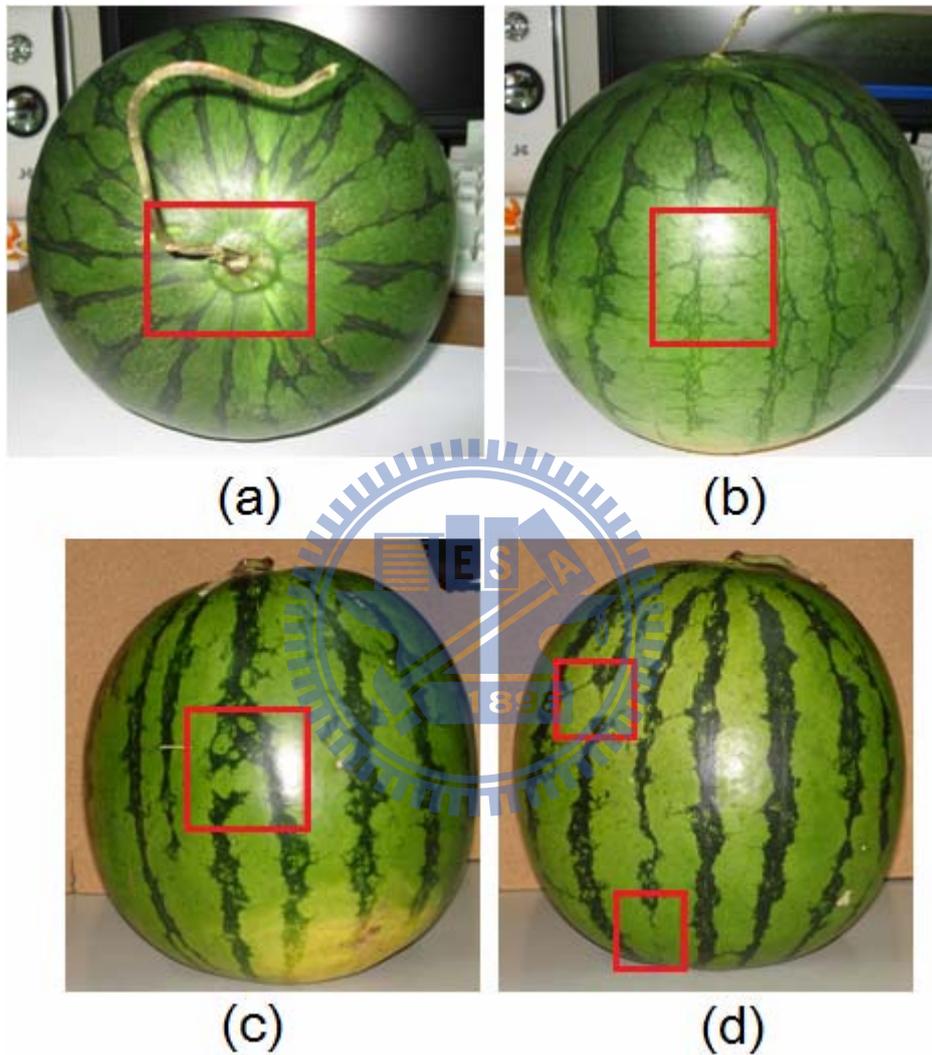
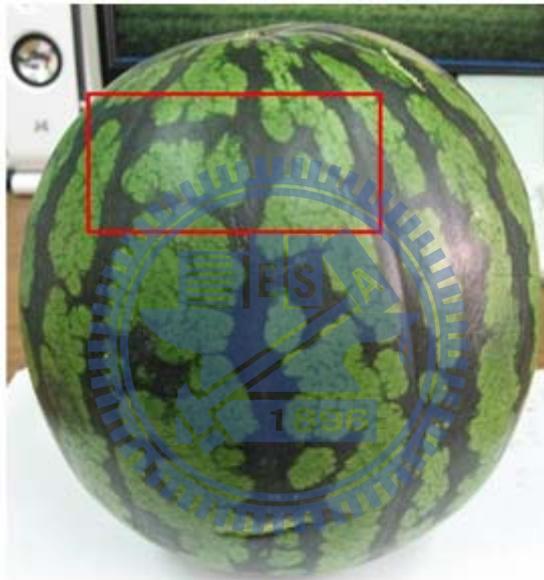


圖 21 西瓜特性(a)主幹週期性連結(b)主幹有細分支產生(c)主幹分岔  
(d)主幹斷裂(e)主幹與主幹之間分支的相連。



(e)

續上頁

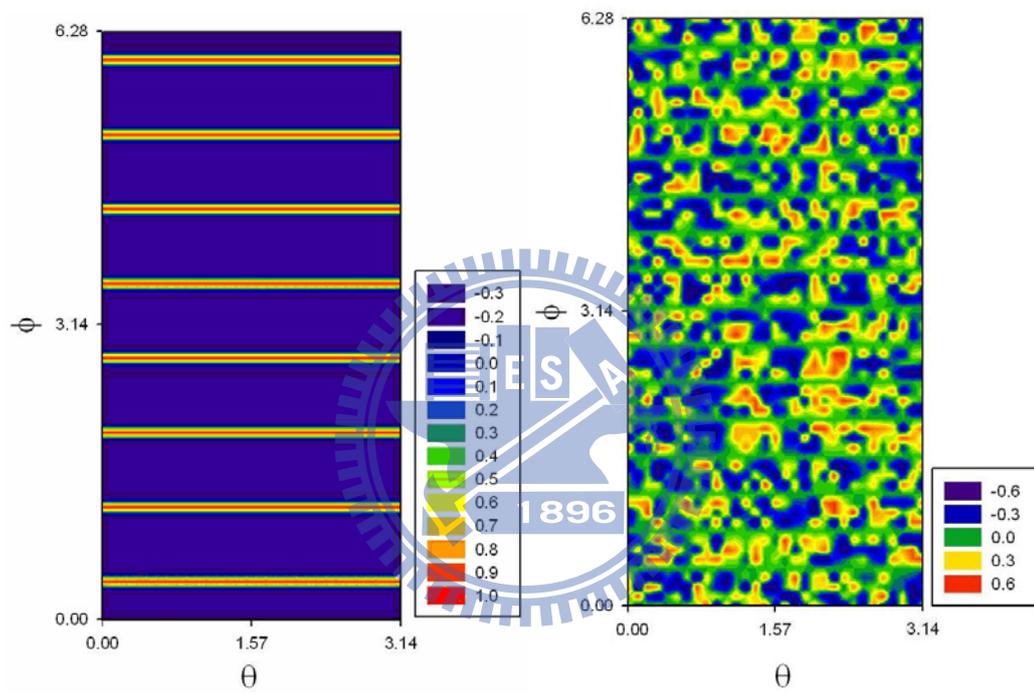


圖 22 (a)  $u$  值 -0.3 和 1 週期性分佈 (b)  $v$  介於  $\pm 0.6$  的亂數分佈。

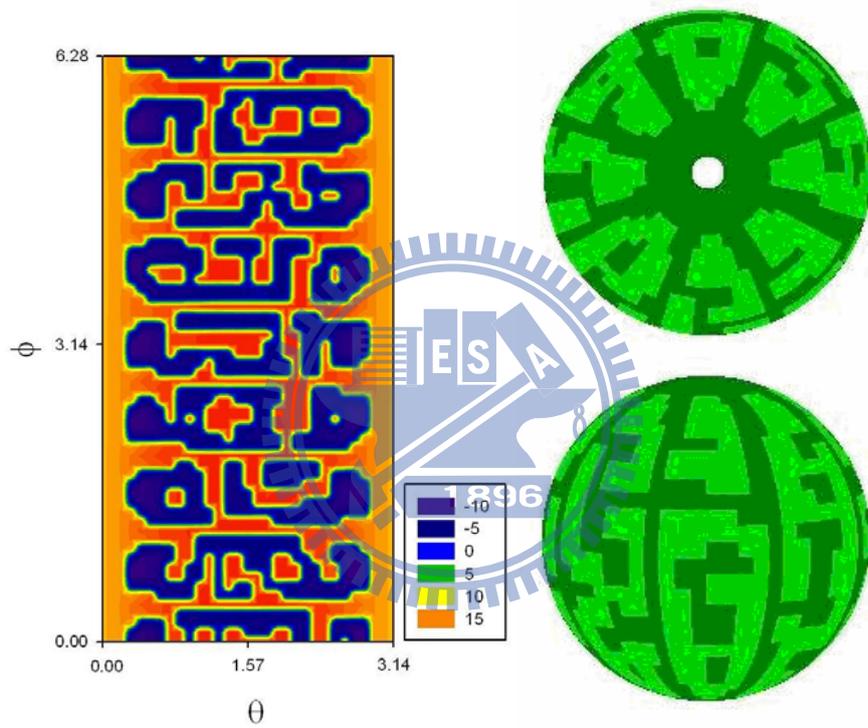


圖 23 參數  $D = 0.05, \delta = 0.005, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 2$  , (a)最後收斂之 2D 圖形 , (b)3D 上視及側視的等高線圖。

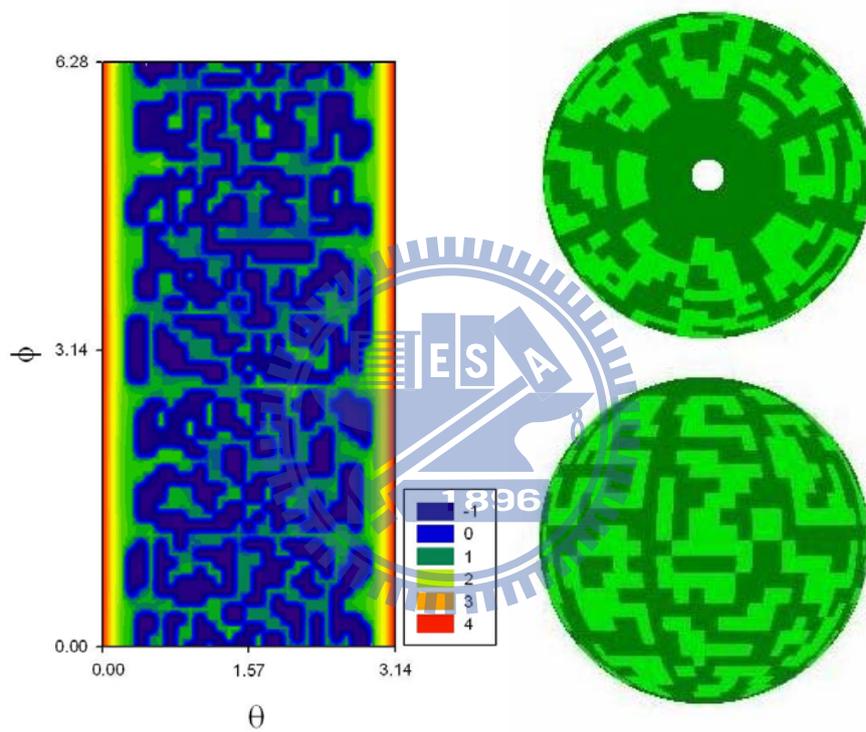


圖 24 參數  $D = 0.3, \delta = 0.001, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 3, r_4 = 0.5$ ，網格數  $32 \times 64$ ，(a)最後收斂之 2D 圖形，(b)3D 上視及側視的等高線圖。

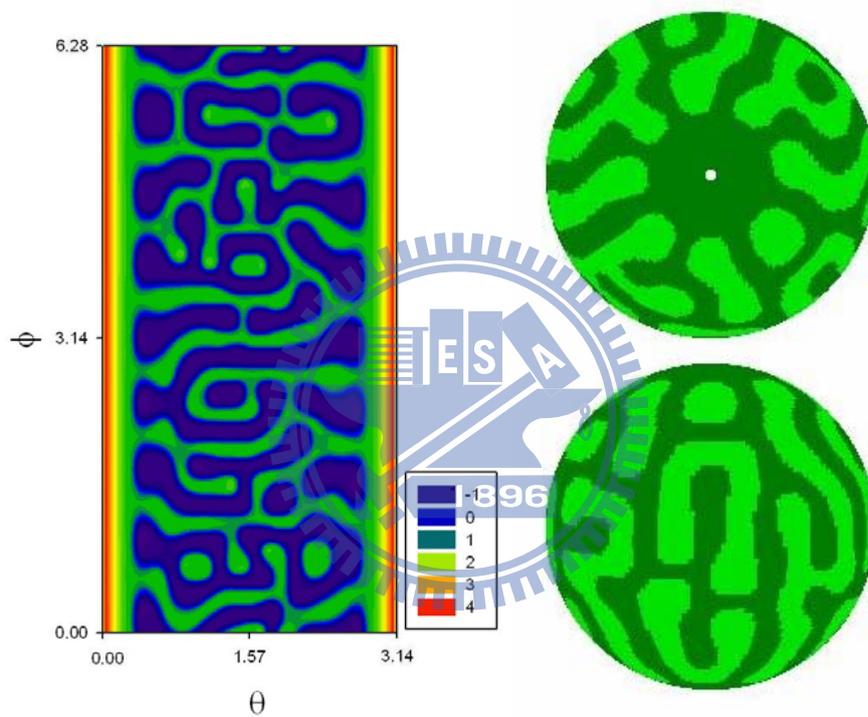


圖 25 參數  $D = 0.3, \delta = 0.001, \alpha = 0.93, \beta = -0.97, r_3 = 3, r_4 = 0.5$ ，網格數  $96 \times 192$ ，(a)最後收斂之 2D 圖形，(b)3D 上視及側視的等高線圖。

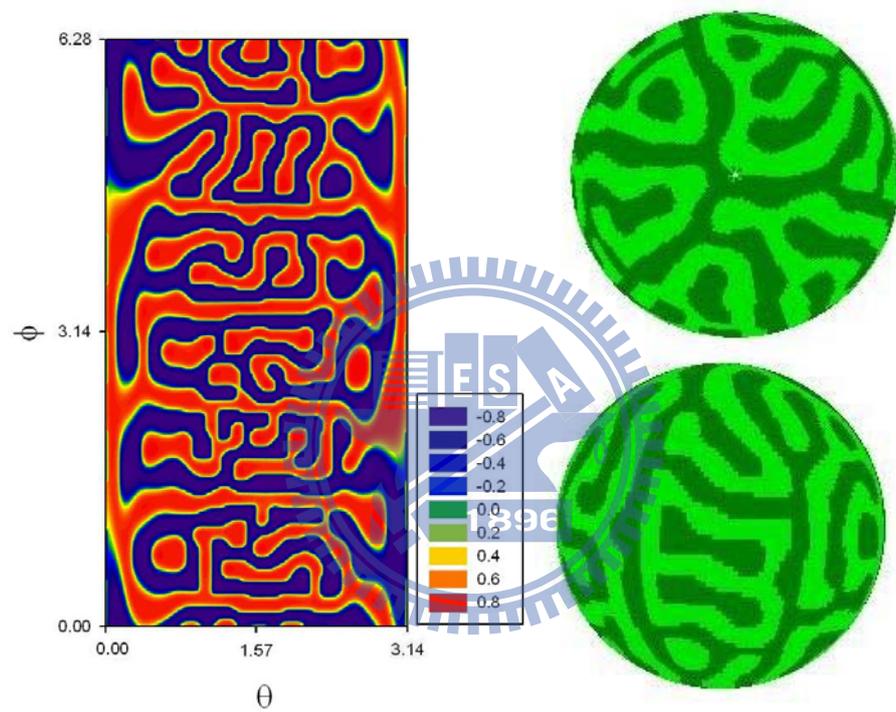


圖 26 參數  $D = 0.2, \delta = 0.001, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_1 = r_4 = 1$  , (a)最後收斂之 2D 圖形 , (b)3D 上視及側視的等高線圖。

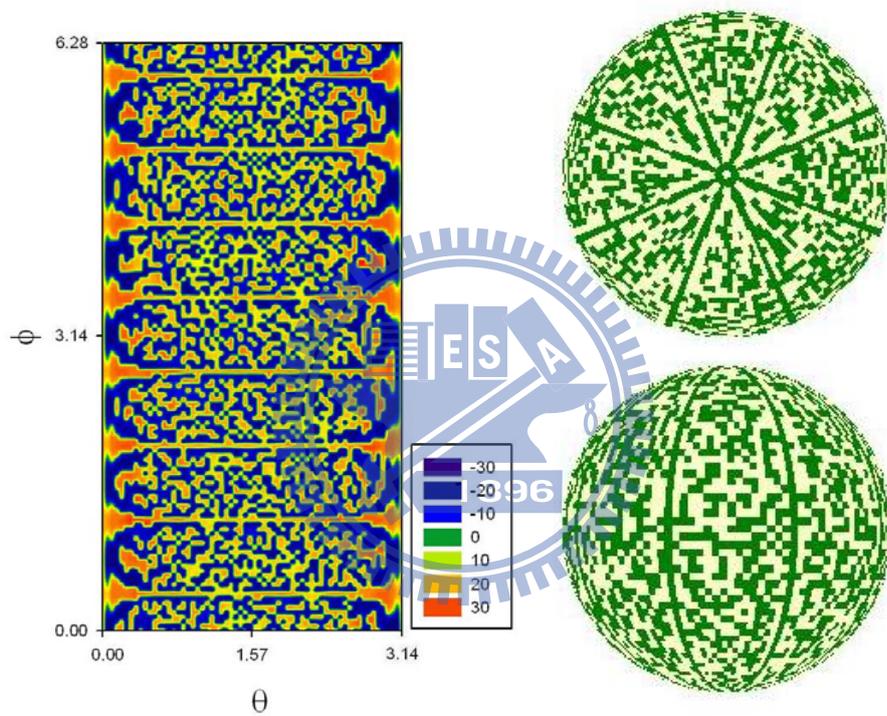


圖 27 參數  $D = 0.02, \delta = 0.001, \alpha = 0.9, \beta = -0.91, r_3 = 3.5$  , (a)最後收斂之 2D 圖形 , (b)3D 上視及側視的等高線圖。



圖 28 為實際南瓜的紋路分佈。