

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

兩個不穩定線性系統存在穩定切換律之

研究與應用

Study of Existence of the Stabilizing Switching Laws between

Two Unstable Linear Systems and Its Applications

研究生：譚煜寰

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十三年七月

兩個不穩定線性系統存在穩定切換律之探討與應用
Study of Existence of Stabilizing Switching Laws between Two
Unstable Linear Systems and Its Applications

研究生：譚煜寰

Student : Yu-Huan Tan

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系



Submitted to Department of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Electrical and Control Engineering
July 2004
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年七月


兩個不穩定線性系統存在穩定切換律之探討與應用

研究生：譚煜寰

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

摘要



本論文主要是針對於二階與 n 階不穩定系統間是否存在利用里奧波諾夫分析方法建構出切換律使不穩定狀態系統藉由切換達到穩定之目的，並且證明已經存在的三個充分的條件是互相對等的；接著我們把利用里奧波諾夫分析方法建構切換律的適用條件推廣到擁有輸入的不可穩定狀態的控制系統中，並且提出一個尋找切換律使得此包含有控制律的 n 階不穩定系統達到穩定的方法，以及建立出使用此方法的演算法則；另外在切換律的運用上，我們探討切換時機的一些特性與相關模擬討論。

Study of Existence of Stabilizing Switching Laws between Two Unstable Linear Systems and Its Applications

Student: Yu-Huan Tan

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This thesis addresses the equivalence of three conditions for the existence of stabilizing switching laws between two unstable linear systems. One condition is used mainly for theoretical derivation, while the others are implementable and a class of stabilizing switching laws have been explicitly constructed by [14]. With the help of the equivalent relation, a condition for the existence of controllers and stabilizing switching laws between two unstabilizable linear control systems is then proposed. The controllers and stabilizing switching laws are also explicitly constructed through the use of an existed algorithm.

誌 謝

本篇論文的完成，實在要感謝太多人了，沒有你們的幫助，恐無法有所精進，希望日後能繼續給予指教與鼓勵，必銘記在心！

首先，要感謝我的指導教授梁耀文博士在專業領域上的指導，使我這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活、人生處世以及做人的道理也不吝提供幫助以及提供正確且良好的觀念，將對於往後的人生有所助益，也要感謝系上曾給予協助的老師，同時，也要感謝口試委員廖德誠博士、鄭志中博士和宋朝宗博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

接下來要感謝朱自強學長與吳秉儒學長在我遇到困難及心情低落時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學宏毅，在研究上給予支持與協助，而學弟嘉良對我的論文研究助益良多，以及學弟信嘉，感謝你們對於我的幫助，使我能夠更專心於研究，以及感謝其他的同學，你們曾給予我幫助，陪我度過這兩年的日子，充實我的研究生活。

最後要感謝我的家人，感謝我的父親、母親、哥哥，從小到大陪我一路走來，對我的包容，實在辛苦你們了！我將這論文獻給你們，謝謝你們對我的支持與鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謝謝你們！

目 錄

	頁次
中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VII
Chapter 1、緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究動機.....	3
1.3 論文架構.....	4
Chapter 2、非線性可變結構控制.....	5
2.1 可變結構控制簡介.....	5
2.2 可變結構控制律之設計.....	8
2.2.1 線性系統可變結構控制律之設計.....	8
2.2.1.1 系統描述.....	8
2.2.1.2 順滑函數的選擇.....	9
2.2.1.3 控制法則之設計.....	11
2.2.2 非線性系統之可變結構控制器之設計.....	14
2.2.2.1 系統描述.....	14
2.2.2.2 可變結構控制器之設計.....	16
2.3 里奧波諾夫法.....	20
Chapter 3、切換式電源轉換器.....	24

3.1 切換式電源轉換器之介紹.....	24
3.1.1 系統描述.....	24
3.1.2 線性電源轉換器簡介	25
3.1.2 切換式電源轉換器簡介	27
3.2 固定時間切換轉換器系統.....	29
3.2.1 脈波寬度調變法	29
3.2.2 升壓式轉換器系統	29
3.2.3 平均方程式與相關切換式轉換器.....	32
3.3 非固定時間切換轉換器系統.....	33
3.3.1 非固定時間切換轉換器系統簡介.....	33
3.3.2 使用里奧波諾夫分析方法建構非穩定狀態系統之切換律(一).....	34
3.3.3 使用里奧波諾夫分析方法建構非穩定狀態系統之切換律(二).....	37
3.4 討論.....	37
附錄 3.A.....	39
Chapter 4、兩個不穩定系統間穩定切換律之設計研究.....	41
4.1 問題描述.....	42
4.2 二階不穩定狀態系統.....	43
4.3 N 階不穩定狀態系統.....	48
4.4 運用控制律於不穩定狀態系統.....	54
4.5 討論.....	58
附錄 4.A.....	59
附錄 4.B.....	61

附錄 4.C.	73
Chapter5、模擬與討論.....	80
5.1 兩個不穩定線性系統之穩定切換律設計.....	80
5.1.1 系統模擬.....	80
5.1.2 探討 ε 的特性.....	83
5.2 兩個不穩定線性控制系統之控制律及切換律設計.....	86
Chapter 6、結論與未來研究方向.....	91
6.1 結論.....	91
6.2 未來研究方向.....	92
參考文獻.....	94



圖目錄

圖 2.1 順滑軌跡示意圖.....	6
圖 2.2 順滑層.....	7
圖 2.3 順滑模態存在於兩順滑平面的交集.....	15
圖 3.1 直流至直流轉換器系統.....	25
圖 3.2 線性電源轉換器的方塊圖與整流後的電壓範圍.....	26
圖 3.3 切換式電源轉換器的方塊圖.....	28
圖 3.4 升壓轉換器(boost converter).....	30
圖 3.5 升壓轉換器之模組.....	30
圖 3.6 修改圖 3.4 之升壓式轉換器.....	31
圖 3.7 用 Ispice 模擬圖 3.6 之升壓式轉換器之輸出波形.....	32
圖 4.1 穩定系統 A_1 、 A_2 有可能因切換方法不同而產生不同的根軌跡...	41
圖 5.1 時間取 0.4 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；(b) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；(c) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。.....	82
圖 5.2 時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；(b) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；(c) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。.....	83
圖 5.3 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。.....	84
圖 5.4 ε 取 0.1，時間取 2 秒時 (a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。.....	85
圖 5.5 ε 取 0.9，時間取 2 秒時(a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。.....	85
圖 5.6 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；(b) x_1 、 x_2 與 x_3 對時間的分佈圖。.....	87

圖 5.7 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；
 (b) x_1 、 x_2 與 x_3 對時間的分佈圖。.....88

圖 5.8 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；
 (b) x_1 、 x_2 、 x_3 與 x_4 對時間的分佈圖。.....90



CHAPTER 1

序論

1.1 研究背景



電力電子是一門綜合性學科的學問，其最主要的目標就是運用相關的設計與控制來達到節約能源的目的。而可以運用於大功率電力與小功率電子，其領域包含有功率半導體元件、功率級電路、電機機械與傳動系統、電磁干擾防制技術、積體電路設計、控制理論、微處理器的應用，類比與數位電子還電腦輔助設計技術等應用知識的綜合技術[9, 32]。

其運用領域包含了工業、交通、商業、家電、電力系統、電腦資訊、航空到軍事用途等領域，其使用項目涵蓋了電熱與感應加熱、照明系統、太陽能電力轉換、變頻式家電、電子式安定器、交流與直流電源供應、不斷電電源系統、馬達驅動與控制、焊接與切割、攻因數矯正與諧波補償等[32]。

切換式電源轉換器在電力電子中屬於直流對直流轉換器的電路架構，其廣泛地使用在電腦相關產品與設備、通訊與網路系統、軍事與航太工業、醫療設備、

工業與儀器用設備、高效率的電源供應器、直流馬達驅動、照明系統、消費性與名聲用產品的運用上。典型的直流至直流轉換器其輸入端通常是由線電壓整流而得之非調整性的直流電壓，然後再利用線性電源轉換器或是切換式 DC/DC 轉換器將此變動之直流電壓轉換成一調整可控制的直流輸出電壓。電路中使用功率開關如 BJT、MOSFET、或 IGBT 作為切換元件，利用功率開關導通或截止的切換動作，將輸入的直流高壓切割成高頻方波的訊號，再經由輸出端的低通濾波器濾除高頻訊號，而得到所需的直流輸出電壓。[9, 32]

輸入電壓與輸出電壓的關係由切換功率開關的切換元件(通常為電晶體或是 MOSFET)決定，而在選擇如何切換功率開關之研究方面，最典型的方式是採用脈波寬度調變法(Pulse-Width modulation, PWM)，其切換為工作週期(duty cycle $T_S = t_{on} + t_{off}$)為固定，由調整 t_{on} 之大小來改變 V_o 之大小的控制法(如 [16, 17, 29, 30])。

除了此之外，目前文獻中有許多探討到非固定切換時間的切換方法，像是在 [10] 中提出：對於一個線性系統 $\dot{x} = A_i x$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ，如果矩陣 A_i 為漸近穩定(asymptotically stable)且互換(commute)時，則可使用共通二次的里奧波諾夫函數(Common quadratic Lyapunov function, 簡稱 CQL function)的形式 $V(x) = x^T P_i x$ ，再藉由 $\dot{V}(x) = x^T (A_i^T P_i + P_i A_i)x = -x^T P_{i-1} x$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ，使任何 A_i 的線性系統 $\dot{x} = A_i x$ ，都可以藉由此里奧波諾夫函數達到指數穩定，其中 P_i 為正定， $i = 1, 2, \dots, N$ 。此外，[10] 中亦有提供一個尋找 P_i 的方法。

接著在 [18] 中指出，[10] 所提到建構切換律的適用範圍 — 矩陣 A_i 必須符合漸近穩定且互換的條件過於嚴苛，因此提出一個矩陣 A_i 不需要符合互換(commute)條件也可以找到 A_i 相對應之共通里奧波諾夫方程式(Common

Lyapunov equation) 中 $A_i^T P_i + P_i A_i = -Q$ 的 P 之判斷條件。其他相關於探討運用里奧波諾夫原理(Fundamentals of Lyapunov Theory)來解決穩定系統之切換問題的文獻有[1, 12, 22-28]。

然而[18]中最大的問題在於，文中並沒有提到如何去找 P ，而且[10, 18]中的條件都需要 A_i 為穩定矩陣。因此針對這兩點，在[14]中提到：對於一組線性系統 $\dot{x} = A_i x$ ， $i = 1, 2$ ，其中矩陣 A_1 、 A_2 皆為不穩定，如果可以找到一 α 值符合 $0 < \alpha < 1$ ，使得 $A_{eq}(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$ 為穩定矩陣，則一定可以利用里奧波諾夫分析方式，使不穩定狀態系統藉由切換達到穩定的判斷方法。同時[8]中亦提供了一個用此里奧波諾夫分析方式去設計穩定切換律之演算法則。

其他亦還有許多探討運用里奧波諾夫原理來建構切換律以解決不穩狀態定系統之切換的文章[12, 19, 20]。除了此之外，目前還有探討到使用里奧波諾夫分析方式建構模糊切換系統的文章[5, 8]，與使用 LQR 來解決不穩定系統之切換的文章，像是[6, 7]。

1.2 研究動機

在[14]中有兩個主要的貢獻，第一個貢獻是建構一個利用里奧波諾夫分析方法找出切換律的演算法則，使不穩定系統藉由切換達到穩定的目的。另一個貢獻為提出一套適用於不穩定狀態系統的判斷方法，當符合判斷條件時，則一定可以藉由前一個貢獻所提之建構切換律的演算法則，找出切換律使不穩定系統達到穩定的目的。

然而我們已知，同樣的系統，亦有可能運用不同的里奧波諾夫分析方式選取出不同的控制律，或是切換律(例如在[31]的 4-19 頁提到，穩定系統中，可使用左特徵向量等方式取代里奧波諾夫方程式)。因此對於[14]中所述，是否我們可以運用不同於[14]中所描述的里奧波諾夫分析方法來建構切換律的演算法則，亦

可達到相同之目的？

因此，我們以[14]中的內容為基礎加以深入探討。首先，我們提出一個直觀上很明顯可看出來的不穩定系統可以藉由里奧波諾夫函數建構切換律達到穩定的條件：

$$\exists P > 0 \text{ 使得 } \bigcup_{i=1,2} \{x \mid x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (1.1)$$

再藉由比較(1.1)之條件與[14]中所提的兩個貢獻，我們將可以很有系統的探討前述所提出之疑問。

到此我們把問題精簡扼要的整理如下：如何建構出一個使不穩定系統可以藉由里奧波諾夫分析方式建構切換律達到穩定的充分條件、以及是否我們可以簡化一些判斷的方法或是建立一些不同的判斷方法、又或者探討一些切換律的特性、並且為了使其達到更寬廣有效的應用，我們可以加入控制律 $u(x)$ 的部分…等等，諸多的研究方向。




1.3 論文架構

第二章針對線性，非線性系統以及切換式轉換器系統模組產生之非線性系統的可變結構控制做介紹。第三章介紹切換式轉換器系統，包括系統介紹與發展，以及現今不穩定狀態的切換系統之研究。第四章將介紹目前有關使用里奧波諾夫分析方法建構不穩定狀態的切換律之研究成果，這部份的推論適用於二階，並且可以推廣到 N 階都。並且在最後，我們把此建構切換律的方法，運用到包含控制律 $u(x)$ 之不穩定系統狀態。另外第五章則是系統的建構與模擬討論，包含了切換時機的探討、與切換系統的模擬等等。

CHAPTER 2

非線性可變結構控制



由於可變結構控制器在設計上的容易性以及其高抗雜訊的能力，在本論文中我們將採用可變結構來設計控制器。本章將簡述可變結構控制的基本概念、順滑平面、線性及非線性可變結構控制器的設計方法、以及考慮輸入具有非線性限制時之可變結構控制律之設計。最後一小節將介紹里奧波諾夫法，此法為本論文中可變結構所採用的設計控制器設計方法。

2.1 可變結構控制簡介

可變結構控制(variable structure control, 簡稱 VSC)是一種不連續的狀態回授控制，是在 1960 年代初期由前蘇聯科學家們所發展出一種非線性控制法則，為俄國人 Filippov 所率先提出的。此種控制之特色為利用不連續的控制輸入，使系統在所設定之轉換平面(Switching Plane)或稱之超平面(Hyperplane)上改變結構，而獲得所謂之滑動模式控制(Sliding Mode Control)。

我們所採用的可變結構控制法則，由於設計方法較為容易，已成為最廣為人使用的控制方法之一。由於 VSC 是一種高速切換的回授控制(feedback control)，其回授方式可以為狀態回授(state feedback)或輸出回授(output feedback)。採用 VSC 可使系統具有較強的系統強健性(Robustness)，因此對於一些具有不確定因素(uncertainties)的系統而言，VSC 的高抗雜訊能力的確是一種不錯的控制方法。

VSC 最大的特點則是系統最後會被規範在一個預先決定的順滑平面(Sliding surface)上，而控制器的設計者則利用設計的控制法則將系統的狀態軌跡控制在預先設計好的順滑平面上，如圖 2.1，在理論上當順滑函數為零時，亦即系統上到了順滑平面上，而受控系統的行為則是由順滑平面來規範的，運動軌跡不隨系統內部參數變動而變動，此種沿著順滑平面滑行的運動方式稱為滑動模式(Sliding mode)，因此，順滑平面的選取在 VSC 的設計上就顯得相當的重要，對於一般線性的系統而言，順滑函數可以選取如下：

$$S(x) = Cx \quad (2.1)$$

其中， x 表示系統的狀態變數。

而要讓系統上順滑平面的條件便要使得所設計的控制器滿足下式：

$$S^T \dot{S} < -\sigma \|S\|, \sigma > 0 \quad (2.2)$$

(2.2)式又稱為”reaching condition”。

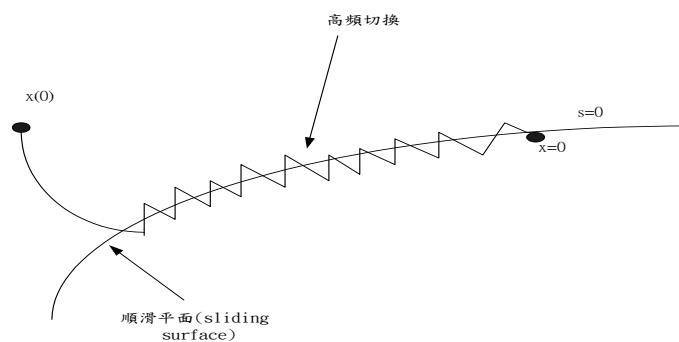


圖 2.1 順滑軌跡示意圖

上式條件，因它充分保證在任一 S 鄰域之狀態起點，其軌跡必定趨近到順滑平面 S ，且沿此平面滑動。由上述可知，當系統進入滑動模式，系統動態反應受控於順滑平面，因此，可適當選取轉換平面使降階系統具有穩定的特性。

但是，在滑行的過程中，狀態代表點因受到不連續控制之輸入影響，並非完全在順滑平面 ($S(x)=0$) 上，而是在 $S(x)=0$ 的鄰域來回變動，使用 VSC 時有一個最大的缺點就是控制器在高速作切換時會導致”切跳(Chattering)”的現象產生。輕則會影響系統的最終狀態 (steady state)，嚴重則會激發出一些系統潛在的未模式高頻部分 (high frequency unmodeled parts)，將影響到系統整個控制的結果，導致系統的不穩定現象發生。因此，要在可變結構控制系統中，切跳現象是無法避免的，而切跳的大小視控制輸入之不連續程度而定，要改善”切跳(Chattering)”所導致的負面影響，可以引入順滑層(Sliding layer)的想法[27]，順滑層的簡單示意圖如下：

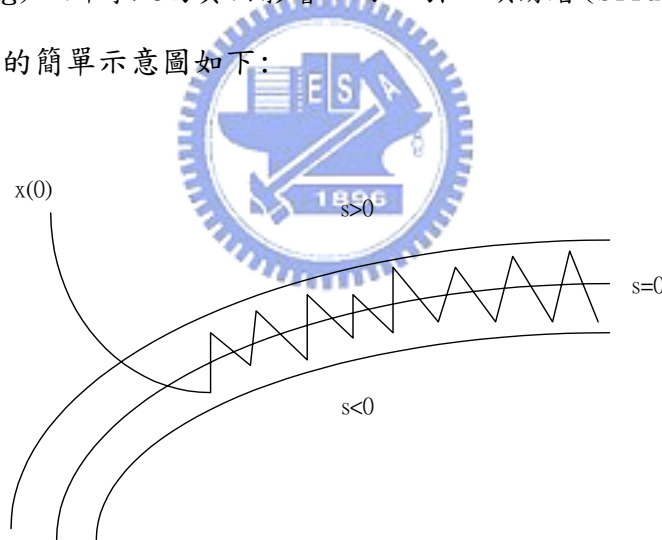


圖 2.2 順滑層

將原來的符號函數(Sign Function)用飽和函數(Saturation Function)、磁滯函數(Hysteresis Function)或磁滯-飽和函數(Hysteresis Saturation Function)等方式取代，經證實，這些方法可應用於實際的系統中，對系統之切跳行為可獲得明顯有效的改善。

總括而言，在設計可變結構控制器有兩個主要步驟：


- 步驟一：選取適當的順滑平面 $S(x)$ ，使得系統軌跡在順滑模態時能滑向控制目標點。
- 步驟二：設計適當的控制器，使得系統軌跡在有限時間內接觸到順滑平面產生順滑模態。

2.2 可變結構控制律之設計

2.2.1 線性系統可變結構控制律設計

2.2.1.1 系統描述

假設系統動態方式如下：


$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + u + d(x, t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 是系統狀態且所有的狀態變數都是可以量測的， u 為控制輸入， $d(x, t)$ 是系統雜訊且為一匹配式雜訊 (matched noise)，在不失一般性的情況下，假設雜訊的大小都有上界

$$|d(x, t)| \leq \delta(x, t) \tag{2.4}$$

其中 $\delta(x, t)$ 為一已知的上限函數，此有雜訊干擾的系統，我們的主要的目的是將

系統的軌跡準確的控制到原點 $x=0$ ，以下將利用可變結構控制來完成所要的目標。

依據可變結構控制的理論，選定順滑函數(sliding function) $S(x)$ 後，系統之狀態空間會被順滑平面 $S(x)=0$ 分隔成 $S(x)>0$ 及 $S(x)<0$ 的兩個子空間，再利用迫近及順滑條件來迫使系統在有限時間內接觸到順滑面，並且經由切換，使系統在順滑面上產生順滑模態(sliding mode)，在順滑模態上的軌跡最後必須逼近目標點 $x=0$ ，方能達到控制的目標。

2.2.1.2 順滑函數的選擇

在此步驟中，首先假設系統已成功的被控制在順滑模態下，其餘的主要工作就是選擇順滑函數 $S(x)$ ，也就是選擇一適當的順滑面 $S(x)=0$ ，讓系統經由不斷的切換滑向目標。

由於順滑模態下的系統軌跡會朝向目標點逼近，所以選取的順滑面必須包含此目標點，也就是說必須符合 $S(x)|_{x=0}=0$ ，在一般情況下，通常順滑函數設定為

$$S(x) = CX = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (2.5)$$

其中 $C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$ ， C 之選取將於稍後在作說明，根據以上的敘述必須假設系統已經處於順滑模態下，亦即滿足 $S(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ ，事實上，向量中的 n 個係數只要是彼此間的比例關係不變的話，都是代表同一個順滑面，假設 $c_n = 1$ ，亦即選取順滑函數為

$$S(x) = CX = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n-1}x_{n-1} + x_n \quad (2.6)$$

其中 $C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n-1} \ 1]$ 。

為了使順滑模態 $S(x)=0$ 具有不變(invariant)的特性，我們必須加入以下條件

$$S(x) \Big|_{u=u_{eq}} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + \cdots + c_{n-1} \dot{x}_{n-1} + \dot{x}_n = 0 \quad (2.7)$$

利用(2.3)式可得

$$\dot{S}(x) \Big|_{u=u_{eq}} = a_1 x_1 + (a_2 + c_1)x_2 + \cdots + (a_n + c_{n-1})x_n + u_{eq} + d(x,t) = 0 \quad (2.8)$$

在(2.8)式可看出順滑函數經過一次微分後會產生控制輸入 u 項，因此可取等效控制如下

$$u_{eq} = -a_1 x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \cdots - (a_n + c_{n-1})x_n \quad (2.9)$$

代回(2.3)式後成為

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ S(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$


根據等效控制的觀點，系統在順滑模態下($S(x)=0$ 且 $\dot{S}(x)=0$)只需考慮前面的 $n-1$ 條方程式，亦即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中最後一式已經利用 $S(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的關係把 x_n 改為

$$x_n = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_{n-1} x_{n-1} \quad (2.12)$$

由(2.11)中可以看出次數降為 $n-1$ 次，所以順滑模態比原系統少了一階。

為了使(2.11)式的系統穩定，必須選取適當的係數 c_i ， $i=1,2,\dots,n-1$ ，首先，令 $x_K = z^{(K-1)}$ ， $K=2,\dots,n-1$ ，其中 $Z^{(K-1)}$ 表示 Z 對於時間 t 的 $K-1$ 次微分，再代回(2.11)式的最後一個等式後，可得 $(n-1)$ 次的微分方程如下：

$$z^{(n-1)} + c_{n-1} z^{(n-2)} + \cdots + c_2 \dot{z} + c_1 z = 0 \quad (2.13)$$

故特徵方程式為

$$\lambda^{(n-1)} + c_{n-1} \lambda^{(n-2)} + \cdots + c_2 \lambda + c_1 = 0 \quad (2.14)$$

只要選取的係數 c_i ， $i=1,2,\dots,n-1$ ，能夠使特徵方程式的 $(n-1)$ 個根都具有負實部，亦即 $RE(\lambda) < 0$ ，其中 λ 為特徵方程式的特徵根，因此，當 $t \rightarrow \infty$ 時，對所有 $i=1,2,\dots,n-1$ ， $x_i \rightarrow 0$ ，經由(2.12)式可得 $x_n \rightarrow 0$ ，即可達到控制的目標。一旦決定出適合的順滑函數後，便可開始進行控制法則的設計。

2.2.1.3 控制法則之設計

控制法則的設計是利用迫近及順滑兩種條件為基礎，迫使系統在有限時間內產生順滑模態，在此利用(2.2)式的迫近順滑條件，表示如下：

$$S^T \dot{S} < -\sigma \|S\|, \quad \sigma > 0, \quad \text{當 } S \neq 0 \quad (2.15)$$

以保證系統在有限時間內進入順滑模態，並滑向控制目標。由(2.3)及(2.6)式計算順滑函數的一次微分式可得

$$\dot{s} = a_1 x_1 + (a_2 + c_1) x_2 + \cdots + (a_n + c_{n-1}) x_n + u + d(x,t) \quad (2.16)$$

為了符合迫近順滑條件，令控制法則如下：

$$u = -a_1x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \cdots - (a_n + c_{n-1})x_n - (\delta(x,t) + \sigma)\text{sign}(s) \quad (2.17)$$

代回(2.16)式後變為

$$\dot{s} = -(\delta(x,t) + \sigma)\text{sign}(s) + d(x,t) \quad (2.18)$$

兩邊同乘 s 後整理為

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= -\delta(x,t)|s| - \sigma|s| + d(x,t)s \\ &= -\sigma|s| - \delta(x,t)|s| \left(1 - \frac{d(x,t)s}{\delta(x,t)|s|}\right) \\ &\leq -\sigma|s| \end{aligned} \quad (2.19)$$

由(2.19)式，可知所設計的控制法則(2.17)式，可以保證迫近條件(2.15)式成立，所以能使系統在有限時間內產生順滑模態。

在真實的情況中，在(2.17)式中 $\text{sign}(s)$ 是一理想的切換函數，這個函數必須借助無窮大的切換頻率才可能達成，但此種切換頻率在現實的系統裡是無法實現的，因此一般都只是利用極高速的切換元件來取代，這樣系統的軌跡必定會在順滑模態 $s=0$ 兩側的極小空間中不斷的跳動，造成了不當的高頻雜訊，也就是說會有切跳的現象產生，目前已經有許多改進切跳現象的方法被提出[27]，其中以 Slotine 在 1983 所提出的順滑層概念最為簡單，亦被廣泛的使用於實際的系統控制中，將 $\text{sign}(s)$ 修正為

$$\text{sat}(s, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & s > \varepsilon \\ s/\varepsilon & |s| \leq \varepsilon \\ -1 & s < -\varepsilon \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{cases} \text{sign}(s) & |s| > \varepsilon \\ s/\varepsilon & |s| \leq \varepsilon \end{cases} \right\}$$

可由(2.20)式可看出系統空間被分為 $s > \varepsilon$ 、 $|s| \leq \varepsilon$ 、 $s < -\varepsilon$ ，其中包含順滑面 $s=0$ 的中間地帶 $|s| \leq \varepsilon$ 就是所謂的順滑層，該層的厚度為 ε ，為了方便表示，也將包夾順滑層的兩個區域 $s > \varepsilon$ 、 $s < -\varepsilon$ ，進一步表示為 $|s| > \varepsilon$ ，故我們以 $\text{sat}(s, \varepsilon)$ 取代 $\text{sign}(s)$ ，所以將(2.17)式修正為

$$u = -a_1 x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \dots - (a_n + c_{n-1})x_n - (\delta(x, t) + \sigma)\text{sat}(s, \varepsilon) \quad (2.21)$$

在未進入順滑層前，也就是當 $|s| > \varepsilon$ 時， $\text{sat}(s, \varepsilon) = \text{sign}(s)$ ，修正前後的控制法則是完全相同的，故系統依舊向著順滑面 $s=0$ 逼近，由於順滑面包含在順滑層內，所以系統軌跡朝著順滑層 $|s| \leq \varepsilon$ 逼近，系統會在有限時間內進入順滑層，一旦進入順滑層後，控制法則(2.21)式變成

$$u = -a_1 x_1 - (a_2 + c_1)x_2 - \dots - (a_n + c_{n-1})x_n - (\delta(x, t) + \sigma) \frac{s}{\varepsilon} \quad (2.22)$$

由於 $\left| \frac{s}{\varepsilon} \right|$ 的值通常都小於 1，因此控制輸入 u 的增益值在順滑層終將明顯降低，而(2.18)式也同樣被修正為

$$\dot{s} = -(\delta(x, t) + \sigma) \frac{s}{\varepsilon} + d(x, t) \quad (2.23)$$

由(2.23)式可以清楚的看到 S 會受到雜訊 $d(x, t)$ 的影響，也就是說在順滑層中只要雜訊 $d(x, t)$ 存在，系統很難維持順滑模態，亦即 s 不恆為 0，此時(2.12)式必須重寫為

$$\dot{x}_n = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_{n-1} x_{n-1} + s \quad (2.24)$$

同樣地(2.11)式變成

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_{n-1} x_{n-1} + s
\end{aligned} \tag{2.25}$$

由於在順滑層 $|s| \leq \varepsilon$ 中， s 可視為一個有限量的值，因此不影響(2.25)式的穩定性，先前所選取之向量 C 仍然適用，可是卻因為 S 的存在將無法讓所有的狀態變數趨近於 0，換句話說系統軌跡將不再逼近原點，而只在原點的附近遊動，這樣雖降低了控制的精準度，這也是利用順滑層概念所必須付出的代價，但這樣的代價是值得的，因為具備順滑層的控制器可以利用實際元件製作出來，並且只要順滑層的厚度夠寬，就不會激發出高頻雜訊或產生不希望之切跳現象，此外控制輸入由於使用了比率項 $\frac{s}{\varepsilon}$ ，其增益直也跟著降低。



2.2.2 非線性系統之可變結構控制器之設計

2.2.2.1 系統描述

我們先前已經介紹 VSC 的簡介以及簡單的設計，在此我們要介紹的是非線性系統的 VSC 控制器的設計。

考慮一非線性系統如下：

$$\dot{X} = f(t, X) + B(t, X)u(t) \tag{2.26}$$

狀態變數 $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ，控制輸入 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ， $f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ 且 $B(t, X) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，假設 $f(t, X)$ 及 $B(t, X)$ 為連續的，定義切換平面為

$$S(X) = (s_1(X) \cdots s_m(X))^T \tag{2.27}$$

控制律 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 由 $u_i(t)$ 所組成， $u_i(t)$ 的形式如下：

$$u_i(t, X) = \begin{cases} u_i^+(t, X), & \text{for } s_i(X) > 0 \\ u_i^-(t, X), & \text{for } s_i(X) < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

切換平面可能是線性或非線性的，但普遍來說大多是線性的，我們所選取的線性切換平面(switching surface)為

$$S(X) = \tilde{C} X(t) = 0 \quad (2.29)$$

\tilde{C} 為一 $m \times n$ 矩陣，為了證明順滑模態的存在，系統的狀態軌跡必須滿足以下的順滑條件

$$s_i \dot{s}_i < 0, \text{ for } i \leq m \quad (2.30)$$

使得鄰近切換平面，狀態向量的微分會直接朝向此平面靠近，在這 VSC 系統，狀態軌跡總是被強迫抵達切換平面，且停留在切換平面上。對於多變數系統而言，

順滑模態或許不會分別存在於 $s_i(X) = 0$ ，但只會在交集處如圖

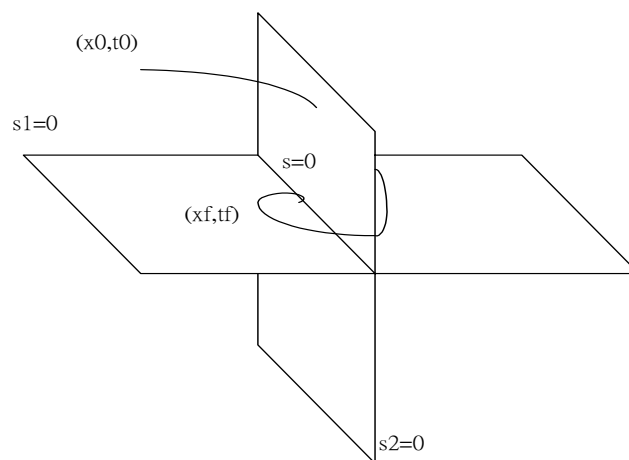


圖 2.3 順滑模態存在於兩順滑平面的交集

至於控制器的設計將於下一節探討。

2.2.2.2 可變結構控制器之設計

設計可變結構控制器與之前所提到的相同，可分為兩個部分，一為順滑模態另一則可視逼近條件。然而有許多方法可用來設計多變數非線性系統的 VSC 控制律，一種設計多輸入系統順滑控制律較直接的方法為等效控制(equivalent control)的方法。

等效控制的方法是一種將系統動態限制在切換平面 $S(X) = 0$ 的方法，假設在 t_0 ，系統的狀態軌跡，(2.26)式，到達切換平面並存在順滑模態，這也暗示了(i) $S(X) = 0$ ，(ii) $\dot{S}(X) = 0$ 對於 $t > t_0$ 。將(2.26)式代進 $\dot{S}(X) = 0$ 得到

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right) \dot{X} = \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right) [f(t, X) + B(t, X)u_{eq}] = 0 \quad (2.31)$$

在上式中， u_{eq} 稱為等效控制，假設矩陣乘積， $\frac{\partial S}{\partial X} B(t, X)$ ，對於所有的 t 及 X 為非奇異矩陣，可得到

$$u_{eq} = -\left[\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right) B(t, X)\right]^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right) f(t, X) \quad (2.32)$$

將在(2.32)式所得到的 u_{eq} 代入 (2.26) 式，系統的動態變成

$$\dot{X} = \left\{ I - B(t, X) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right) B(t, X) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial X} \right\} f(t, X) \quad (2.33)$$

對於一線性的切換平面 $S(X) = \tilde{C} X(t)$ 且 $\frac{\partial S}{\partial X} = \tilde{C}$ ，(2.33) 成為

$$\dot{X} = \left\{ I - B(t, X) \left[\tilde{C} B(t, X) \right]^{-1} \tilde{C} \right\} f(t, X) \quad (2.34)$$

(2.34)式說明了系統的行為被切換平面(switching surface)限制了，而(2.33)式有著 $S(X) = 0$ 的限制，決定了系統在切換平面上的動態。

控制器設計的另一個目標是維持著順滑條件，第一種對角化的方法是將控制律對角化，此方法為將原來的控制律藉由一非奇異矩陣的轉換，建構出一新的控制向量，(2.28)式說明了原來控制律 u 的每個組成單元。

定義利用非奇異矩陣轉換如下：

$$u^*(t) = Q^{-1}(t, X) \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X) u(t) \quad (2.35)$$

其中 $Q(t, X)$ 是一任意 $m \times m$ 對角矩陣，且由 $q_i(t, X)$ ($i = 1, \dots, m$) 所組成，使得 $f|q_i(t, X)| > 0$ 對於所有的 $t \geq 0$ 與所有的 X ，將(2.35)式代入(2.26)式

則動態方程式變成

$$\dot{X}(t) = f(t, X) + B(t, X) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X) \right]^{-1} Q(t, X) u^*(t) \quad (2.36)$$

且

$$\dot{S}(t) = \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) f(t, X) + Q(t, X) u^*(t) \quad (2.37)$$

為了滿足順滑條件，(2.30)式，其所組成的單元可選擇以滿足

$$\begin{aligned}
q_i(t, X)u_i^{*+} &< -\nabla s_i(X)f(t, X) \\
&= -\sum_{j=1}^n \tilde{C}_{ij} f_j(t, X), \quad \text{when } s_i(X) > 0
\end{aligned} \tag{2.38a}$$

$$\begin{aligned}
q_i(t, X)u_i^{*-} &< -\nabla s_i(X)f(t, X) \\
&= -\sum_{j=1}^n \tilde{C}_{ij} f_j(t, X), \quad \text{when } s_i(X) < 0
\end{aligned} \tag{2.38b}$$

其中 \tilde{C}_{ij} 是 $\nabla s_i(X)$ 的 j 個單元，且 $\nabla s_i(X)$ 是 $\frac{\partial S}{\partial X}$ 的 i 個列向量，在得到新的控制律 u^* 之後，實際上的控制律 u 為

$$u(t) = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X) \right]^{-1} Q(t, X) u^*(t) \tag{2.39}$$

第二種對角化的方法是利用一非奇異矩陣轉換將原來的切換平面轉換為新的切換平面，定義如下：

$$S^*(t, X) = \Omega(t, X)S(X) = 0 \tag{2.40}$$

選擇 $\Omega(t, X)$ 使得 $\Omega(t, X) \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X)$ 成為對角矩陣，例如：

$$Q(t, X) = \Omega(t, X) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X) \right] \tag{2.41}$$

$Q(t, X)$ 是由有界(bounded)的單元所組成的對角矩陣，然而

$$\begin{aligned}
\dot{S}^*(t, X) &= Q(t, X) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) B(t, X) \right]^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) f(t, X) \\
&\quad + Q(t, X)u + \dot{\Omega}(t, X)\Omega^{-1}(t, X)S^* \\
&\equiv \dot{S}(t, X) + Q(t, X)u + S_{\Omega}(t, X)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

順滑條件變成

$$s_i^* \dot{s}_i^* < 0 \quad (2.43)$$

直接選擇控制律 u ，其所組成的單元可選擇以滿足

$$q_i(t, X) u_i^+ < -\dot{s}_i(t, X) - s_{i\Omega}(t, X), \quad \text{for } s_i^* > 0 \quad (2.44a)$$

$$q_i(t, X) u_i^- < -\dot{s}_i(t, X) - s_{i\Omega}(t, X), \quad \text{for } s_i^* < 0 \quad (2.44b)$$

另一種不同於對角化的方法為層列式控制法，在此則不詳細描述。

前面所介紹的三種典型的 VSC 的設計方法，由於控制律對角化的方法較直接且容易，是廣被使用的方法

首先，假設 $Q = I, I \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 為一單位矩陣，然而，非奇異轉換矩陣為 $\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)B(t, X)$ ，(2.28)式可以為任意結構

$$u_i = u_{ieq} + \Delta u_i \quad (2.45)$$

u_{ieq} 為等效控制的第 i 個單元且為連續的， Δu_i 為不連續的部分或者是(2.28)式切換的部分，因此，新的控制律為

$$\begin{aligned} u^* &= \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)B(t, X)(u_{eq} + \Delta u) \\ &= u_{eq}^* + \Delta u^* \end{aligned} \quad (2.46)$$

並且(2.36)式變成

$$\dot{X}(t) = f(t, X) + B(t, X) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)B(t, X) \right]^{-1} (u_{eq}^* + \Delta u) \quad (2.47)$$

然而

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) f(t, X) + u_{eq}^* + \Delta u^* \\ &= \Delta u^*\end{aligned}\quad (2.48)$$

如果我們選擇 $\Delta u^* = (\tau_1 \operatorname{sgn}(s_1) \cdots \tau_m \operatorname{sgn}(s_m))^T, \tau_i < 0$ ，順滑條件為

$$s_i(X) \dot{s}_i(X) = \tau_i |s_i| < 0 \quad (2.49)$$

可滿足我們所需要的設計。

2.3 里奧波諾夫法(Lyapunov)



里奧波諾夫法是以 Lyapunov 原理為基礎，依能量收斂的觀點所提出的 VSC 設計技巧，在選擇順滑向量的方法中，可以簡單的設計出來。

為了利用 Lyapunov 原理，首先必須經由根值指定法先行求得狀態回饋矩陣 K 使得 $A - BK$ 的特徵值都在複數平面的左半平面上，在選定控制輸入為 $u = -Kx + v$ ，則系統 $\dot{x} = Ax + Bu + d(x, t)$ 可改寫成

$$\dot{x} = A_s x + Bv + Bd_m(x, t) + B_r d_r(x, t) \quad (2.50)$$

其中 $A_s = A - BK$ ，由於 A_s 的特徵值都在複數平面的左半面上，對於任意的對稱正定義矩陣(positive-definite matrix) Q 而言，必然唯一存在一個對稱的正定義矩陣 P 使得下面的關係式成立：

$$A_s^T P + PA_s = -Q \quad (2.51)$$

上式即所謂的 Lyapunov 方程式。當根據(2.51)式計算出 P 以後，為了分析系統的穩定性，通常選取底下之 Lyapunov 函數

$$V(x) = x^T P x \quad (2.52)$$

對時間作一次微分後，利用(2.51)及(2.52)兩式可以得到

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2x^T P B (v + d_m(x, t)) + 2x^T P B_r d_r(x, t) \quad (2.53)$$

觀察此式，如果非匹配式雜訊 $d_r(x, t)$ 不存在，則當 $B^T P x = 0$ 時，上式變成

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \leq 0 \quad (2.54)$$

且只有當 $x = 0$ 時， $\dot{V}(x) = 0$ 才成立，故 $V(x)$ 是一個 Lyapunov 函數，可以推得 $x(\infty) \rightarrow 0$ ，即系統是穩定的。因此 $d_r(x, t)$ 不存在的情況下，只要選取順滑向量為

$$s = Cx = B^T P x \quad (2.55)$$

一旦系統處在順滑模態 $s = Cx = B^T P x = 0$ 之下，則成為一個穩定的系統。根據上述的描述，這裡歸納出里奧波諾夫法的設計如下：

1. 利用根值指定法求得 $A_s = A - BK$ ，其特徵根史系統穩定。
2. 給定一對稱正定義矩陣 Q ，再由(2.51)式求得 P 。
3. 得到順滑向量 $s = Cx = B^T P x$ 。

此方法的優點是十分簡單，但是卻較難以規劃順滑模態下的系統軌跡。其次，若是非匹配式雜訊 $d_r(x, t)$ 存在，則在順滑模態下，(2.53)式變為

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2x^T P B d_r(x, t) \quad (2.56)$$

為了減抑非匹配式雜訊，可以使用[13, 14]的方法

$$\min \frac{\|PB_r\|}{\|P\|} \quad (2.57)$$

此式中的矩陣 P 是決定自根值指定法所得的 K 和 Lyapunov 方程式中給定的 Q ，因此在選擇 K 和 Q 時，除了應該考量系統軌跡的要求外，還要考量減仰非匹配式雜訊的影響。

事實上，里奧波諾夫法可以不需要利用 Lyapunov 方程式，而改採 A_s 的左特徵向量，其方法略述如下：

首先經由根值指定法求得狀態迴授矩陣 K 使得 $A_s = A - BK$ 的 n 個特徵值 λ_1 、...、 λ_n 都在複數平面的左半面上且都不相同，可得

$$v_i A_s = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.58)$$

其中 $v_i \in R^{1 \times n}$ 為相對於 λ_i 的左特徵向量，是一個列向量，此式可以進一步寫成

$$VA_s = \Lambda V \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.59)$$

其中

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由於 V 包括所有的左特徵向量，所以是非奇異的，因此選擇一個新的系統狀態如下：

$$y = Vx \quad (2.60)$$

並且選擇 Lyapunov 函數為

$$V(y) = y^T y \quad (2.61)$$

則對時間為分後，利用(2.50)及(2.59)兩式得到

$$\dot{V}(y) = y^T \Lambda y + 2y^T VB(v + d_m(x, t)) + 2y^T VB_r d_r(x, t) \quad (2.62)$$

遵照原來(2.53)式的分析方式，這裡選擇順滑向量為

$$s = B^T V^T y = B^T V^T Vx \quad (2.63)$$

則當非匹配式雜訊 $d_r(x, t)$ 不存在時，在順滑模式下 $s = B^T V^T y = 0$ ，(2.62)

式化為

$$\dot{V}(y) = y^T \Lambda y \leq 0 \quad (2.64)$$

且只有當 $y = 0$ 時， $\dot{V}(y) = 0$ 才成立，故 $V(y)$ 是一個 Lyapunov 函數，因此 $y(\infty) = Vx(\infty) \rightarrow 0$ ，也就是說 $x(\infty) \rightarrow 0$ ，系統是穩定的。其次，若是存在非匹配式雜訊 $d_r(x, t)$ ，則(2.62)式變為

$$\dot{V}(y) = y^T \Lambda y + 2y^T VB_r d_r(x, t) \quad (2.65)$$

同樣地，可以依據(2.57)式的準則來減仰非匹配式雜訊，只是此時 P 換成 V ，

表示式如下：

$$\min \frac{\|PB_r\|}{\|P\|} \quad (2.66)$$

此式中的矩陣 V 是決定自根值指定法所得的 K ，因此在選擇時，除了考量系統軌跡的要求外，還要兼顧到減仰非匹配式雜訊的影響。

CHAPTER 3

切換式轉換器系統

在本節中我們將介紹切換式轉換器。第一小節介紹切換式轉換器整在電力電子整體的架構；第二小節介紹固定切換時間之切換式轉換器，第三小節將介紹非固定切換時間之切換式轉換器；其中包括了穩定模組與非穩定模組之切換式轉換器；最後一小節將討論目前對於切換式轉換器之研究的進展與方向，以及一些可以再進一步去討論的地方。



3.1 切換式轉換器系統介紹與發展

3.1.1 系統描述

一般的電源供電方式，大多數是由交流輸入電壓經由變壓器升降成我們所希望的電壓範圍，再經過整流、濾波與穩壓電路而轉換成直流電壓。在此我們不討論整流之前的電路架構，單純的針對整流後的電路稱之為直流對直流轉換器。直流對直流轉換器廣泛的被應用於調整型(regulated)之切換式直流供應器以及直流馬達驅動器。典型的直流至直流轉換器系統之構造如圖 3.1 所示，其輸入通常

為由線電壓整流而得之非調整性的直流電壓，然後再利用切換式 DC/DC 轉換器將此變動之直流電壓轉換成一調整之直流電壓。

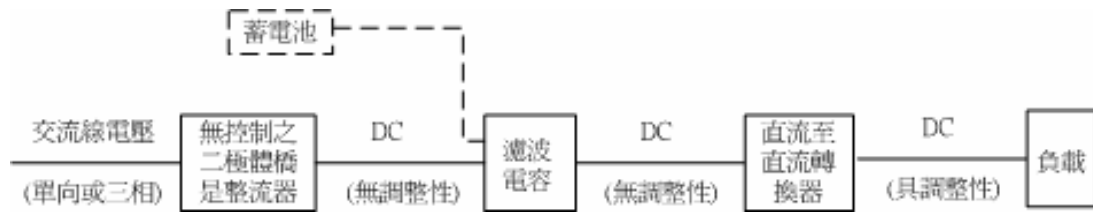


圖 3.1 直流至直流轉換器系統

3.1.2 線性電源轉換器簡介

直流對直流轉換器可以簡單區分為線性電源與切換式電源轉換器。線性電源轉換器是傳統電源轉換器的設計方式，由於功率開關工作於主動區(active region)故取其名，優點是電路架構簡單，如圖 3.2 所示為線性電源轉換器的方塊圖與整流後的電壓範圍。

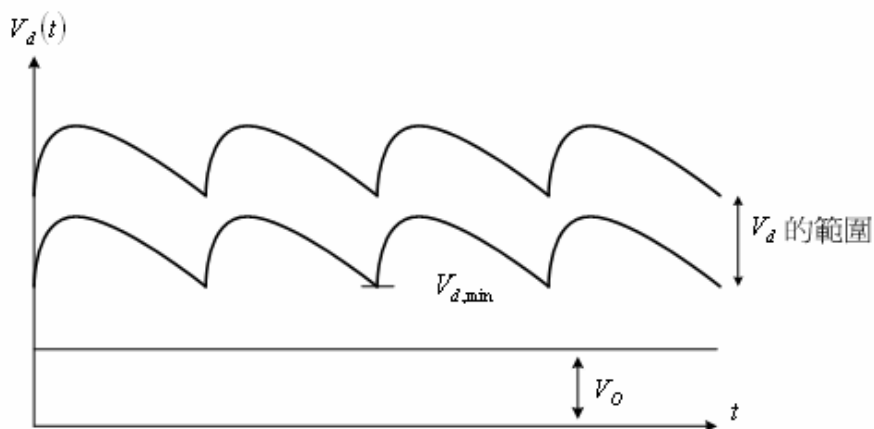
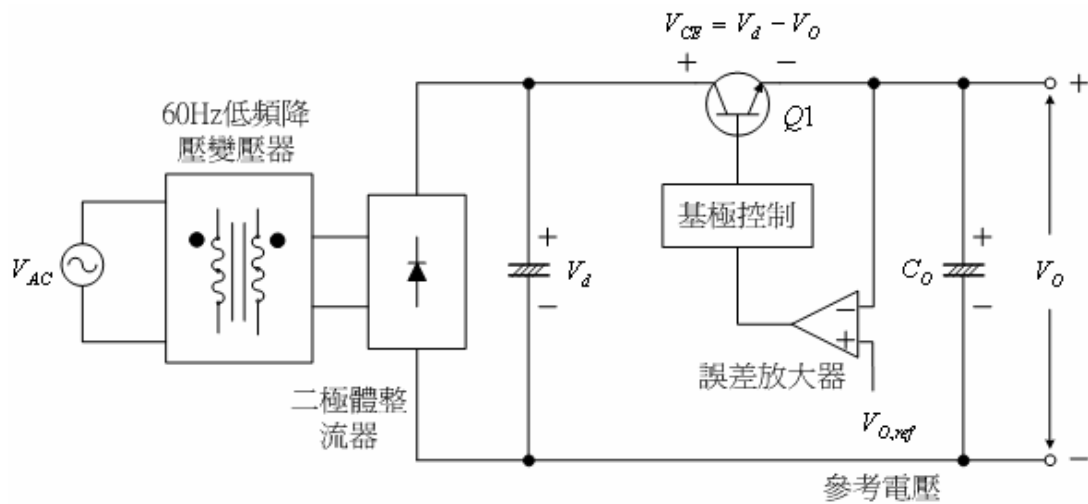


圖 3.2 線性電源轉換器的方塊圖與整流後的電壓範圍

輸出電壓 V_o 的調整是藉由參考電壓 $V_{o,ref}$ 與輸出電壓的誤差來調整功率開關的基極電流，使得輸出電壓 ($V_o = V_d - V_{CE}$) 等於 $V_{o,ref}$ ，此時功率開關工作於主動區，其集射極上存在一個電壓值，同時集極電流流經負載，功率開關的動作就如同可變電阻一樣，用來吸收整流後的濾波電壓 V_d 與輸出電壓 V_o 之間的電壓差 ($V_{CE} = V_d - V_o$)，交流電源電壓經過整流與濾波而得的電壓值 V_d 是一個變動的範圍值，因此，輸出端的低頻變壓器其匝數的選擇必須使得輸出電壓 V_o 低於濾波電壓的最小值 $V_{d,min}$ 。所以，線性電源轉換器的功率消耗很大，整個系統需要很大的散熱片，導致效率無法提升，而低頻變壓器的體積與重量與線性電源轉換器的輸出功率成正比，當輸出功率越大，變壓器與電感所需的體積與重量會更加龐大。一般要求整流後的電壓濾波比較小時，而輸出濾波電容器的電容量與

體積也相對增大。

3.1.3 切換式電源轉換器簡介

由 3.1.2 小節介紹的線性電源轉換器得之其運作方式與優缺點，因而在電力電子運用上，提出了另一套可以取代線性電源轉換器的方法，也就是切換式電源轉換器。

切換式電源轉換器之控制切換模式可區分為固定切換時間與非固定切換時間兩種，在簡介中以固定切換時間之切換式電源轉換器為架構，如圖 3.3 所示來作探討。其輸出端通常是由市電交流電壓整流而得之無調整性的直流電壓，再經由直流對直流轉換器將此固定的直流輸出電壓轉換成一個可以控制的直流輸出電壓。電路中使用功率開關如 BJT、MOSFET 或 IGBT 作為切換元件，例用功率開關導通或截止的切換動作，將輸入的直流高壓切割成高頻方波的訊號，再經由輸出端的低通濾波器濾除高頻訊號，而得到所需的直流輸出電壓。輸出電壓與輸入電壓的關係由工作週期(duty cycle)來決定，將輸出電壓回售予設定電壓作比較來控制功率元件的工作週期。因此控制器必須藉由調整工作周期的大小來穩定所需的輸出電壓。

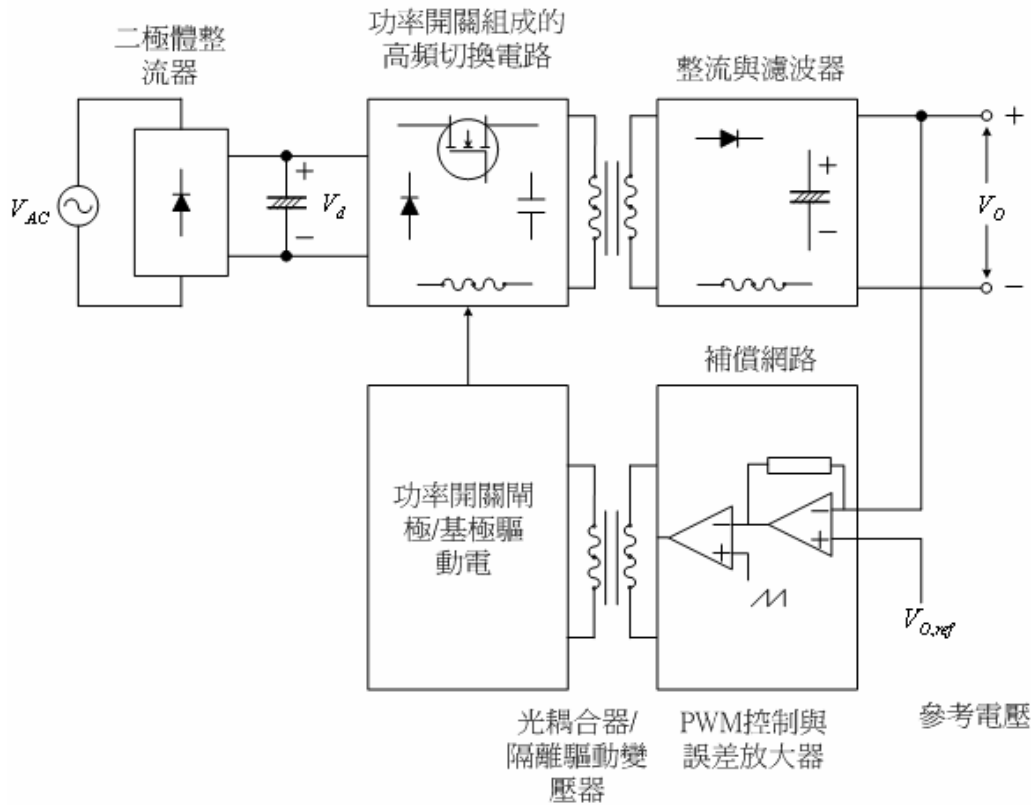


圖 3.3 切換式電源轉換器的方塊圖

線性電源轉換器的功率開關工作於主動區，其集射極上存在一個電壓值，也就是說，功率開關會擋下一個不小的電壓。切換式電源轉換器的功率開關是處理能量而不是訊號，主要工作在飽和區(saturation region)與截止區(cut-off region)，而避免停留在主動區。也就是說，功率開關經過主動區實為進行切換瞬間，這是為了減少電力轉換時的功率損失。當功率開關導通時，集極電流流過功率開關，集射極兩端僅有很小的電壓降。當功率開關截止時，集射極兩端存在一個固定的電壓差，也就是功率開關本身所消耗的功率非常小，所以切換式電源轉換器具有較高的能源轉換效率。

電源轉換器是各種儀器設備與應用產品中所必須的動力來源，為了符合現代產品輕薄短小、優柔效省的需求，現實的方法就是採用切換式電源轉換器的設計方式，藉由提高切換頻率來減少占有絕大多數體積與重量的變壓器與電感。切換式電源轉換器一般工作在 20KHz 到 100KHz 之間，若配合零電壓切換(zero voltage switching)與零電流切換(zero current switching)的技術，工作頻率

可達 200MHz 以上，可有效地提高系統的功率密度。

3.2 固定時間切換式轉換器系統

3.2.1 脈波寬度調變法

固定時間切換式轉換器系統為切換式轉換器中最典型的調整方法，亦可說是脈波寬度調變法(pulse-width modulation, PWM)，其切換周期 $T_s(t_{on} + t_{off})$ (亦稱為工作週期 D)為固定，由調整 t_{on} 之大小來改變之大小。目前電力電子方面最基本與最常使用到的切換式轉換器系統為降壓式轉換器(buck switch converter)、升壓式轉換器(boost switch converter)、升降壓式轉換器(buck-boost switch converter)等幾個基本的切換式轉換器，以及針對某些特性改善而形成之切換式轉換器，如[29, 30]等等。

3.2.2 升壓式轉換器系統

以一個基本的升壓轉換器(boost converter)，適當的選取相關的電晶體、二極體、電容、電感、電阻等零件，以及決定好輸入電壓與量測位節點後，我們可以使用 Ispice 建構出升壓轉換器如圖 3.4 所示：

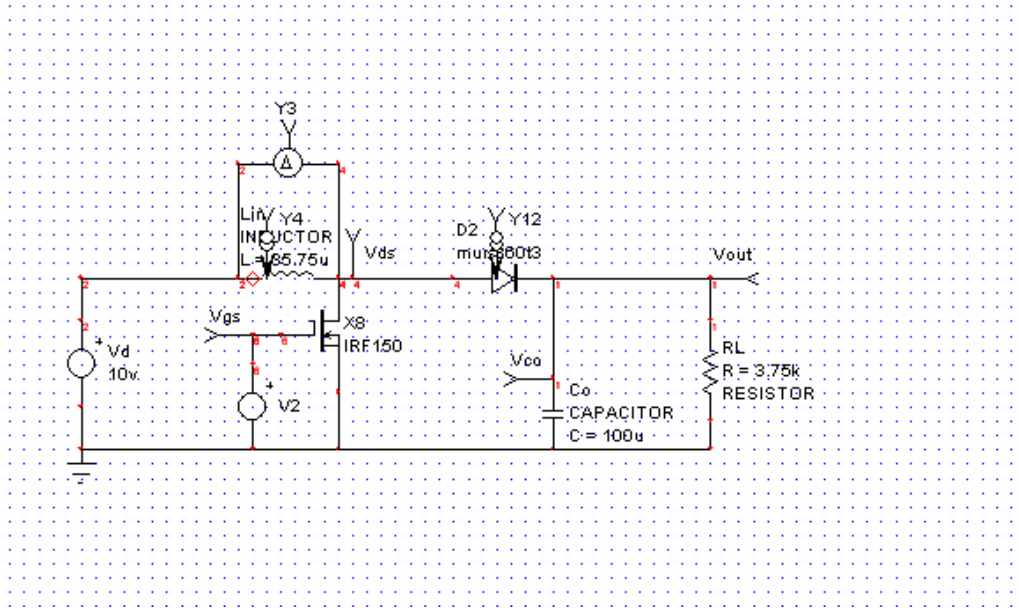
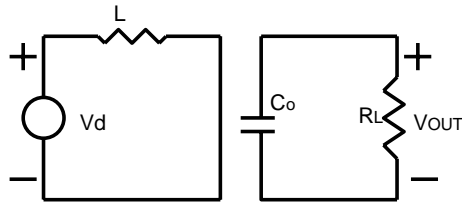


圖 3.4 升壓轉換器(boost converter)

藉由自行選取的 CMOS 電晶體 IRF1502 的 on、off 切換來產生兩電路，如圖 3.5 之(一)、(二)所示。

(一) Model1 : MOS ON



(二) Model2 : MOS OFF

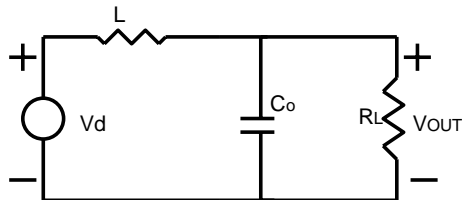


圖 3.5 升壓轉換器之模組

在實際電路上，整體線路之電感與電容通常會參雜數值極小之組抗(不為純電感或電容)，因此重新修改圖 3.4 之升壓轉換器為下圖 3.6。接下來以此升壓

轉換器，利用 KCL 與 KVL 的特性不難推出模組 1(model1)之數學公式(3.1)與模組 2(model2)之數學公式(3.2)，在公式(3.1)與(3.2)中我們令變數 X_1 為電感 L 之電流，變數 X_2 為電容 C_0 之電壓。

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{R_{in}}{L_{in}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(R_L + R_C)C} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L_{in} \\ 0 \end{pmatrix} V_g \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} R_{in} + R_C \frac{R_L}{(R_C + R_L)} & -\frac{R_L}{L_{in}(R_L + R_C)} \\ \frac{L_{in}}{R_L} & -\frac{1}{(R_L + R_C)C} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L_{in} \\ 0 \end{pmatrix} V_g \quad (3.2)$$

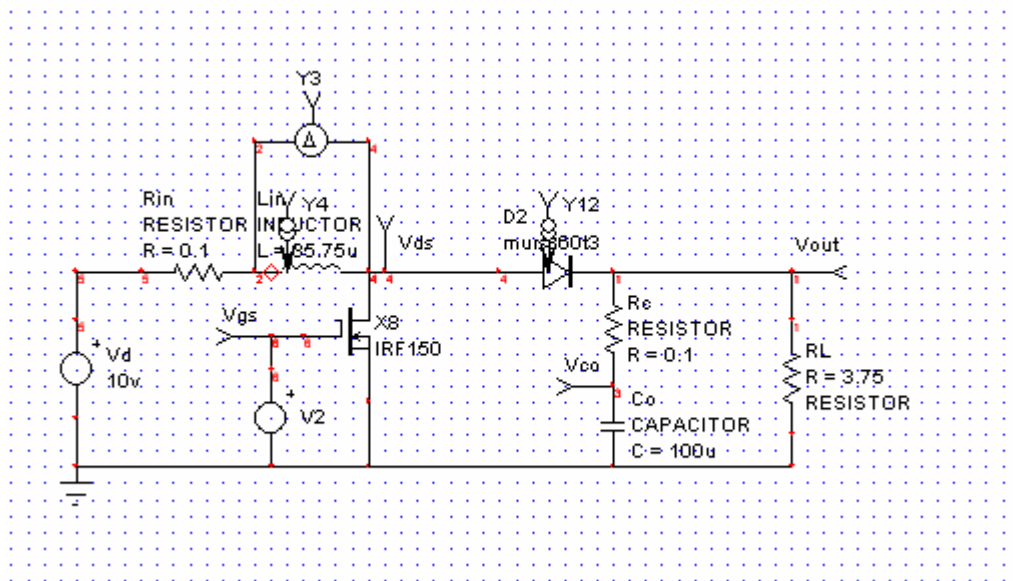


圖 3.6 修改圖 3.4 之升壓式轉換器

在固定時間切換式轉換器系統中，亦即是脈波寬度調變法中，當整個元件與參數設定好後，決定最後輸出電壓與電流還有個最重要的值-工作週期(Duty ratio)需要決定。其定義為：功率開關導通的時間佔整個切換周期的比率稱為工作週期 D ，工作週期越大表示儲能時間越長，且 $0 < D < 1$ 。在 Ispice 中取圖 3.6 之模組，且取 $D = 0.35$ 跑出之電感 L 之電流 X_1 直與電容 C_0 之電壓 X_2 對時間的

關係如圖 3.7。

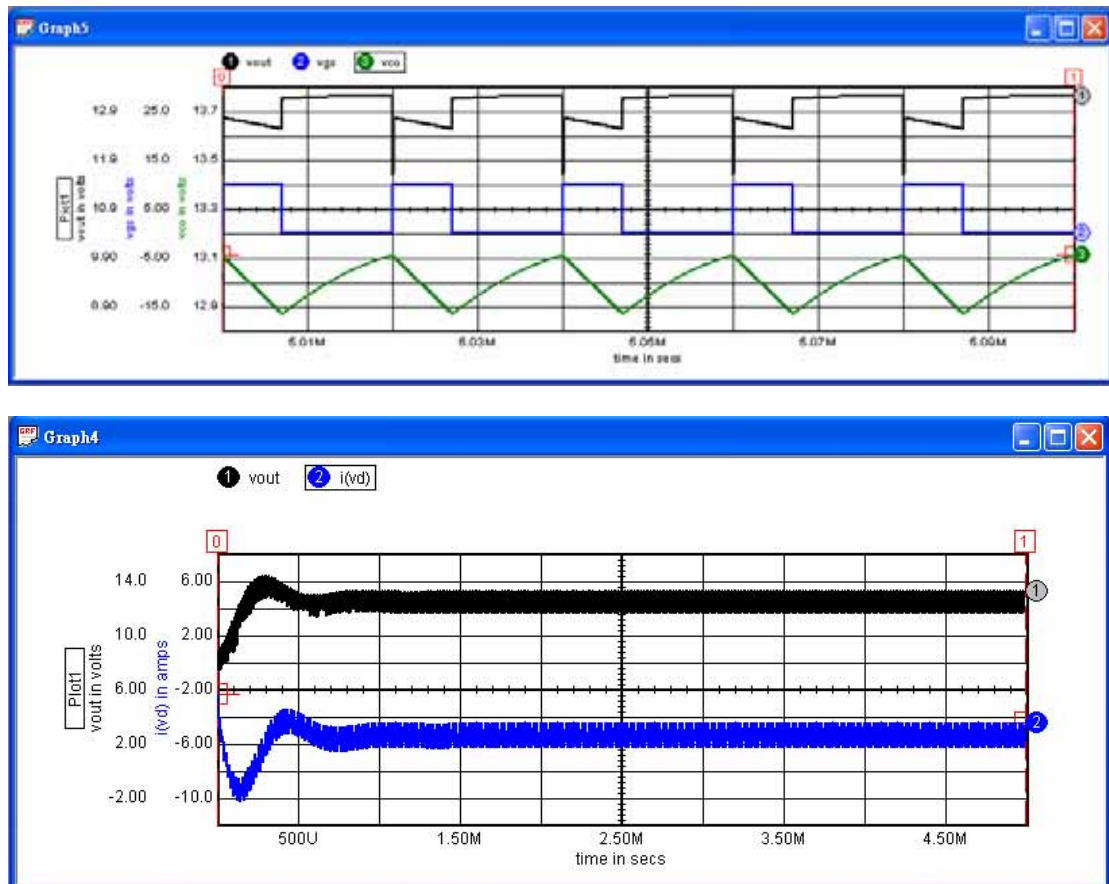


圖 3.7 用 Ispice 模擬圖 3.6 之升壓式轉換器之輸出波形

3.2.3 平均方程式與相關切換式轉換器

接下來要提到固定切換式轉換器的研究中，一個很重要的理論，在 R. D. Middlebrook 與 Slobodan Cuk 所寫之論文[16, 17]中提出一個平均方程式 (average equation) 的理論。當輸入電壓 V_g 、工作週期 D 、與我們所希望達到控制之變數 X 的不確定變動量 \hat{v}_g 、 \hat{d} 、 \hat{x} 極小時，可以如下表示：

$$\frac{\hat{v}_g}{V_g} \ll 1, \quad \frac{\hat{d}}{D} \ll 1, \quad \frac{\hat{x}}{X} \ll 1 \quad (3.3)$$

當整個切換式系統符合公式(3.3)之條件時，再經由決定工作週期 D 之值，我們可以推出一個平均方程式(average equation)：

$$\dot{X} = A_{eq} X + BV_g \quad (3.4)$$

其平均方程式所推導出之變數 X 值會相近於實際因電晶體切換而產生的兩個模組的變數 X 值。因此在決定好工作週期 D 後，由公式(3.1)與(3.2)可以推出平均方程式如下：

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_{in} + (1-D)\frac{R_C R_L}{(R_C + R_L)}}{\frac{L_{in}}{(1-D)R_L}} & -\frac{(1-D)R_L}{L_{in}(R_L + R_C)} \\ \frac{(1-D)R_L}{(R_L + R_C)C} & -\frac{1}{(R_L + R_C)C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L_{in} \\ 0 \end{pmatrix} V_g \quad (3.5)$$

其相關的證明與推導可以參考論文[16, 17]，裡面有詳細之論述。

另外還有許多各種不同的固定切換式轉換器系統，種類繁多不及備載，所以在此只稍微概述一下，在[29, 30]中屬於其中的一些運用與例子，其方法是在改良切，換式系統以及工作週期 D 以達到改進一些像是因開關切換而在電容或是電感產生之電流與電壓的漣波(ripple)等等的研究。

3.3 非固定時間切換轉換器系統

3.3.1 非固定時間切換轉換器系統簡介

非固定時間切換式轉換系統有別於固定時間切換式轉換系統，最主要的差別是在於，固定時間切換式轉換系統的電晶體 on、off 的切換時機固定，也就是所謂的工作週期 D 。而非固定時間切換式轉換系統會隨著輸出變數 X 的變化，再經由迴授來控制電晶體 on、off 的切換時機，而仍然可以達到穩定的輸出變數 X ，亦即是切換式轉換器系統之 DC-DC 穩定電壓與電流的功能。而在迴授控制的選取上，目前已經有許多的相關研究與論文在探討，在此先約略細分如下：使用線性二次項調(Linear Quadratic regulator，簡稱 LQR)作為迴授控制的方

法，在[6, 7]中屬於其中的一些運用與例子。使用可變結構控制(Variable Structure control，簡稱 VSC)法或是共同里奧波諾夫函數(Common Lyapunov Function，簡稱 CLF)作為迴授控制的方法，在[2, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 18, 20, 23, 19]中皆是屬其中的一些運用例子與相關研究證明。

3.3.2 使用里奧波諾夫分析方式建構非穩定狀態系統之切換律(一)

在論文[14]中描述一對切換式線性系統穩定性問題，藉由一片段連續可微的里奧波諾夫分析方式可以發展出其切換律。其模組為一對個別不穩定的線性切換系統 $\{A_i, i=1,2\}$ ，亦即是說每個 A_i 最少都會有一個以上的正特徵值 (eigenvalue)，一般常見的切換式轉換器系統之模組公式我們可以令為

$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ ，而 $u(t)$ 在此模組公式代表輸入電壓 V_g 而且假設為定值。所

以因為不失一般性，在論文[14]中可以進一步令 $V_g = 0$ ，因此可以把模組公式重新改寫如下：



$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \text{ for } i = 1,2 \quad (3.6)$$

此論文[14]中最主要的貢獻有三，第一個是建構出個別不穩定的線性切換系統 $\{A_i, i=1,2\}$ 的平均系統(average system)方程式：

$$A_{eq}(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 \quad (3.7)$$

且使此平均系統(average system)方程式 A_{eq} 為穩定矩陣(stability matrix)，則可以透過適當的選取切換時機來用里奧波諾夫控制法來建構出穩定的切換律。另外，第二個主要的貢獻是如何選取切換時機的判斷方法(switch rule)。最後一個主要貢獻是提出一個可變結構控制(VSC)的改善方法(可參見附錄 3. A 公式(3.9))來減少一般使用 VSC 控制時，發生” pass through” 的現象。

在此我們必須要釐清幾個問題：第一個是如何選取平均系統(average

system) 方程式 A_{eq} ；第二個是如何決定切換時機的判斷方法 (switching rule)；最後是需要證明使用此方法讓此系統可以達到穩定控制與介紹 VSC 的改善方法。最後的證明與 VSC 的改善方法相同於第二個問題，因此放入到第二個問題中。

3.3.2.1 如何選取平均系統 (average system) 方程式

在公式 (3.7) 中，給定 $\beta = (1 - \alpha) / \alpha > 0$ ，則此式可改寫如下：

$$A_{eq}(\alpha) / \alpha = A_1 + \beta A_2 \quad (3.8)$$

而 β 之範圍為 $0 < \beta < \infty$ ，因此如何確保平均系統 (average system) 方程式 A_{eq} 是穩定的以及找出 β 之範圍是這一小節主要的內容。在論文 [14] 中有提出一個找 A_{eq} 的方法，但是除了此法之外，其他論文 ([20]) 中普遍提到使用羅斯-赫維茲穩定準則 (Routh-Hurwitz Stability Criterion) 來檢定矩陣方程式是否穩定則是常見的方式，在第五章節的例子中，我們將會使用羅斯-赫維茲穩定準則來做判斷方式，而且羅斯-赫維茲穩定準則已經是一個非常備受肯定之求穩定解的方式。

因此我們比較使用論文 [14] 中所舉出的兩個例子 (Example 5.1. 和 5.2.) 之解 A_{eq} 與找 β 之範圍的方法，與使用羅斯-赫維茲穩定準則計算此兩例子來比較，使用電腦與 Matlab 輔助羅斯-赫維茲穩定準則計算出來的結果，實際算法可參見第五章 Example 5.1. 的步驟 1，Example 5.1. 的 β 值落在 $0.3 < \beta < 1.75$ ；而 Example 5.2. 之 β 值落在 $1.735 < \beta < 4.165$ ，與論文 [14] 中之解 A_{eq} 與找 β 之範圍的方法所求出之值相同 (註：論文 [14] 中 Example 5.2. 之 β 有筆誤，其 β 值範圍與 α 完全相同，依照 A_{eq} 之選取，其 α 不變，而 β 應該改為 $1.735 < \beta < 4.163$)。

3.3.2.2 如何建構切換時機

另一個主要的問題是如何建構切換時機，也就是切換法則 (switch rule) 的

問題，在論文[14]中(4.3)式提出一個可變結構的線性切換平面(switching surfaces)選取的方法：

$$\begin{aligned} s_1(x) &= x^T (Q_1 - \varepsilon Q_2)x \\ s_2(x) &= x^T (Q_2 - \varepsilon Q_1)x \end{aligned} \quad (3.9)$$

而 ε 為任何可以滿足 $0 < \varepsilon < 1$ 的值。且決定 $Q_i = -(A_i^T P_{eq} + P_{eq} A_i)$ ，再比照在 [14] 中 Proposition 4.1. 所定義的 $\Omega_i^+ = \{x: x^T Q_i x > 0\}$ 與 $\Omega_i^0 = \{x: x^T Q_i x = 0\}$ ，因此定出的切換法則(switch rule)如下：

(i) 當時間在一開始，也就是初始值 t_0 的時間在動態系統 A_{i_0} 且使

$x(t_0) \in \Omega_{i_0}^+$ 時，需要切換到另一系統 A_j ，且使 $j \neq i$

(ii) 當 $s_1(x) \leq 0$ ， $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$ ，而此時系統在 A_1 ，切換到系統 A_2

(iii) 當 $s_2(x) \leq 0$ ， $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$ ，而此時系統在 A_2 ，切換到系統 A_1

由於之後我們還會用到此切換法則(switch rule)來處理一些不穩定系統間的切換律，因此我們有必要把論文[14]所述做一個整理，此部分放在本章節最後的附錄 3.A。

除此之外，必須要保證切換選取的時機不會使系統發散，否則系統在錯誤的切換運作之下，一定無法保證其最後會收斂。然而很明顯的，除了一開始的初始值 t_0 的動態系統 A_{i_0} 有可能會發散外，接下來跳到(ii)與(iii)皆會使系統收斂，因此一定可以保證其穩定。

3.3.3 使用里奧波諾夫建構非穩定切換式系統(二)

在論文[20]中提出另外一個使用里奧波諾夫建構 VSC 切換系統的相關文章，

此篇主要是在討論：只要控制里奧波諾夫函數(control Lyapunov function，簡稱 CLF)存在，則系統一定可控制到達穩定。也就是說對於系統 $\{A_i, i=1,2\}$ ，只要找的到某一不穩定切換系統的共通 CLF 的 P 解，則可以確定此系統可以達到穩定控制。

另外兩篇相關的論文([10, 18])，皆是使用共同里奧波諾夫函數(Common Lyapunov Function，簡稱 CLF)作為迴授控制的方法，但是其先決條件是，對於每一個建構的系統矩陣 $\{A_i, i=1, \dots, n\}$ 是需要穩定的，也就是說 A_1, A_2, \dots, A_n 皆是穩定的矩陣。論文[10]中提出一個方法，來去找兩個變換(commute)且穩定的矩陣 $\{A_i, i=1,2\}$ 的共同里奧波諾夫函數(Common Lyapunov Function)解來達到穩定控制。論文[18]中舉出，當不滿足變換(commute)的兩個穩定矩陣 $\{A_i, i=1,2\}$ ，在其所述的判斷成立時，將會存在共同里奧波諾夫函數(Common Lyapunov Function)解來達到穩定控制。



3.4 討論

在第三節所提及之相關研究中發現，在不穩定狀態系統下，仍然有可能利用里奧波諾夫分析方法找出切換律的演算法則，使此不穩定系統藉由切換達到穩定的目的。這部分在[14, 20]皆有很顯著的研究成果，並且[14]中也提出一個非穩定系統的穩定切換律是否可用里奧波諾夫分析方法建構出來的判斷方法。

然而就目前相關於使不穩定系統可以藉由里奧波諾夫分析方式建構切換律達到穩定的研究結果而言，仍然還有許多需要加以探討與研究的地方，比如簡化一些對於是否存在穩定切換律的判斷方法或是建立其他不同的判斷方法等等。再者，為了使其達到更寬廣有效的應用，將需要討論到利用里奧波諾夫分析方式建構穩定切換律存在的充分條件，而這個部分也是本論文主要的研究方向。



附錄 3.A

此附錄主要是要整理論文[14]中所提到的公式(3.6)的 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ 的切換式系統之切換律(switch rule)建構法則。

如果一不穩定系統間的切換條件符合論文[14]所述之要求，則可使用下列設計法則來判斷與設計出穩定控制：

步驟 1： 決定是否存在 $\beta \in (0, \infty)$ 使得 $A_{eq} = A_1 + \beta A_2$ 且 A_{eq} 為一個穩定矩陣：

我們可以由羅斯-赫維茲穩定準則(Routh-Hurwitz Stability Criterion)來檢定矩陣方程式是否穩，或者是由論文[14]中所述之方法來做檢定。

如果使 A_{eq} 為一個穩定矩陣的 β 存在，則接下來到步驟 2，否則我們將無法使用里奧波諾夫分析方法建構出可變結構控制(VSC)的切換律。

步驟 2： 選定 β 值使得 A_{eq} 為一個穩定矩陣，再由里奧波諾夫法解出方程式(2.51)中 $A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$ 的 P 值，而 Q 值必須為 r. s. p. d，我們通常選定 Q 值為單位矩陣(identity matrix)。

步驟 3： 定義 $Q_i = -(A_i^T P + P A_i)$ ，且 $i = 1, 2$ 。選定一 ε 使得 $0 < \varepsilon < 1$ ，定義出：

$$\begin{cases} S_1(x) = x^T (Q_1 - \varepsilon Q_2) x \\ S_2(x) = x^T (Q_2 - \varepsilon Q_1) x \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \Omega_i^+(x) = \{x : x^T Q_i x > 0\} \\ \Omega_i^0(x) = \{x : x^T Q_i x = 0\} \end{cases}, \text{ 且 } i = 1, 2 \quad (3.10)$$

步驟 4： 穩定的切換律之切換時機可以建構如下：

- (i) (初始狀態下)在一開始 t_0 時，動態系統選擇 A_{i_0} 使得 $x(t_0) \in \Omega_{i_0}^+$
- (ii) 如果 $S_1(x) \leq 0$ ， $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$ ，而且動態在系統 A_1 時，則切換到系統 A_2
- (iii) 如果 $S_2(x) \leq 0$ ， $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$ ，而且動態在系統 A_2 時，則切換到系統 A_1



CHAPTER 4

兩個不穩定系統間穩定切換律之設計研究



兩個穩定系統間的切換，也有可能造成不穩定，在[4, 12]中有很完整的整理與討論到此問題，我們把[12]中的 Fig. 2. 表示為圖 4.1：

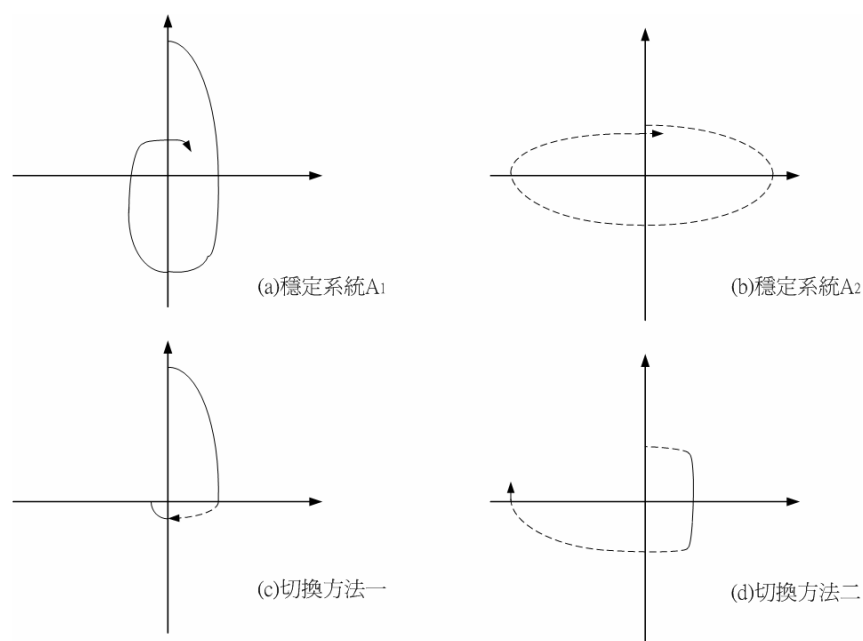


圖 4.1 穩定系統 A_1 、 A_2 有可能因切換方法不同而產生不同的根軌跡

雖然圖 4.1 的 A_1 、 A_2 皆為穩定系統，但我們可以很明顯的看出，圖 4.1(c) 所示的切換方法一將會使系統穩定；圖 4.1(d) 所示的切換方法二將會使系統發散。

因此許多文獻都在探討這些相關穩定系統間的切換法則，然而兩個不穩定系統間的切換，亦有可能會造成穩定，如 [8], [9] 所述，皆是兩個不穩定系統藉由適當的切換，來達到系統的穩定。

- 本章將強調兩個不穩定系統穩定切換律之存在性及設計問題
- 本章結構：
 - 4.1 節：列出在第四章中所要探討的問題與關之基本公式
 - 4.2 節：針對在二階不穩定系統
 - 4.3 節：針對在 n 階不穩定系統
 - 4.4 節：加入控制律 $u(x)$ 的情況下
 - 4.5 節：討論

4.1 問題描述

考慮公式(3.6)所述的兩個線性系統：

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \text{ 且 } i = 1, 2 \quad (3.6)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ，且我們假設 A_1 及 A_2 皆為不穩定矩陣。

本章將針對此兩不穩定系統研究是否可使用里奧波諾夫函數建構穩定之切換律，並將此切換律具體實現，也就希望達成 $x(t) \rightarrow 0$ 之目的。

首先，在 [8] 中提出一個具有可用里奧波諾夫函數建構穩定切換律之充分條件：

$$(C1) \exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (4.1)$$

同時也提出如何去實現此切換律具體可行的方法。

此外，若存在 $P = P^T > 0$ 使得：

$$(C3) \exists P > 0 \text{ 使得 } \bigcup_{i=1,2} \{x \mid x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (4.2)$$

則很容易證明經由是當的切換可使 $\dot{V} < 0$ ，其中 $V = X^T P X$ ，也就是說

可達成 $x(t) \rightarrow 0$ 之目的。因此，條件(C3)也是存在利用里奧波諾夫函數建構穩定切換律的一個充分條件。

本章將證明此兩個條件其實是對等的，並將此條件用在 4.4 節，推廣到兩個不可穩定化之線性控制系統的控制律及穩定切換律之對照上。條件(C1)及(C3)之差別在於：

- 當條件(C1)之 $A_1 + \beta A_2$ 為赫維茲矩陣則一定存在使之穩定的切換律，但我們無法得知當 $A_1 + \beta A_2$ 不為赫維茲矩陣時，仍否存在使之穩定的切換律。

- 當條件(C3) 之 $\bigcup_{i=1,2} \{x \mid x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 成立時，一定存在使之穩定的切換律，然而我們並不能保證一定找到 $P > 0$ ；甚至說，當我們找不到此大於零之 P ，亦不能保證此 P 不存在。

除了此兩個條件之外，我們也將提出條件(C2)：

$$(C2) \quad \exists \beta > 0, P > 0 \text{ 使得 } L_1 + \beta L_2 < 0, \text{ 當 } L_i := A_i^T P + P A_i, i = 1, 2 \quad (4.3)$$

本章節之最終目的將要證明此三條件互為對等： $(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)$ 。

4.2 二階不穩定狀態系統

首先，我們先找出(C1)、(C2)兩個條件的相互關係，其討論如下：

輔助定理 1： 條件(C1)、(C2)為等效的。

證明： 詳見附錄 4.B

接下來，我們要證明條件(C1) \Rightarrow 條件(C3)

輔助定理 2： 條件(C1) \Rightarrow 條件(C3)

證明： 詳見附錄 4.B

由輔助定理 1、2，我們已知條件(C1) \Leftrightarrow (C2)以及條件(C1) \Rightarrow (C3)成立，接下來只要找出條件(C3) \Rightarrow (C1)或是(C3) \Rightarrow (C2)的條件成立，即可證明出整個關係式如下：(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)。所以本節之後的部分都將目標放在證明條件(C3) \Rightarrow (C2)。

在證明條件(C3) \Rightarrow (C2)之前，為了證明上的需要，我們必須先把前面所述之公式先加以整理歸納，因此我們定義：

$$L_i := A_i^T P + P A_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.4)$$

假設 x_1^+ 和 x_1^- 為兩個對應於 L_1 的正特徵值 λ_1^+ 與負特徵值 λ_1^- 的單位特徵向量；

同樣的 x_2^+ 和 x_2^- 為兩個對應於 L_2 的正特徵值 λ_2^+ 與負特徵值 λ_2^- 的單位特徵向量。

接下來我們可將 L_1 與 L_2 表示成 $L_1 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_1^- \end{pmatrix} P^T$ 、 $L_2 = Q \begin{pmatrix} \lambda_2^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{pmatrix} Q^T$

其中 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta_{L1} & -\sin \theta_{L1} \\ \sin \theta_{L1} & \cos \theta_{L1} \end{pmatrix}$ 、 $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta_{L2} & -\sin \theta_{L2} \\ \sin \theta_{L2} & \cos \theta_{L2} \end{pmatrix}$

$x_1^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_{L1} \\ \sin \theta_{L1} \end{pmatrix}$ 、 $x_1^- = \begin{pmatrix} -\sin \theta_{L1} \\ \cos \theta_{L1} \end{pmatrix}$

$x_2^+ = \begin{pmatrix} \cos \theta_{L2} \\ \sin \theta_{L2} \end{pmatrix}$ 、 $x_2^- = \begin{pmatrix} -\sin \theta_{L2} \\ \cos \theta_{L2} \end{pmatrix}$

最後我們選擇 $(x_1^+)^T x_2^+ \geq 0$

想要證明條件(C3) \Rightarrow (C2)成立，一個最直覺的方法就是先從探討條件(C3)

特性下手，再以此特性來求證，因此我們定義出以下定理：

輔助定理 3：條件(C3)唯有在下列三個狀況(i)、(ii)、(iii)成立時才會成立：

$$(i) \quad (x_1^+)^T L_2 x_1^+ < 0$$

$$(ii) \quad (x_2^+)^T L_1 x_2^+ < 0$$

$$(iii) \quad \exists \gamma > 0 \text{ 使得 } (x_1^+ + \gamma x_2^+)^T L_i (x_1^+ + \gamma x_2^+) < 0, \text{ 其中 } i=1,2$$

證明：詳見附錄 4.B

為了要證明在此情況下條件(C3) \Rightarrow (C2)成立，我們需要定義更多的敘述：

$$\delta_1 := (x_2^+)^T L_1 x_2^+ \quad (4.5)$$

$$\delta_2 := (x_1^+)^T L_2 x_1^+ \quad (4.6)$$

$$\delta_3 := (x_1^+)^T x_2^+ \quad (4.7)$$

$$\Delta_1 := (x_1^+)^T (L_1 + \beta L_2) x_1^+ = \lambda_1^+ + \beta \delta_2 \quad (4.8)$$

$$\Delta_2 := (x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2) x_2^+ = \beta \lambda_2^+ + \delta_1 \quad (4.9)$$

$$\Delta_3 := (\lambda_1^+ + \beta \lambda_2^+) \delta_3 \quad (4.10)$$

接下來，我們將介紹輔助定理 4：

輔助定理 4：假設條件(C3)成立時，則下列敘述為真：

$$(i) \quad x_1^+ \neq \pm x_2^+$$

$$(ii) \quad \delta_1 < 0, \delta_2 < 0 \text{ 且 } \delta_3 \geq 0$$

$$(iii) \lambda_1^+ \lambda_2^+ < \delta_1 \delta_2$$

證明： 詳見附錄 4. B

再來，我們將由條件(C2)的特性反推，當條件(C2)成立時，則 $L_1 + \beta L_2 < 0$ ，此時表示當 $x = x_1^+$ 與 $x = x_2^+$ 時， $x(L_1 + \beta L_2)x < 0$ 。亦即是指：

$$\Delta_1 < 0 \text{ 與 } \Delta_2 < 0 \quad (4.11)$$

接下來我們運用公式(4.8)、(4.9)與(4.11)得到：

$$-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2} < \beta < -\frac{\delta_1}{\lambda_2^+} \quad (4.12)$$

這也就是說，任何超出公式(4.12)範圍的 β 值將不會使 $L_1 + \beta L_2 < 0$ 成立，所以要證明條件(C2)成立時，接下來的敘述中我們皆須要求 β 屬於公式(4.12)的範圍內。

由於輔助定理 4 之(i)得知 $x_1^+ \neq \pm x_2^+$ ，因此 x_1^+ 和 x_2^+ 可組成 \mathbb{R}^2 空間的基底 (base)，因此可以找出 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 使得每一個屬於 \mathbb{R}^2 空間的點可被寫成 $k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+$ ，藉由直接的運算，我們直接令 $x = k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+$ 帶入 $x^T (L_1 + \beta L_2)x$ 中得出：

$$(k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2)(k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+) = k_1^2 \Delta_1 + k_2^2 \Delta_2 + 2k_1 k_2 \Delta_3 \quad (4.13)$$

很明顯的，如果條件(C2)成立，則可得出 $(k_1, k_2) \neq (0,0)$ 時， $(k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2)(k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+) < 0$ 。因此，我們可以完整的把(C2)成立的條件寫成輔助定理 5：

輔助定理 5： 假設條件(C2)成立時，則下列敘述為充分與必要：

$$(i) \quad -\frac{\lambda_1^+}{\delta_2} < \beta < -\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}$$

$$(ii) \quad \text{當 } (k_1, k_2) \neq (0,0) \text{ 時， } (k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2)(k_1 x_1^+ + k_2 x_2^+) < 0$$

證明： 詳見附錄 4. B

因此當我們需要去證明系統是否符合條件(C2)時，可以藉由輔助定理 5 的 (i)、(ii)來求證。然而輔助定理 5 (ii)的條件需要去檢查所有 \mathfrak{R}^2 空間的範圍，這將會使求證過程非常麻煩。如果能夠簡化此條件，則在運用上會增加不少方便性。所以本篇論文把輔助定理 5 之(ii)簡化改寫成序列定理 1：

序列定理 1： 假設條件(C2)成立時，則下列敘述為充分與必要：

(i) 存在一 $\beta > 0$ ，使得 $\Delta(\beta) := \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2 > 0$ 成立

(ii) $\delta_3^2 < \frac{(\delta_1\delta_2 - \lambda_1^+\lambda_2^+)^2}{4\lambda_1^+\lambda_2^+(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \delta_1\delta_2 - \lambda_1^+\delta_2 - \lambda_2^+\delta_1)}$

證明： 詳見附錄 4. B

其中：

$$\Delta(\beta) := \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2$$



$$= [\lambda_2^+\delta_2 - (\lambda_2^+)\delta_3^2]\beta^2 + [\lambda_1^+\lambda_2^+ + \delta_1\delta_2 - 2\lambda_1^+\lambda_2^+\delta_3^2]\beta + [\lambda_1^+\delta_1 - (\lambda_1^+)^2\delta_3^2] \quad (4.14)$$

因此，由序列定理 1，我們注意到兩個很重要的值： β 與 δ_2^3 。此兩值一個出現在條件(C1)與(C2)中；而令一個值 δ_3 出現在公式(4.7)中： δ_3 的定義為兩個正特徵值 x_1^+ 與 x_2^+ 之間小於或等於 90° 的夾角。

證明到此，我們發現條件(C2)的成立，將會與 β 和 δ_2^3 有關。那麼反過來說，條件(C3)成立的與否，是否也會和 β 或是 δ_2^3 有關？如果答案是肯的的話，那對於整個求證過程將會有很決定性的結果。另外，如果想完整的證明條件(C3) \Rightarrow (C2)，則必須要驗證條件(C2)中的 $L_1 + \beta L_2$ 符合(C3)的要求。也就是說，我們可藉由檢查 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0$ 與 $\text{trace}(L_1 + \beta L_2) < 0$ 兩式是否成立來驗證。因此，經過驗證上述所提之幾個問題，我們可以證明出條件(C3) \Rightarrow (C2)：

輔助定理 6：條件(C3) \Rightarrow (C2)

證明：詳見附錄 4.B

最後我們得出如下之結論：

定理 1：

$$\text{條件 (C1)} \Leftrightarrow \text{(C2)} \Leftrightarrow \text{(C3)}$$

證明：條件(C1) \Leftrightarrow (C2)與條件(C1) \Rightarrow (C3)的部分已經由前面輔助定理 1、2 證明完畢，因此在此只需要證明條件(C3) \Rightarrow (C2)的部分即可。由輔助定理 6 得知

當(C3)成立時 $\Rightarrow \delta_3^2 < \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}$ ，時 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0$ 且使得

$\Delta(\beta)|_{\beta=\beta^*} > 0$ ，也就是說最少會存在一個 $\beta = \beta^*$ 的點，而其 β^* 值不只是滿足公式

(4.12)使得 $-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2} < \beta < -\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}$ 成立，也讓 $\Delta(\beta^*) > 0$ 。因此(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)得

證



4.3 n 階不穩定狀態系統

上一小節我們探討了二階不穩定系統間是否存在可用里奧波諾夫法建構之穩定切換律的相關證明與討論，到了本節，我們希望能夠把上一小節適用的範圍由二階系統推廣到 n 階系統。

首先，我們再次把 4.2 節的條件(C1)、(C2)、(C3)敘述如下：

$$(C1) \exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (4.15)$$

$$(C2) \exists \beta > 0, P > 0 \text{ 使得 } L_1 + \beta L_2 < 0, \text{ 當 } L_i := A_i^T P + P A_i, i = 1, 2 \quad (4.16)$$

$$(C3) \exists P > 0 \text{ 使得 } \bigcup_{i=1,2} \{X \mid X^T (A_i^T P + P A_i) X < 0\} = \mathfrak{R}^n \setminus \{0\} \quad (4.17)$$

由輔助定理 1 得知條件(C1) \Leftrightarrow (C2)，及輔助定理 2 得知條件(C1) \Rightarrow 條件(C3)，在推廣到 n 階時，我們也很容易驗證條件(C1) \Leftrightarrow (C2)與條件(C1) \Rightarrow 條件(C3)對 n 階系統也成立，因此我們只剩下證明條件(C3) \Rightarrow 條件(C2)，則可以完整的判定不穩定系統間是否存在可用里奧波諾夫法建構之穩定切換律的充分與必要條件。

為了要完成條件(C3) \Rightarrow 條件(C2)的證明，很直觀的，我們可以找出兩個求證的方向：第一步是由條件(C3)的特性著手，藉由分析條件(C3)的特性，來求證到條件(C2)。第二步是比較條件(C3)與(C2)的差別，我們可以一眼看出，條件(C2)比(C3)多出了一個 β 值，因此我們必須建立條件(C3)與 β 值之間的關係。

所以接下來我們先由第一步開始證明，也就是由條件(C3)的特性開始著手。

為了分析條件(C3)，我們令 $L_i = A_i^T P + P A_i$ ， $i = 1, 2$ ，因此定義出兩集合：

$$\Omega_i = \{X \mid X^T L_i X < 0, \|X\| = 1\}, \text{ 且 } i = 1, 2 \quad (4.18a)$$

$$\Omega'_i = \{X \mid X^T L_i X \geq 0, \|X\| = 1\}, \text{ 且 } i = 1, 2 \quad (4.18b)$$

接著我們對集合 Ω'_i 作一些分析，分析的結果我們定義出輔助定理 7 如下：

輔助定理 7： 定義 $i = 1, 2$ 的兩個集合 $\Omega'_i = \{X \mid X^T L_i X \geq 0, \|X\| = 1\}$ ，可得出：

- (i) Ω'_i 對稱(symmetric)於原點
- (ii) 每一個 Ω'_i 為一個連通集合 Δ ，或是由兩個非交集(disjoint)連通集合 Δ_1 、 Δ_2 所組成，由於 Δ_1 、 Δ_2 以原點為軸互相對稱，所以 $\Delta_1 = -\Delta_2$ ， Ω'_i 可以寫成 $\Omega'_i = \Delta$ 、或是 $\Omega'_i = \Delta_1 \cup \Delta_2$
- (iii) 每一個對映於 L_i 的不穩定特徵值的單位特徵向量(unit eigen-

vectors)會包含於集合 Ω'_i 之中

證明： 詳見附錄 4.C

再來我們利用由輔助定理 7 中集合 Ω'_i 的特性與結果，可以推論出條件(C3)成立時，以下三項條件亦將成立，因此定義出輔助定理 8：

輔助定理 8： 假設條件(C3)成立時，則下列敘述為真：

(i) $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 = \phi$

(ii) $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} \neq \phi$ ，且 $S = \{X \mid \|X\| = 1\}$

證明： 詳見附錄 4.C

很明顯的，比較輔助定理 7(iii)所述與條件(C3)得知：對於每一個對映於 L_i 的不穩定特徵值的單位特徵向量 $X_i^+ \in \Omega'_i$ ，我們必須求證 $X_i^+ \in \Omega_j$ ， $i \neq j$ ，否則將無法達到條件(C3)的要求，即表示此不穩定狀態系統將不可以用里奧波諾夫法建構切換律使系統達到穩定。推論到此，我們發現 4.2 節中的輔助定理 4 之定義內容，即是目前我們推論所述。

為了求證方便與更嚴謹的要求，首先我們定義： X_{1i}^+ 和 X_{1i}^- 為兩個對應於 L_1 的正特徵值 λ_{1i}^+ 與負特徵值 λ_{1i}^- 的單位特徵向量；同樣的 X_{2j}^+ 和 X_{2j}^- 為兩個對應於 L_2 的正特徵值 λ_{2j}^+ 與負特徵值 λ_{2j}^- 的單位特徵向量。

接下來重新改寫輔助定理 4 為輔助定理 9：

輔助定理 9： 假設條件(C3)成立時，則下列敘述為真：

(i) $X_{1i}^+ \neq \pm X_{2j}^+$ ，且 $i \neq j$

$$(ii) \quad \delta_{1j} := (X_{2j}^+)^T L_1 X_{2j}^+ < 0, \quad \delta_{2i} := (X_{1i}^+)^T L_2 X_{1i}^+ < 0$$

$$(iii) \quad \lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} \delta_{2i}, \quad \text{且 } i \neq j$$

證明： 詳見附錄 4.C

由上述的輔助定理可得知，對於任何 λ_{1i}^+ 、 λ_{2j}^+ ，且 $i \neq j$ 時，其方程式

$\lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} \delta_{2i}$ 都必須成立。我們再把此輔助定理 9(iii) 改寫為：

$$-\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} < -\delta_{1j} / \lambda_{2j}^+ \quad (4.19)$$

此即表示：當公式(4.19)成立時 $\Leftrightarrow X_i^+ \in \Omega_j, i \neq j$ 。接著我們把公式(4.19)

改寫得出以下式子：

$$\max_i \left\{ -\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} \right\} < \min_j \left\{ -\delta_{1j} / \lambda_{2j}^+ \right\} \quad (4.20)$$

將輔助定理 9(iii) 改寫為公式(4.20)最大的好處是，當我們需要求證輔助定理 9(iii) 時，可以不須逐次檢查每個 L_i 的不穩定特徵值的單位特徵向量

$X_i^+ \in \Omega_j$ ，直接取每個狀態系統的正特徵值之極值狀態來判斷即可。

接著我們觀察條件(C2)： $L_1 + \beta L_2 < 0$ ，以及公式(4.20)。由於條件(C3)成立時，任何正特徵值 X_{1i}^+ ， X_{2j}^+ 必須符合 $(X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) (X_{1i}^+) < 0$ 與 $(X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta L_2) (X_{2j}^+) < 0$ ，也就是 $\lambda_{1i}^+ + \beta \delta_{2i}^+ < 0$ 與 $\delta_{1j}^+ + \beta \lambda_{2j}^+ < 0$ ，因此我們定義出輔助定理 10。

輔助定理 10： 由 $\lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} \delta_{2i}$ ，且 $i \neq j$ 得知，當條件(C3)成立時，則 β 必符

合下列範圍： $\beta_1 := \max_i \left\{ -\frac{\lambda_{1i}^+}{\delta_{2i}} \right\} < \beta < \min_j \left\{ -\frac{\delta_{1j}}{\lambda_{2j}^+} \right\} =: \beta_2$

證明： 詳見 附錄 4.C

我們把任何 L_1 、 L_2 的每個正特徵值相對應的特徵向量 X_{1i}^+ 、 X_{2j}^+ 為 X 的變數，代入 $X^T(L_1 + \beta L_2)X$ 中皆會小於零。因此我們提出條件(C3)與 β_1 、 β_2 之間的相互關係如下：

序列定理 2： 由 $\beta_1 := \max_i \left\{ -\frac{\lambda_{1i}^+}{\delta_{2i}} \right\} < \beta < \min_j \left\{ -\frac{\delta_{1j}}{\lambda_{2j}^+} \right\} =: \beta_2$ 得知，當條件(C3)

成立時：

(i) β_1 為最小之 β 值使得在任何 L_1 的特徵向量 X_{1i}^+ 代入 $X^T(L_1 + \beta L_2)X$ 小於零

(ii) β_2 為最大之 β 值使得在任何 L_2 的特徵向量 代入 $X^T(L_1 + \beta L_2)X$ 小於零

證明： 詳見附錄 4.C

然而輔助定理 10 只是單項成立條件，當條件(C3)成立 $\Rightarrow \beta_1 < \beta < \beta_2$ ，再者此定理並不保證 $\beta_1 < \beta < \beta_2 \Rightarrow$ 條件(C2)成立。

因此為了要證明條件(C3) \Rightarrow (C2)，我們必須要找出 β 值與條件(C3)的關係，使得條件(C3)成立 \Rightarrow 任何 $X \in \mathfrak{R}^n$ 帶入 $X^T(L_1 + \beta L_2)X$ 皆小於零 \Rightarrow 條件(C2)成立。故我們藉由輔助定理 8 的(i)、(iii)，提出另外一個方法。首先定義 β_1^* 和 β_2^* ，滿足：

$$\text{Sup}_{x \in \Omega_1'} X^T(L_1 + \beta_1^* L_2)X = 0 \quad (4.21)$$

$$\text{Sup}_{x \in \Omega_2'} X^T(L_1 + \beta_2^* L_2)X = 0 \quad (4.22)$$

由此定義，我們可以得到下列結果：

序列定理 3： 當公式(4.21)、(4.22)成立時：

(i) 使 $X^T(L_1 + \beta_1^* L_2)X = 0$ 之點 X 為 Ω'_1 內部之點： $X \in \Omega'_1$ ；

使 $X^T(L_1 + \beta_2^* L_2)X = 0$ 之點 X 為 Ω'_2 內部之點： $X \in \Omega'_2$

(ii) β_1^* 與 β_2^* 值一定存在

(iii) $\beta_1 \leq \beta_1^*$ 與 $\beta_2 \geq \beta_2^*$ 成立

證明： 詳見附錄 4.C

而且很明顯的， β 值取 $\beta_1^* < \beta < \beta_2^*$ 時，條件(C3)成立 $\Rightarrow \beta_1^* < \beta_2^*$ 成立。因為當 $\beta > \beta_1^*$ 時，對所有的 $X \in \Omega'_1$ ，將符合 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$ ；

當 $\beta > \beta_2^*$ 時，對所有的 $X \in \Omega'_2$ ，將符合 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$ ；

然而當 $\beta_1^* > \beta_2^*$ 時，不論 β 值如何取，我們皆可找到一點

$X_1 \in \Omega'_1$ 使得 $X_1^T(L_1 + \beta L_2)X_1 > 0$ ，和另一點 $X_2 \in \Omega'_2$ 使得 $X_2^T(L_1 + \beta L_2)X_2 > 0$ ，

然而由輔助定理 8 得知，此 X_1 和 X_2 將會屬於同一個集合 Ω'_i ，也就是說，條件(C3)不成立。

最後一個推論是，我們得證明 $\beta_1^* < \beta_2^*$ ，否則(C2)會不成立：

輔助定理 11： 當條件(C2)成立 $\Leftrightarrow \beta_1^* < \beta_2^*$ 成立

證明： 詳見附錄 4.C

定理 2：

條件(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)

證明： 由於很明顯的可看出輔助定理 1、2 可適用於 n 階系統，因此得出

(C1) \Leftrightarrow (C2) 與 (C1) \Rightarrow (C3)；由序列定理 3 得出， $\text{Sup}_{x \in \Omega_1} X^T (L_1 + \beta_1^* L_2) X = 0$ 和 $\text{Sup}_{x \in \Omega_2} X^T (L_1 + \beta_2^* L_2) X = 0$ 成立時，且可由輔助定理 11 找出一 β 值使得 $\beta_1^* < \beta < \beta_2^*$ ，則 (C3) $\Rightarrow \beta_1^* < \beta_2^* \Leftrightarrow$ (C2)。因此 (C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3) 得證 ■

4.4 應用控制律於不穩定狀態系統

本節主要是在證明與推論出不穩定系統如果加入控制律 $u(x)$ 的情況下，系統是否仍然可達到穩定，以及如何建構出切換律等等。

考慮如下一個線性控制系統：

$$\dot{x} = Ax + \underline{b}_i u, \quad i = 1, 2 \quad (4.23)$$

其中 $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ， $\underline{b}_i \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ，且 $i = 1, 2$ ，且 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆為不可穩定化(Unstabilizable)。即是說，不存在控制律 $u(x) = \underline{k}_i x$ ， $\underline{k}_i \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ 且 $i = 1, 2$ ，使得 $\dot{x} = (A + \underline{b}_1 \underline{k}_1)x$ 與 $\dot{x} = (A + \underline{b}_2 \underline{k}_2)x$ 兩式達到穩定的要求。但由於前面幾節已經指出，不穩定系統間仍然有可能存在一切換律使得系統達到穩定，因此接下來我們將探討是否存在適當的控制律及切換律使系統能達到穩定。

在上一小節的 4.2.2 中提到的條件(C1)與條件(C2)得知：

$$(C1) \quad \exists \beta > 0 \text{ 使得 } A_1 + \beta A_2 \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (4.1)$$

$$(C2) \quad \exists \beta > 0, P > 0 \text{ 使得 } L_1 + \beta L_2 < 0, \text{ 當 } L_i := A_i^T P + P A_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

而且由前述已經指出兩條件是充分與必要的。這也就是說，如果我們找出一

$A_{eq} = A_1 + \beta A_2$ 為赫維茲矩陣，則可使得 $A_1^T P + PA_1 + \beta(A_2^T P + PA_2) < 0$ 。

我們嘗試取控制律 $u(x) = \underline{k}_i x$ 的 \underline{k}_i 為：

$$\underline{k}_1 = -\underline{b}_1^T P \quad (4.24)$$

$$\underline{k}_2 = -\underline{b}_2^T P \quad (4.25)$$

使得

$$A_i = A + \underline{b}_i \underline{k}_i = A - \underline{b}_i \underline{b}_i^T P, \quad i=1,2 \quad (4.26)$$

把(4.26)之 $A_i = A + \underline{b}_i \underline{k}_i$ 代入條件(C2)中得知：

$$A_1^T P + PA_1 + \beta(A_2^T P + PA_2) < 0 \quad (4.27)$$

我們可以令一值 $\underline{C} > 0$ 使得公式(4.27)得到如下結果：

$$A_1^T P + PA_1 + \beta(A_2^T P + PA_2) = -\underline{C} < 0$$

$$\Rightarrow [(A - \underline{b}_1 \underline{b}_1^T P)^T P + P(A - \underline{b}_1 \underline{b}_1^T P)] +$$

$$\beta[(A - \underline{b}_2 \underline{b}_2^T P)^T P + P(A - \underline{b}_2 \underline{b}_2^T P)] = -\underline{C}$$

$$\Rightarrow (A^T P + PA - 2P \underline{b}_1 \underline{b}_1^T P) + \beta(A^T P + PA - 2P \underline{b}_2 \underline{b}_2^T P) = -\underline{C}$$

$$\Rightarrow (1 + \beta)A^T P + (1 + \beta)PA - 2P(\underline{b}_1, \sqrt{\beta} \underline{b}_2) \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \sqrt{\beta} \underline{b}_2^T \end{pmatrix} P = -\underline{C} \quad (4.28)$$

很明顯的，如果我們取：

$$\underline{A} = (1 + \beta)A \quad (4.29)$$

$$\underline{B} = [\underline{b}_1, \sqrt{\beta} \underline{b}_2], \text{ 且 } \beta > 0 \quad (4.30)$$

$$\underline{C} > 0 \text{ (通常 } \underline{C} \text{ 取單位矩陣 } \underline{C} = I \text{)} \quad (4.31)$$

則公式(4.28)可化減為：

$$\underline{A}^T P + P \underline{A} - 2P \underline{B} \underline{B}^T P + \underline{C} = 0 \quad (4.32)$$

在公式(4.32)中，如果 $(\underline{A}, \underline{B})$ 為可穩定化(stabilizable)，則藉由大家所熟知的 Riccati equation，可以找出一 P 值使得 $P \in r.s.p.d$ 。

因此當 $(\underline{A}, \underline{B})$ 為可穩定化(stabilizable)時，由公式(4.24)、(4.25)的控制律 $\underline{k}_i, i=1,2$ ，使得 $A_1 = (1 + \beta)A + \underline{b}_1 \underline{k}_1$ ，與 $A_2 = (1 + \beta)A + \sqrt{\beta} \underline{b}_2 \underline{k}_2$ ，則可由公式(4.28)求得 A_1, A_2 出符合條件(C1)，且存在一值 $P \in r.s.p.d$ ，所以我們可以利用[14]所述之切換律使系統達到穩定。

最後我們證明當 $(\underline{A}, \underline{B})$ 為可穩定化(stabilizable)，則 $(\underline{A}, ([\underline{b}_1 \ \underline{b}_2]))$ 亦為可穩定化。

輔助定理 12： 假設當 $(\underline{A}, ([\underline{b}_1 \ \underline{b}_2]))$ 為可穩定化(stabilizable)，則 $(\underline{A}, \underline{B})$ 亦為可穩定化，且 $\beta > 0$ ：

證明： (1)若 $(\underline{A}, ([\underline{b}_1 \ \underline{b}_2]))$ 為可穩定化，則最少存在一組控制律 $\underline{k}_i \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ ，且 $i=1,2$ ，讓 $\underline{u}_i(x) = \underline{k}_i x$ 使得 $\dot{x} = Ax + \underline{b}_1 \underline{u}_1 + \underline{b}_2 \underline{u}_2 = (A + \underline{b}_1 \underline{k}_1 + \underline{b}_2 \underline{k}_2)x$ 為穩定。

(2)因此，對於 $(\underline{A}, \underline{B})$ 的控制律 $\underline{u}_i(x) = \underline{k}_i x$ 而言，取 $\underline{k}_1 = (1 + \beta) \underline{k}_1$ ，
 $\underline{k}_2 = \frac{(1 + \beta)}{\sqrt{\beta}} \underline{k}_2$ ；則

$$\dot{x} = Ax + \underline{b_1}u_1 + \underline{b_2}u_2 = ((1 + \beta)A + \underline{b_1}k_1 +$$

$$\sqrt{\beta} \underline{b_2}k_2)x = (1 + \beta)(A + \underline{b_1}u_1 + \underline{b_2}u_2)x, \text{ 固由(1)知, } (\underline{A}, \underline{B}) \text{ 亦為可穩定化}$$

■

故由輔助定理 12 得知，如果 $(A, (\underline{b_1} \ \underline{b_2}))$ 為可穩定化，則 $(\underline{A}, \underline{B})$ 亦為可穩定化，再經由公式(4.32)得知，藉由 Riccati equation，一定有符合條件之 β 與 P 解。因此最後的總結如下：

一線性控制系統如公式(4.23)所述，當 $(A, (\underline{b_1} \ \underline{b_2}))$ 為可穩定化，則選定一 β 值，再藉由輔助定理 12 與 Riccati equation 定理(4.32)求解 $P \in r.s.p.d$ ，再利用此 β 與 P 之解得出 A_1 、 A_2 ，則此 A_1 、 A_2 可藉由[14]的建構切換律的方法建構出切換律使系統達到穩定。



至於如何利用[14]所述之切換律來建構此不穩定系統間的切換律，我們將以附錄 3.A 之切換律為基礎建構新的切換律，此部分我們放在本章節後面的附錄 4.A。

4.5 討論

在 4.2 節中得知 $(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)$ ，而在 4.3 節中亦得知 $(C1) \Leftrightarrow (C2) \Leftrightarrow (C3)$ ，因此不論是二階或者是推廣到 n 階，對於任何不穩定之矩陣 A_i 使得

$\dot{x}(t) = A_i x(t)$ ，且 $i = 1, 2$ ，只要能用論文[14]之方法找到 $\beta > 0$ 使得 $L_1 + \beta L_2$ 為穩定矩陣，則必存在共通里奧波諾夫分析方法之 P 解，也就是條件(C1)成立，則此時一定可用里奧波諾夫分析方法找出切換律，而在 4.4 節中，我們更進階的推廣到對於包含有控制律的 n 階不穩定狀態系統 $\dot{x} = Ax + \underline{b}_i u$ ， $i = 1, 2$ ，其中 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆為不可穩定化(Unstabilizable)。我們提出一個尋找切換律使得此包含有控制律的 n 階不穩定系統達到穩定的方法。



附錄 4.A

此附錄主要是在介紹增加控制律 $u(x) = \underline{k}_i x$ ，且 $i = 1, 2$ 時，如何由附錄

3.A 的切換律來建構新的不穩定系統之切換律：

步驟 1： 已知一切換系統之狀態變數 A 、 b_1 、 b_2 。

檢查以下兩個條件： A 為不穩定，且 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆無法可穩定化 (Stabilizable)。



是：接續到步驟 2

否：可不經由此切換律而可使系統達到穩定，結束

步驟 2： 令

$$\underline{A} = (1 + \beta)A \quad (4.33)$$

$$\underline{B} = [\underline{b}_1, \sqrt{\beta} \underline{b}_2] \quad (4.34)$$

$$\underline{C} \in r.s.p.d \text{ (通常 } \underline{C} \text{ 取單位矩陣 } \underline{C} = I \text{)} \quad (4.35)$$

以及選取任一 β 值大於零，代入

$$\underline{A}^T P + P \underline{A} - 2P \underline{B} \underline{B}^T P + \underline{C} = 0 \quad (4.36)$$

判斷是否有解 $P \in r.s.p.d$?

是： $(A, [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2])$ 為可穩定化(stabilizable) ,

則令 $\underline{k}_1 = -\underline{b}_1^T P$ 、 $\underline{k}_2 = -\underline{b}_2^T P$ 使得 $A_1 = A - \underline{b}_1 \underline{b}_1^T P$ 、

$A_2 = A - \underline{b}_2 \underline{b}_2^T P$, 接續到步驟 3

否： $(A, ([\underline{b}_1 \ \underline{b}_2])$ 為不可穩定化(stabilizable) , 無法經由此切換律

使系統達到穩定, 結束

步驟 3: 定義 $Q_i = -(A_i^T P + P A_i)$, 且 $i = 1, 2$ 。選定一 ε 使得 $0 < \varepsilon < 1$,

定義出:

$$\begin{cases} S_1(x) = x^T (Q_1 - \varepsilon Q_2) x \\ S_2(x) = x^T (Q_2 - \varepsilon Q_1) x \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \Omega_i^+(x) = \{x : x^T Q_i x > 0\} \\ \Omega_i^0(x) = \{x : x^T Q_i x = 0\} \end{cases}, \text{ 且 } i = 1, 2 \quad (3.10)$$

步驟 4: 穩定的切換律之切換時機可以建構如下:

(iv) (初始狀態下)在一開始 t_0 時, 動態系統選擇 A_{i_0} 使得 $x(t_0) \in \Omega_{i_0}^+$

(v) 如果 $S_1(x) \leq 0$, $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$, 而且動態在系統 A_1 時, 則切換到系統 A_2

(vi) 如果 $S_2(x) \leq 0$, $x \in \Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$, 而且動態在系統 A_2 時, 則切換到系統 A_1

附錄 4.B

證明 輔助定理 1 :

當(C1)成立時

$$\Leftrightarrow \beta > 0, P > 0 \text{ 使得 } (A_1 + \beta A_2)^T P + P(A_1 + \beta A_2) = (A_1^T P + PA_1) + \beta(A_2^T P + PA_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \beta > 0, P > 0 \text{ 使得 } L_1 + \beta L_2 < 0$$



證明 輔助定理 2 :

由條件(C1)可知 $A_1 + \beta A_2$ 為赫維茲矩陣

$$\Rightarrow \forall Q > 0, \exists P > 0 \text{ 使得 } (A_1 + \beta A_2)^T P + P(A_1 + \beta A_2) = -Q < 0$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, x^T [(A_1^T P + PA_1) + \beta(A_2^T P + PA_2)]x = -x^T Qx < 0$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, \text{ 且最少一個 } x^T (A_i^T P + PA_i)x, i = 1, 2 \text{ 小於零}$$

定理得證

證明 輔助定理 3 : 此輔助定理由下面兩項(a), (b)觀察得知 :

(a) 因為 L_1 和 L_2 為對稱(symmetric), 所以可知 $x_1^+ \perp x_1^-$ 、 $x_2^+ \perp x_2^-$

(b) 對於接近單位特徵向量 x_i^+ ，且 $i=1,2$ 為向量方向軸的地方，必會

存在一範圍 $\{x \mid x^T L_i x > 0\}$ ，且為等範圍對稱 x_i^+ 軸

證明 輔助定理 4：

證明(i)： 如果假使 $x_1^+ = \pm x_2^+$ ，則 $(x_1^+)^T L_2 x_1^+ = (x_2^+)^T L_2 x_2^+ = \lambda_2^+ \geq 0$ ，藉由輔助定理 2 得知條件(C3)不成立。

證明(ii)： 由前面的註釋(4.5)、(4.6)，以及輔助定理 3，得知 $\delta_1 < 0$ 與 $\delta_2 < 0$ ，且選擇 x_1^+ 和 x_2^+ 之間的角度小於 $\pi/2$ ，使得 $\delta_3 := (x_1^+)^T x_2^+ \geq 0$ 。

證明(iii)： 當條件(C3)成立時，由輔助定理 3 得知：

$\Rightarrow \exists \gamma > 0$ 使得 $(x_1^+ + \gamma x_2^+)^T L_1 (x_1^+ + \gamma x_2^+) = \lambda_1^+ + \gamma^2 \delta_1 + 2\lambda_1^+ \delta_3 < 0$ 與

$(x_1^+ + \gamma x_2^+)^T L_2 (x_1^+ + \gamma x_2^+) = \delta_2 + \gamma^2 \lambda_2^+ + 2\lambda_1^+ \delta_3 < 0$

$$\Rightarrow \lambda_1^+ < -\frac{\gamma^2 \delta_1}{1+2\gamma\delta_3} \text{ 與 } \lambda_2^+ < -\frac{\delta_2}{\gamma^2 + 2\gamma\delta_3}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^+ \lambda_2^+ < \frac{\gamma^2 \delta_1 \delta_2}{(1+2\gamma\delta_3)(\gamma^2 + 2\gamma\delta_3)} = \frac{\delta_1 \delta_2}{(1+2\gamma\delta_3)(1+2\delta_3/\gamma)} < \delta_1 \delta_2$$

證明 輔助定理 5：

“ \Rightarrow ”

當條件(C2)成立時(i)一定成立，否則最少會有一個 $\Delta_1 \geq 0$ 或 $\Delta_2 \geq 0$ 產生，使得在 $x = x_1^+$ 或 $x = x_2^+$ 時， $x(L_1 + \beta L_2)x \geq 0$ 。

很明顯的當 $x_1^+ \neq \pm x_2^+$ 時， x_1^+ 與 x_2^+ 可以作為 \mathbb{R}^2 空間的基底(base)，因此我們

可以用 $(k_1x_1^+ + k_2x_2^+)$ 來表示 \mathfrak{R}^2 空間內任何的點。因此(C2)成立時(ii)一定成立。

“ \Leftarrow ”

很明顯的當(i)不成立時，(C2) 在 $x = x_1^+$ 或 $x = x_2^+$ 時不成立；當(ii)不成立時 $(k_1x_1^+ + k_2x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2)(k_1x_1^+ + k_2x_2^+) > 0$ ，在 $(k_1x_1^+ + k_2x_2^+)$ 的點(C2)不成立。

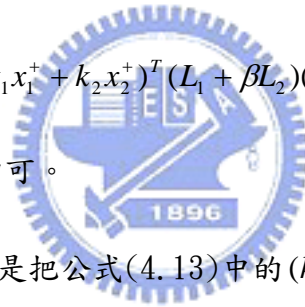
■

證明 序列定理 1：

由於皆是條件(C2)成立的充分必要條件，所以我們只需證明序列定理 1 \Leftrightarrow 輔助定理 5 即可達成證明，亦即是說，我們化減輔助定理 5(ii)的條件：

當 $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ 時， $(k_1x_1^+ + k_2x_2^+)^T (L_1 + \beta L_2)(k_1x_1^+ + k_2x_2^+) < 0$

為序列定理 1 的條件即可。



綜合上述，簡化的方式是把公式(4.13)中的 $(k_1x_1^+ + k_2x_2^+)$ 作更改，令 $k_1 = w\alpha$ ， $k_2 = w(1-\alpha)$ 且 $0 < \alpha < 1$ 、 $w \in \mathfrak{R}$ ，則 $w(\alpha x_1^+ + (1-\alpha)x_2^+)$ 可以表示為 x_1^+ 與 x_2^+ 之間的最小夾角內的任意點，因此公式(4.13)可以重新改寫成

$k_1^2\Delta_1 + k_2^2\Delta_2 + 2k_1k_2\Delta_3 = w^2(\alpha^2\Delta_1 + (1-\alpha)^2\Delta_2 + 2\alpha(1-\alpha)\Delta_3) = w^2F(\alpha, \beta)$ ，我們

可以直接把 w^2 提出來，得出：

$$F(\alpha, \beta) := \alpha^2\Delta_1 + (1-\alpha)^2\Delta_2 + 2\alpha(1-\alpha)\Delta_3 \quad (4.37)$$

由於公式(4.13)必須要小於零。因此我們把此公式的條件改寫成對所有的 $0 < \alpha < 1$ 的情況下，檢查是否最少有存在一個能滿足公式(4.12)的 β 值，且使得 $F(\alpha, \beta) < 0$ 。

同樣的，我們需要求出 $F(\alpha, \beta) < 0$ ，如果 β 滿足公式(4.12)，以及公式(4.11)

$\Delta_1 < 0$ 、 $\Delta_2 < 0$ 與 $\Delta_3 > 0$ 的情況下，只要 β 值選取後，可得出 $F(\alpha, \beta)$ 的分布為一個口朝下的錐狀 (cone) 曲面，且其曲面之頂端將會是 $F(\alpha, \beta)$ 之最大值，我們令此時之 α 值為 α^* ，因此要判斷公式(4.37)小於零，我們可以簡化成只需判斷 $F(\alpha, \beta)$ 的極大值 $F(\alpha^*, \beta) < 0$ 即可，為了證明此論述，我們對變數 α 為分兩次：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}(\alpha, \beta) := 2(\Delta_1 + \Delta_2 - 2\Delta_3) < 0 \quad (4.38)$$

也就是說，當固定 β 值時， $F(\alpha, \beta)$ 的最大值將產生在 $\alpha = \alpha^*$ ：

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha^*, \beta) := 2\alpha^* \Delta_1 + 2(\alpha^* - 1)\Delta_2 + (2 - 4\alpha^*)\Delta_3 = 0 \quad (4.39)$$

因此，可以找出 α^* 值：

$$\alpha^* = \alpha^*(\beta) = \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 - 2\Delta_3} \quad (4.40)$$

在此必須注意到 α^* 必須符合 $0 < \alpha^* < 1$ ，然後把 α^* 代入公式(4.37)得出 $F(\alpha^*, \beta)$ ：

$$F(\alpha, \beta)|_{\alpha=\alpha^*(\beta)} = \frac{\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3^2}{\Delta_1 + \Delta_2 - 2\Delta_3} \quad (4.41)$$

接下來我們必須確保當條件(C2)成立時，則下列敘述成立：

(i) 公式(4.13) $< 0 \Leftrightarrow$ 公式(4.14) < 0

(ii) 假設 β 值固定且滿足公式(4.12)，則 $F(\alpha^*, \beta) < 0 \Leftrightarrow F(\alpha, \beta) < 0$

證明(i)：對 $x^T(L_1 + \beta L_2)x$ 而言，最大值將產生在單位向量 x_1^+ 與 x_2^+ 間小於等於 90 度夾角之區域內，因此我們可以簡化判斷公式(4.13) < 0 的範圍，只需要判斷公式(4.13)中包含最大值的地方，也就公式(4.37) < 0 是分即可

證明(ii)： α^* 可由 $\Delta_1 < 0$ 、 $\Delta_2 < 0$ 與 $\Delta_3 > 0$ ，以及公式(4.38)、(4.39)得出，

且很明顯的， $F(\alpha, \beta)$ 之最大值 $F(\alpha^*, \beta) < 0$ 時， $F(\alpha, \beta) < 0$

現在如果我們能找出一個滿足公式(4.12)的 β 值使得 $F(\alpha^*(\beta), \beta) < 0$ 或者等同於公式(4.41)的分子部分大於零：

$$\Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2 > 0 \quad (4.42)$$

在此，我們定義函數：

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) &:= \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2 \\ &= [\lambda_2^+\delta_2 - (\lambda_2^+)\delta_3^2]\beta^2 + [\lambda_1^+\lambda_2^+ + \delta_1\delta_2 - 2\lambda_1^+\lambda_2^+\delta_3^2]\beta + [\lambda_1^+\delta_1 - (\lambda_1^+)^2\delta_3^2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

如果在公式(4.14)中令 $\lambda_2^+ = 0$ ，則函數 $\Delta(\beta)$ 為一個以 β 為變數的一階多項式，我們可以改寫成 $\Delta(\beta) = [\delta_1\delta_2]\beta + [\lambda_1^+\delta_1 - (\lambda_1^+)^2\delta_3^2]$ ，且其首項係數 $\delta_1\delta_2 > 0$ 。也就是說當

$\Delta(\beta) > 0$ 時， β 值的限定如下：

$$\beta > \frac{(\lambda_1^+)^2\delta_3^2 - \lambda_1^+\delta_1}{\delta_1\delta_2} \quad (4.43)$$

且此 β 值的限定會落在公式(4.12)中 β 值的最小範圍 $(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}, \infty)$ 內，因為我們可以很清楚的看出 $\frac{(\lambda_1^+)^2\delta_3^2 - \lambda_1^+\delta_1}{\delta_1\delta_2} > -\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}$ 。接下來，如果 $\lambda_2^+ > 0$ ，則 $\Delta(\beta)$ 為一個以 β 為變數的二階多項式(quadratic polynomial)，且其首項係數 $\lambda_2^+\delta_2 - (\lambda_2^+)\delta_3^2$ 可以很明顯的看出小於零，而 $\Delta(\beta)$ 的最大值產生在 $\beta = \beta^*$ 處：

$$\beta^* = -\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+ + \delta_1\delta_2 - 2\lambda_1^+\lambda_2^+\delta_3^2}{2[\lambda_2^+\delta_2 - (\lambda_2^+)\delta_3^2]} \quad (4.44)$$

由公式(4.14)，我們定義 $a = [\lambda_2^+ \delta_2 - (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2]$ ， $b = [\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - 2\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_3^2]$ ，
 $c = [\lambda_1^+ \delta_1 - (\lambda_1^+)^2 \delta_3^2]$ ，把新定義的 a, b, c 重新帶入公式(4.20)得到：

$$\Delta(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c = a\left(\beta - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} > 0 \quad (4.45)$$

為了要使 $\Delta(\beta) > 0$ ，且由於 $a = [\lambda_2^+ \delta_2 - (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2] < 0$ ，則我們可知 $b^2 - 4ac$ 必須要大於零：

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - 2\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_3^2)^2 - 4(\lambda_2^+ \delta_2 - (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2)(\lambda_1^+ \delta_1 - (\lambda_1^+)^2 \delta_3^2) \\ &= (\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2 - 4\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_3^2 (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1) > 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

因此，公式(4.46)可以重新被改寫如下：

$$\delta_3^2 < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{4\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1)} \quad (4.47)$$

我們可以清楚的知道 $0 < \delta_3^2 < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{4\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1)}$ 。也就是說，

存在一個區域使得 δ_3^2 的值落在此區域時， $\Delta(\beta)$ 會大於零。到目前為止，必須要注意一件事情，那就是我們必須檢查使 $\Delta(\beta)$ 最大值產生時的變數 $\beta = \beta^*$ 必須滿足公式(4.12)的範圍 $-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2} < \beta < -\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}$ ，否則 $\Delta_1 < 0$ 與 $\Delta_2 < 0$ 的情況最少會有一個不成立。

我們把 $\beta = \beta^*$ 帶入公式(4.12)的範圍，並且拆開成 $\beta^* - \left(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}\right) > 0$ 與 $\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^* > 0$ 。

首先，為了證明 $\beta^* - \left(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}\right) > 0$ ，我們可以藉由公式(4.22)的 β^* 帶入此式：

$$\beta^* - \left(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}\right) = \frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_2 (1 + 2\delta_3^2) - \delta_1 \delta_3^2 - 2\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2}{2\lambda_2^+ \delta_2 (\delta_2 - \lambda_2^+ \delta_3^2)} > 0 \quad (4.48)$$

此公式(4.48)可以提出 δ_2^3 使得：

$$\delta_3^2 < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)}{2\lambda_1^+ \lambda_2^+ (1 - \frac{\lambda_2^+}{\delta_2})} = \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{2\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+ - \delta_1 \lambda_2^+ + \frac{\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2}{\delta_2})} \quad (4.49)$$

比較公式(4.47)與(4.49) δ_2^3 值的大小，由於分子部分相同所以把兩式的分母部分相減： $4\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1) - 2\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+ - \delta_1 \lambda_2^+ +$

$$\frac{\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2}{\delta_2}) = 2[(\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1) + \lambda_1^+ \lambda_2^+ (1 - \frac{\lambda_2^+}{\delta_2}) + \lambda_1^+ (\lambda_2^+ - \delta_2)] > 0。因此可以斷定：$$

$$\delta_3^2 < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{4\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1)} < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{2\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+ - \delta_1 \lambda_2^+ + \frac{\lambda_1^+ (\lambda_2^+)^2}{\delta_2})} \quad (4.50a)$$

也就是說，當 δ_2^3 滿足公式(4.47)時，方程式 $\beta^* - \left(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}\right) > 0$ 將會成立。

其次，我們將證明 $\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^* > 0$ 。同樣的，使用前面公式(4.44)的 β^* 帶入 $\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^*$ 得到 $\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^* = \frac{-\delta_1 \delta_2 + 2\delta_1 \delta_3^2 \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_3^2}{2[\lambda_2^+ \delta_2 - (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2]}$ ，且此值必須要大於零。我們可以很明顯的看出其分母與分子部分皆小於零，所以斷定：

$$\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^* = \frac{-\delta_1 \delta_2 + 2\delta_1 \delta_3^2 \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\lambda_1^+ \lambda_2^+ \delta_3^2}{2[\lambda_2^+ \delta_2 - (\lambda_2^+)^2 \delta_3^2]} > 0 \quad (4.50b)$$

因此由公式(4.50a)與(4.50b)證明出 $\beta^* - \left(-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2}\right) > 0$ 與 $\left(-\frac{\delta_1}{\lambda_2^+}\right) - \beta^* > 0$ ，所以 β^*

值將會落在公式(4.12)的範圍內，其式子如下：

$$-\frac{\lambda_1^+}{\delta_2} < \beta^* < -\frac{\delta_1}{\lambda_2^+} \quad (4.51)$$

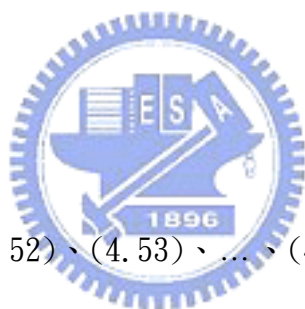
如果公式(4.47)與 $\lambda_1^+ \lambda_2^+ < \lambda_1^- \lambda_2^-$ 成立時，我們最少將可以找出一個 β 值的範圍，使得落在此範圍內的 β 值可以滿足公式(4.12)與 $\Delta(\beta) > 0$

$$\text{輔助定理 5(ii)} \Leftrightarrow \delta_3^2 < \frac{(\delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \lambda_2^+)^2}{4\lambda_1^+ \lambda_2^+ (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \delta_1 \delta_2 - \lambda_1^+ \delta_2 - \lambda_2^+ \delta_1)}$$

因此我們歸納出：

證明(i)：(i)之 $\Delta(\beta)$ 為公式(4.41)的分子項，由於序列定理 3(ii)的結果得知公式(4.41) < 0 ，且其分母項 $\Delta_1 + \Delta_2 - 2\Delta_3$ 很明顯的小於零，因此分子項 $\Delta(\beta)$ 一定得大於零，且因為序列定理 3(i)、(ii)，輔助定理 5(ii)成立

證明(ii)：由公式(4.50a)、(4.50b)與(4.51)得知，最少存在一點 β^* 滿足輔助定理 5(i) ■



證明輔助定理 6：

(一)、首先我們定義公式(4.52)、(4.53)、...、(4.58)：

$$\cos \theta = \delta_3 := (x_1^+)^T x_2^+ \quad (4.52)$$

在此我們令： θ_1 為單位向量 x_1^- 與 $x^T L_1 x = 0$ 的夾角， θ_2 為單位向量 x_2^- 與 $x^T L_2 x = 0$ 的夾角。

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}} \right) \quad (4.53)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\sqrt{-\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}} \right) \quad (4.54)$$

藉由 $\tan(\theta_1) = \left(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}} \right) = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1}$ 與 $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$ ，可以導出：

$$\cos \theta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}}, \quad \sin \theta_1 = \sqrt{\frac{-\lambda_1^-}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}} \quad (4.55)$$

相同於推導公式(4.55)的方法：

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2^+}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}}, \quad \sin \theta_2 = \sqrt{\frac{-\lambda_2^-}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}} \quad (4.56)$$

$$L_1 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_1^- \end{pmatrix} P^T$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{L1} \lambda_1^+ + \sin^2 \theta_{L1} \lambda_1^-) & (\sin \theta_{L1} \cos \theta_{L1} \lambda_1^+ - \sin \theta_{L1} \cos \theta_{L1} \lambda_1^-) \\ (\sin \theta_{L1} \cos \theta_{L1} \lambda_1^+ - \sin \theta_{L1} \cos \theta_{L1} \lambda_1^-) & (\sin^2 \theta_{L1} \lambda_1^+ + \cos^2 \theta_{L1} \lambda_1^-) \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$L_2 = Q \begin{pmatrix} \lambda_2^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{pmatrix} Q^T$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2 \theta_{L2} \lambda_2^+ + \sin^2 \theta_{L2} \lambda_2^-) & (\sin \theta_{L2} \cos \theta_{L2} \lambda_2^+ - \sin \theta_{L2} \cos \theta_{L2} \lambda_2^-) \\ (\sin \theta_{L2} \cos \theta_{L2} \lambda_2^+ - \sin \theta_{L2} \cos \theta_{L2} \lambda_2^-) & (\sin^2 \theta_{L2} \lambda_2^+ + \cos^2 \theta_{L2} \lambda_2^-) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

假使公式(C3)成立時 $\tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}}) + \tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}}) > \pi - \theta$

$$\Rightarrow \theta > \pi - \tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}}) - \tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}}) = \pi - \theta_1 - \theta_2$$

(由公式(4.31)與(4.32)得知 $\theta_1 = \tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}})$, $\theta_2 = \tan^{-1}(\sqrt{-\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}})$)

$$\Rightarrow \delta_3 = (x_1^+)^T x_2^+ = \cos \theta < \cos(\pi - \theta_1 - \theta_2)$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos(\theta_1 + \theta_2) = -\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_1^- \lambda_2^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}} (\theta > \cos^{-1}(\frac{\sqrt{\lambda_1^- \lambda_2^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}}))
\end{aligned}$$

我們平方 δ_3 得到：

$$\delta_3^2 = \cos^2 \theta < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^- \lambda_2^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}} \right)^2 = \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \quad (4.59)$$

由(4.58)可知：

$$\text{條件(C3)成立時} \Leftrightarrow \cos \theta = \delta_3 < \frac{\sqrt{\lambda_1^- \lambda_2^-} - \sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+}}{\sqrt{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}}$$

如果想要證明條件(C2) \Leftrightarrow (C3)，則必須要驗證條件(C2)中的 $L_1 + \beta L_2$ 符合(C3)的要求。也就是說，我們必須檢查 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0$ 與 $\text{trace}(L_1 + \beta L_2) > 0$ 兩式(在下面的公式(4.60)與(4.63)討論)，我們將公式(4.57)與(4.58)的 L_1 、 L_2 帶入於(4.60)中：

$$\begin{aligned}
&\det(L_1 + \beta L_2) \\
&= \beta^2 (\lambda_2^+ \lambda_2^-) + \beta ((\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-) + (-\lambda_1^+ \lambda_2^+ - \lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^- \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^-) \cos^2 \theta) + \lambda_1^+ \lambda_2^-
\end{aligned} \quad (4.60)$$

對 $\det(L_1 + \beta L_2)$ 的每一項求值，令首項為 A 、一次項為 B 、常數項為 C 得出：

$$A = \lambda_2^+ \lambda_2^- < 0$$

$$B = \cos^2 \theta (-\lambda_1^+ \lambda_2^+ - \lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^- \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^-) + (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-)$$

$$C = \lambda_1^+ \lambda_2^- < 0$$

因此我們把 A 、 B 、 C 帶入公式(4.60)，把此公式重新改寫成 $\det(L_1 + \beta L_2)$

$$= A\beta^2 + B\beta + C > 0, \text{ 且由於 } A < 0 \text{ 與 } B < 0 \text{ 使得 } \det(L_1 + \beta L_2) > 0 \Rightarrow B^2 - 4AC > 0$$

，我們把 $B^2 - 4AC$ 以 $\cos \theta$ 為變數寫出如下：

$$B^2 - 4AC = (+\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^- - \lambda_1^- \lambda_2^+ - \lambda_1^+ \lambda_2^-)^2 \cos^4 \theta - 2(+\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^- - \lambda_1^- \lambda_2^+ - \lambda_1^+ \lambda_2^-)(\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-) \cos^2 \theta + (\lambda_1^- \lambda_2^- - \lambda_1^+ \lambda_2^+) > 0 \quad (4.61)$$

為了使 $B^2 - 4AC > 0$ 成立，我們必須決定 $\cos^2 \theta$ 的範圍：

$$\Rightarrow \cos^2 \theta < \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}, \text{ 或是 } \cos^2 \theta > \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)}.$$

換句話說，當 $B^2 - 4AC > 0$ 時， β 最少有一點使得 $\det(L_1 + \beta L_2) \Big|_{\beta = -\frac{B}{2A}} =$

$$= A\beta^2 + B\beta + C = A\left(\beta + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4AC - B^2}{4A} > 0. \text{ 然而當}$$

$$\cos^2 \theta > \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \text{ 成立時：}$$

$$B = \cos^2 \theta (-\lambda_1^+ \lambda_2^+ - \lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^- \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^-) + (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-)$$

$$< \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} (-\lambda_1^+ \lambda_2^+ - \lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^- \lambda_2^+ + \lambda_1^+ \lambda_2^-) + (\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-)$$

$$= -2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-} < 0, \text{ 使得 } \beta = -\frac{B}{2A} < 0, \text{ 此 } \beta \text{ 值會不符合公式(4.12)定義的 } \beta \text{ 值}$$

$$\text{範圍，因此 } \cos^2 \theta > \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ + 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \text{ 不符合要求。}$$

因此我們可以得出：

$$\det(L_1 + \beta L_2) > 0 \Leftrightarrow \cos^2 \theta < \frac{\lambda_1^- \lambda_2^- + \lambda_1^+ \lambda_2^+ - 2\sqrt{\lambda_1^+ \lambda_2^+ \lambda_1^- \lambda_2^-}}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \quad (4.62)$$

其次，我們將計算 $L_1 + \beta L_2$ 的跡數(trace)如下：

$$\text{trace}(L_1 + \beta L_2) = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \beta(\lambda_2^+ + \lambda_2^-) \quad (4.63)$$

由公式(4.61)， β 的範圍落在 $\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < \beta < \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ 時將會使 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0$ 。而我們可以看出，當 $\cos^2 \theta = 0$ 時 $\left\| \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\|$ 將會是最

大的，因此把 $\cos^2 \theta = 0$ 帶入 β 的範圍內得出：

$$\frac{(\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-) - (\lambda_1^- \lambda_2^- - \lambda_1^+ \lambda_2^+)}{-2\lambda_2^+ \lambda_2^-} < \beta < \frac{(\lambda_1^+ \lambda_2^+ + \lambda_1^- \lambda_2^-) + (\lambda_1^- \lambda_2^- - \lambda_1^+ \lambda_2^+)}{-2\lambda_2^+ \lambda_2^-}$$

$$\frac{\lambda_1^+}{-\lambda_2^-} < \beta < \frac{-\lambda_1^-}{\lambda_2^+} \quad (4.64)$$

把公式(4.64)的極大與極小的 β 邊界值帶入(4.63)中，當 $\beta = \frac{\lambda_1^+}{-\lambda_2^-} \Rightarrow \text{trace}(L_1 + \beta L_2) = \lambda_1^- - \frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+}{\lambda_2^-} < 0$ ；當 $\beta = \frac{-\lambda_1^-}{\lambda_2^+} \Rightarrow \text{trace}(L_1 + \beta L_2) = \lambda_1^+ - \frac{\lambda_1^- \lambda_2^-}{\lambda_2^+} < 0$ ，最後我們可以總結出 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0 \Rightarrow \text{trace}(L_1 + \beta L_2) < 0$ 。

因此我們歸納出，當條件(C3)成立時，下列(a)、(b)成立

(a) $\delta_1 < 0$ 、 $\delta_2 < 0$ 與 $\delta_3 > 0$

(b) $\tan^{-1}\left(\sqrt{-\frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^+}}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{-\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+}}\right) > \pi - \theta$ 必須成立，使得公式(4.59)成立

故當條件(C2)成立時，很明顯的條件(a)一定符合，且由式(4.62)得知 $\det(L_1 + \beta L_2) > 0$ ，即是指 $L_1 + \beta L_2$ 為穩定矩陣，且其 $\cos^2 \theta$ 之條件會合(C3)之條件(b)相同，因此得證 ■

附錄 4.C

此附錄主要是在收錄 4.3 節所有的輔助定理與敘列定理的證明：

證明 輔助定理 7: 證明(i): 對於任何的實數 X 可知, (一) 不論是 $X^T L_i X \geq 0$ 或是 $X^T L_i X < 0$, 其值 $X^T L_i X = (-X)^T L_i (-X)$ 必會成立, 而且 X 與 $(-X)$ 間以原點為對稱分佈; (二) 如果 $\|X\|$ 值越來越小, 最後 $X^T L_i X$ 的值一定會接近原點。

因此由(一)、(二)得知, Ω'_i 對稱(symmetric)於原點

證明(ii): 對於一個對角化的矩陣 L 而言:

$$L_i = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p^+ & & \\ & & & \lambda_{p+1}^- & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \lambda_n^- \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (4.65)$$

首先我們取:

$$S_i = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \|X\| = \sqrt{x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + \cdots + x_n^2} = 1 \right\} \quad (4.66)$$

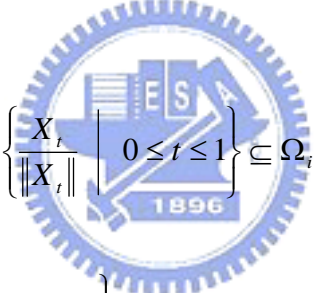
由公式(4.65)很明顯的看出 $S_i \subseteq \Omega_i$, 如果假設存在一點:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Omega_i, X_i \notin S_i \cup -S_i \quad (4.67)$$

我們定義：

$$X_t = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \\ t \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

當所有的 $0 \leq t \leq 1$ 成立時，很明顯的可以看出 $X_t^T L_i X_t < 0$ ，且我們可以找出一集合：

$$\left\{ \frac{X_t}{\|X_t\|} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\} \subseteq \Omega_i \quad (4.69)$$


如果我們選取 $\left\{ \frac{X_t}{\|X_t\|} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$ 的邊界值，也就是 $t=0$ 或是 $t=1$ 的情況下，

則可以得出：

$$\begin{cases} \frac{X_t}{\|X_t\|} \Big|_{t=1} = X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \frac{X_t}{\|X_t\|} \Big|_{t=0} \in S_i \cup -S_i \end{cases} \quad (4.70)$$

公式(4.70)代表者，我們可以找到一路徑(path)連通 X 和 $X_t|_{t=0} \in S_i \cup -S_i$ 。因此由前面所提可定義出：假設 Δ_i 為最大連通集合(the largest connected set)，且包含了 S_i 。因此任何的 $X \in \Omega_i$ 且 $X \notin \Delta_i \cup -\Delta_i$ 將會不存在，故 Ω_i 最多

只有包含兩個連通子集合 Δ_i 和 $-\Delta_i$ 。而且不失一般性，假設 Δ_i 是個連通集合，則經過線性轉換後得出的 Ψ 仍為一連通集合。因此公式(4.65)可以擴大到非對角矩陣：

$$L_i = Q_i \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p^+ & & \\ & & & \lambda_{p+1}^- & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \lambda_n^- \end{bmatrix} Q_i^T, \quad i=1,2 \quad (4.65a)$$

證明(iii)：由公式(4.65a)得知對映於 L_i 的不穩定特徵值的單位特徵向量為 $X_{i1}^+, X_{i2}^+, \dots, X_{ip}^+$ ，故 $(X_{iw}^+)^T L_i X_{iw}^+ \geq 0$ ，且 $w=1,2,\dots,p$ ，因此由公式(4.18b)可以很明顯的看出，(iii)成立 ■



證明 輔助定理 8： 證明(i)：如果 $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 \neq \emptyset$ 或成立，則必可找出一點 X_α 使得 $(X_\alpha)^T L_1 X_\alpha \geq 0$ 與 $(X_\alpha)^T L_2 X_\alpha \geq 0$ ，使得(C3)不成立。反之，如果(C3)成立時，一定無法找出一點 X_α 使得 $(X_\alpha)^T L_1 X_\alpha \geq 0$ 與 $(X_\alpha)^T L_2 X_\alpha \geq 0$ 成立

證明(ii)：如果 $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} = \emptyset$ ，且 $S = \{X \mid \|X\|=1\}$ 成立，則一定找不到一點 X_α 使得 $(X_\alpha)^T L_1 X_\alpha \geq 0$ 與 $(X_\alpha)^T L_2 X_\alpha \geq 0$ 成立；亦即是說 L_i 可控，不需要用到不穩定控制 ■

證明 輔助定理 9： 證明(i)：如果存在 $X_{1i}^+ = \pm X_{2j}^+$ ，可得出

$$\begin{cases} (X_{1i}^+)^T L_2 X_{1i}^+ = (X_{2j}^+)^T L_2 X_{2j}^+ > 0 \\ (X_{2j}^+)^T L_1 X_{2j}^+ = (X_{1i}^+)^T L_1 X_{1i}^+ > 0 \end{cases}$$

。則最少在 $X = X_{1i}^+ = \pm X_{2j}^+$ 的點上，產生 $X^T L_i X > 0$ ， $i=1,2$ 成立

證明(ii): 我們知道 $\begin{cases} (X_{1i}^+)^T L_1 X_{1i}^+ > 0 \\ (X_{2j}^+)^T L_2 X_{2j}^+ > 0 \end{cases}$ ，對於任何 X 皆符合(C3)成立的條件

$\cup_{i=1,2} \{X \mid X^T (A_i^T P + P A_i) X < 0\} = \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}$ 時，則必須滿足 $\delta_{1j} := (X_{2j}^+)^T L_1 X_{2j}^+ < 0$

與 $\delta_{2i} := (X_{1i}^+)^T L_2 X_{1i}^+ < 0$

證明(iii): 由輔助定理 3(iii)之推論 $(X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+)^T L_{i'} (X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+) < 0$ ，其中

$i'=1,2$ ，存在 $\gamma > 0$ 可使得：

$$\begin{cases} (X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+)^T L_1 (X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+) = \lambda_{1i}^+ + \gamma^2 \delta_{1j} + 2\gamma \lambda_{1i}^+ \delta_{3ij} < 0 \\ (X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+)^T L_2 (X_{1i}^+ + \gamma X_{2j}^+) = \delta_{2i} + \gamma^2 \lambda_{2j}^+ + 2\gamma \lambda_{2j}^+ \delta_{3ij} < 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\Rightarrow \text{轉換成：} \begin{cases} \lambda_{1i}^+ < -\frac{\gamma^2 \delta_{1j}}{1 + 2\gamma \delta_{3ij}} \\ \lambda_{2j}^+ < -\frac{\delta_{2i}}{\gamma^2 + 2\gamma \delta_{3ij}} \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \frac{\gamma^2 \delta_{1j} \delta_{2i}}{(1 + 2\gamma \delta_{3ij})(\gamma^2 + 2\gamma \delta_{3ij})} = \frac{\delta_{1j} \delta_{2i}}{(1 + 2\gamma \delta_{3ij})(1 + \frac{2\delta_{3ij}}{\gamma})} < \delta_{1j} \delta_{2i}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} \delta_{2i} \quad \blacksquare$$

證明 輔助定理 10： 由輔助定理 9 之(iii)得知，對於任何 λ_{1i}^+ 、 λ_{2j}^+ ，且 $i \neq j$ ，

其方程式 $\lambda_{1i}^+ \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} \delta_{2i}$ 必須成立。我們再把此方程式改寫為：

$$-\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} < -\delta_{1j} / \lambda_{2j}^+ \quad (4.68)$$

因此我們簡化此判斷法為：

$$\max_i \left\{ -\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} \right\} < \min_j \left\{ -\delta_{1j} / \lambda_{2j}^+ \right\} \quad (4.69)$$

當公式(4.59)成立時，則可完成此一判斷。且我們令：

$$\beta_1 := \max_i \left\{ -\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} \right\} < \min_j \left\{ -\delta_{1j} / \lambda_{2j}^+ \right\} =: \beta_2 \quad (4.70)$$

因為 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$ 必須成立，因此由公式(4.59)得知，如果 $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ 則：

$$\begin{cases} (X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{1i}^+ = \lambda_{1i}^+ + \beta_1 \delta_{2i} < \lambda_{1i}^+ + \left(-\frac{\lambda_{1i}^+}{\delta_{2i}}\right) \delta_{2i} = 0 \\ (X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{2j}^+ = \delta_{1j} + \beta_2 \lambda_{2j}^+ < \delta_{1j} + \left(-\frac{\delta_{1j}}{\lambda_{2j}^+}\right) \lambda_{2j}^+ = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\Rightarrow \beta_1 < \beta < \beta_2$$

此式得證 ■

證明 序列定理 2： 證明(i)：(a) 已知 $(X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{1i}^+ = \lambda_{1i}^+ + \beta_1 \delta_{2i}$ 成立

(b) 任何 $\beta > \beta_1$ 代入 $(X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{1i}^+ < (X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta_1 L_2) X_{1i}^+ = \lambda_{1i}^+ + \beta_1 \delta_{2i}$ 成立

(c) 因為 $\beta_1 := \max_i \left\{ -\lambda_{1i}^+ / \delta_{2i} \right\}$ 使得 $\lambda_{1i}^+ + \beta_1 \delta_{2i} = 0$ ，所以任何 $\beta < \beta_1$ 將會得到

$$(X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{1i}^+ > (X_{1i}^+)^T (L_1 + \beta_1 L_2) X_{1i}^+ = 0$$

證明(ii): (a) 已知 $(X_{2i}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{2i}^+ = \delta_{1j} + \beta_2 \lambda_{2j}^+$ 成立

(b) 任何 $\beta < \beta_2$ 代入 $(X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{2j}^+ < (X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta_2 L_2) X_{2j}^+$ 成立

(c) 因為 $\beta_2 := \min_j \left\{ -\frac{\delta_{1j}}{\lambda_{2j}^+} \right\}$ 使得 $\delta_{1j} + \beta_2 \lambda_{2j}^+ = 0$ ，所以任何 $\beta > \beta_2$ 將會得到

$$(X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta L_2) X_{2j}^+ > (X_{2j}^+)^T (L_1 + \beta_2 L_2) X_{2j}^+ = 0 \quad \blacksquare$$

證明 序列定理 3: 證明(i)、(ii)

由輔助定理 8 得知： $\Omega'_1 \cap \Omega'_2 = \phi$ 、 $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} \neq \phi$ ，且 $S = \{X \mid \|X\| = 1\}$

且由 $\text{Sup}_{x \in \Omega'_1} X^T (L_1 + \beta_1^* L_2) X = 0$ 得知，我們令 $g_1(\beta) = \text{Sup}_{x \in \Omega'_1} X^T (L_1 + \beta_1^* L_2) X$ ，

因為 $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} \neq \phi$ ，則必會存在有 $X \in \Omega'_1$ 使得 $\begin{cases} X^T L_1 X \geq 0 \\ X^T L_2 X < 0 \end{cases}$ ，且

$g_1(0) \geq 0$ ，因此 $\beta \uparrow \Rightarrow g_1(\beta) \downarrow$ ，因此 β_1^* 值存在， X 值存在；

同理，令 $g_2(\beta) = \text{Sup}_{x \in \Omega'_2} X^T (L_1 + \beta_2^* L_2) X$ ，因為 $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} \neq \phi$ ，則必會存在

有 $X \in \Omega'_2$ 使得 $\begin{cases} X^T L_1 X < 0 \\ X^T L_2 X \geq 0 \end{cases}$ ，且 $g_2(0) \leq 0$ ，因此 $\beta \uparrow \Rightarrow g_2(\beta) \uparrow$ ，因此 β_2^* 值存在，

X 值存在

證明(iii)

(一) 已知 β_1 可使任何 L_1 正特徵值 X_1^+ 符合 $(X_1^+)^T (L_1 + \beta_1 L_2) X_1^+ \leq 0$ ；

另外 β_1^* 可使任何 $X \in \Omega'_1$ 符合 $X^T (L_1 + \beta_1^* L_2) X \leq 0$ ，因此 $\beta_1 < \beta_1^*$

(二) 已知 β_2 可使任何 L_2 正特徵值 X_2^+ 符合 $(X_2^+)^T(L_1 + \beta_2 L_2)X_2^+ \leq 0$;

另外 β_2^* 可使任何 $X \in \Omega'_2$ 符合 $X^T(L_1 + \beta_2^* L_2)X \leq 0$, 因此 $\beta_2 > \beta_2^*$ ■

證明 輔助定理 11: 當 $\beta > \beta_1^*$ 時, 對所有的 $X \in \Omega'_1$, 將符合 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$;

當 $\beta > \beta_2^*$ 時, 對所有的 $X \in \Omega'_2$, 將符合 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$;

另外對於 $S \setminus \{\Omega'_1 \cup \Omega'_2\} \neq \emptyset$, 且 $S = \{X \mid \|X\| = 1\}$ 的部分, 由於 $X \in \Omega_1$ 且 $X \in \Omega_2$

, 則此時 $X^T(L_1 + \beta L_2)X < 0$ 一定成立, 因此 $L_1 + \beta L_2 < 0$ 成立 ■



CHAPTER 5

模擬與討論



此章節主要是要使用不穩定系統之穩定切換律的設計與選取與法則來建構出模擬與討論，先針以論文[14]中所提到的切換律設計方法，也就是附錄 3.A 所述，來建構出一模擬，並且討論一些 ε 的特性。再來提出建構 $\dot{x}(t) = Ax(t) + b_i u$ 的切換式轉換器建構法則。

5.1 兩個不穩定線性系統之穩定切換律設計與討論

接下來將討論論文[14]中的 Example 5.1，並探討公式(3.9)中 ε 的特性。

5.1.1 系統模擬

由第三章的 附錄 3.A 所提的切換式系統之切換律 (switch rule) 建構法

則，我們可以把論文[14]中的 Example 5.1 用下列方式模擬出來：

Example 5.1：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$$

分析： A_1 的特徵值為 $1.5 \pm 2.1794 i$ ， A_2 的特徵值為 0.3852 與 -10.3852 ，皆為不穩定矩陣，因此我們使用附錄 3.A 作分析判斷：

$$\text{步驟 1: } A_1 + \beta A_2 = \begin{bmatrix} -4 + 3\beta & -5 + 5\beta \\ 7 - 7\beta & 7 - 13\beta \end{bmatrix}$$

$$\det(S * I - A_1 - \beta A_2) = \begin{bmatrix} S + 4 - 3\beta & 5 - 5\beta \\ -7 + 7\beta & S - 7 + 13\beta \end{bmatrix}$$

$$= S^2 + (-3 + 10\beta)S + 7 + 3\beta - 4\beta^2$$

$$S^2 \quad 1 \quad (-4\beta^2 + 3\beta + 7)$$

$$S^1 \quad (-3 + 10\beta) \quad 0$$

$$S^0 \quad (-4\beta^2 + 3\beta + 7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 10\beta > 0 \\ -4\beta^2 + 3\beta + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta > 0.3 \\ 1.75 > \beta > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.3 < \beta < 1.75$$

$$\text{步驟 2: 選擇 } \beta = \frac{2}{3} \text{ 得出 } A_{eq} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}, \text{ 在令 } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 則由(2.51)式}$$

得出 $P = \begin{bmatrix} 0.5413 & 0.0105 \\ 0.0105 & 0.3147 \end{bmatrix}$

步驟 3：則 $Q_1 = -(A_1^T P + P A_1) = \begin{bmatrix} 1.7832 & -1.028 \\ -1.028 & -4.3007 \end{bmatrix}$ ；與

$Q_2 = -(A_2^T P + P A_2) = \begin{bmatrix} -1.3007 & 1.1014 \\ 1.1014 & 8.0769 \end{bmatrix}$ 。接下來選擇 $\varepsilon = 0.5$ 得到：

$$\begin{cases} S_1(x) = x^T (Q_1 - \varepsilon Q_2) x = x^T \begin{bmatrix} 2.4336 & -1.5787 \\ -1.5787 & -8.3392 \end{bmatrix} x \\ S_2(x) = x^T (Q_2 - \varepsilon Q_1) x = x^T \begin{bmatrix} -2.1923 & 1.6154 \\ 1.6154 & 10.2273 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

步驟 4：最後任意選擇初始值 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，由此步驟之(i)、(ii)、(iii)條件

求出切換律如下：

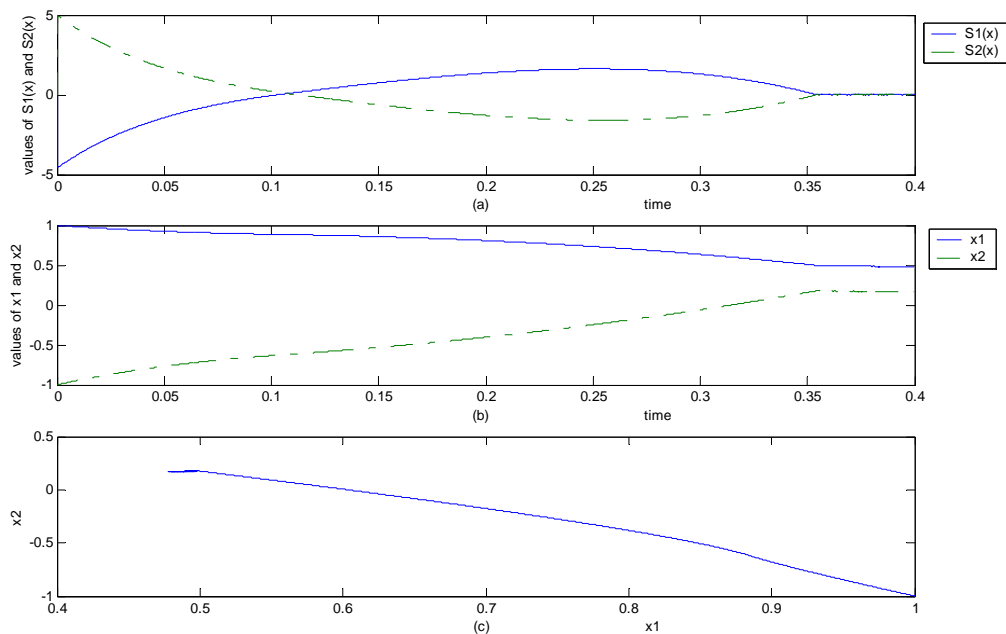
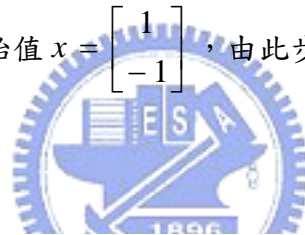


圖 5.1 時間取 0.4 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；
 (b) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；

(c) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。

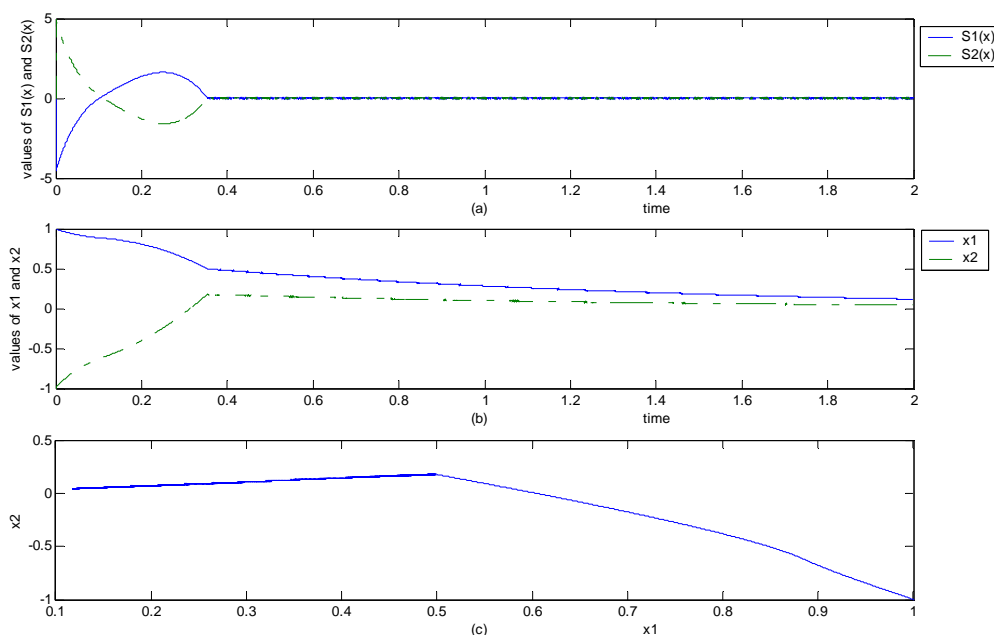


圖 5.2 時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；
 (b) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；
 (c) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。

5.1.2 探討 ε 的特性

在 3.2.2.2 的公式(3.9)中提到：

$$\begin{aligned} s_1(x) &= x^T (Q_1 - \varepsilon Q_2)x \\ s_2(x) &= x^T (Q_2 - \varepsilon Q_1)x \end{aligned} \quad (3.9)$$

由論文[14]中提到， ε 的限制為 $0 < \varepsilon < 1$ ，因此由公式(3.9)很明顯的看出，當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，此式得出 $s_1(x) \rightarrow x^T Q_1 x$ 與 $s_2(x) \rightarrow x^T Q_2 x$ ，因此一開始切換律將會先把狀態 x 導入到順滑面(sliding surface)，接下來的切換時機由 3.2.2.2 節所提到之切換法則(switch rule)的(i)、(ii)、(iii)可知，而當 ε 的值越小時，在初始值為 $x_0(t_0)$ 的系統狀態被推上順滑面(sliding surface)的時間越慢，且系統判斷切換的時間越長，也就是”切跳(Chattering)”的現象會隨 ε 的值越小

而增加，即是此時系統軌跡對於平衡點的擺幅將會變大。

另外，由於 $s_1(x)$ 的狀態下 $x^T Q_2 x < 0$ ； $s_2(x)$ 的狀態下 $x^T Q_1 x < 0$ ，因此 ε 取的越大，在初始值為 $x_0(t_0)$ 的系統狀態被推上順滑面(sliding surface)的時間越快，而且上到順滑面後，系統判斷切換的時間也越短，也就是說，提高 ε 值可以消滅(eliminate)“切跳(Chattering)”的現象。

我們以[14]中的 example 5.1 的例子為例，先以此例所選定 ε 的值為 0.5，得出之圖形如下所示：

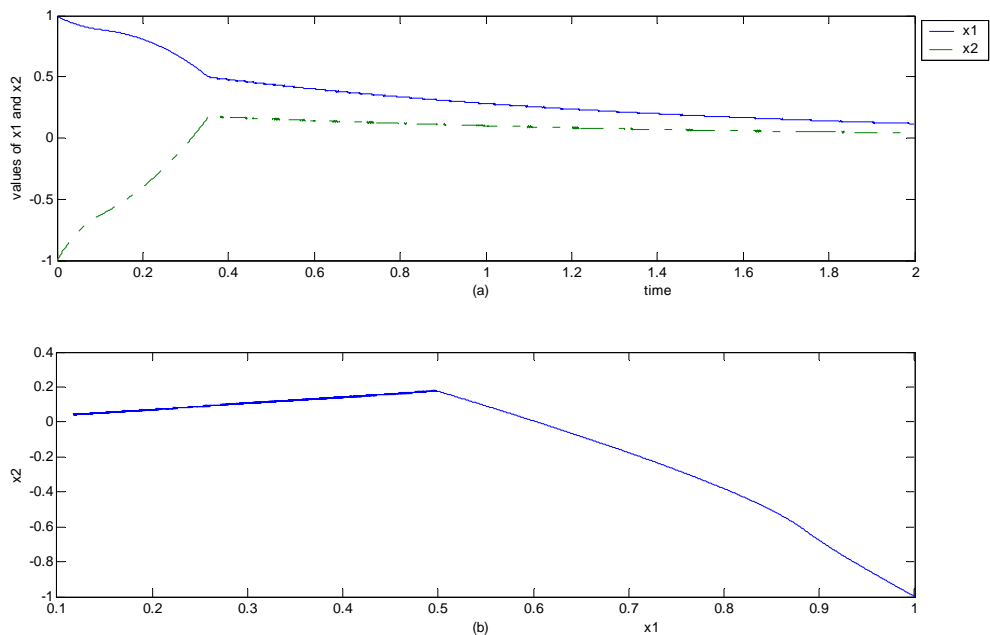


圖 5.3 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；
(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。

接下來再選定 ε 的值為 0.1 與 0.9 時跑出之圖形如下：

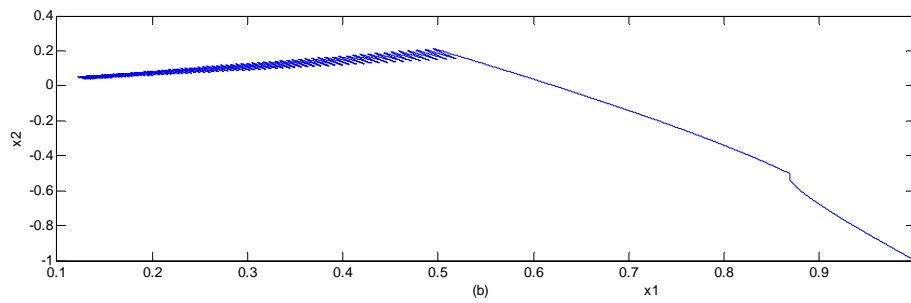
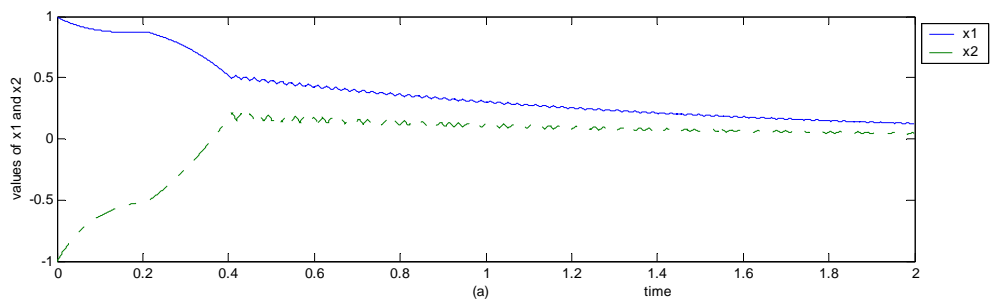


圖 5.4 ε 取 0.1，時間取 2 秒時 (a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；
(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。

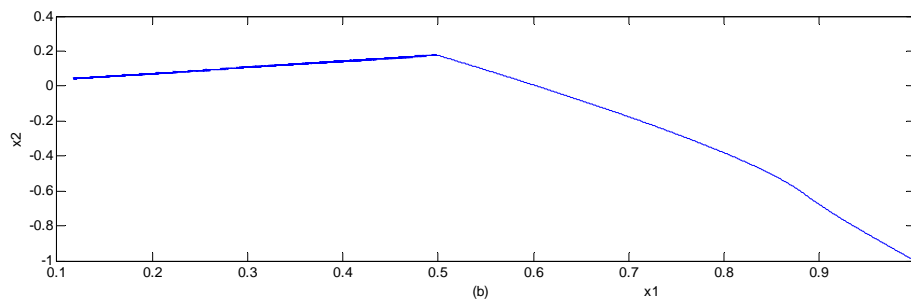
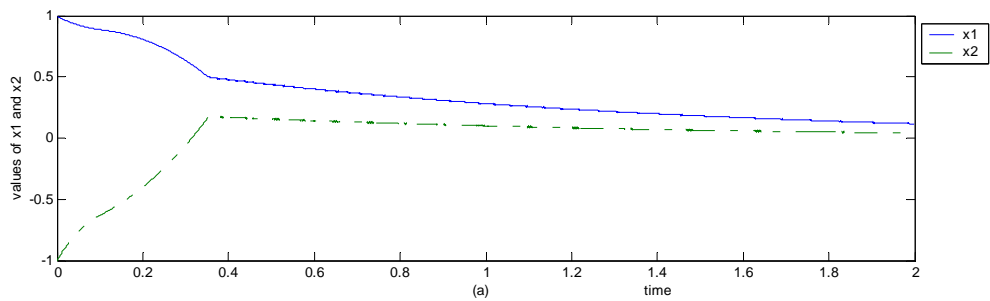


圖 5.5 ε 取 0.9，時間取 2 秒時 (a) x_1 與 x_2 對時間的分佈圖；
(b) x_1 為橫軸、 x_2 為縱軸的分佈圖。

5.2 兩個不可穩定線性控制系統之控制律及切換律設計

接下來將討論由 4.4 小節所述之系統，並且以附錄 4.A 的切換律建構出模擬。

Example 5.2.1

系統如公式(4.23)所述，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

很明顯的 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆不可穩定化，因此求是否可存在切換律使此系統達到穩定？

求解：



選取 $\beta = 4$ ，由公式(4.29)得到 $\underline{A} = (1 + \beta)A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

由公式(4.30)得到 $\underline{B} = [\underline{b}_1 \quad \sqrt{\beta} \underline{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

由公式(4.31)得到 $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此由 Riccati 得到 $P = \begin{bmatrix} 5.0981 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.549 \end{bmatrix}$

使得 $k_1 = [-5.071 \quad 0 \quad 0]$ 與 $k_2 = [0 \quad 0 \quad -2.549]$

$$\text{得到 } A_1 = \begin{bmatrix} -4.0981 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 與 } Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.549 \end{bmatrix}$$

$$\text{以及 } A_2 = \begin{bmatrix} 72.248 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11.7082 \end{bmatrix} \text{ 與 } Q_2 = \begin{bmatrix} -13.0623 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4271 \end{bmatrix}$$

最後 ε 取 0.5 得出圖 5.6

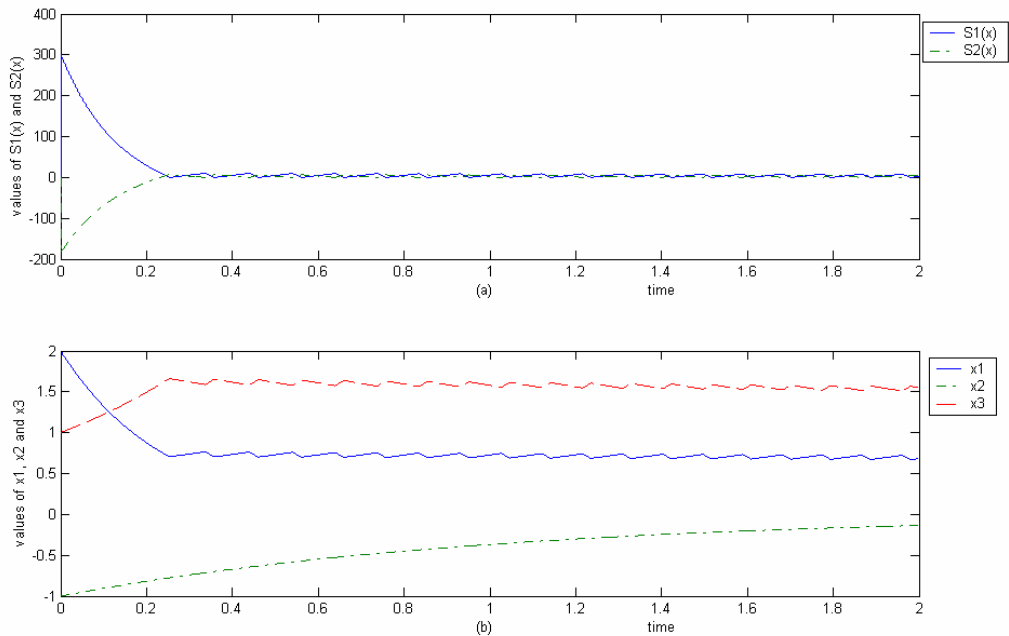


圖 5.6 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；

(b) x_1 、 x_2 與 x_3 對時間的分佈圖。

由我們可以用 C 的選取來改變 x_1 、 x_2 與 x_3 的收斂速度，在此我們令

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

而 β 值仍為 4 的情況下，得出 $P = \begin{bmatrix} 6.5311 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9271 \end{bmatrix}$

得到 $A_1 = \begin{bmatrix} -5.5311 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 與 $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9271 \end{bmatrix}$

最後 ε 取 0.5 得出，而且由圖 5.7 很明顯的看出 x_1 、 x_2 與 x_3 的收斂明顯的隨時間變快了。

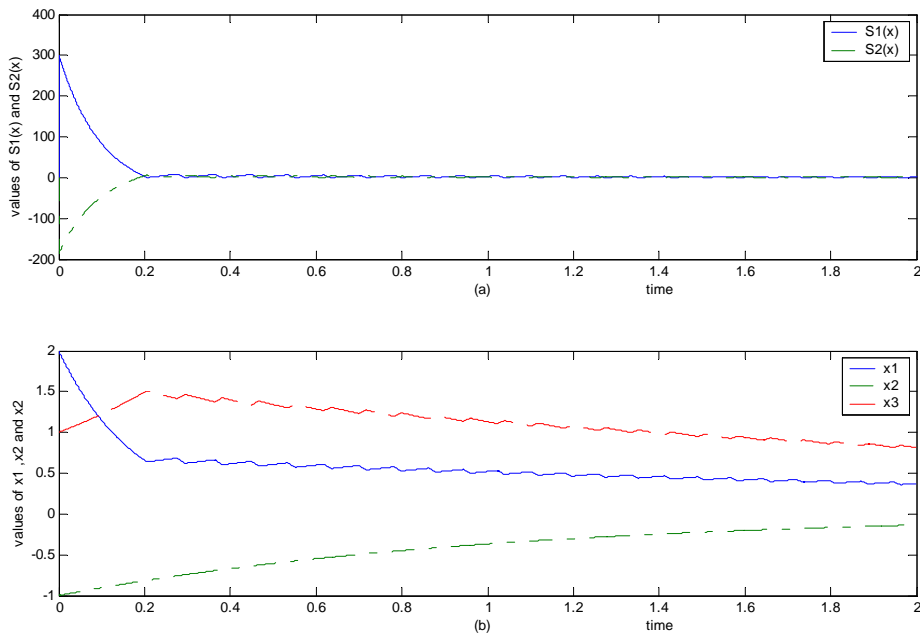


圖 5.7 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；

(b) x_1 、 x_2 與 x_3 對時間的分佈圖。

Example 5.2.2

系統如公式(4. xx)所述，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -7 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -0.7602 \\ -0.3766 \\ 0.4668 \\ -0.2497 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0.5641 \\ -0.0494 \\ 0.4792 \\ 0.6706 \end{bmatrix}$$

經過對角化，得到 A 的特徵值 $D = \begin{bmatrix} -0.5799 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4652 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.5137 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.5314 \end{bmatrix}$ ，與特

徵向量 $V = \begin{bmatrix} 0.2978 & -0.5989 & -0.7602 & 0.5641 \\ -0.8869 & -0.1385 & -0.3766 & -0.0494 \\ -0.1828 & -0.2715 & 0.4668 & 0.4792 \\ 0.3023 & 0.7406 & -0.2497 & 0.6706 \end{bmatrix}$

因此我們可以改寫 $A = VDV^{-1}$ ，與

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.2978 & -0.5989 & -0.7602 & 0.5641 \\ -0.8869 & -0.1385 & -0.3766 & -0.0494 \\ -0.1828 & -0.2715 & 0.4668 & 0.4792 \\ 0.3023 & 0.7406 & -0.2497 & 0.6706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0.2978 & -0.5989 & -0.7602 & 0.5641 \\ -0.8869 & -0.1385 & -0.3766 & -0.0494 \\ -0.1828 & -0.2715 & 0.4668 & 0.4792 \\ 0.3023 & 0.7406 & -0.2497 & 0.6706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

很明顯的 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆不可穩定化，選取 $\beta = 4$ 且 \underline{C} 為單位矩陣

得出 $P = \begin{bmatrix} 12.4333 & 9.5747 & -17.0404 & 5.5456 \\ 9.5747 & 7.5038 & -14.2760 & 3.9201 \\ -17.0404 & -14.2760 & 36.1925 & -3.2161 \\ 5.5456 & 3.9201 & -3.2161 & 4.1095 \end{bmatrix}$

接著附錄 4. A 所述步驟，最後 ε 取 0.5 得出圖 5.8

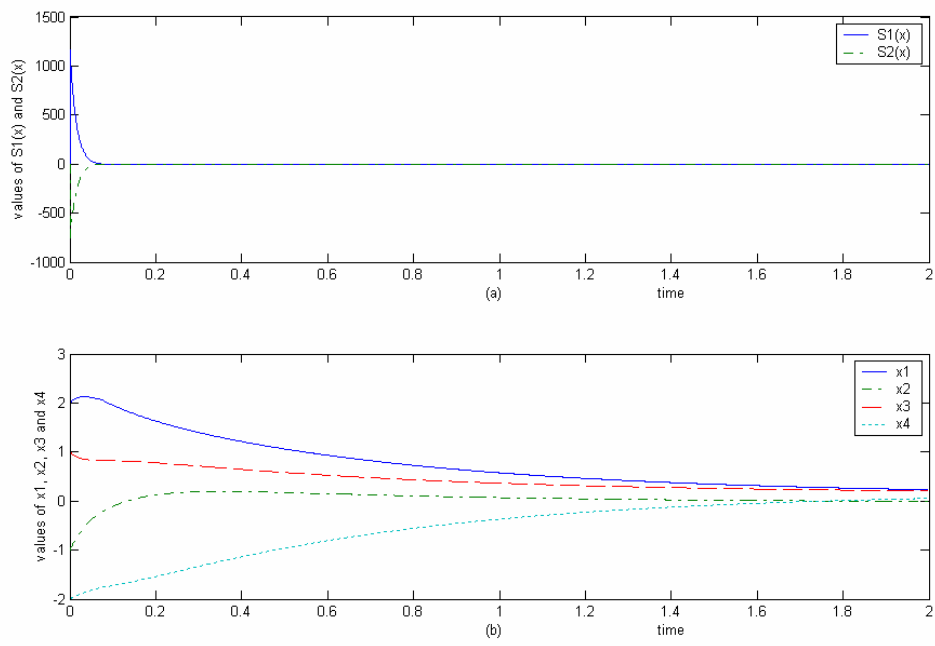


圖 5.8 ε 取 0.5，時間取 2 秒時 (a) $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$ 對時間的分佈圖；

(b) x_1 、 x_2 、 x_3 與 x_4 對時間的分佈圖。



CHAPTER 6

結論和未來研究方向

6.1 結論



本論文主要是提供了一個對於二階與 n 階不穩定系統間是否存在切換律使系統達到穩定的三個充分條件的對等性，以及把此方法運用到擁有輸入的不可穩定的控制系統中；以及在切換律的運用上，我們探討切換時機的特性，並且由**附錄 3.A** 為例，提出一個使不穩定狀態系統藉由切換達到穩定的切換律建構方法。接下來我精簡扼要的把本文中貢獻描述如下：

- 1、在二個皆為不穩定的二階系統 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i = 1, 2$ 中，我們首利用[14]所提出使用里奧波諾夫分析方法建構不穩定二階系統之切換律，且使此系統藉由此切換律達到穩定的充分條件，以及另外兩個很明顯成立的充分條件，並且經由證明後得出，此三個條件是互相對等。
- 2、相同於 1、所述，我們接下來證明在 n 階不穩定系統時，此三個條件亦是互相對等。

- 3、藉由 1、2、的結果，我們更進階的推廣到對於包含有控制律的 n 階不穩定狀態系統 $\dot{x} = Ax + \underline{b}_i u$ ， $i = 1, 2$ ，其中 (A, \underline{b}_1) 與 (A, \underline{b}_2) 皆為不可穩定化(Unstabilizable)。我們提出一個尋找切換律使得此包含有控制律的 n 階不穩定系統達到穩定的方法。
- 4、接著我們把 3、所述之條件，並且參照由[14]中尋找切換律的方法(也就是附錄 3.A)，寫出建構切換律的步驟。
- 5、我們也探討一個出現在公式(3.9)的控制參數 ε ，由 5.1.2 節的模擬得出，我們改變 ε 值的大小，當 ε 的值越大時，在初始值為 $x_0(t_0)$ 的系統狀態被推上順滑面(sliding surface)的時間越快，而且上到順滑面後，系統判斷切換的時間也越短，也就是說，提高 ε 值可以消滅(eliminate)“切跳(Chattering)”的現象；而當 ε 的值越小時，在初始值為 $x_0(t_0)$ 的系統狀態被推上順滑面(sliding surface)的時間越慢，且系統判斷切換的時間越長，也就是“切跳(Chattering)”的現象會隨 ε 的值越小而增加，即是此時系統軌跡對於平衡點的擺幅將會變大。

6.2 未來研究的方向

在前一小節已經列舉出目前研究的相關結果。然而事實上還有許多可以讓我們深入研究的地方：

首先，一個很明顯能夠看出來的方向：本篇論文中主要研究的兩個狀態系統為 $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ 與 $\dot{x} = Ax + \underline{b}_i u$ ， $i = 1, 2$ 。我們可以把不穩定系統的數目增加，也就是當 $i = 1, 2, \dots, m$ ， $m > 2$ 時，再依照第四章所提出的三個充分條件

來建構出使此系統穩定之切換律的充分條件。

另外我們得知，在[26]中提出的兩個不穩定狀態系統，並不符合[8]中所述的尋找切換律條件，但是仍然可以藉由切換來達到穩定。因此能否建構出整個不穩定狀態系統切換律的充分與必要條件將會是未來我們所要研究的一個主要方向之一。

其次，在 4.4 節探討擁有控制律 $u(x)$ 的不穩定系統間是否存在有切換律使系統達到穩定的部分，本篇論文只有提出一個尋找切換律的方法，以及提供一個建構切換律的步驟。然而離此研究的最終目的：建構出整個藉由切換律使系統達到穩定的充分與必要條件還有一段距離，這也是未來我們需要加以研究討論的地方。

最後我們可以把此建構切換律的方法運用到實作上，比如電子電路上的切換器系統等等，並且可以與一般傳統的控制方法作比較，來探討其優缺點、適用的範圍與實用性。



参考文献

- [1] M. Akar and K. S. Narendra, "On the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order LTI discrete-time systems," *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, VA Volume: 4, 25-27. June 2001 pp.2572 - 2577
- [2] D. Cheng, "Stabilization of planar switched systems," *Systems & Control Letters* 51 (2004) 79-88
- [3] C. M. Dorling, and A. S. I. Zinober, "Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure systems," *Int. J. Control*, Vol. 44, pp. 65-82 1986.
- [4] E. Feron, "Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback," technical report CICS-P-468, MIT, 1996.
- [5] G. Feng, "Controller synthesis of Fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions and bilinear matrix inequalities," *Fuzzy Systems*, 2003. FUZZ '03. *The 12th IEEE International Conference on* , Volume: 2 , 25-28 May 2003 pp. 1327- 1332
- [6] H. F. L. Frank, K. S. T. Peter, C. K. Li, "The control of switching dc-dc converters – A general LQR problem," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*.. VOL.38, NO. 1. February 1991 pp.413 - 418
- [7] H. F. L. Frank, K. S. T. Peter, C. K. Li, "An improved LQR-based controller for switching dc-dc converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*.. VOL.40, NO. 5. October 1993 pp.521 - 528
- [8] M. Johansson, A. Rantzer, and K-E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, VOL. 7, NO. 6, DECEMBER 1999 pp.713 - 722
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice-Hall, second edition, 1996.
- [10] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-Matrices," *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL.

39, NO. 12, December 1994 pp.2469 - 2471

[11] Y. J. Kautsky, N. K. Nichols, and P. Van Doorn, "Robust pole assignment in linear state feedback," *Int. J. Control*, Vol. 41, pp. 1129-1155, 1985.

[12] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control Systems*, Volume: 19 ,Issue: 5, October 1999 pp.59 - 70

[13] Y-F Liu, P. C. Sen, "A novel Method to achieve Zero-Voltage regulation in buck converter," *IEEE Transactions on Power Electronics*. VOL. 10, NO. 3. May 1995 pp. 292 - 301

[14] M. A. Wicks, P. Peleties and R. A. DeCarlo, "Construction of piecewise lyapunov functions for stabilizing switched systems," *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control* , Lake, Buena Vista, FL - December 1994 pp.3492 - 3497 vol.4

[15] N. Mohan, T. M. Undeland, W. P. Robbins, 江炫樟編譯, 電力電子學, 全華科技圖書股份有限公司, 2002.

[16] R. D. Middlebrook & S. Cuk, "A general unified approach to modeling switching-converter power stages," 1976 IEEE. Reprinted, with permission, from *Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialists Conference*, June 8 - 10, 1976, Cleveland, OH.

[17] R. D. Middlebrook. & S. Cuk, "A general unified approach to modeling switching DC-TO-DC converters in discontinuous conduction mode," 1977 IEEE. Reprinted, with permission, from *Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialists Conference*, June 14 - 16, 1977, Ralo Alto, CA.

[18] T. Ooba and T. Funahashi, "Two conditions concerning common quadratic lyapunov function for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 42, NO. 5, May 1997 pp.719 - 722

[19] P. Peleties, R. DeCarlo, "Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions," *Proceedings of the 31st IEEE Conference on* ,16-18 Dec. 1992 pp.3438 - 3439 vol.4

[20] H. Sun, J. Zhao, "Control lyapunov functions for switched control systems," *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA June 25-27, 2001.

pp.1890 - 1891 vol.3

[21] J.-J. E. Slotine, and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[22] S. R. Sanders and G. C. Verghese, "Lyapunov-based control for switched power converters," *IEEE Transactions on Power Electronics*. VOL. 7, NO. 1. January 1992 pp.17 - 24

[23] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 48, NO. 4, April 2003 pp.618 - 621

[24] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "On the stability and existence of common Lyapunov function for stable linear switching systems," *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, Tampa, Florida USA. December 1998 pp.3723 - 3724 vol.4

[25] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "A sufficient condition for the existence of a common Lyapunov function for two second order linear systems," *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision & Control*, San Diego, California USA. December 1997 pp.3521 - 3522 vol.4

[26] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov Function for two stable second order linear time-invariant systems," *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California. June 1999. pp.1410 - 1414 vol.2

[27] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov Function for M stable second order linear time-invariant systems," *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois. June 2000 pp.359 - 363 vol.1

[28] R. N. Shorten and K. S. Narendra, and O. Mason, "A result on common quadratic Lyapunov functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 48, NO. 1. January 2003 pp.110 - 113

[29] T. Suetsugu, “Novel PWM control Method of switched capacitor DC_DC converter,” *Circuits and Systems, 1998. ISCAS '98. Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on*, Volume: 6 , 31 May-3 June 1998 pp.454 - 457 vol.6

[30] T. Umeno, K. Takahashi, I. Oota, F. Ueno, T. Inoue, “New switched-capacitor DC-DC converter with low input current ripple and its hybridization,” *Circuits and Systems, 1990., Proceedings of the 33rd Midwest Symposium on* , 12-14 Aug. 1990 pp.1091 - 1094 vol.2

[31] 陳永平, 可變結構控制, 全華科技圖書, 1999.

[32] 鄭培璿, 電力電子分析與模擬, 全華科技圖書股份有限公司, 2002.

