

國立交通大學

光電學院

影像與生醫光電研究所

碩士論文

探討扭曲向列型液晶顯示器之電壓保持率

Investigation of Voltage Holding Ratio of Twisted Nematic

Liquid Crystal Displays.

研究生：郭智豪

指導教授：楊界雄 教授

中華民國一百年七月

探討扭曲向列型液晶顯示器之電壓保持率
Investigation of Voltage Holding Ratio of Twisted Nematic
Liquid Crystal Displays

研究生：郭智豪

Student : Chih-Hao Kuo

指導教授：楊界雄

Advisor : Kei-Hsiung Yang

國立交通大學
影像與生醫光電研究所
碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Imaging and Biomedical Photonics

College of Photonics

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Imaging and Biomedical Photonics

July 2011

Tainan, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

探討扭曲向列型液晶顯示器之電壓保持率

學生：郭智豪

指導教授：楊界雄

國立交通大學影像與生醫光電研究所碩士班

摘 要

離子效應是影響液晶顯示器最重要的因素，過去的文獻中所探討的離子大部分皆為高解離率的離子，鮮少對低解離率離子進行探討及分析，所以本論文的研究方向是藉由電壓保持率(Voltage Holding Ratio, VHR)的量測來分析高、低解離率離子。

本論文主要研究為藉由 VHR 的量測可以得到液晶盒中的離子所造成的電壓變化，並由此電壓變化可以得知有多少離子累積在邊界上形成內建電場，而這些離子包括了高、低解離率離子，因此本論文推導出高、低解離率離子在 VHR 量測過程中之解析解型式，藉由此解析解可以求出高、低解離率離子在液晶盒中的初始濃度以及在 VHR 量測時高、低解離率離子之離子遷移率。最後，由實驗數據和理論值的比較來驗證此理論的正確性。

Investigation of Voltage Holding Ratio of Twisted Nematic Liquid Crystal Displays

Student: Chih-Hao Kuo

Advisor: Dr. Kei-Hsiung Yang

Institute of Imaging and Biomedical Photonics
National Chiao Tung University

Abstract

Ion concentration is the most important parameter to affect the display qualities of liquid crystal displays. Prior publications on the measurement of ion concentration did not distinguish ions either from high- or low-ionization-rate impurities. In this thesis, for the first time, we have developed theoretical model for the ion generations and transports for HIR (high-ionization-rate) and LIR (low-ionization-rate) impurities within a TN cell. By fitting our experimental result of the measured VHR data to the theoretical model, we have obtained ion concentration and mobility for LIR impurities within three TN cells made from different alignment layers and LC mixtures.

The results of our investigation about that most of ions excited in our TN cells came from ions of LIR impurities owing to the maturity of LC-panel-manufacture technology and the usage of high-purity LC mixtures to reduce the HIR ions to a negligible amount.

The theoretical model developed in this thesis can be properly expanded to deal with ion generation and transport in the alignment layers of a TN cells.

誌 謝

本論文可以順利完成，最要感謝的人是我的指導教授楊界雄教授。在這兩年的日子裡，讓我從一個不知液晶是何物的門外漢到論文的完成，都是楊界雄教授熱情且耐心教導之下的成果，楊教授不僅是學識豐富，其人生閱歷更是精彩，也使我在專業科目之外拓展了新的知識，在此對楊教授獻上最大的感謝。

其次要感謝我的父母和姊姊，在我念研究所的這段時間裡一直在背後支持著我、鼓勵著我，在我無助的時刻給予我關懷，讓我擁有持續前進的勇氣，也因此才得以完成本論文。

此外我要感謝和我一起同甘共苦的實驗室同學們。感謝林禹任同學和廖偉翔同學在我寫程式遇上問題時給予我的幫助；感謝陳信旭同學和我一起討論離子的物理機制；感謝學弟和學妹：黃偉彥、王聖雅、吳皇明、徐菀君，使我們的實驗室充滿愉快的氣氛；感謝鄭協昌教授和鄭協昌教授實驗室的李杰倫學長和其他同學在這段求學過程裡對我的照顧，尤其是李杰倫學長時常從旁協助我解決量測時遇到的問題，真是十分感謝。

另外要感謝奇美電子提供我們實驗室一些液晶盒樣品，由於這些液晶盒樣品的品質很好，因此在分析實驗數據時可以屏除一些會影響實驗結果的不安因素，本論文所推導的理論運算才能獲得證實。

最後要感謝的是和我一起光電學院度過這段時光的人們，感謝他們不論是在課業上亦或是在生活上給予我的所有幫助。



目 錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	v
表目錄	vii
圖目錄	viii
符號說明	ix
一、 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 離子來源	2
1.3 離子效應模型	3
1.4 離子效應的影響	4
1.4.1 電壓保持率	4
1.4.2 畫面閃爍	6
1.4.3 臨界電壓	6
1.5 論文研究重點以及目的	6

二、	理論推導.....	7
2.1	VHR 量測曲線方程式推導.....	7
2.2	高、低解離率離子.....	11
2.2.1	高解離率離子推導.....	12
2.2.2	低解離率離子推導.....	18
三、	實驗部分.....	27
3.1	實驗架構.....	27
3.2	實驗分析.....	30
3.3	實驗結果.....	33
3.3.1	樣品 1 實驗結果.....	33
3.3.2	樣品 2 實驗結果.....	35
3.3.3	樣品 3 實驗結果.....	36
四、	結論與未來展望.....	38
	參考文獻.....	39
	附錄.....	40

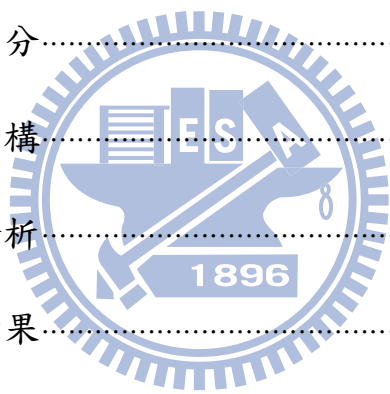


表 目 錄

表 3-1	樣品 1 參數表.....	33
表 3-2	樣品 1 之計算結果.....	34
表 3-3	樣品 2 參數表.....	35
表 3-4	樣品 2 之計算結果.....	36
表 3-5	樣品 3 參數表.....	36
表 3-6	樣品 3 之計算結果.....	37

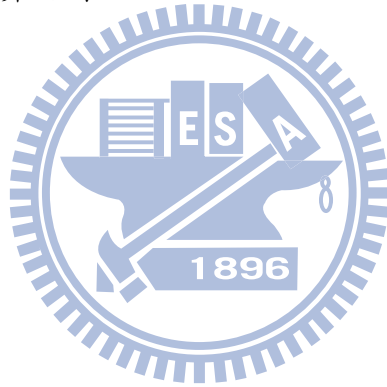
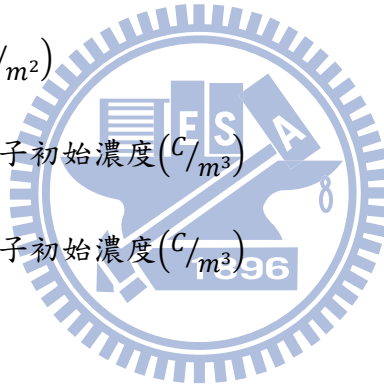


圖 目 錄

圖 1-1	離子電荷在直流電壓下的運動示意圖.....	3
圖 1-2	VHR 定義圖.....	5
圖 2-1	推導模型圖.....	8
圖 2-2	VHR 曲線圖.....	9
圖 3-1	VHR 量測系統架構圖.....	27
圖 3-2	$V_{ion}(t)$ 轉換示意圖.....	30
圖 3-3	實驗分析圖.....	30
圖 3-4	樣品 1 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖.....	33
圖 3-5	樣品 2 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖.....	35
圖 3-6	樣品 3 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖.....	37

符 號 說 明

V_i	外加電壓
V_f	經過一個幀的開路時後所量測到的電壓值
ρ_{LC}^+	液晶層中的正離子濃度(C/m^3)
ρ_{LC}^-	液晶層中的負離子濃度(C/m^3)
ρ_{PI}^+	配向層中的正離子濃度(C/m^3)
ρ_{PI}^-	配向層中的負離子濃度(C/m^3)
σ	表面累積密度(C/m^2)
$\rho_{LC(i)}^+$	液晶層中的正離子初始濃度(C/m^3)
$\rho_{LC(i)}^-$	液晶層中的負離子初始濃度(C/m^3)
ϵ_{LC}	液晶層之電容率
ϵ_{PI}	配向層之電容率
V_{ion}	離子造成之壓降
C_e	單位面積之電容(F/m^2)
μ	遷移率($m^2/V * s$)
E_{app}	外加電場



第一章 緒論

1.1 前言

目前液晶顯示器 (Liquid Crystal Display, LCD) 已經被廣泛的使用在各種產品上, 如個人電腦、筆記型電腦等。但是由於液晶顯示器的驅動電壓是操作在低頻範圍, 低頻的操作電壓將會有離子效應的現象發生, 這是因為存在於液晶顯示器中的離子電荷在低頻下具有足夠的運動時間到達邊界形成內建電場, 使得液晶分子的指向矢有所改變並對液晶顯示器造成了顯示品質的影響。因為此離子效應所造成之問題包括: 電壓保持率 (Voltage Holding Ratio)、畫面閃爍 (Flicker)、臨界電壓 (Threshold Voltage)、影像殘留 (Image sticking) 和可靠度 (reliability) 等等。

為了得知會影響顯示品質的離子濃度有多少, 本論文將藉由理論來分析電壓保持率的量測圖形, 並進而求出離子濃度及其遷移率 (mobility)。

1.2 離子來源[1]

關於液晶盒中離子的來源，根據之前的文獻[1]可以知道，主要來源有以下四種：

(一) 液晶材料

在製造液晶材料的過程中，即有少量的離子存在於其中；如果液晶材料經由紫外線照射也會分解出離子。

(二) 配向膜材料

在液晶盒的製程中，配向膜的鍍膜 (Coating) 及固化 (Curing) 過程中也會產生出少量離子。

(三) 封膠及間隙物

為了有完整固化封膠的製程，液晶盒會長時間處於高溫的狀態之下，因此離子將會有足夠的時間從封膠材料及間隙物中分解出來。

(四) 電極

在一般的考量下，配向膜被視為一層完全的絕緣體，若將液晶樣品操作在較高的電壓時，離子將有可能穿越配向膜注入液晶層中。

1.3 離子效應模型[1]

為了探討離子效應所造成的許多光電現象，有許多的離子效應模型被提出來解釋這些現象，以下將以其中一種常見的離子效應模型—電雙層模型（Electric Double Layers Mode，EDL Mode）來做個簡單的介紹。

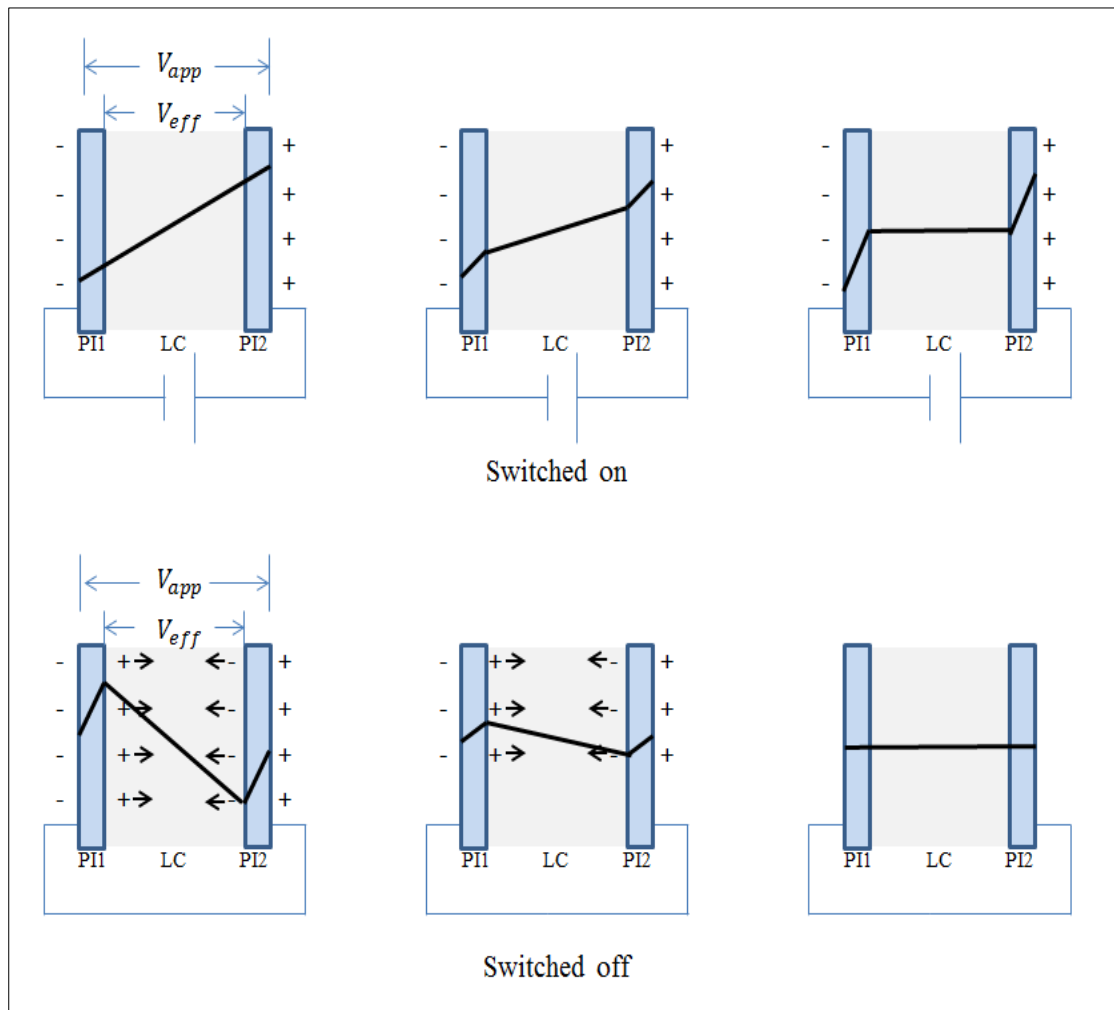


圖 1-1 離子電荷在直流電壓下的運動示意圖

參考上圖 1-1，離子因為外加電場的關係，會移動到 PI-LC 界面上建立電雙層，使得液晶層的有效電壓下降，直到液晶層的有效電壓為零；當外加電壓關閉時，界面上因為離子所造成的內建電場並不會立即消失，而是隨著時間逐漸遞減，因此液晶層的有效電壓便會隨著電雙層所建立的內建電壓而變化。

1.4 離子效應的影響

下述將對離子效應造成的影響：電壓保持率（Voltage Holding Ratio）、畫面閃爍（Flicker）、臨界電壓（Threshold Voltage）做個簡單的介紹。



1.4.1 電壓保持率（Voltage Holding ratio） [2][5][6]

VHR 的定義為外加一起始電壓 V_i 於液晶盒上，經過一個幀的開路時間之後所量測到的電壓值 V_f 的比值，即 $VHR = V_f / V_i$ ，如下圖 1-2。

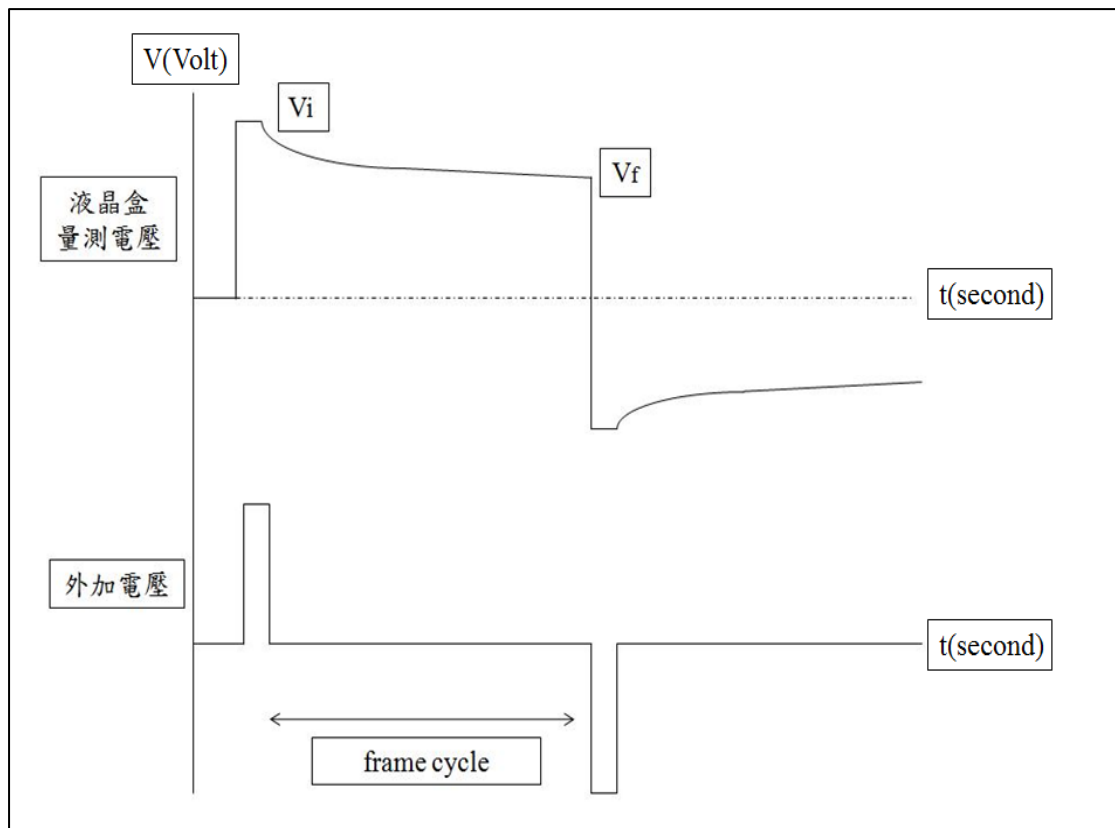


圖 1-2 VHR 定義圖

VHR 對於 LCD 而言是很重要的參數。由於 LCD 在低頻驅動下，離子有足夠的時間漂移到達配向層和液晶層的界面上形成內建電場，並造成 VHR 下降。因此，越高的 VHR 值代表著此顯示器擁有越好的顯示品質。

1.4.2 畫面閃爍 (Flicker)

當離子有足夠的時間到達界面上形成內建電場後，液晶實際上所感受到的有效電場便會降低，此時LCD的光穿透度也會隨之改變，若改變的幅度在正電壓幀的時間內，不同於在負電壓幀的時間內的情況之下，就會產生畫面閃爍。

1.4.3 臨界電壓 (Threshold Voltage)

當外加電壓恰好足以使得液晶轉動時，此電壓便稱為液晶的臨界電壓。在液晶層內部有離子產生內建電場的情形之下，液晶實際感受到的電場下降，此時外加電壓必須增加才能使得液晶轉動。

1.5 論文研究重點以及目的

綜合上述，離子對於液晶顯示器的影響十分巨大，因此如何得知液晶盒內的離子濃度便是非常重要的課題，本論文主要將藉由電壓保持率 VHR 來分析液晶盒內的離子濃度及其遷移率 (mobility)，並藉由電壓保持率的量測圖形進一步分別探討高解離率 (High Ionization Rate) 離子和低解離率 (Low Ionization Rate) 離子的各自濃度和各自的遷移率 [3][4]。

第二章 理論推導

2.1 VHR 量測曲線方程式推導[5][6]

在 VHR 量測期間時，因為此時量測迴路是開路狀態，故累積在電極上的表面電荷 $\sigma(t)$ 可以視為一定值。若外加電壓未超過臨界電壓，亦即液晶未轉動，即可將液晶的介電常數（dielectric constant）視為一常數，因此液晶層電容也可以視為定值。

為了推導 VHR 曲線方程式，我們可以藉由下圖 2-1 的模型來模擬液晶盒電壓變化。其中配向層 PI_a 和 PI_b 的厚度為 d_{PI} ，配向層介電常數為 ϵ_{PI} ，液晶層厚度為 d_{LC} ，液晶層介電常數為 ϵ_{LC} 。假設正離子濃度和負離子電荷量相同以及正離子濃度和負離子濃度等量，即：

$$\rho_{LC}^+(t) = \rho_{LC}^-(t) = \frac{1}{2}\rho_{LC}(t) \quad \left(C/m^3 \right) \quad (2.1.1)$$

$$\rho_{PI}^+(t) = \rho_{PI}^-(t) = \frac{1}{2}\rho_{PI}(t) \quad \left(C/m^3 \right) \quad (2.1.2)$$

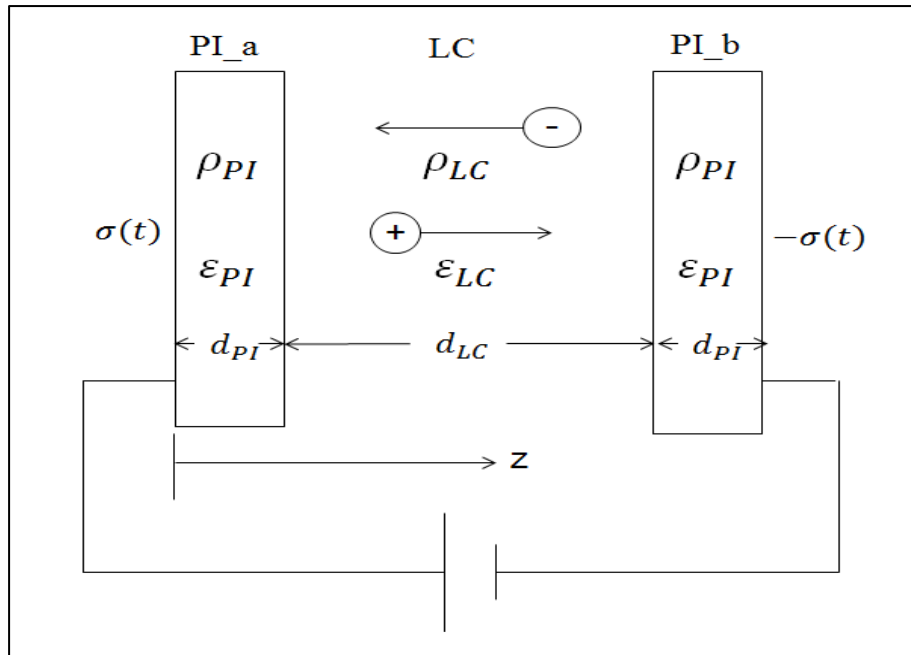


圖 2-1

根據高斯定理，我們可以得到各層的電場如下：

PI_a 層：

$$E_{PI_a}(t) = \frac{1}{\epsilon_{PI}} (\sigma(t) + \int_0^z \rho_{PI}(t) dz) \quad (2.1.3)$$

LC 層：

$$E_{LC}(t) = \frac{1}{\epsilon_{LC}} \left\{ \sigma(t) + \int_0^{d_{PI}} \rho_{PI}(t) dz + \int_{d_{PI}}^z \rho_{LC}(t) dz \right\} \quad (2.1.4)$$

PI_b 層：

$$E_{PI_b}(t) = \frac{1}{\epsilon_{PI}} \left\{ \sigma(t) + \int_0^{d_{PI}} \rho_{PI}(t) dz + \int_{d_{PI}}^{d_{PI}+d_{LC}} \rho_{LC}(t) dz + \int_{d_{PI}+d_{LC}}^z \rho_{PI}(t) dz \right\} \quad (2.1.5)$$

在得到各層電場之後，利用電壓和電場的關係式即可求得液晶盒整體電壓變化如式子 (2.1.6)，將式子 (2.1.6) 整理之後即可得到式子 (2.1.7)。整體電壓變化 $V(t)$ 如圖 2-2。

$$V(t) = - \int_0^{d_{PI}} E_{PI,a}(t) dz - \int_{d_{PI}}^{d_{PI}+d_{LC}} E_{LC}(t) dz - \int_{d_{PI}+d_{LC}}^{d_{PI}+d_{LC}+d_{PI}} E_{PI,b}(t) dz \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\sigma(t)}{C_e} - \left[\frac{1}{C_e} d_{PI} \rho_{PI}(t) + \frac{1}{C_e} \frac{1}{2} d_{LC} \rho_{LC}(t) \right] \\ &= V_i - \left[\frac{1}{C_e} d_{PI} \rho_{PI}(t) + \frac{1}{C_e} \frac{1}{2} d_{LC} \rho_{LC}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

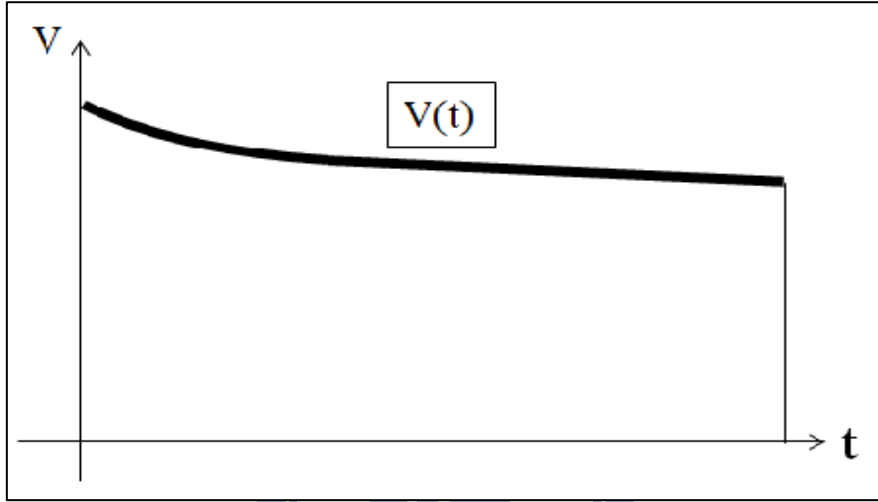


圖 2-2

由式子 (2.1.7) 可以定義一個由離子產生的壓降 $V_{ion}(t)$

$$\begin{aligned} V_i - V(t) = V_{ion}(t) &= \left[\frac{1}{C_e} d_{PI} \rho_{PI}(t) + \frac{1}{C_e} \frac{1}{2} d_{LC} \rho_{LC}(t) \right] \\ &= \left[\frac{1}{C_e} \sigma_{PI(b)}(t) + \frac{1}{C_e} \frac{1}{2} \sigma_{LC(b)}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

其中：

$$C_e = \frac{2d_{PI}}{\epsilon_{PI}} + \frac{d_{LC}}{\epsilon_{LC}} \quad (F/m^2) \quad (2.1.9)$$

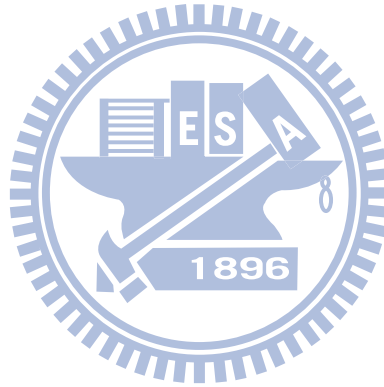
$$\rho_{LC}(t) = \rho_{LC}^+(t) + \rho_{LC}^-(t); \quad \rho_{LC}^+(t) = \rho_{LC}^-(t) \quad (2.1.10)$$

$$\rho_{PI}(t) = \rho_{PI}^+(t) + \rho_{PI}^-(t); \quad \rho_{PI}^+(t) = \rho_{PI}^-(t) \quad (2.1.11)$$

式子 (2.1.8) 代表著 $V_{ion}(t)$ 是由配向層和液晶層的離子共同造成的，為了簡化之後的計算，本論文將不考慮配向層的離子，如此一來

式子 (2.1.8) 則可以簡化成下式：

$$V_{ion}(t) = \frac{1}{c_e} \frac{1}{2} \sigma_{LC(b)}(t) \quad (2.1.12)$$



2.2 高、低解離率離子[3][4]

為了分析 VHR 量測圖形，我們引入了高、低解離率離子的概念 [3][4]。由文獻上可以知道離子可以分成兩個種類，一種是時常保持離子狀態的高解離率離子，另一種則是呈現中性雜質分子與離子共存狀態的低解離率離子。高解離率離子濃度在液晶盒中可以視為一定量，但是低解離率離子在液晶盒中一直反覆持續著解離和結合的動作，因此低解離率離子濃度不像高解離率離子濃度是一固定量。

在 2.1 節的式子 (2.1.12) 中， $\sigma_{LC(b)}(t)$ 代表著累積在邊界上形成內建電場的離子密度，其中包括了高、低解離率離子。

$$\sigma_{LC(b)}(t) = \sigma_{b(high)}(t) + \sigma_{b(low)}(t) \quad (2.2.1)$$

為了得到液晶盒中的高、低解離率離子濃度，我們必須先推導高、低解離率離子在 VHR 量測期間的解析解方程式。

2.2.1 高解離率離子推導



依據上述對高解離率離子的簡述，我們可以知道其化學表示式應為 (2.2.2)，其中 AB 代表中性分子，而 A^+ 和 B^- 則是高解離率的正、負離子。因為高解離率離子一直保持著離子化的狀態，在一外加電壓 E_{app} 下，我們可以列出速率方程式 rate equation (2.2.3) 及 (2.2.4) 來求出高解離率正、負離子濃度。其中：符號 $\rho_{LC}^+(t)$ 、 $\rho_{LC}^-(t)$ 分別代表正、負離子濃度，單位是 C/m^3 ； μ 為遷移率，單位是 $m^2/V \cdot s$ ； $E(t)$ 則是 VHR 量測時作用於液晶層的有效電場。為了推導還需要一些假設條件如下：

1. 不考慮配向層。

2. $\rho_{LC}^+(t) = \rho_{LC}^-(t) = \frac{1}{2} \rho_{LC}(t)$ 。

3. $\rho_{LC}(t)$ 不包括已累積在界面上的離子。

4. 累積在界面上的離子密度為 $\sigma_{LC(b)}^\pm(t) = d_{LC} \left(\rho_{LC(i)}^\pm - \rho_{LC}^\pm(t) \right)$,

其中 $\rho_{LC(i)}^\pm$ 為初始濃度。

5. $\mu^+ = \mu^- = \mu$ 。

Rate equation :

$$\frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} = -\frac{\mu E(t)}{d} \rho_{LC}^+(t) \quad (2.2.3)$$

$$\frac{d\rho_{LC}^-(t)}{dt} = -\frac{\mu E(t)}{d} \rho_{LC}^-(t) \quad (2.2.4)$$

作用於液晶層的有效電場 $E(t)$ 為外加電場 E_{app} 減去離子造成的內建電場 $E_{ion}(t)$:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{app} - E_{ion}(t) = E_{app} - \frac{1}{d_{LC}} V_{ion}(t) = E_{app} - \frac{1}{d_{LC}} \frac{1}{C_e} d_{LC} (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_{LC}^+(t)) \\ &= E_{app} - \frac{1}{C_e} (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_{LC}^+(t)) = \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) + \frac{1}{C_e} \rho_{LC}^+(t) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

因為正、負離子的計算式僅在符號的差別，因此以下的推導以正離子代表。首先將式子 (2.2.5) 代入式子 (2.2.3) 後可以得到式子 (2.2.6)。

$$\frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} = -\frac{\mu}{d} \left[\left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) + \frac{1}{C_e} \rho_{LC}^+(t) \right] \rho_{LC}^+(t) \quad (2.2.6)$$

為了簡化式子，可以使用代數來代替如：

$$a = E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \quad (2.2.7)$$

$$b = \frac{1}{C_e} \quad (2.2.8)$$

因此式子 (2.2.6) 可以簡化成下式：

$$\frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} = -\frac{\mu}{d}[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t) \quad (2.2.9)$$

將式子 (2.2.9) 重新整理後可以得到式子 (2.2.10)：

$$\frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t)} d\rho_{LC}^+(t) = -\frac{\mu}{d} dt$$

$$\int \frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t)} d\rho_{LC}^+(t) = \int -\frac{\mu}{d} dt \quad (2.2.10)$$

式子 (2.2.10) 中的積分式可以藉由下述方式分開：

$$\frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t)} = \frac{m}{\rho_{LC}^+(t)} + \frac{n}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]} = \frac{m[a + b\rho_{LC}^+(t)] + n\rho_{LC}^+(t)}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t)}$$

由 $ma + [mb + n]\rho_{LC}^+(t) = 1$ 可以知道 $ma = 1$ 及 $mb + n = 0$ ，因

此可以得到 $m = \frac{1}{a}$ 以及 $n = -\frac{b}{a}$ 。如此一來式子 (2.2.10) 即可經由

計算得到式子 (2.2.11)，其中 C 和 C^* 是未定係數。

將 $\frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]\rho_{LC}^+(t)} = \frac{1}{a} \frac{1}{\rho_{LC}^+(t)} - \frac{b}{a} \frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]}$ 代入式子 (2.2.10)：

$$\int \left[\frac{1}{a} \frac{1}{\rho_{LC}^+(t)} - \frac{b}{a} \frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]} \right] d\rho_{LC}^+(t) = \int -\frac{\mu}{d} dt$$

上式兩邊同時乘 a :

$$\int \left[\frac{1}{\rho_{LC}^+(t)} - b \frac{1}{[a + b\rho_{LC}^+(t)]} \right] d\rho_{LC}^+(t) = \int -\frac{\mu a}{d} dt$$

$$\ln[\rho_{LC}^+(t)] - b \frac{1}{b} \ln[a + b\rho_{LC}^+(t)] = -\frac{\mu a t}{d} + C$$

$$\ln \left[\frac{\rho_{LC}^+(t)}{a + b\rho_{LC}^+(t)} \right] = -\frac{\mu a t}{d} + C$$

$$\frac{\rho_{LC}^+(t)}{a + b\rho_{LC}^+(t)} = C^* e^{-\mu a t/d} \quad (2.2.11)$$

代入初始條件 $\rho_{LC}^+(0) = \rho_{LC}^+(i)$ 後即可求得未定係數 :

$$C^* = \frac{\rho_{LC}^+(i)}{a + b\rho_{LC}^+(i)} \quad (2.2.12)$$

並且將 (2.2.11) 整理後可以得到 $\rho_{LC}^+(t)$ 如下式 (2.2.13)

$$\rho_{LC}^+(t) = C^* e^{-\mu a t/d} [a + b\rho_{LC}^+(t)]$$

$$[1 - bC^* e^{-\mu a t/d}] \rho_{LC}^+(t) = aC^* e^{-\mu a t/d}$$

$$\rho_{LC}^+(t) = \frac{aC^* e^{-\mu a t/d}}{[1 - bC^* e^{-\mu a t/d}]} = \frac{aC^*}{e^{\mu a t/d} - bC^*} = \frac{a \frac{\rho_{LC}^+(i)}{[a + b\rho_{LC}^+(i)]}}{e^{\mu a t/d} - b \frac{\rho_{LC}^+(i)}{[a + b\rho_{LC}^+(i)]}} \quad (2.2.13)$$

因為 $a + b\rho_{LC(i)}^+ = E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+ + \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+ = E_{app}$ ，將

$a + b\rho_{LC(i)}^+ = E_{app}$ 、式子 (2.2.7) 以及式子 (2.2.8) 一起代入式子

(2.2.13) 整理過後，即可求得 $\rho_{LC}^+(t)$ ：

$$\rho_{LC}^+(t) = \left[\frac{\frac{1}{E_{app}} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right)}{e^{\mu at/d} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+} \right] \rho_{LC(i)}^+ = \left[\frac{1 - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+}{e^{\mu at/d} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+} \right] \rho_{LC(i)}^+$$

其中時間常數 $\tau = \frac{d}{\mu a} = \frac{d}{\mu \left[E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right]}$ 。

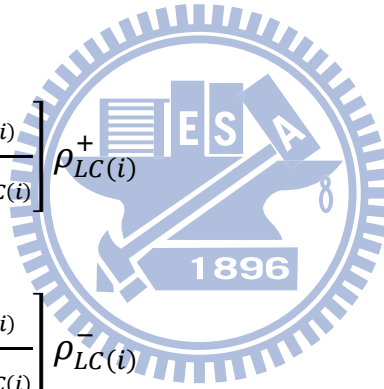
經由上述的推導即可求出高解離率的正、負離子在 VHR 量測時

的解析解型式：

$$\rho_{LC}^+(t) = \left[\frac{1 - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+}{e^{t/\tau} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+} \right] \rho_{LC(i)}^+ \quad (2.2.14)$$

$$\rho_{LC}^-(t) = \left[\frac{1 - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^-}{e^{t/\tau} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^-} \right] \rho_{LC(i)}^- \quad (2.2.15)$$

其中時間常數 $\tau = \frac{d}{\mu \left[E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right]}$ 。



由式子 (2.2.1) 知道，實驗分析所需要的是 $\sigma_{b(high)}(t)$ ，因此
 可以將剛才求得的 $\rho_{LC}(t)$ 換算成 $\sigma_{b(high)}(t)$ 的形式。

$$\begin{aligned}\sigma_{b(high)}^+(t) &= d_{LC}[\rho_{LC(i)}^+ - \rho_{LC}^+(t)] \\ &= d_{LC} \left[\rho_{LC(i)}^+ - \left[\frac{1 - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+}{e^{t/\tau} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^+} \right] \rho_{LC(i)}^+ \right] \quad (2.2.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{b(high)}^-(t) &= d_{LC}[\rho_{LC(i)}^- - \rho_{LC}^-(t)] \\ &= d_{LC} \left[\rho_{LC(i)}^- - \left[\frac{1 - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^-}{e^{t/\tau} - \frac{1}{C_e E_{app}} \rho_{LC(i)}^-} \right] \rho_{LC(i)}^- \right] \quad (2.2.17)\end{aligned}$$

其中時間常數 $\tau = \frac{d}{\mu \left[E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right]}$ 。

如此一來，將此解析解配合上實驗數據後，即可求出高解離率離子在液晶層的初始濃度 $\rho_{LC(i)}$ 以及在 VHR 量測期間之離子遷移率 μ 。

2.2.2 低解離率離子推導



低解離率離子的化學表示式為 (2.2.18)，由前述可以得知低解離率離子會持續著解離和結合的狀態，因此其速率方程式 rate equation 可以表示為式子 (2.2.19)。其中 N_0 為中性分子濃度，單位是 C/m^3 ； α 和 β 分別代表著結合係數和解離係數； $\rho_{LC}^+(t)$ 表示正離子濃度，單位是 C/m^3 ； μ 為遷移率，單位是 $m^2/V * s$ ； $E(t)$ 則是 VHR 量測時作用於液晶層的有效電場。同樣的，為了推導還需要一些假設條件如下：

1. 不考慮配向層。
2. $\rho_{LC}^+(t) = \rho_{LC}^-(t) = \frac{1}{2} \rho_{LC}(t)$ 。
3. $\rho_{LC}(t)$ 不包括已累積在界面上的離子。
4. 累積在界面上的離子密度為 $\sigma_{LC(b)}^\pm(t) = d_{LC} (\rho_{LC(i)}^\pm - \rho_{LC}^\pm(t))$ ，
其中 $\rho_{LC(i)}^\pm$ 為初始濃度。
5. $\mu^+ = \mu^- = \mu$ 。
6. α 和 β 為常數。

Rate equation :

$$\frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} = \beta N_0 - \alpha[\rho_{LC}^+(t)]^2 - \frac{\mu E(t)}{d} \rho_{LC}^+(t) \quad (2.2.19)$$

作用於液晶層的有效電場 $E(t)$:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_{app} - E_{ion}(t) = E_{app} - \frac{1}{d_{LC}} V_{ion}(t) = E_{app} - \frac{1}{d_{LC}} \frac{1}{C_e} d_{LC} (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_{LC}^+(t)) \\ &= \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) + \frac{1}{C_e} \rho_{LC}^+(t) \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

將式子(2.2.20)代入式子(2.2.19)後經由整理可以得到式子(2.2.21) :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} &= \beta N_0 - \alpha[\rho_{LC}^+(t)]^2 - \frac{\mu}{d} \left[\left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) + \frac{1}{C_e} \rho_{LC}^+(t) \right] \rho_{LC}^+(t) \\ \frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} &= \beta N_0 - \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) [\rho_{LC}^+(t)]^2 - \frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \rho_{LC}^+(t) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

式子 (2.2.21) 是一個非線性微分方程式，為了解這個式子必須使用一點小技巧。現在重新定義一函數 $y(t)$ ， $y(t)$ 和 $\rho_{LC}^+(t)$ 的關係式如下式 (2.2.22) :

$$\rho_{LC}^+(t) = \frac{y'(t)}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t)} \quad (2.2.22)$$

把式子 (2.2.22) 微分後可以得到式子 (2.2.23) :

$$\frac{d\rho_{LC}^+(t)}{dt} = \frac{y''(t) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) - \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) [y'(t)]^2}{\left[\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) \right]^2} \quad (2.2.23)$$

將式子 (2.2.22) 和式子 (2.2.23) 代入式子 (2.2.21)，經過下列計算
之後可以得到式子 (2.2.24)。

$$\frac{y''(t) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) - \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) [y'(t)]^2}{\left[\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) \right]^2}$$

$$= \beta N_0 - \left(\alpha + \frac{d}{C_e d} \right) \left[\frac{y'(t)}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t)} \right]^2 - \frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \frac{y'(t)}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t)}$$

上式兩邊各乘上 $\left[\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) \right]^2$ ：

$$y''(t) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) - \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) [y'(t)]^2 = \left[\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) \right]^2 \beta N_0 -$$

$$\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) [y'(t)]^2 - \frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) y'(t)$$

$$y''(t) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) = \left[\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) \right]^2 \beta N_0 -$$

$$\frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t) y'(t)$$

上式兩邊同時消掉 $\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) y(t)$ ：

$$y''(t) = \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) \beta N_0 y(t) - \frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) y'(t)$$

$$y''(t) + \frac{\mu}{d} \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) y'(t) - \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) \beta N_0 y(t) = 0 \quad (2.2.24)$$

令代數 m 、 n 取代上式(2.2.24)中的 $\frac{\mu}{d}(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+)$ 及 $(\alpha + \frac{\mu}{c_e d})\beta N_0$ ，

即：

$$m = \frac{\mu}{d}\left(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+\right) \quad (2.2.25)$$

$$n = \left(\alpha + \frac{\mu}{c_e d}\right)\beta N_0 \quad (2.2.26)$$

藉由代數代換之後，式子(2.2.24)可以簡化成一般線性微分方程式如下式(2.2.27)。

$$y''(t) + my'(t) - ny(t) = 0 \quad (2.2.27)$$

令 $y(t) = e^{\lambda t}$ 代入式子(2.2.27)，經由下列計算之後即可得到函數

$y(t)$ ：

$$y(t) = e^{\lambda t}(\lambda^2 + m\lambda - n) = 0$$

$$(\lambda^2 + m\lambda - n) = 0$$

$$\lambda = -\frac{m}{2} \pm \frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{4n}{m^2}} = a \pm b$$

以 a 、 b 取代上式的 $-\frac{m}{2}$ 和 $\frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{4n}{m^2}}$ ，即：

$$a = -\frac{m}{2} = -\frac{\mu}{2d}\left(E - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+\right) \quad (2.2.28)$$

$$b = \frac{m}{2} \sqrt{1 + \frac{4n}{m^2}} = \frac{\mu}{2d}\left(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+\right) \sqrt{1 + \frac{4\left(\alpha + \frac{\mu}{c_e d}\right)\beta N_0 d^2}{\left[\mu\left(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+\right)\right]^2}} \quad (2.2.29)$$

因此，

$$y(t) = c_1 e^{(a+b)t} + c_2 e^{(a-b)t} \quad (2.2.30)$$

$$y'(t) = c_1(a+b)e^{(a+b)t} + c_2(a-b)e^{(a-b)t} \quad (2.2.31)$$

其中 c_1 、 c_2 為未定係數。

將式子 (2.2.30) 和式子 (2.2.31) 代入 (2.2.22) 後可以得到下式

(2.2.32)。

$$\begin{aligned} \rho_{LC}^+(t) &= \frac{y'(t)}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) y(t)} = \frac{c_1(a+b)e^{(a+b)t} + c_2(a-b)e^{(a-b)t}}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_1 e^{(a+b)t} + \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_2 e^{(a-b)t}} \\ &= \frac{c_1(a+b)e^{bt} + c_2(a-b)e^{-bt}}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_1 e^{bt} + \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_2 e^{-bt}} \\ &= \frac{c_1(a+b) + c_2(a-b)e^{-2bt}}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_1 + \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d}\right) c_2 e^{-2bt}} \\ &= \frac{\left(\frac{a+b}{\alpha + \frac{\mu}{C_e d}}\right) + \left(\frac{a-b}{\alpha + \frac{\mu}{C_e d}}\right) \frac{c_2}{c_1} e^{-t/\tau}}{1 + \frac{c_2}{c_1} e^{-t/\tau}} \end{aligned}$$

$$\rho_{LC}^+(t) = \frac{\rho_+ + \rho_- \frac{c_2}{c_1} e^{-t/\tau}}{1 + \frac{c_2}{c_1} e^{-t/\tau}} \quad (2.2.32)$$

其中， τ 、 ρ_+ 、 ρ_- 分別為：

$$\tau = \frac{1}{2b} = \frac{d}{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)} \left[1 + \frac{4(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})\beta N_0 d^2}{\left[\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)\right]^2} \right]^{-1/2} \quad (2.2.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{a+b}{\alpha + \frac{\mu}{C_e d}} = -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} + \frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} \sqrt{1 + \frac{4(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})\beta N_0 d^2}{\left[\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)\right]^2}} \\ &= -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} + \sqrt{\left[\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d}\right]^2 + \frac{\beta N_0}{(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})}} \quad (2.2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_- &= \frac{a-b}{\alpha + \frac{\mu}{C_e d}} = -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} - \frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} \sqrt{1 + \frac{4(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})\beta N_0 d^2}{\left[\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)\right]^2}} \\ &= -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d} - \sqrt{\left[\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{C_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})d}\right]^2 + \frac{\beta N_0}{(\alpha + \frac{\mu}{C_e d})}} \quad (2.2.35) \end{aligned}$$

代入初始條件 $\rho_{LC}^+(0) = \rho_{LC(i)}^+$ 後即可求得未定係數：

$$\begin{aligned} \rho_{LC(i)}^+ &= \frac{\rho_+ + \rho_- \frac{c_2}{c_1}}{1 + \frac{c_2}{c_1}} \\ \frac{c_2}{c_1} &= -\frac{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)}{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-)} \quad (2.2.36) \end{aligned}$$

將求得的未定係數 (2.2.36) 代入式子 (2.2.32) 後重新整理即可求出
液晶層的低解離率正離子濃度 $\rho_{LC}^+(t)$ 。

$$\rho_{LC}^+(t) = \frac{\rho_+(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - \rho_-(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}} \quad (2.2.37)$$

其中，

$$\tau = \frac{d}{\mu \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right)} \left[1 + \frac{4 \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) \beta N_0 d^2}{\left[\mu \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \right]^2} \right]^{-1/2}$$

$$\rho_{\pm} = -\frac{\mu \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right)}{2 \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) d} \pm \sqrt{\frac{\left[\mu \left(E_{app} - \frac{1}{C_e} \rho_{LC(i)}^+ \right) \right]^2}{2 \left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right) d} + \frac{\beta N_0}{\left(\alpha + \frac{\mu}{C_e d} \right)}}$$

值得一提的是液晶層的初始濃度 $\rho_{LC(i)}^+$ 可以藉由平衡方程式來獲得：

$$\beta N_0 = \alpha [\rho_{LC(i)}^+]^2$$

$$\rho_{LC(i)}^+ = \sqrt{\frac{\beta N_0}{\alpha}} \quad (2.2.38)$$

經由上述的推導即可求出低解離率的正、負離子在 VHR 量測時的
解析解型式： $(\rho_{LC(i)}^+ = \rho_{LC(i)}^-)$

$$\rho_{LC}^+(t) = \frac{\rho_+(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - \rho_-(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}} \quad (2.2.39)$$

$$\rho_{LC}^-(t) = \frac{\rho_+(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-) - \rho_-(\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}} \quad (2.2.40)$$

其中，

$$\tau = \frac{d}{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+)} \left[1 + \frac{4(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})\beta N_0 d^2}{[\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+)]^2} \right]^{-1/2} \quad (2.2.41)$$

$$\rho_{\pm} = -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})d} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e}\rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})d} \right]^2 + \frac{\beta N_0}{(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})}} \quad (2.2.42)$$

由式子 (2.2.1) 知道，實驗分析所需要的是 $\sigma_{b(low)}(t)$ ，因此可以將剛才求得的 $\rho_{LC}(t)$ 換算成 $\sigma_{b(low)}(t)$ 的形式。

$$\begin{aligned} \sigma_{b(low)}^+(t) &= d_{LC} [\rho_{LC(i)}^+ - \rho_{LC}^+(t)] \\ &= d_{LC} \left[\rho_{LC(i)}^+ - \frac{\rho_+(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - \rho_-(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}} \right] \\ &= d_{LC} \left[\frac{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-)(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+) - (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-)(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^+ - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^+ - \rho_+)e^{-t/\tau}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

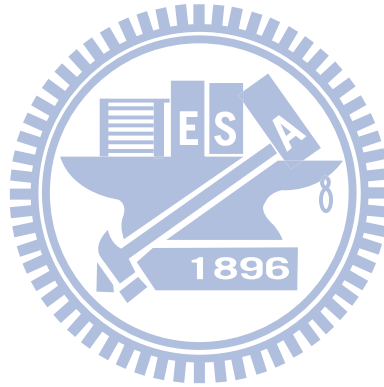
$$\begin{aligned} \sigma_{b(low)}^-(t) &= d_{LC} [\rho_{LC(i)}^- - \rho_{LC}^-(t)] \\ &= d_{LC} \left[\rho_{LC(i)}^- - \frac{\rho_+(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-) - \rho_-(\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}} \right] \\ &= d_{LC} \left[\frac{(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-)(\rho_{LC(i)}^- - \rho_+) - (\rho_{LC(i)}^- - \rho_-)(\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}}{(\rho_{LC(i)}^- - \rho_-) - (\rho_{LC(i)}^- - \rho_+)e^{-t/\tau}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

其中

$$\text{時間常數 } \tau = \frac{d}{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e} \rho_{LC(i)}^+)} \left[1 + \frac{4(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}}) \beta N_0 d^2}{[\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e} \rho_{LC(i)}^+)]^2} \right]^{-1/2} \quad (2.2.41)$$

$$\rho_{\pm} = -\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e} \rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})d} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu(E_{app} - \frac{1}{c_e} \rho_{LC(i)}^+)}{2(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})d} \right]^2 + \frac{\beta N_0}{(\alpha + \frac{\mu}{c_{ed}})}} \quad (2.2.42)$$

如此一來，將此解析解配合上實驗數據後，即可求出此解析解的三個未知數： α 、 βN_0 、 μ ，因此可以得到低解離率離子在液晶層的初始濃度 $\rho_{LC(i)}$ 以及在 VHR 量測期間之離子遷移率 μ 。



第三章 實驗部分

3.1 實驗架構[2]

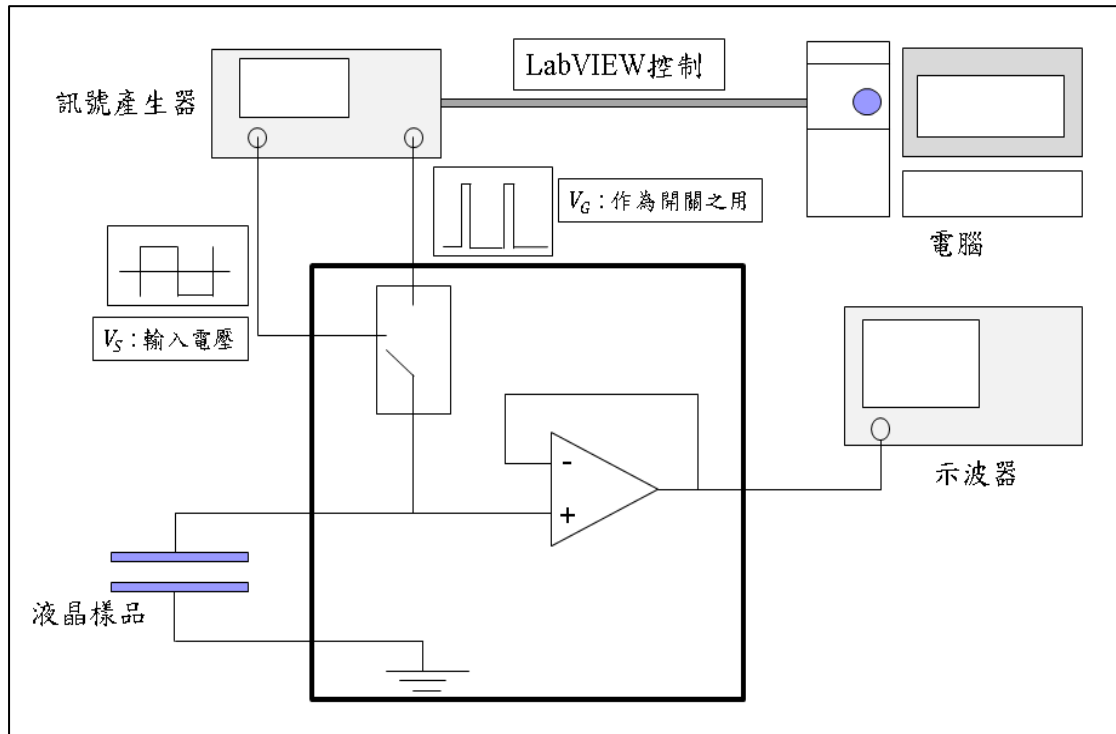


圖 3-1 VHR 量測系統架構圖

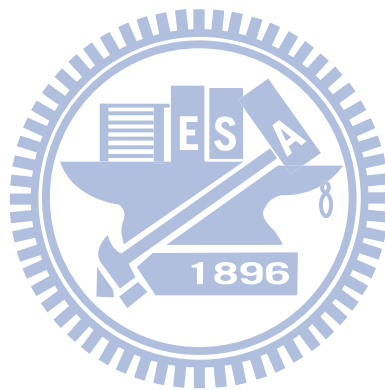
Voltage Holding Ratio (VHR) 量測：

儀器設備：

- (1) VHR 自製量測儀器
- (2) 訊號產生器 (AFG3021B)
- (3) 數位示波器
- (4) 高壓放大器 (HA800)
- (5) 電腦 (用 LabVIEW 控制訊號產生器)

實驗架構[2]如圖 3-1，此自製量測儀器是使用模擬 TFT 開關的晶片來驅動，同時接上做為開關之用的脈衝波 V_G 以及輸入之方波訊號 V_S （週期為 4.0006s），脈衝波 V_G 的寬度 0.3ms 即為方波訊號 V_S 的充電時間。而此兩個訊號是用訊號產生器（AFG3021B）來產生的，但是此型號的訊號產生器只有單輸出，因此使用了波型編輯器的程式做出一個週期擁有兩個脈衝波的波型，使得訊號產生器能輸出所需要的開關脈衝波 V_G ，而輸入之方波訊號 V_S 則是使用訊號產生器的 TTL 訊號，訊號產生器的 TTL 訊號是會隨著輸出訊號的週期變化的方波，然而此方波的振幅無法調整以及振幅範圍是零伏到三點多伏與實驗所需的振幅範圍不符，因此需要把 TTL 訊號接到一高壓放大器（HA800）來調整此方波訊號的偏移（offset）和振幅範圍。至此，實驗所需之開關脈衝波 V_G 以及輸入之方波訊號 V_S 便準備完成。而經由開關作用之後之訊號 V_S 輸入至一待測液晶盒中，液晶盒另一端則是連接到此量測系統之共同接地端，而液晶盒接受輸入訊號的那一端則是再接到一單位增益、內阻高，可視為一理想放大器之 OPA，此 OPA 之輸出端再接到一數位示波器，如此一來便可以在數位示波器上看到液晶盒的電壓變化曲線圖。

但是第一個 frame cycle 之後所量測到的圖形要分析的話會變得很複雜，如：在極性反轉時有離子累積在邊界上，因此就必須把擴散的情況也考慮進去，除此之外還有低解離率離子的解離和結合等因素會影響到 VHR 的量測圖形。為了使分析簡單化，我們選擇第一個 frame cycle 的量測圖形來作為分析依據，因此必須使用 LabVIEW 控制訊號產生器來產生一個 single-pulse 的輸入電壓，藉此可以量測到第一個 frame cycle 的量測圖形。



3.2 實驗分析

由 VHR 的量測圖形可以得到 $V_{ion}(t)$ 的圖形如圖 3-2

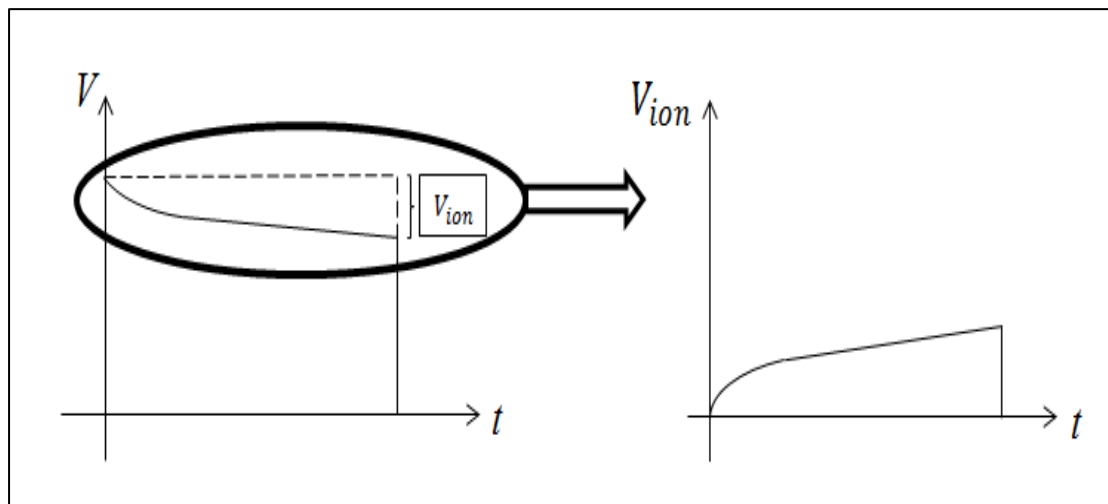


圖 3-2 $V_{ion}(t)$ 轉換示意圖

從實驗得到的 $V_{ion}(t)$ 是高、低解離率離子共同造成的，為了從 $V_{ion}(t)$ 的圖形分析出高、低解離率離子，我們提出以下方法來說明。

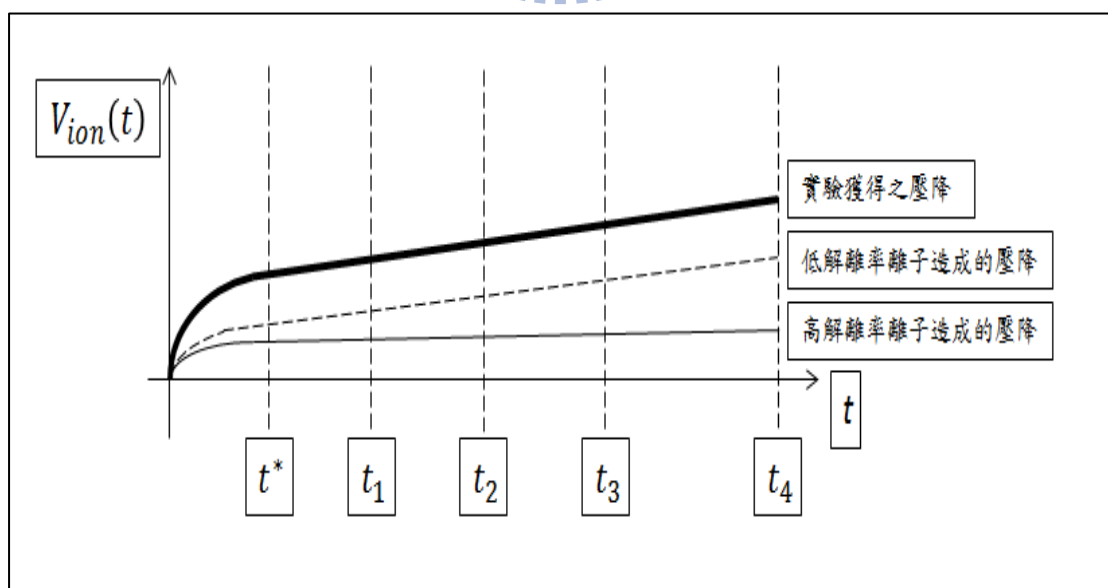


圖 3-3 實驗分析圖

參考圖 3-3，由第二章對於高、低解離率離子的說明可以知道，高解離率離子濃度是一定量，因此在高解離率離子全部到達邊界上以後所造成的壓降將是一固定值；而低解離率離子會一直產生，所以其造成的壓降會隨時間增加而增加。

由 $V_{ion}(t)$ 和高、低解離率離子所造成之壓降的關係，可以利用下式 (3.1) 來表示：

$$V_{ion}(t) = V_{ion(low)}(t) + V_{ion(high)}(t) \quad (3.1)$$

假設在時間點 t^* 之後，高解離率離子已全部到達邊界上，因此其造成之壓降會是一固定值，所以式子 (3.1) 可以改寫成下式 (3.2)：

$$V_{ion}(t) = V_{ion(low)}(t) + V_{ion(high)}, \quad t > t^* \quad (3.2)$$

由於高、低解離率離子的離子濃度及遷移率都不同，要從一組實驗數據中分離這兩種壓降就必須先消除其中一種離子所造成的壓降。

因此，若以 t_1 為新的基準點的話，經由下列計算以後可以得到沒有高解離率離子影響的式子 (3.3)。

$$\begin{aligned} & V_{ion}(t_2) - V_{ion}(t_1) \\ &= [V_{ion(low)}(t_2) + V_{ion(high)}] - [V_{ion(low)}(t_1) + V_{ion(high)}] \\ &= V_{ion(low)}(t_2) - V_{ion(low)}(t_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

由第二章的式子 (2.2.43) 可以知道，低解離率離子的解析解中的未知數有三項： α 、 βN_0 、 μ ，因此還需要兩個式子以上才能解未知數。

依照和上述相同的計算，可以得到式子 (3.4) 和式子 (3.5)：

$$V_{ion}(t_3) - V_{ion}(t_1) = V_{ion(low)}(t_3) - V_{ion(low)}(t_1) \quad (3.4)$$

$$V_{ion}(t_4) - V_{ion}(t_1) = V_{ion(low)}(t_4) - V_{ion(low)}(t_1) \quad (3.5)$$

有了上述三個式子以後即可先求出低解離率離子的初始濃度和遷移率，接著再利用式子(3.1)即可求出 $V_{ion(high)}(t)$ ，在求出 $V_{ion(high)}(t)$ 之後即可算出高解離率離子的初始濃度和遷移率。



3.3 實驗結果

本實驗所量測的樣品是由奇美電子所提供的扭曲向列型液晶盒樣品，VHR 的量測條件為：室溫下，charge time 0.3ms、holding time 2s，外加電壓一伏特小於液晶的臨界電壓，以下為三組實驗樣品的實驗結果和經由解析解求出的液晶盒離子濃度以及 VHR 量測期間的離子遷移率。

3.3.1 樣品 1 實驗結果

樣品 1 的各參數如下表 3-1：

等效電容 (F)	1.36×10^{-9}
cell gap (μm)	3.72
cell area (cm^2)	0.9909

表 3-1 樣品 1 參數表

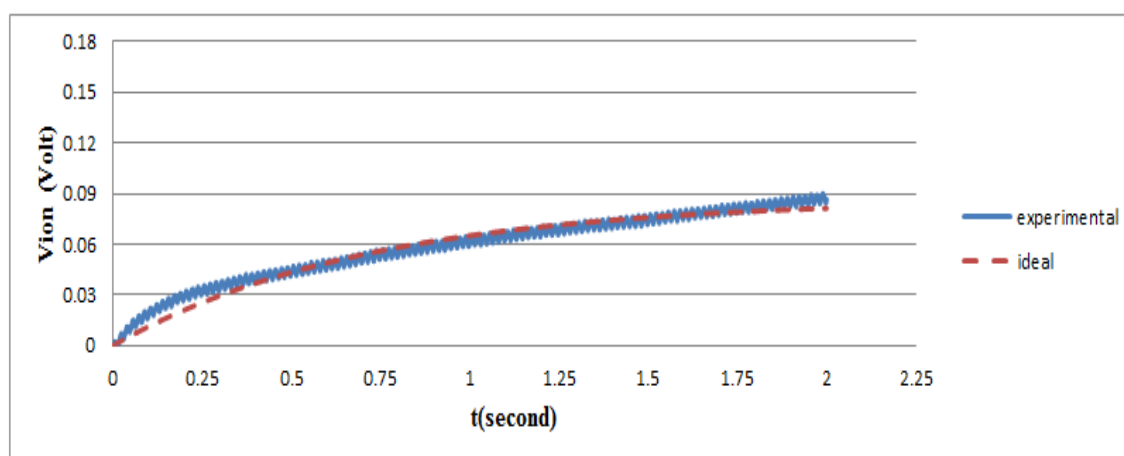


圖 3-4 樣品 1 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖

圖 3-4 為樣品 1 的實驗數據與經由解析解計算得到的理論曲線比較圖。其中實線部分為實驗得到的 $V_{ion}(t)$ 數據圖，而虛線部分則是由解析解得到的數據圖。理論計算結果為此樣品 1 在室溫下高解離率離子很少；而低解離率離子的正離子初始濃度 $\rho_{LC(i)}^+$ 為：

$1.99852 * 10^{18} \left(\frac{\text{個}}{m^3} \right)$ ，在 VHR 量測期間的離子遷移率 μ 為：

$1.3721 * 10^{-11} \left(m^2/V * s \right)$ ，詳細如下表 3-2。

	離子濃度 $\left(\frac{\text{個}}{m^3} \right)$	離子遷移率 $\left(m^2/V * s \right)$
低解離率離子	$1.99852 * 10^{18}$	$1.3721 * 10^{-11}$
高解離率離子	少到無法正確估計	

表 3-2 樣品 1 之計算結果

3.3.2 樣品 2 實驗結果

樣品 2 的各參數如下表 3-3：

等效電容 (F)	1.395×10^{-9}
cell gap (μm)	3.667
cell area (cm^2)	0.9909

表 3-3 樣品 2 參數表

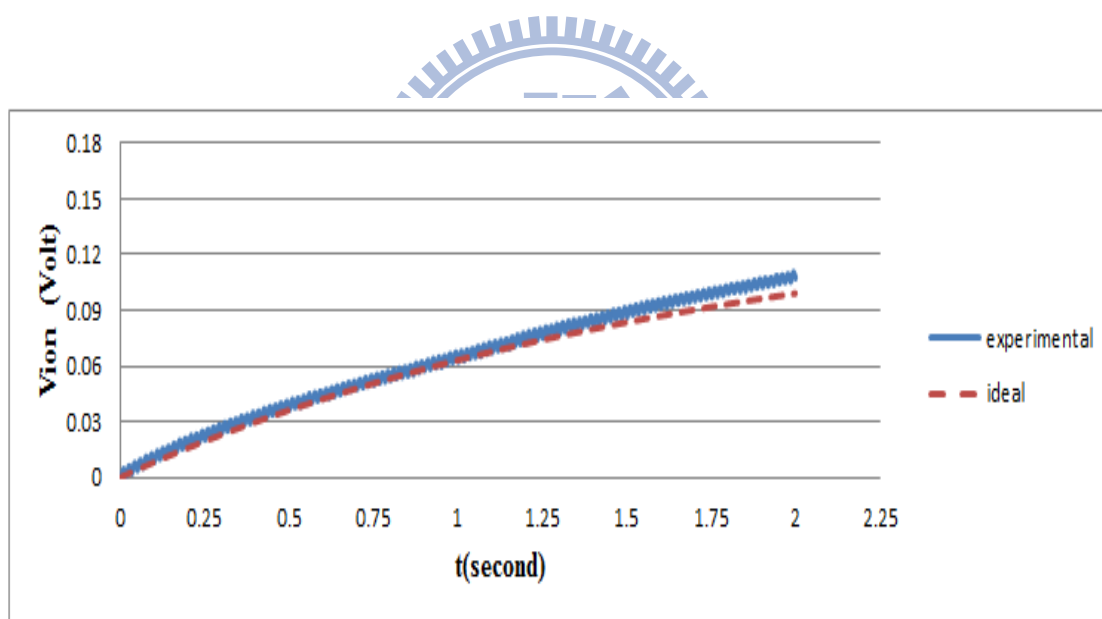


圖 3-5 樣品 2 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖

同樣的，圖 3-5 為樣品 2 的實驗數據與經由解析解計算得到的理論曲線比較圖，其中實線部分為實驗得到的 $V_{ion}(t)$ 數據圖，而虛線部分則是由解析解得到的數據圖。理論計算結果詳細如下表 3-4。

	離子濃度 $\left(\frac{\text{個}}{m^3}\right)$	離子遷移率 $\left(m^2/V * s\right)$
低解離率離子	$3.97519 * 10^{18}$	$5.2297 * 10^{-12}$
高解離率離子	少到無法正確估計	

表 3-4 樣品 2 之計算結果

3.3.3 樣品 3 實驗結果

樣品 3 的各參數如下表 3-5：

等效電容 (F)	$1.48 * 10^{-9}$
cell gap (μm)	3.94
cell area (cm^2)	0.9909

表 3-5 樣品 3 參數表

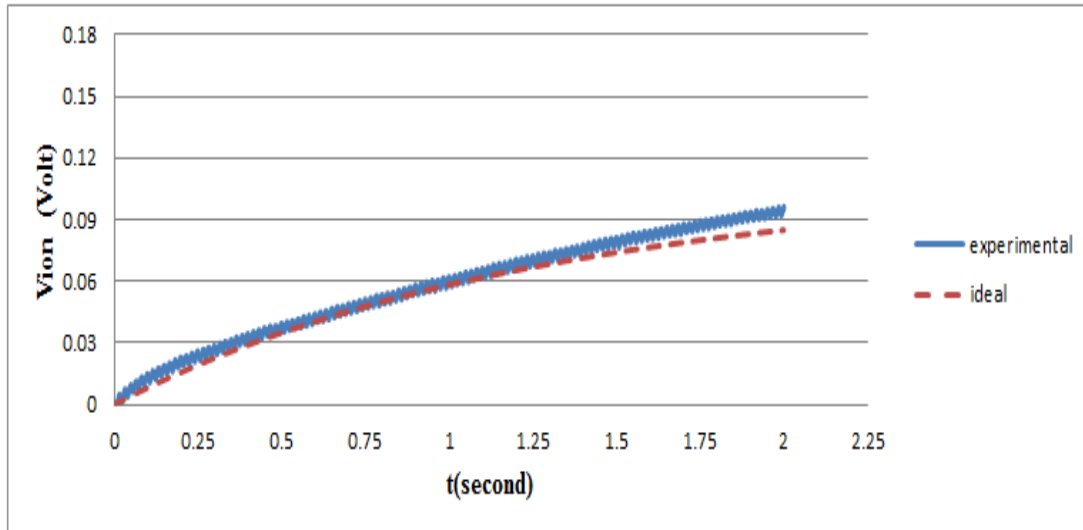


圖 3-6 樣品 3 $V_{ion}(t)$ 實驗與理論比較圖

而圖 3-6 為樣品 3 的實驗數據與經由解析解計算得到的理論曲線比較圖，其中實線部分為實驗得到的 $V_{ion}(t)$ 數據圖，而虛線部分則是由解析解得到的數據圖。理論計算結果詳細如下表 3-6。

	離子濃度 $\left(\frac{\text{個}}{m^3}\right)$	離子遷移率 $\left(m^2/V * s\right)$
低解離率離子	$2.848 * 10^{18}$	$8.679 * 10^{-12}$
高解離率離子	少到無法正確估計	

表 3-6 樣品 3 之計算結果

第四章 結論與未來展望

本論文首次用 VHR 量測系統來分析液晶盒中的高、低解離率離子，利用一些可以調整的量測條件如：外加電壓小於液晶的臨界電壓、分析數據為第一幀（first frame cycle）的圖形等，這些條件可以使得分析簡單化進而可以推導出高、低解離率離子在 VHR 量測過程中之解析解型式。藉由實驗數據、解析解以及分析實驗數據的方法，我們可以求出此液晶盒的高、低解離率離子的初始濃度以及在 VHR 量測期間的離子遷移率，並且藉由此解析解的理論圖形和實驗數據作比較可以知道其理論之正確性。

在未來的研究中，可以將施加的外加電壓大於液晶的臨界電壓，藉此來求出平行 TN LCD 液晶導軸的離子遷移率。並且可以藉由量測不同溫度下之同一樣品來求得離子濃度和離子遷移率的各自活化能，來瞭解離子濃度和離子遷移率與溫度之間的變化機制。本論文所推導的理論模型，若加以適當的推廣，可以用來推算配向層內的離子濃度及其遷移率。若再配合其它的電學量測時，更可求出配向層內的離子濃度及其遷移率。

參 考 文 獻

- [1] 陳伯綸，「離子電荷效應對液晶盒物理特性之影響」，國立交通大學，博士論文，民國八十九年六月。
- [2] K. H. Yang, "Charge retention of twisted nematic liquid-crystal displays", *J. Appl. Phys.*, 67, pp. 36-39, January 1990.
- [3] K. H. Yang, "The investigation of image formation in a large-area solid state x-ray receptor with electrophoretic display", *J. Appl. Phys.*, 54, pp. 4711-4721, September 1983.
- [4] T. C. Chieu, K. H. Yang, "Transport Properties of Ions in Ferroelectric Liquid Crystal Cells", *Jpn. J. Appl. Phys.*, 28, pp. 2240-2246, November 1989.
- [5] Nobuyoshi Sasaki, "Simulation of the Voltage Holding Ratio in Liquid Crystal Displays with a Constant Charge Model", *Jpn. J. Appl. Phys.*, 37, pp. 6065-6070, November 1998.
- [6] Takeo Nakanishi, Taiju Takahashi, Hitoshi Mada, Susumu Saito, "Transient Behavior of Voltage Holding Ratio in Nematic Liquid Crystal Cells", *Jpn. J. Appl. Phys.*, 41, pp. 3752-3757, June 2002.

附 錄

以下為本論文作者在 2010 International Conference on Optics and Photonics in Taiwan 以及 2010 中國液態晶體學會年會暨研討會 發表過的論文 “Analytic Solution of Phase Transfer Function for a General Twisted Nematic Cell.” (“一般扭曲向列型液晶之相位轉換函數的解析解”)。



Analytic Solution of Phase Transfer Function for a General Twisted Nematic Cell

Chih Hao Kuo^{1*}, Wei Hsiang Liao², and Kei Hsiung Yang³

¹*Institute of Imaging and Biomedical Photonics, College of Photonics, National Chiao Tung University, Guiren, Tainan*

²*Institute of Photonic System, College of Photonics, National Chiao Tung University, Guiren, Tainan*

³*Institute of Imaging and Biomedical Photonics, College of Photonics, National Chiao Tung University, Guiren, Tainan*

*hunter359.cop98g@nctu.edu.tw

Abstract---Analytic solution of phase transfer function for a general twisted nematic (GTN) cell has been derived. The solution can be applied to analyze data obtained by Heterodyne interferometry to derive important cell parameters such as cell gap, pretilt and twist angles.

Keywords: phase difference, Jones calculate, liquid crystal cell parameters

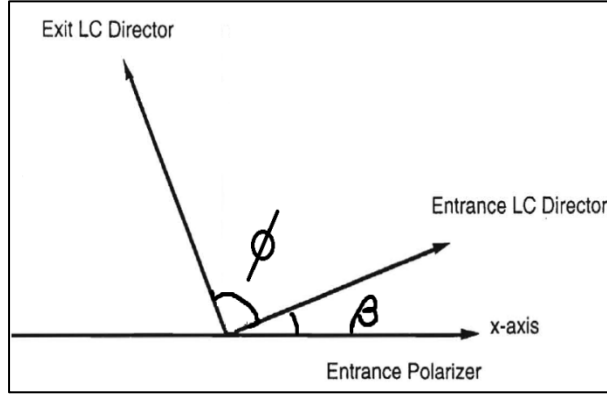
INTRODUCTION

LCDs (liquid crystal displays) become dominant from small-size mobile to large-size TV applications. To optimize the display qualities of LCDs, it is imperative to obtain optimized cell parameters such as cell gap, pretilt and twist angles. Recent publication [1] indicates that, by measuring the retardation of a GTN cell rotating along its cell normal is a Heterodyne interferometric system. All the above three parameters can be obtained by fitting the experimental results to the calculated results by numerical computation of Jones calculation in a computer [1]. This paper presents analytical solutions to replace the published numerical computations of Jones calculation for faster calculation with more accurate results.

THEORETICAL CALCULATION

Assume that the polarization state of the incident light is $\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_1} \\ E_y e^{i\phi_2} \end{pmatrix}$, whose phase different δ between two Eigen modes can be expressed as $(\phi_1 - \phi_2)$. After the light passes through a GTN cell, we obtain the polarization state of the emerging light as $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\phi'_1} \\ E'_y e^{i\phi'_2} \end{pmatrix}$, whose phase difference δ' is $(\phi'_1 - \phi'_2)$. We can measure the phase difference $\theta' = (\delta' - \delta)$ by a Heterodyne interferometric measurement system. If the polarization state of the incident light is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, and after passing through the GTN cell, the polarization state of the emerging light can be written as $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\phi'_1} \\ E'_y e^{i\phi'_2} \end{pmatrix}$, the phase difference of $\Psi' = (\phi'_1 - \phi'_2)$ should equal to θ' . In this case, we can carry out the following theoretical derivations.

We choose $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ to be the input Jones vector to incident upon a GTN cell with arbitrary rotation angle β , we can list the following formula to calculate twist angle ϕ of a GTN cell as shown in the Figure below.



β : the angle between the entrance LC director and the incident light
 ϕ : twist angle

Our output Jones vector

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E'_x e^{i\phi'_1} \\ E'_y e^{i\phi'_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2X} & \phi \frac{\sin X}{X} \\ -\phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta + \phi) & -\sin(\beta + \phi) \\ \sin(\beta + \phi) & \cos(\beta + \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2X} & \phi \frac{\sin X}{X} \\ -\phi \frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta + \phi) \left[\cos \beta \cos X - \phi \sin \beta \frac{\sin X}{X} - i \frac{\Gamma}{2} \cos \beta \frac{\sin X}{X} \right] + \sin(\beta + \phi) \left[\sin \beta \cos X + \phi \cos \beta \frac{\sin X}{X} + i \frac{\Gamma}{2} \sin \beta \frac{\sin X}{X} \right] \\ \sin(\beta + \phi) \left[\cos \beta \cos X - \phi \sin \beta \frac{\sin X}{X} - i \frac{\Gamma}{2} \cos \beta \frac{\sin X}{X} \right] - \cos(\beta + \phi) \left[\sin \beta \cos X + \phi \cos \beta \frac{\sin X}{X} + i \frac{\Gamma}{2} \sin \beta \frac{\sin X}{X} \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\cos X \cos \phi + \phi \sin \phi \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma \sin X}{2X} \cos(\phi + 2\beta) \right) \\ \left(\cos X \sin \phi - \phi \cos \phi \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma \sin X}{2X} \sin(\phi + 2\beta) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Which $X = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$

$$\Gamma = 2\pi d \Delta n / \lambda$$

$$\Delta n = n_{\text{eff}} - n_o$$

$$n_{\text{eff}}(\theta) = \frac{n_e n_o}{\sqrt{(n_e \sin \theta)^2 + (n_o \cos \theta)^2}}, \quad n_e \text{ and } n_o \text{ are the refraction index of extraordinary}$$

light and ordinary light respectively

θ is the pretilt angle of the general TN cell

λ is wave length of the light

We can rewrite $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\theta'_1} \\ E'_y e^{i\theta'_2} \end{pmatrix}$ as $\frac{E_x}{E_y} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{E_x}{E_y} e^{i\theta'}$, and then θ' is the phase difference we want to

derive.

$$\frac{E_x}{E_y} e^{i\theta'} = \frac{\left(\cos X \cos \theta + \theta \sin \theta \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \cos(\theta + 2\beta) \right)}{\left(\cos X \sin \theta - \theta \cos \theta \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \sin(\theta + 2\beta) \right)}$$

$$= \frac{\left[\left(\cos X \cos \theta + \theta \sin \theta \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \cos(\theta + 2\beta) \right) \right] \left[\left(\cos X \sin \theta - \theta \cos \theta \frac{\sin X}{X} \right) + i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \sin(\theta + 2\beta) \right) \right]}{\left[\left(\cos X \sin \theta - \theta \cos \theta \frac{\sin X}{X} \right) - i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \sin(\theta + 2\beta) \right) \right] \left[\left(\cos X \sin \theta - \theta \cos \theta \frac{\sin X}{X} \right) + i \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \sin(\theta + 2\beta) \right) \right]}$$

$$\text{Let } a = \cos X \cos \theta + \theta \sin \theta \frac{\sin X}{X}, \quad b = -\frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \cos(\theta + 2\beta)$$

$$c = \cos X \sin \theta - \theta \cos \theta \frac{\sin X}{X}, \quad d = \frac{\Gamma}{2} \frac{\sin X}{X} \sin(\theta + 2\beta)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} e^{i\theta'}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{(ad+bc)}{(ac-bd)} \right) \rightarrow \tan \theta' = \frac{ad+bc}{ac-bd}$$

$\tan \theta'$

$$= \frac{\sin 2\beta + \frac{\theta}{X} \cos 2\beta \tan X}{\left(\frac{2X}{\Gamma} \right) \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{\tan X} \right) + \left(\frac{2\theta}{\Gamma} \right) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - \left(\frac{2\theta^2}{\Gamma X} \right) \cos \theta \sin \theta \tan X + \left(\frac{\Gamma}{2X} \right) \cos(\theta + 2\beta) \sin(\theta + 2\beta) \tan X}$$

$$\text{Let } \frac{\Gamma}{2\theta} = u, \text{ then}$$

$\tan \theta' =$

$$\frac{u\sqrt{1+u^2} \sin 2\beta + u \cos 2\beta \tan(\theta\sqrt{1+u^2})}{(1+u^2) \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{\tan(\theta\sqrt{1+u^2})} \right) + \sqrt{1+u^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - \cos \theta \sin \theta \tan(\theta\sqrt{1+u^2}) + u^2 \cos(\theta+2\beta) \sin(\theta+2\beta) \tan(\theta\sqrt{1+u^2})}$$

The above equation shows the analytic solution of phase transfer function for a GTN cell.

CONCLUSIONS

We have derived an analytic solution of phase transfer function for a general TN cells. This analytic solution would contribute to derive the pretilt angle, cell gap, and twist angle of a TN or GTN cell from measured data with faster computation and more accurate.

REFERENCES

- [1] Ra Bin Li, Heng Cheng Tseng, and Kei Hsiung Yang, *Determination of the cell parameters of a TNLC cell by phase-sensitive heterodyne interferometry*, 2008 China FPD Conference.

一般扭曲向列型液晶之相位轉換函數的解析解

郭智豪¹ 廖偉翔² 楊界雄¹

國立交通大學光電學院¹ 影像與生醫光電研究所² 光電系統研究所
台南 台灣

E-mail address : hunter359.cop98g@nctu.edu.tw

摘要

本論文推導出了一般扭曲向列型液晶的相位轉換函數的解析解。這個解析解可以用來分析外差式干涉儀所量測到的實驗數據，進而求得實驗樣品—一般扭曲向列型液晶盒的重要參數如液晶盒厚、預傾角、扭曲角。

關鍵詞：相位差、延遲、瓊斯矩陣、液晶盒厚、預傾角、扭曲角。

Abstract

Analytic solution of phase transfer function for a general twisted nematic (GTN) cell has been derived. The solution can be applied to analyze data obtained by Heterodyne interferometry to derive important cell parameters such as cell gap, pretilt and twist angles.

Keywords: phase difference, retardation, Jones matrix, liquid crystal cell gap, pretilt angle, twist angle

1. 前言

從小尺寸的手機到大尺寸的電視，液晶顯示器已成為顯示器的主流。為了優化液晶顯示器的品質，準確的得到液晶盒厚、預傾角、扭曲角等液晶盒參數是非常重要的。最近的研究[1]指出，在外差式干涉儀量測系統中，由兩道彼此正交但頻率不同的線性極性光通過一待測之一般扭曲向列型液晶盒後，可以量測到此兩道光因為液晶的雙折射效應所導致的相位差值，再藉由量測不同旋轉角度下液晶盒所產生的相位差值的變化，利用電腦做數值計算進而求得此液晶盒參數[1]。

本論文為了更好的準確性以及更快速的分析，推導出了一般扭曲向列型液晶的相位轉換函數的解析解，此解析解可以用來取代上述論文[1]所採用的數值計算法。

2. 理論計算

假設此量測系統的入射光可以用瓊斯向量來表示為 $\begin{pmatrix} E_x e^{i\theta_1} \\ E_y e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$ ，其相位差 δ 為 $(\theta_1 - \theta_2)$ ，在通過一個一般扭曲向列型液晶盒後的出射光偏振態設為 $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\theta'_1} \\ E'_y e^{i\theta'_2} \end{pmatrix}$ ，其相位差 δ' 為 $(\theta'_1 - \theta'_2)$ ，則外差式干涉儀量測系統量測到的相位差值 θ' 為 $(\delta' - \delta)$ ；現在如果入射光是一偏振方向平行 x 軸的線性偏振光 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，其相位差為 0，在通過與上述相同的液晶盒後的出射光偏振態設為 $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\Psi'_1} \\ E'_y e^{i\Psi'_2} \end{pmatrix}$ ，其相位差值 Ψ' 為 $(\Psi'_1 - \Psi'_2)$ ；因為此相位差值為液晶的雙折射效應所產生，因此通過一相同一般扭曲向列型液晶盒的相位差值應該會相等，意即 $\theta' = \Psi'$ ，在此想法下做了下列的理論推導。

此推導選擇 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 做為瓊斯計算（如圖 1 所示）的入射光以及使用代表扭曲向列型液晶的瓊斯

矩陣 $\begin{pmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & \frac{\sin X}{X} \\ -\frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{pmatrix}$ ，在考慮了液晶盒在不同旋轉角度 β 以及液晶盒的扭曲角

ϕ （如圖 2 所示）的情況下，則可以列出下列式子來做推導。

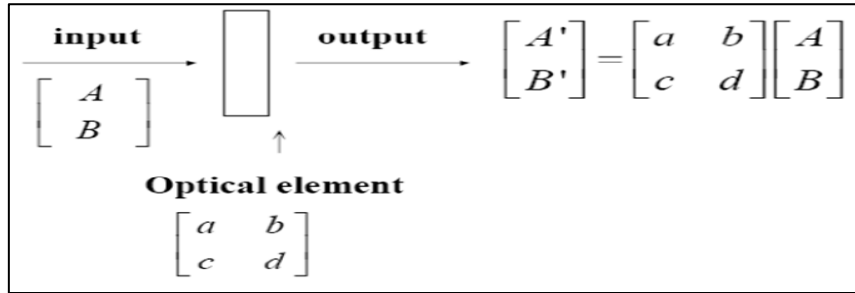


圖 1. 瓊斯計算示意圖

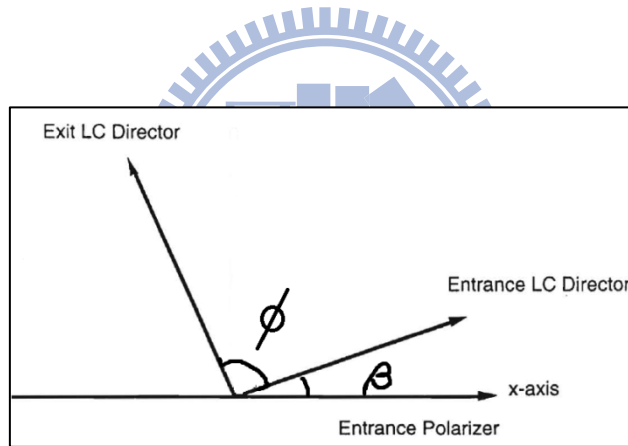


圖 2. 液晶盒各參數示意圖

出射光的偏振態

$$\begin{pmatrix} E'_x e^{i\phi'_1} \\ E'_y e^{i\phi'_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos X - i \frac{\Gamma \sin X}{2} & \frac{\sin X}{X} \\ -\frac{\sin X}{X} & \cos X + i \frac{\Gamma \sin X}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos X \cos \phi + \phi \sin \phi \frac{\sin X}{X}) - i (\frac{\Gamma \sin X}{2} \cos(\phi + 2\beta)) \\ (\cos X \sin \phi - \phi \cos \phi \frac{\sin X}{X}) - i (\frac{\Gamma \sin X}{2} \sin(\phi + 2\beta)) \end{pmatrix}$$

其中： $X = \sqrt{\phi^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$

$$\Gamma = 2\pi d \Delta n / \lambda$$

$$\Delta n = n_{\text{eff}}(\theta) - n_o$$

$$n_{\text{eff}}(\theta) = \frac{n_e n_o}{\sqrt{(n_e \sin \theta)^2 + (n_o \cos \theta)^2}}$$

在上式中定義了液晶盒的參數：扭曲角 ϕ 、液晶盒厚 d 、液晶盒旋轉角度 β 以及預傾角 θ ，而 n_e 和 n_o 分別為非尋常光和尋常光的折射率， λ 為雷射光波長。

重新改寫 $\begin{pmatrix} E'_x e^{i\phi'_1} \\ E'_y e^{i\phi'_2} \end{pmatrix}$ 為 $\frac{E'_x}{E'_y} e^{i(\phi'_1 - \phi'_2)} = \frac{E'_x}{E'_y} e^{i\theta'}$ ，其中 θ' 即是本論文所要求的相位差值。

$$\begin{aligned} \text{因此，} \frac{E'_x}{E'_y} e^{i\theta'} &= \frac{(\cos X \cos \phi + \phi \sin \phi \frac{\sin X}{X}) - i \left(\frac{\Gamma \sin X}{2X} \cos(\phi + 2\beta) \right)}{(\cos X \sin \phi - \phi \cos \phi \frac{\sin X}{X}) - i \left(\frac{\Gamma \sin X}{2X} \sin(\phi + 2\beta) \right)} \\ &= \frac{a + ib}{c - id} \times \frac{c + id}{c + id} = \frac{(a + ib)(c + id)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中：} a &= \cos X \cos \phi + \phi \sin \phi \frac{\sin X}{X} \\ b &= -\frac{\Gamma \sin X}{2X} \cos(\phi + 2\beta) \\ c &= \cos X \sin \phi - \phi \cos \phi \frac{\sin X}{X} \\ d &= \frac{\Gamma \sin X}{2X} \sin(\phi + 2\beta) \end{aligned}$$

$$\text{而}(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} e^{i\theta'}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{ad + bc}{ac - bd} \right) \rightarrow \tan \theta' = \frac{ad + bc}{ac - bd}$$

因此 $\tan \theta' = \frac{m}{n}$ ，其中

$$m = \sin 2\beta + \frac{\phi}{X} \cos 2\beta \tan X$$

$$n = \left(\frac{2X}{\Gamma} \right) \left(\frac{\cos \phi \sin \phi}{\tan X} \right) + \left(\frac{2\phi}{\Gamma} \right) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \left(\frac{2\phi^2}{\Gamma X} \right) \cos \phi \sin \phi \tan X + \frac{\Gamma}{2X} \cos(\phi + 2\beta) \sin(\phi + 2\beta) \tan X$$

令 $\frac{\Gamma}{2\phi} = u$ ，則 $\tan \theta' = \frac{m'}{n'}$ ，其中

$$m' = u\sqrt{1 + u^2} \sin 2\beta + u \cos 2\beta \tan(\phi\sqrt{1 + u^2})$$

$$\begin{aligned} n' &= (1 + u^2) \left(\frac{\cos \phi \sin \phi}{\tan(\phi\sqrt{1 + u^2})} \right) + \sqrt{1 + u^2} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \cos \phi \sin \phi \tan(\phi\sqrt{1 + u^2}) \\ &\quad + u^2 \cos(\phi + 2\beta) \sin(\phi + 2\beta) \tan(\phi\sqrt{1 + u^2}) \end{aligned}$$

上式即為一般扭曲相列型液晶之相位轉換函數的解析解。又因為：

$$\sin 2(\beta + \pi) = \sin 2\beta ; \cos 2(\beta + \pi) = \cos 2\beta$$

意即

$$\theta' = \tan^{-1} \left[\frac{m'(\beta)}{n'(\beta)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{m'(\beta + \pi)}{n'(\beta + \pi)} \right],$$

所以利用此解析解和實驗數據擬合時只要把旋轉角度 β 限於區間 $[0, \pi]$ 之間即可(如圖3所示)。

圖3所示的模擬結果所使用與液晶盒相關的參數為：

$$n_e = 1.597 ; n_o = 1.487 ; \lambda = 633\text{nm} ;$$

$$\phi = 90^\circ ; d = 3.66 \mu\text{m} ; \theta = 3.24^\circ ;$$

依照與解析解的運算和實驗數據做比較[1]，即可求得一般扭曲相列型液晶盒的重要參數 ϕ 、 d 、 θ 。

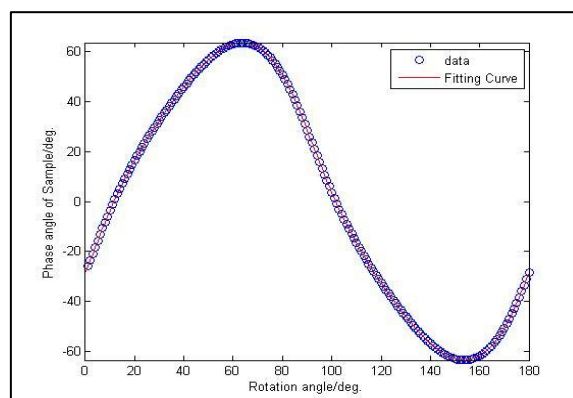


圖3.解析解和實驗數據擬合曲線圖

3. 結論

本論文推導出一般扭曲相列型液晶之相位轉換函數的解析解。利用此解析解和實驗數據作比較後，即可得到較準確的一般扭曲相列型液晶盒的重要參數如扭曲角、液晶盒厚以及預傾角。由於這些參數對於液晶顯示器的光電效應有著相當重要的影響，所以準確的求得這些參數對於液晶顯示器的設計和顯示品質是非常重要的。

4. 參考文獻

- [1] Ra Bin Li , Heng Cheng Tseng , and Kei Hsiung Yang , "Determination of the cell parameters of a TNLC cell by phase-sensitive heterodyne interferometry", 2008 China FPD Conference.