

第二章 理論推導

2.1 問題的描述

如圖一所示，本文考慮一具均勻斷面且雙軸對稱之 Euler 梁，其端點 A 在一稜柱形導槽(Prismatic joint)內以一軸向位移 $U_A(t)$ 滑動，同時稜柱形導槽繞一定點 O 以已知的時間函數 $\phi_o(t)$ 旋轉，本文中僅考慮平面運動，並假設接觸面光滑可忽略其摩擦阻力，本文將探討該旋轉滑動梁的動態反應。本文以共旋轉有限元素法來探討此問題，且將元素分為兩種類型，第一種為普通梁元素，為全部在稜柱形導槽外或導槽內的元素，本文中的普通梁元素採用文獻[1]之梁元素的變形機制，該元素在稜柱形導槽內時沒有側向位移。第二種為部分在導槽內部分在導槽外的元素，本文中稱其為轉接梁元素。本章中將以梁變形前的軸長為獨立變數以推導普通梁元素及轉接梁元素。本文主要採用文獻[15]的研究方法，為了說明方便，內容中有些敘述會與文獻[15]重複。



2.2 基本假設

本文對普通梁元素及轉接梁元素的推導，作如下的假設

- (1) Euler-Bernoulli 假設成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為一常數。
- (3) 梁元素及轉接元素的變形為小變形。
- (4) 梁元素及轉接元素的應變為小應變。

由於本研究中採用共旋轉之全拉格蘭日推導法(co-rotational total Lagrangian formulation)，故只要梁元素數目取的夠多，則假設(3)一定可以滿足，所以本研究中節點內力中節點參數的高次項可以忽略不計，本文中元素的節點變形內力僅取到節點參數的二次項，元素的節點慣性內力僅取到節點參數的零次項。

2.3 座標系統

本研究使用有限元素法，將梁分割成若干個梁元素。本文採用共旋轉全拉格蘭日推導法(co-rotational total Lagrangian formulation)，為了描述梁元素及整個系統的運動與變形，本文中定義了以下三個座標系統：

(1) 固定總體座標系統(global coordinate system)： X_1, X_2 (圖一)

本文中旋轉滑動梁的節點座標、位移、速度、加速度及其他座標系統之基底，均在此座標系統上定義。

(2) 元素座標系統(element coordinate system)： x_1, x_2 (圖二)

此座標系統是建立在每一梁元素變形後的最新位置上， x_1 軸通過梁元素兩端的節點，梁元素的變形、節點內力、及元素的剛度矩陣，均在此座標系統上定義。

(3) 元素斷面座標系統： x_1^S, x_2^S (圖二)

該座標系統的原點剛接在梁斷面的形心上，其 x_1^S 軸在斷面的法線方向(即形心軸的切線方向)，本文中梁元素的變形角是由本座標系統與元素座標系統的相對運動決定。

(4) 導槽座標系統(prismatic joint coordinate system)： X_1^B, X_2^B (圖一)

此座標系統建立在導槽的當前位置上，其原點固定於導槽的旋轉中心， X_1^B 軸和導槽當前的方向一致。此座標系統為一固定座標系統而非旋轉座標系統。本文中旋轉梁結構的運動方程式建立在此座標系統，故其節點座標、節點速度、節點加速度及節點斷面座標均需表示成在此座標系統的分量。

2.4 普通梁元素的推導(稜柱形導槽外之元素)

本文是在元素座標上描述梁元素的變形。由 2.2 節中的基本假設可

知，梁元素的變形可由其形心軸在元素座標上的位移及其斷面的旋轉決定。本文中的推導方法和文獻[1]的方法一樣，但採用梁變形前形心軸的長度為獨立變數。

2.4.1 梁之形心軸的位移

圖二中 P 點的為梁元素形心軸上的任一點，令其變形前後在元素座標上的位置向量分別為 $\{x, 0\}$ 與 $\{x_p(x, t), v(x, t)\}$ 。其中 t 為時間， $x_p(x, t)$ 及 $v(x, t)$ 分別是 P 點在 x_1 與 x_2 軸方向的座標。

變形後形心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos \phi, \sin \phi\} \quad (2.4.1)$$

其中 ϕ 為 x_1 軸和切線向量 \mathbf{t} 的夾角， $\sin \phi$ 及 $\cos \phi$ 可表示成如下

$$\sin \phi = \theta = \frac{\partial v(x, t)}{\partial s} = \frac{v_{,x}}{1 + \varepsilon_0} \quad (2.4.2)$$

$$\cos \phi = \frac{\partial x_p(x, t)}{\partial s} = (1 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.4.3)$$

$$v_{,x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.4.4)$$

在方程式(2.4.2)至(2.4.4)中， s 為節點 1 至點 P 間的形心軸在變形後的弧長，而 ε_0 為形心軸的單位伸長量(unit extension)。由 (2.4.3)至(2.4.4)式， $x_p(x, t)$ 可以表示成下式

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.4.5)$$

其中 u_1 為節點 1 在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零，但其變分及對時間的微分並不為零。

由小變形的假設，利用近似式 $[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2)$ ，(2.4.5)式可表示成

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2) dx \quad (2.4.6)$$

由(2.4.6)式及基本假設(2)可以得到形心軸的單位伸長量 ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{\ell - L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 dx \quad (2.4.7)$$

$$\ell = L + u_2 - u_1$$

其中 ℓ 為梁之形心軸變形後的弦長， u_2 為節點 2 在 x_1 方向的位移。

2.4.2 梁元素之位移與應變

圖二中 Q 點為梁元素中的任意點， P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於同一斷面上。在元素座標上， Q 點在梁元素變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{r} = [x_p(x, t) - y \sin \phi]\mathbf{e}_1 + [v(x, t) + y \cos \phi]\mathbf{e}_2 \quad (2.4.8)$$

其中 \mathbf{e}_i ($i = 1, 2$) 為在 x_i 軸的單位向量。

將(2.4.2)及(2.4.3)式代入(2.4.8)式，在小變形的假設下，利用近似式 $(1-\theta^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，可以將位置向量 \mathbf{r} 重新寫成如下

$$\mathbf{r} = [x_p(x,t) - y\theta]\mathbf{e}_1 + [v(x,t) + y(1 - \frac{1}{2}\theta^2)]\mathbf{e}_2 \quad (2.4.9)$$

本文的應變採用工程應變，為了推導上的方便，本文中先推導出 Green Strain ε_{ij} ，再由 Green Strain 求得與其對應之工程應變。Euler 梁中不為零的 Green Strain 只有 ε_{11} ，可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \quad (2.4.11)$$

其中上標 t 表示矩陣之轉置。

將(2.4.9)式代入(2.4.11)式，可得 \mathbf{g}_1 的分量 g_{11} 和 g_{12} 如下

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - y\theta_{,x} \\ g_{12} &= v_{,x} - y\theta_{,x} \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

(2.4.2)式中 θ 對 x 的一次微分，可以表示成

$$\theta_{,x} = \frac{v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)} \quad (2.4.13)$$

將(2.4.2)式中的 θ 及(2.4.13)式中的 $\theta_{,x}$ 分別代入(2.4.12)式，可以將 g_{11} 和 g_{12}

重新寫成如下

$$\begin{aligned}g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - y \frac{v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)} \\g_{12} &= v_{,x} - y \frac{v_{,x}v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)^2}\end{aligned}\quad (2.4.14)$$

將 (2.4.14) 式代入 (2.4.10)，在小應變的假設下，利用近似式

$\frac{1}{1 + \varepsilon_0} \approx (1 - \varepsilon_0)$ ，且保留變形參數及其微分到二次項，可將應變 ε_{11} 表示如

下

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2 - yv_{,xx} + \frac{1}{2}y^2v_{,xx}^2\quad (2.4.15)$$

Green Strain ε_{11} 與工程應變 e_{11} 間的關係如下[25]

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1\quad (2.4.16)$$

當應變很小時(2.4.16)式可以用下列近似值代替

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2\quad (2.4.17)$$

由(2.4.15)式及(2.4.17)式，並保留變形參數及其微分項到二次項，可得工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)yv_{,xx}\quad (2.4.18)$$

本文中假設梁元素變形後的形心軸的側向位移 $v(x)$ 為 x 的三次 Hermitian 多項式。因此(2.4.9)式之 $v(x)$ 可表示成

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v_1', v_2, v_2'\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.19)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), & N_2 &= \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), & N_4 &= \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi), \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.4.21)$$

其中 $v_j (j = 1, 2)$ 是 v 在節點 j 的節點值， v_j' 則是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 在節點 $j (j = 1, 2)$ 之節點值， $N_i (i = 1-4)$ 代表形狀函數(shape function)。

2.4.3 梁元素之應變變分和位置向量變分及速度和加速度

因本文用虛功原理及 d'Alembert 原理推導節點內力，所以需要應變的變分，位置向量的變分及速度和加速度，其推導如下所示。

將(2.4.18)式變分可以得到

$$\delta e_{11} = [\delta \varepsilon_0 + y v_{,xx} \delta \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0) y \delta v_{,xx}] \quad (2.4.22)$$

將(2.4.7)式變分可以得到 $\delta \varepsilon_0$ 表示如下

$$\delta \varepsilon_0 = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b \quad (2.4.23)$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_a &= \{u_1, u_2\} \\ \mathbf{G}_a &= \frac{1}{L}\{-1, 1\}\end{aligned}\quad (2.4.24)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \frac{1}{L} \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx$$

將(2.4.19)式對 x 的一次微分及二次微分，可分別表示如下

$$\begin{aligned}v_{,x} &= \mathbf{N}'_b{}^t \mathbf{u}_b \\ v_{,xx} &= \mathbf{N}''_b{}^t \mathbf{u}_b\end{aligned}\quad (2.4.25)$$

將(2.4.19)及(2.4.25)式變分可以得到

$$\begin{aligned}\delta v &= \delta \mathbf{u}_b{}^t \mathbf{N}_b \\ \delta v_{,x} &= \delta \mathbf{u}_b{}^t \mathbf{N}'_b \\ \delta v_{,xx} &= \delta \mathbf{u}_b{}^t \mathbf{N}''_b\end{aligned}\quad (2.4.26)$$

將(2.4.23)、(2.4.25)及(2.4.26)式代入(2.4.22)式，可以將 δe_{11} 重新寫成如下所示

$$\delta e_{11} = \delta \mathbf{u}_a{}^t \mathbf{G}_a (1 + y v_{,xx}) + \delta \mathbf{u}_b{}^t [\mathbf{G}_b - \mathbf{N}''_b (1 - \varepsilon_0) y] \quad (2.4.27)$$

由(2.4.9)式可得位置向量 \mathbf{r} 的變分如下

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2\}$$

$$\delta r_1 = \delta x_p - y\delta\theta \quad (2.4.28)$$

$$\delta r_2 = \delta v - y\theta\delta\theta$$

將(2.4.6)式變分後再將(2.4.23)式代入，可以得到

$$\begin{aligned} \delta x_p &= \delta u_1 + x\delta\varepsilon_0 - \int_0^x v_{,x}\delta v_{,x}dx \\ &= \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{1+\xi}{2} L \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b - \int_0^x v_{,x}\delta v_{,x}dx \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.4.30)$$

其中 ξ 已在(2.4.21)式中定義。

將(2.4.2)變分可以得到

$$\cos\phi\delta\phi = \delta\theta = -\delta\varepsilon_0 v_{,x} + (1-\varepsilon_0)\delta v_{,x} \quad (2.4.31)$$

將(2.4.2)、(2.4.29)及(2.4.31)式代入(2.4.28)式，位置向量的變分 $\delta\mathbf{r}$ 可以寫成

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{1+\xi}{2} L \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b - \int_0^x v_{,x}\delta v_{,x}dx + \underline{y v_{,x}\delta\varepsilon_0} - y(1-\varepsilon_0)\delta v_{,x} \\ \delta r_2 &= \delta v + \underline{y(1-\varepsilon_0)v_{,x}^2\delta\varepsilon_0} - \underline{y(1-\varepsilon_0)^2 v_{,x}\delta v_{,x}} \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

因為梁元素為小變形，所以 v 及 $v_{,x}$ 在元素較多時都將趨近於零，故在計算慣性力時，上式中畫底線的項可以忽略，將(2.4.26)式帶入(2.4.32)式並忽略加底線的項可得

$$\delta r_1 = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a - y(1 - \varepsilon_0) \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}'_b \quad (2.4.33)$$

$$\delta r_2 = \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b$$

梁的絕對速度可以由(2.4.9)式中的位置向量對時間做一次微分求得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \{\dot{r}_1, \dot{r}_2\} \\ &= \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 \\ \dot{r}_1 &= \dot{x}_p - y\dot{\theta} \\ \dot{r}_2 &= \dot{v} - y\theta\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

其中()表示對()時間的微分

梁的絕對加速度可由(2.4.34)式對時間微分一次求得

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2\} \\ &= \ddot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{r}_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$



其中

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \ddot{x}_p - y\ddot{\theta} \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} - y\dot{\theta}^2 - y\theta\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

將(2.4.6)式分別對時間做微分一次及微分二次，可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{u}_1 + \dot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \\ \ddot{x}_p &= \ddot{u}_1 + \ddot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx \end{aligned} \quad (2.4.36)$$


將(2.4.2)式分別對時間做微分一次及微分二次，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= (1 - \varepsilon_0)\dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x} \\ \ddot{\theta} &= (1 - \varepsilon_0)\ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}\end{aligned}\quad (2.4.37)$$

將(2.4.7)式對時間做微分一次，可以得到

$$\dot{\varepsilon}_0 = \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \quad (2.4.38)$$

將(2.4.2)、(2.4.36)、(2.4.37)及(2.4.38)式代入(2.4.35)式，我們可以將加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 重新寫成



$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 &= \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1 + \xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx \\ &\quad - y[(1 - \varepsilon_0)\ddot{v}_{,x} - 2(\mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx) \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}] \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} - y[(1 - \varepsilon_0)\dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x}]^2 \\ &\quad - \underline{y(1 - \varepsilon_0)v_{,x}[(1 - \varepsilon_0)\ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}]}\end{aligned}\quad (2.4.39)$$

將上式中含有 v 或 $v_{,x}$ 等位移量之加底線項忽略，可將加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 重新寫成

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 &= \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1 + \xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - y[(1 - \varepsilon_0)\ddot{v}_{,x} - 2\mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \dot{v}_{,x}] \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} - y[(1 - \varepsilon_0)\dot{v}_{,x}]^2\end{aligned}\quad (2.4.40)$$

2.4.4 梁元素的節點內力

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在座標上求對應於元素節點參數的元素節點內力。若給端點 j ($j = 1, 2$) 一個虛位移 δu_j 、 δv_j 和 $\delta \phi_j$ ，則由虛功原理可知，對應於該端點的虛位移、外力所作的虛功 δW_{ext} 等於內力所作的虛功 δW_{int} 即

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.4.41)$$

在本推導中 δW_{ext} 為元素的節點內力 \mathbf{f} 對節點虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 所做的功，可表示成

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_{b\phi}^t \mathbf{f}_b \quad (2.4.42)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q} &= \{\delta u_1, \delta v_1, \delta \phi_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta \phi_2\} \\ \delta \mathbf{u}_a &= \{\delta u_1, \delta u_2\} \\ \delta \mathbf{u}_{b\phi} &= \{\delta v_1, \delta \phi_1, \delta v_2, \delta \phi_2\} \\ \mathbf{f} &= \{f_{11}, f_{21}, m_1, f_{12}, f_{22}, m_2\} \\ \mathbf{f}_a &= \{f_{11}, f_{12}\} = \mathbf{f}_a^d + \mathbf{f}_a^I \\ \mathbf{f}_b &= \{f_{21}, m_1, f_{22}, m_2\} = \mathbf{f}_b^d + \mathbf{f}_b^I \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_a$ 為軸方向的虛位移， $\delta \mathbf{u}_{b\phi}$ 為側向的虛位移， \mathbf{f}_a 、 \mathbf{f}_b 為對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 、 $\delta \mathbf{u}_{b\phi}$ 的節點力， ϕ_j ($j = 1, 2$) 為節點 j 的轉角， f_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) 為節點 j 在 x_i 方向的節點力， m_j ($j = 1, 2$) 為節點 j 的力矩， \mathbf{f}_a^d 及 \mathbf{f}_b^d 為與變形有關的節點內力， \mathbf{f}_a^I 及 \mathbf{f}_b^I 為與慣性力有關的節點內力。

內力所作的虛功又分成虛應變所造成的虛功及將慣性力(質量與負的加速度之乘積)併入微體力(body force)所作的虛功，故內力所作的虛功可以

表示成：

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta \\ &= \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV\end{aligned}\quad (2.4.44)$$

其中

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_\theta &= \{\delta u_1, \delta v_1, \delta v'_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta v'_2\} \\ \delta \mathbf{u}_b &= \{\delta v_1, \delta v'_1, \delta v_2, \delta v'_2\} \\ \mathbf{f}_\theta &= \{f_{11}^\theta, f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{12}^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} \\ \mathbf{f}_a^\theta &= \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\} = \mathbf{f}_a^{d\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \\ \mathbf{f}_b^\theta &= \{f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} = \mathbf{f}_b^{d\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta}\end{aligned}\quad (2.4.45)$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為對應於元素虛應變 δe_{11} 和虛位移 $\delta \mathbf{r}$ 的節點虛位移， \mathbf{f}_θ 為對應於 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的等效節點力， m_j^θ ($j=1, 2$) 為對應於虛位移 $\delta v'_j$ ($j=1, 2$) 的廣義力矩。 E 為楊氏係數， ρ 為梁的密度， V 為梁在未變形前的體積， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為加速度。(2.4.44) 式中，右式的第一項為應力所作的虛功，第二項為慣性力所作的虛功。

利用(2.4.23)、(2.4.24)及(2.4.31)式及 $\cos \phi \approx 1$ 可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad (2.4.46)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_1}{L} & \theta_1 G_{b1} & 1 + \varepsilon_0 + \theta_1 G_{b2} & \frac{\theta_1}{L} & \theta_1 G_{b3} & \theta_1 G_{b4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\theta_2}{L} & \theta_2 G_{b1} & \theta_2 G_{b2} & \frac{\theta_2}{L} & \theta_2 G_{b3} & 1 + \varepsilon_0 + \theta_2 G_{b4} \end{bmatrix} \quad (2.4.47)$$

其中 $\theta_j = \frac{v'_j}{1 + \varepsilon_0}$ ($j = 1, 2$)。

由反梯度法則 (Contragradient Law) [26] 及 (2.4.46) 式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.4.48)$$

將 (2.4.18) 式之 e_{11} 及 (2.4.27) 式之 δe_{11} 代入 (2.4.44) 式右邊的第一項，並保留變形參數到二次項，可以得到應力所做的虛功

$$\begin{aligned} & \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV \\ &= \delta \mathbf{u}_a^t [EAL\varepsilon_0 - EI(1 - \varepsilon_0) \int v_{,xx}^2 dx] \mathbf{G}_a \\ & \quad + \delta \mathbf{u}_b^t [EA\varepsilon_0 \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx] \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

其中

$$I = \int y^2 dA \quad (2.4.50)$$

上式中 A 為梁的斷面積， $\int(\)dx$ 中的積分範圍是從 0 到 L 。

將 (2.4.40) 式之 $\ddot{\mathbf{r}}$ 及 (2.4.33) 式之 $\delta \mathbf{r}$ 代入 (2.4.44) 式右邊的第二項，並保留變形參數對時間的微分到二次項，可以得到慣性力所做的虛功

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \\ &= \int [(\delta r_1) \ddot{r}_1 + (\delta r_2) \ddot{r}_2] dV \\ &= \delta \mathbf{u}_a^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1 + \xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \right\} \\ & \quad + \delta \mathbf{u}_b^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I (1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2\rho I (1 - \varepsilon_0) \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \right\} \end{aligned}$$

$$(2.4.51)$$

將(2.4.49)及(2.4.51)式代入(2.4.44)式後可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 和 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點力向量為

$$\mathbf{f}_a^\theta = \mathbf{f}_a^{d\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.4.52)$$

$$\mathbf{f}_a^{d\theta} = [EAL\varepsilon_0 - EI(1 - \varepsilon_0)] \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \quad (2.4.53)$$

$$\mathbf{f}_a^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \quad (2.4.54)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \mathbf{f}_b^{d\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.4.55)$$

$$\mathbf{f}_b^{d\theta} = f_{12}^\theta \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \quad (2.4.56)$$

$$\mathbf{f}_b^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2\rho I \mathbf{G}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \quad (2.4.57)$$

由(2.4.48)式及(2.4.52)–(2.4.57)式並忽略慣性力中節點參數與其對時間微分的耦合項，可得

$$\mathbf{f}_a^d = AEL\varepsilon_0 \mathbf{G}_a \quad (2.4.58)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.4.59)$$

$$\mathbf{f}_b^d = EA\varepsilon_0 \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1 - \varepsilon_0) \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \quad (2.4.60)$$

$$\mathbf{f}_b^I = \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.4.61)$$

本文分析旋轉滑動梁時，因假設導槽為剛體且其轉角為已知的時間函數，故本文中導槽內梁元素節點的位移為對導槽的相對軸向位移，由導槽座標的定義方式，可知梁元素節點的絕對側向位移和相對側向位移一樣皆為零，並可表示成

$$\mathbf{u}_b = \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \{0, 0, 0, 0\}$$

導槽內梁元素之節點的絕對側向速度可由導槽的角速度決定，並可表示成：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_b &= \{\dot{v}_1, \dot{v}'_1, \dot{v}_2, \dot{v}'_2\} \approx \{\dot{v}_1, \dot{\phi}_1, \dot{v}_2, \dot{\phi}_2\} \\ \dot{\phi}_j &= \dot{\phi}_o \\ \dot{v}_j &= R_{oj} \dot{\phi}_o\end{aligned}\quad (2.4.62)$$

導槽內梁元素之節點側向絕對加速度可由導槽的角加速度，角速度及節點對導槽的相對軸向速度決定，並可表示成：

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_b &= \{\ddot{v}_1, \ddot{v}'_1, \ddot{v}_2, \ddot{v}'_2\} \approx \{\ddot{v}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{v}_2, \ddot{\phi}_2\} \\ \ddot{\phi}_j &= \ddot{\phi}_o \\ \ddot{v}_j &= R_{oj} \ddot{\phi}_o + 2\dot{u}_j^{rel} \dot{\phi}_o\end{aligned}\quad (2.4.63)$$

其中 $\dot{\phi}_o$ 及 $\ddot{\phi}_o$ 為導槽當前位置的角速度及角加速度， R_{oj} 為元素之節點 j ($j=1, 2$) 在當前導槽座標之 X_1^B 軸的座標值， \dot{u}_j^{rel} ($j=1, 2$) 為節點 j 對導槽的相對軸向速度。

導槽內梁元素的絕對軸向位移、速度與相對軸向位移、速度相同，軸向的絕對加速度可表示成

$$\ddot{u}_j = \ddot{u}_j^{rel} - R_{oj} \dot{\phi}_o^2 \quad (2.4.64)$$

其中 \ddot{u}_j^{rel} ($j=1, 2$) 為節點 j 的相對加速度。

2.5 元素節點變形角之決定(圖三)

令 X_{ij}^I ， \mathbf{e}_{ij}^{SI} ($i=1, 2, j=1, 2$) 為梁元素在第 I 個變形位置時節點 j 在 X_i 軸的座標值及斷面座標軸的單位向量，其中第 I 個變形位置代表第 I 個增量的平衡位置，或是第 I 次迭代後的變形位置。令 ΔX_{ij} 及 $\Delta \phi_j$ 代表元素第 j 個節點的位移和轉角增量(或改正量)，則將 ΔX_{ij} 加到 X_{ij}^I 可以得到節點 j 當

前的座標值 X_{ij} ，並可建立當前的元素座標 x_i 及求得對應於座標軸的單位向量 \mathbf{e}_i ，將 \mathbf{e}_{ij}^{SI} 旋轉一角度 $\Delta\phi_j$ ，可求得當前節點 j 之斷面座標軸的單位向量 \mathbf{e}_{ij}^S 。在當前變形位置元素節點 j 的變形角 ϕ_j 可由下式決定

$$\phi_j = \sin^{-1}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_{1j}^S \cdot \mathbf{e}_3) \quad (2.5.1)$$

其中 \mathbf{e}_3 為 x_3 軸的單位向量

2.6 轉接梁元素的推導(同時介於稜柱形導槽內外之元素)

如圖四所示為本文提出之轉接梁元素變形後的示意圖，點 1 及 2 為轉接梁元素兩端點的節點，點 3 位於導槽的端點 C(圖一及圖四)，為轉接梁元素在導槽內的部分與導槽外的部分的交點。C 點為空間中的一個固定點，點 3 並非一個固定點，但在當前的變形位置，C 點和點 3 的位置重合。為了方便稱呼，本文中稱點 1 到點 3 間的轉接梁元素為第一段轉接梁元素，點 3 到點 2 間的轉接梁元素為第二段轉接梁元素。本文中假設導槽為剛體，故第一段轉接元素的變形曲線為一直線，本文中假設第二段轉接元素的變形曲線為一三次 Hermitian 多項式。兩段變形曲線在點 3 有相同的位置及切線。

為了描述轉接梁元素的變形及推導其節點內力及剛度矩陣，如圖四所示，本文中定義兩組元素座標系統於轉接元素當前的變形位置上。座標 $\bar{x}_1\bar{x}_2$ 建立於第一段轉接梁元素變形後的最新位置， \bar{x}_1 軸通過於節點 1 及節點 3。座標 x_1x_2 建立於第二段轉接元素變形後的最新位置， x_1 軸通過於節點 3 及節點 2。節點 1 僅能在 \bar{x}_1 軸方向移動，節點 2 可以在 x_1 及 x_2 軸方向移動並可轉動。節點 3 的切線在 \bar{x}_1 軸方向，故僅能在 \bar{x}_1 軸方向移動。因節點 3 的位移及虛位移可以由節點 1、2 的位置及虛位移還有 2.2 節中的基本

假設(2)決定，所以節點 3 並非一個獨立的節點。本文中提出的轉接梁元素有兩個獨立節點，即節點 1、2 及 4 個自由度，即 \bar{u}_1 、 u_2 、 v_2 及 ϕ_2 (見圖四)。

本節中的變數有些和 2.5 節中的變數有相同的名稱但不同的定義，但應不致引起混淆，為了說明方便亦有些重複之處。

因本文提出的轉接梁元素未變形的長度為一固定長度 L ，所以 L 不是時間的函數，但其第一段及第二段變形前的長度 L_1 及 L_2 皆為時間的函數，且有以下的關係式

$$L_1 + L_2 = L \quad (2.6.1)$$

若節點 1 及 2 的位置及元素斷面座標已知，則第一段及第二段轉接梁元素的弦長 l_1 及 l_2 、節點變形角 ϕ_2 、 ϕ_3 (見圖四) 都可以求出。

2.6.1 轉接梁元素之形心軸的應變

由基本假設(2)，可將轉接梁元素之形心軸的單位伸長量表示成

$$\varepsilon_0 = \frac{l_1}{L_1} - 1 = \frac{l_2}{L_2} + \varepsilon_v - 1 \quad (2.6.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{1}{2L_2} \int_0^{L_2} v_{,x}^2 dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 v_{,x}^2 d\xi \\ &= \frac{1}{30} (2v_3'^2 - v_3'v_2' + 2v_2'^2) \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$v_j' = \sin \phi_j (1 + \varepsilon_0) \quad (j = 2, 3) \quad (2.6.4)$$

由(2.6.1)及(2.6.2)式可以求得

$$L_1 = \frac{L\ell_1}{\ell} \left(1 - \frac{\ell_2 L}{\ell^2} \varepsilon_v\right) \quad (2.6.5)$$

$$L_2 = \frac{L\ell_2}{\ell} \left(1 + \frac{\ell_1 L}{\ell^2} \varepsilon_v\right) \quad (2.6.6)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\ell}{L} + \frac{\ell_2}{\ell} \varepsilon_v - 1 \quad (2.6.7)$$

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 \quad (2.6.8)$$

(2.6.5) - (2.6.7)式的推導在附錄 A 中。

2.6.2 轉接梁元素之位移與應變

第一段轉接梁元素定義於圖四中元素座標 $\bar{x}_1\bar{x}_2$ 上，其上的任意點變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= x\bar{\mathbf{e}}_1 + y\bar{\mathbf{e}}_2 & 0 \leq x \leq L_1 \\ \mathbf{r} = \{r_1, r_2\} &= [\bar{u}_1 + (1 + \varepsilon_0)x]\bar{\mathbf{e}}_1 + [\bar{v}(x) + y]\bar{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

其中 $\bar{\mathbf{e}}_i$ ($i = 1, 2$) 為在 \bar{x}_i 軸的單位向量， \bar{u}_1 為節點 1 在 \bar{x}_1 軸的位移，依元素座標的定義方式其值為零，但其變分及微分皆不為零。 $\bar{v}(x)$ 為形心軸上之任一點的側向位移，依元素座標的定義其值為零，因導槽的旋轉為已知，故其變分為零，但對時間的微分不為零。 ε_0 已在(2.6.7)式中定義。

將(2.6.9)式代入(2.4.10)式以及利用(2.4.17)式，並保留變形參數及其微分項到二次項，可以得到第一段轉接梁元素的工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 \quad (2.6.10)$$

第二段轉接梁元素定義於圖四中元素座標 x_1x_2 上，如同 2.4.1 及 2.4.2

節中推導普通梁元素的方法，第二段轉接梁元素上的任意點其變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \quad 0 \leq x \leq L_2$$

$$\mathbf{r} = \{r_1, r_2\} = [x_p(x, t) - y\theta]\mathbf{e}_1 + [v(x, t) + y(1 - \frac{1}{2}\theta^2)]\mathbf{e}_2 \quad (2.6.11)$$

$$x_p(x, t) = u_3 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2) dx \quad (2.6.12)$$

$$\theta = v_{,x} / (1 + \varepsilon_0) \quad (2.6.13)$$

其中 \mathbf{e}_i ($i = 1, 2$) 為在 x_i 軸的單位向量， u_3 為節點 3 在 x_1 方向的位移，其值為零。

將(2.6.11)式代入(2.4.10)式以及利用(2.4.17)式，並保留變形參數及其微分項到二次項，可以得到第二段轉接梁元素的工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)yv_{,xx} \quad (2.6.14)$$

本文中假設第二段轉接梁元素變形後的形心軸的側向位移 $v(x)$ 為 x 的三次 Hermitian 多項式。因此(2.6.11)式之 $v(x)$ 可表示成

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_3, v'_3, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.6.15)$$

其中 N_i ($i = 1-4$) 代表形狀函數(shape function)，且如同(2.4.20)和(2.4.21)式所示，但將這二式中的 L 置換成 L_2 。為了本節中推導的需要，將 N_i 重複列於下式

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad N_2 = \frac{L_2}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad N_4 = \frac{L_2}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi), \quad (2.6.16)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L_2} \quad (2.6.17)$$

將(2.6.15)式對 x 的一次微分及二次微分，可分別表示如下

$$v_{,x} = \mathbf{N}'_b{}^t \mathbf{u}_b \quad (2.6.18)$$

$$v_{,xx} = \mathbf{N}''_b{}^t \mathbf{u}_b \quad (2.6.19)$$

2.6.3 轉接梁元素之應變變分和位置向量變分

因本文用虛功原理及 d'Alembert 原理推導節點內力，所以需要應變的變分，位置向量的變分及速度和加速度，其推導如下所示。

由(2.6.10)式，並將(2.6.7)式變分，並取到變形參數的一次項可以得到

$$\delta e_{11} = \delta \varepsilon_0 = \frac{\delta l}{L} + \frac{\ell_2}{\ell} \delta \varepsilon_v \quad (2.6.20)$$

$$\delta l = \delta l_1 + \delta l_2 = -\delta \bar{u}_1 + \delta u_2 = \{\delta \bar{u}_1, \delta u_2\}^t \{-1, 1\} \quad (2.6.21)$$

$$\delta \varepsilon_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_{,x} \delta v_{,x} d\xi \quad (2.6.22)$$

將(2.6.18)式變分可得

$$\delta v_{,x} = \delta \mathbf{u}_b{}^t \mathbf{N}'_b + (\delta \mathbf{N}'_b{}^t) \mathbf{u}_b \quad (2.6.23)$$

$$\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_3, \delta v'_3, \delta v_2, \delta v'_2\} \quad (2.6.24)$$

$$\delta \mathbf{N}'_b = \frac{-\delta L_2}{L_2} \{N'_1, 0, N'_3, 0\} \quad (2.6.25)$$

因第二段轉接梁元素的形狀函數中， L_2 不是常數，所以(2.6.23)式中需考慮形狀函數的變分。但因 $v_3 = v_2 = 0$ ，所以(2.6.23)式中 $\delta \mathbf{N}'_b \mathbf{u}_b = 0$ 。

利用(2.6.1)、(2.6.6)及(2.6.21)式可將(2.6.25)式中 δL_2 的一次近似式表示成

$$\begin{aligned} \delta L_2 &= -\delta L_1 = \frac{L}{\ell} \delta \ell_2 - \frac{L \ell_2}{\ell^2} \delta \ell + \frac{L^2 \ell_1 \ell_2}{\ell^3} \delta \varepsilon_v \\ &= \frac{L}{\ell} \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_c + \frac{L^2 \ell_1 \ell_2}{\ell^3} \delta \varepsilon_v \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

$$\mathbf{G}_c = \left\{ \frac{\ell_2}{\ell}, \frac{\ell_1}{\ell} \right\} \quad (2.6.27)$$

將(2.6.21)、(2.6.22)及(2.6.23)式代入(2.6.20)式，可得

$$\delta e_{11} = \delta \varepsilon_0 = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b \quad (2.6.28)$$

其中

$$\delta \mathbf{u}_a = \{ \delta \bar{u}_1, \delta u_2 \} \quad (2.6.29)$$

$$\mathbf{G}_a = \frac{1}{L} \{-1, 1\} \quad (2.6.30)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \frac{\ell_2}{2\ell} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_b v_{,x} d\xi \quad (2.6.31)$$

將(2.6.14)式變分，可以得到第二段轉接梁元素應變的變分如下

$$\delta e_{11} = \delta \varepsilon_0 - y(1 - \varepsilon_0) \delta v_{,xx} + y v_{,xx} \delta \varepsilon_0 \quad (2.6.32)$$

將(2.6.19)式變分可得

$$\delta v_{,xx} = \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b'' + (\delta \mathbf{N}_b^{''t}) \mathbf{u}_b \quad (2.6.33)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{N}_b'' &= \frac{-\delta L_2}{L_2} \{2N_1'', N_2'', 2N_3'', N_4''\} \\ &= \frac{-\delta L_2}{L_2} \mathbf{N}_c \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

因 $v_3 = v_2 = 0$ ，所以利用(2.6.34)式可得

$$(\delta \mathbf{N}_b^{''t}) \mathbf{u}_b = \frac{-\delta L_2}{L_2} v_{,xx} \quad (2.6.35)$$

將(2.6.28)、(2.6.33)、(2.6.34)、(2.6.35)及(2.6.26)式代入(2.6.32)式，並取到變形參數的一次項可得

$$\begin{aligned} \delta e_{11} &= \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a (1 + y v_{,xx}) + \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_c (y v_{,xx}) / L_2 \\ &\quad + \delta \mathbf{u}_b^t [-\mathbf{N}_b'' (1 - \varepsilon_0) y + \mathbf{G}_b] \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

因為梁元素為小變形，所以 v 及 $v_{,x}$ 在元素較多時都將趨近於零，故在計算慣性力時變形參數的高次項可以忽略，因此 $\delta \mathbf{r}$ 僅取到變形參數的零次項，由(2.6.9)及(2.6.28)式並取到變形參數的零次項，可得第一段轉接梁元素位置向量 \mathbf{r} 的變分如下

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2\}$$

$$\begin{aligned}\delta r_1 &= \delta \bar{u}_1 + (\delta \varepsilon_0)x = \delta \bar{u}_1 + (\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a)x \\ \delta r_2 &= 0\end{aligned}\quad (2.6.37)$$

令 $\bar{u}(x)$ 表示第一段轉接梁元素在 \bar{x}_1 方向的位移，則由位移的定義及(2.6.9)式可得

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_1 + \varepsilon_0 x \quad (2.6.38)$$

由(2.6.37)及(2.6.38)式可知

$$\delta \bar{u} = \delta r_1 \quad (2.6.39)$$

因 $\bar{u}_3 = \bar{u}(L_2)$ ，所以由(2.6.39)及(2.6.37)式可得

$$\delta \bar{u}_3 = \delta \bar{u}_1 + L_1 \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a \quad (2.6.40)$$

由(2.6.11)式的變分並取到變形參數的零次項，可得第二段轉接梁元素位置向量 \mathbf{r} 的變分如下

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r} &= \{\delta r_1, \delta r_2\} \\ \delta r_1 &= \delta x_p - y \delta \theta \\ \delta r_2 &= \delta v\end{aligned}\quad (2.6.41)$$

將(2.6.12)式變分並取到變形參數的零次項可以得到

$$\delta x_p = \delta u_3 + x \delta \varepsilon_0 \quad (2.6.42)$$

由位移的連續性及圖四可知

$$\delta u_3 = \delta \bar{u}_3 \cos \phi_3 - \delta \bar{v}_3 \sin \phi_3 \quad (2.6.43)$$

$$\delta v_3 = \delta \bar{u}_3 \sin \phi_3 + \delta \bar{v}_3 \cos \phi_3 \quad (2.6.44)$$

其中 δu_3 及 δv_3 分別為節點 3 在 x_1 及 x_2 方向的虛位移。

由(2.6.43)及(2.6.40)式，並取到變形參數的零次項可得

$$\delta u_3 = \delta \bar{u}_1 + \frac{L_1}{L}(\delta u_2 - \delta \bar{u}_1) \quad (2.6.45)$$

$$\delta v_3 = \delta \bar{v}_3$$

將(2.6.28)及(2.6.45)式帶入(2.6.42)中，並取到變形參數的零次項可得

$$\delta x_p = \delta \bar{u}_1 \left(\frac{L_2}{L} - \frac{x}{L} \right) + \delta u_2 \left(\frac{L_1}{L} + \frac{x}{L} \right) \quad (2.6.46)$$

將(2.6.13)式變分並取到變形參數的零次項可以得到

$$\delta \theta = (1 - \varepsilon_0) \delta v_{,x} \quad (2.6.47)$$

由(2.6.15)式的變分並取到變形參數的零次項可得

$$\delta v = \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b \quad (2.6.48)$$

將(2.4.32) 及(2.6.46–2.6.48)式分別帶入(2.6.41)式，第二段轉接梁元素位置向量 \mathbf{r} 的變分可重新寫成下式

$$\begin{aligned}\delta r_1 &= \delta \bar{u}_1 \left(\frac{L_2}{L} - \frac{x}{L} \right) + \delta u_2 \left(\frac{L_1}{L} + \frac{x}{L} \right) - y(1 - \varepsilon_0) \delta v_{,x} \\ \delta r_2 &= \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b\end{aligned}\quad (2.6.49)$$

2.6.4 轉接梁元素之速度和加速度

第一段轉接梁元素的絕對速度可以由(2.6.9)式中的位置向量對時間做一次微分求得

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \{\dot{r}_1, \dot{r}_2\} = \dot{r}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dot{r}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \dot{r}_1 &= \dot{\bar{u}}_1 + \dot{\varepsilon}_0 x \\ \dot{r}_2 &= \dot{v}\end{aligned}\quad (2.6.50)$$

第一段轉接梁元素的絕對加速度可由(2.6.50)式對時間微分一次求得

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2\} = \ddot{r}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \ddot{r}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \ddot{r}_1 &= \ddot{\bar{u}}_1 + \ddot{\varepsilon}_0 x \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v}\end{aligned}\quad (2.6.51)$$

因第一段轉接梁元素在導槽內且與導槽作剛體旋轉，故可由剛體運動學得知(2.6.50)式的 \dot{v} 及(2.6.51)式的 \ddot{v} 。其中， R 為節點1至旋轉固定點 O 的距離， ω 為旋轉滑動梁當前的角速度。

由(2.6.7)、(2.6.3)及(2.6.8)式對時間微分，並取到變形參數的一次項可得

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{l}}{L} + \frac{l_2}{l} \dot{\varepsilon}_v \quad (2.6.52)$$

$$\dot{l} = \dot{u}_2 - \dot{\bar{u}}_1 = \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}}_a^t \mathbf{G}_a \quad (2.6.53)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \{\dot{u}_1, \dot{u}_2\} \quad (2.6.54)$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_{,x} \dot{v}_{,x} d\xi \quad (2.6.55)$$

其中 \mathbf{G}_a 已在(2.6.30)式中定義

由(2.6.18)、(2.6.6)及(2.6.26)式，對時間微分，並取到變形參數的一次項可得

$$\dot{v}_{,x} = \mathbf{N}'_b{}^t \dot{\mathbf{u}}_b + (\dot{\mathbf{N}}'_b{}^t) \mathbf{u}_b \quad (2.6.56)$$

$$\dot{\mathbf{N}}'_b = \frac{-\dot{L}_2}{L_2} \{N'_1, 0, N'_3, 0\} \quad (2.6.57)$$

$$\dot{L}_2 = \dot{\mathbf{u}}_a{}^t \mathbf{G}_c \quad (2.6.58)$$

其中 \mathbf{G}_c 已在(2.6.27)式中定義。因 $v_3 = v_2 = 0$ 所以(2.6.56)式中 $(\dot{\mathbf{N}}'_b{}^t) \mathbf{u}_b = 0$

將(2.6.52)式代入(2.6.50)式可得

$$\dot{r}_1 = \dot{u}_1 + (\dot{\mathbf{u}}_a{}^t \mathbf{G}_a + \frac{\ell_2}{\ell} \dot{\varepsilon}_v) x \quad (2.6.59)$$

由(2.6.38)式及(2.6.50)式可得

$$\dot{u}(x) = \dot{r}_1 \quad (2.6.60)$$

由(2.6.60)式及(2.6.59)式可知

$$\dot{u}_3 = \dot{u}(L_1) = \dot{u}_1 + (\dot{\mathbf{u}}_a{}^t \mathbf{G}_a + \frac{\ell_2}{\ell} \dot{\varepsilon}_v) L_1 \quad (2.6.61)$$

將(2.6.52)式對時間微分，並取到變形參數的零次項可得

$$\ddot{\varepsilon}_0 = \ddot{\mathbf{u}}_a^t \mathbf{G}_a + \frac{\ell_2}{\ell} \ddot{\varepsilon}_v \quad (2.6.62)$$

$$\ddot{\varepsilon}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \dot{v}_{,x}^2 d\xi \quad (2.6.63)$$

將(2.6.62)式代入(2.6.51)式可得

$$\ddot{r}_1 = \ddot{u}_1 + (\ddot{\mathbf{u}}_a^t \mathbf{G}_a + \frac{\ell_2}{\ell} \ddot{\varepsilon}_v) x \quad (2.6.64)$$

由(2.6.38)式及(2.6.51)式可得

$$\ddot{u}(x) = \ddot{r}_1 \quad (2.6.65)$$



由(2.6.65)式及(2.6.64)式可知

$$\ddot{u}_3 = \ddot{u}(L_1) = \ddot{u}_1 + (\ddot{\mathbf{u}}_a^t \mathbf{G}_a + \frac{\ell_2}{\ell} \ddot{\varepsilon}_v) L_1 \quad (2.6.66)$$

第二段轉接梁元素的絕對速度可以由(2.6.11)式中的位置向量對時間做
一次微分求得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \{\dot{r}_1, \dot{r}_2\} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 \\ \dot{r}_1 &= \dot{x}_p - \dot{\theta} y \\ \dot{r}_2 &= \dot{v} - \theta \dot{\theta} y \end{aligned} \quad (2.6.67)$$

第二段轉接梁元素的絕對加速度可由(2.6.67)式對時間微分一次並取到變形參數的零次項求得

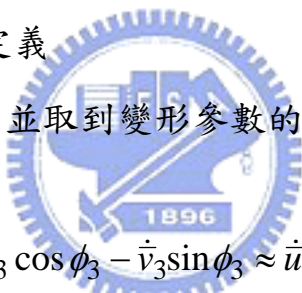
$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2\} = \ddot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{r}_2 \mathbf{e}_2 \\ \ddot{r}_1 &= \ddot{x}_p - \ddot{\theta} y \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{v} - \dot{\theta}^2 y\end{aligned}\tag{2.6.68}$$

將(2.6.12)式對時間為分一次，並取到變形參數的零次項可得

$$\dot{x}_p = \dot{u}_3 + \dot{\varepsilon}_0 x\tag{2.6.69}$$

其中 $\dot{\varepsilon}_0$ 在(2.6.52)式已有定義

由速度的連續性及圖四，並取到變形參數的零次項可得



$$\begin{aligned}\dot{u}_3 &= \dot{\bar{u}}_3 \cos \phi_3 - \dot{\bar{v}}_3 \sin \phi_3 \approx \dot{\bar{u}}_3 \\ \dot{v}_3 &= \dot{\bar{u}}_3 \sin \phi_3 + \dot{\bar{v}}_3 \cos \phi_3 \approx \dot{\bar{v}}_3\end{aligned}\tag{2.6.70}$$

其中 $\dot{\bar{u}}_3$ 在(2.6.61)已有定義。

將(2.6.12)式對時間微分二次，並取到變形參數的零次項可得

$$\ddot{x}_p = \ddot{u}_3 + \ddot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx\tag{2.6.71}$$

其中 $\ddot{\varepsilon}_0$ 在(2.6.62)式已有定義

由加速度的連續性及圖四，並取到變形參數的零次項可得

$$\ddot{u}_3 = \ddot{u}_3 \cos \phi_3 - \ddot{v}_3 \sin \phi_3 \approx \ddot{u}_3 \quad (2.6.72)$$

$$\ddot{v}_3 = \ddot{u}_3 \sin \phi_3 + \ddot{v}_3 \cos \phi_3 \approx \ddot{v}_3$$

其中 \ddot{u}_3 在(2.6.61)已有定義。

將(2.6.13)式對時間做一次及二次微分，並取到變形參數的零次項可得

$$\dot{\theta} = (1 - \varepsilon_0) \dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x} \quad (2.6.73)$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} \quad (2.6.74)$$

將(2.6.56)式對時間微分，並取到變形參數的零次項可得

$$\dot{v}_{,x} = \mathbf{N}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b + 2(\dot{\mathbf{N}}_b^t) \mathbf{u}_b \quad (2.6.75)$$

將(2.6.15)式對時間微分二次，並取到變形參數的零次項可得

$$\ddot{v} = \mathbf{N}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b + 2(\dot{\mathbf{N}}_b^t) \dot{\mathbf{u}}_b \quad (2.6.76)$$

$$\dot{\mathbf{N}}_b = \frac{\dot{L}_2}{L_2} \{0, N_2, 0, N_4\} \quad (2.6.77)$$

其中 \dot{L}_2 在(2.6.58)式中已有定義

2.6.5 轉接梁元素的節點內力

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在元素座標上求出轉接梁元素的節點內力。若給端點 1、2 一個虛位移 δu_1 、 δu_2 、 δv_2 和 $\delta \phi_2$ ，則由虛功原理可知

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.6.78)$$

在本文的推導中 δW_{ext} 為元素的節點內力 \mathbf{f} 對節點虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 所做的功，可表示成

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_{b\phi}^t \mathbf{f}_b \quad (2.6.79)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q} &= \{\delta \bar{u}_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta \phi_2\} \\ \delta \mathbf{u}_a &= \{\delta \bar{u}_1, \delta u_2\} \\ \delta \mathbf{u}_{b\phi} &= \{\delta v_2, \delta \phi_2\} \\ \mathbf{f} &= \{\bar{f}_{11}, f_{12}, f_{22}, m_2\} \\ \mathbf{f}_a &= \{\bar{f}_{11}, f_{12}\} = \mathbf{f}_a^d + \mathbf{f}_a^I \\ \mathbf{f}_b &= \{f_{22}, m_2\} = \mathbf{f}_b^d + \mathbf{f}_b^I \end{aligned} \quad (2.6.80)$$

其中 $\delta \bar{u}_1$ 為節點 1 在 \bar{x}_1 方向的虛位移， δu_2 、 δv_2 為節點 2 在 x_1 及 x_2 方向的虛位移， $\delta \phi_2$ 為節點 2 的虛轉角， \bar{f}_{11} 為節點 1 在 \bar{x}_1 方向的力， f_{12} 、 f_{22} 及 m_2 為節點 2 在 x_1 及 x_2 方向的力及逆時鐘方向的力矩。 \mathbf{f}_a^d 及 \mathbf{f}_b^d 為與變形有關的節點內力， \mathbf{f}_a^I 及 \mathbf{f}_b^I 為與慣性力有關的節點內力。

內力所作的虛功又分成虛應變所造成的虛功及將慣性力(質量與負的加速度之乘積)併入微體力(body force)所作的虛功，故內力所作的虛功可以表示成：

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta \\ &= \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV + \int_V \rho \mathbf{r}^t \delta \mathbf{r} dV \end{aligned} \quad (2.6.81)$$

其中

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta \bar{u}_1, \delta v_3, \delta v_3', \delta u_2, \delta v_2, \delta v_2'\}$$

$$\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_3, \delta v'_3, \delta v_2, \delta v'_2\} \quad (2.6.82)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{\bar{f}_{11}^\theta, f_{23}^\theta, m_3^\theta, f_{12}^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\}$$

$$\mathbf{f}_a^\theta = \{\bar{f}_{11}^\theta, f_{12}^\theta\} = \mathbf{f}_a^{d\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta}$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \{f_{23}^\theta, m_3^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} = \mathbf{f}_b^{d\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta}$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為對應於元素虛應變 $\delta \epsilon_{11}$ 和虛位移 $\delta \mathbf{r}$ 的節點虛位移， \mathbf{f}_θ 為對應於 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的等效節點力， m_2^θ 為對應於虛位移 $\delta v'_2$ 的廣義力矩。E 為楊氏係數， ρ 為梁的密度，V 為梁在未變形前的體積， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為加速度。(2.6.81) 式中，等號右邊的第一項為應力所作的虛功，第二項為慣性力所作的虛功。

利用(2.6.28- 2.6.31)、(2.4.44)、(2.4.45)、(2.4.47)式及 $\delta \phi_3 = 0$ ，並取到變形參數的一次項及部分二次項可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad (2.6.83)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_2 \theta_3}{L} & \frac{L_1 \theta_3}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_3}{L} & \frac{\theta_3}{L} & \frac{\ell_2}{l} \theta_3 G_{b3} & \frac{\ell_2}{l} \theta_3 G_{b4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\theta_2}{L} & \frac{\theta_2}{L} & \frac{\ell_2}{l} \theta_2 G_{b3} & 1 + \epsilon_0 + \frac{\ell_2}{l} \theta_2 G_{b4} \end{bmatrix} \quad (2.6.84)$$

其中 $\theta_j = \frac{v'_j}{1 + \epsilon_0}$ ($j = 3, 2$)。

由反梯度法則 (Contragradient Law) [20] 可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.6.85)$$

(2.6.81)式中的積分包含第一段及第二段轉接梁元素的積分，將(2.6.10)、(2.6.14)式之 e_{11} 及(2.6.20)、(2.6.28)式之 δe_{11} 代入(2.6.81)式中右邊的第一項，並保留變形參數到二次項，可以得到應力所做的虛功

$$\begin{aligned}
 & \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV \\
 &= \delta \mathbf{u}_a^t [EAL\varepsilon_0 - EI(1-\varepsilon_0) \int_0^{L_2} v_{,xx}^2 dx] \mathbf{G}_a \\
 & \quad - \delta \mathbf{u}_a^t \left[\frac{EI}{L_2} (1-\varepsilon_0)^2 \int_0^{L_2} v_{,xx}^2 dx \right] \left\{ \frac{\ell_2}{\ell}, \frac{\ell_1}{\ell} \right\} \\
 & \quad + \delta \mathbf{u}_b^t \left[EA\varepsilon_0 \frac{L\ell_2}{2\ell} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_b v_{,x} d\xi + EI(1-\varepsilon_0)^2 \int_0^{L_2} \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \right] \quad (2.6.86)
 \end{aligned}$$

將(2.6.64)、(2.6.68)式之 $\ddot{\mathbf{r}}$ 及(2.6.37)、(2.6.41)式之 $\delta \mathbf{r}$ 代入(2.6.81)式右邊的第二項之第一段及第二段轉接梁元素，並保留變形參數的微分到二次項及變形參數的零次項，可以得到慣性力所做的虛功

$$\begin{aligned}
 & \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \\
 &= \delta \mathbf{u}_a^t \left[\rho A \int_0^L \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int_0^L \mathbf{N}_a \left(\frac{\ell_2 x}{2\ell} \int_{-1}^1 \dot{v}_{,x}^2 d\xi \right) dx \right] \\
 & \quad - \delta \mathbf{u}_a^t \left[\rho A \int_0^{L_2} \left(\left\{ 1 - \frac{L_1+x}{L}, \frac{L_1+x}{L} \right\} \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \right] \\
 & \quad + \delta \mathbf{u}_b^t \left[\rho A \int_0^{L_2} \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I (1-\varepsilon_0) \int_0^{L_2} \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2\rho I (1-\varepsilon_0) \dot{\varepsilon}_0 \int_0^{L_2} \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \right] \quad (2.6.87)
 \end{aligned}$$

將(2.6.86)及(2.6.87)式代入(2.6.81)式後可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 和 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點力向量為

$$\mathbf{f}_a^\theta = \mathbf{f}_a^{d\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.6.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^{d\theta} &= [EAL\varepsilon_0 - EI(1-\varepsilon_0)] \int_0^{L_2} v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \\ &\quad - \left[\frac{EI}{L_2} (1-\varepsilon_0)^2 \int_0^{L_2} v_{,xx}^2 dx \right] \mathbf{G}_c \end{aligned} \quad (2.6.89)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^{I\theta} &= \rho A \int_0^L \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int_0^L \mathbf{N}_a \left(\frac{\ell_2 x}{2\ell} \int_{-1}^1 \dot{v}_{,x}^2 d\xi \right) dx \\ &\quad - \rho A \int_0^{L_2} \left(\left\{ 1 - \frac{L_1+x}{L}, \frac{L_1+x}{L} \right\} \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \end{aligned} \quad (2.6.90)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \mathbf{f}_b^{d\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.6.91)$$

$$\mathbf{f}_b^{d\theta} = EA\varepsilon_0 \frac{L\ell_2}{2\ell} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'_b v_{,x} d\xi + EI(1-\varepsilon_0)^2 \int_0^{L_2} \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \quad (2.6.92)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b^{I\theta} &= \rho A \int_0^{L_2} \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I (1-\varepsilon_0)^2 \int_0^{L_2} \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx \\ &\quad - 2\rho I (1-\varepsilon_0) (\dot{\mathbf{u}}_a^t \mathbf{G}_a) \int_0^{L_2} \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \end{aligned} \quad (2.6.93)$$

由(2.6.85)式及(2.6.88)–(2.6.93)式並忽略慣性力中節點參數與其對時間微分的耦合項，可得

$$\mathbf{f}_a^d = \{ \bar{f}_{11}^d, f_{12}^d \} \quad (2.6.94)$$

$$\bar{f}_{11}^d = -AE\varepsilon_0 + \frac{\ell_2 EI}{\ell LL_2} (2\theta_3^2 + 2\theta_2\theta_3 - 4\theta_2^2) \quad (2.6.95)$$

$$f_{12}^d = AE\varepsilon_0 + \frac{\ell_1 EI}{\ell LL_2} (2\theta_3^2 + 2\theta_2\theta_3 - 4\theta_2^2) \quad (2.6.96)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.6.97)$$

$$\mathbf{f}_b^d = \{ f_{22}^d, m_2^d \} \quad (2.6.98)$$

$$f_{22}^d = \frac{6EI}{L_2^2}(\theta_3 + \theta_2) \quad (2.6.99)$$

$$m_2 = \frac{EI}{L_2}(2\theta_3 + 4\theta_2) + \frac{AE\varepsilon_0 L_2}{30}(-\theta_3 + 4\theta_2) \quad (2.6.100)$$

$$\mathbf{f}_b^I = \{f_{22}^I, m_2^I\} = \{f_{22}^{I\theta}, m_2^{I\theta}\} \quad (2.6.101)$$

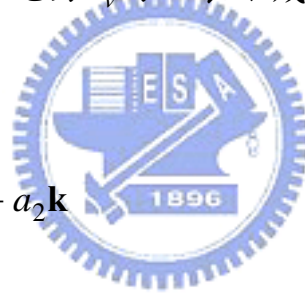
本文中在計算時將(2.6.95)及(2.6.96)式中含底線之項忽略不計。因節點 1 在導槽內，故其絕對側向速度、加速度及軸向加速度可分別由(2.4.62)-(2.4.64)式求得。

2.7 元素的阻尼力

本文中假設元素的阻尼力 \mathbf{f}_v 可以表示成[27]

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{c} = a_1\mathbf{m} + a_2\mathbf{k} \quad (2.7.2)$$



其中 \mathbf{c} 稱為阻尼矩陣， $\dot{\mathbf{q}}$ 為元素的節點速度， a_1 、 a_2 為常數，其值由附錄 B 決定， \mathbf{m} 為梁元素的質量矩陣， \mathbf{k} 為梁元素的線性剛度矩陣，本文中普通梁元素的 \mathbf{m} 是由下列 \mathbf{m}_a 及 \mathbf{m}_b 組合而成[28]

$$\mathbf{m}_a = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{m}_t + \mathbf{m}_r \quad (2.7.4)$$

$$\mathbf{m}_t = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.7.5)$$

$$\mathbf{m}_r = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.7.6)$$

本文中轉接梁元素的 \mathbf{m}_a 和(2.7.3)式一樣， \mathbf{m}_b 為一 2×2 的矩陣，是由(2.7.4)式中對應於第三及第四度的元素組成，但需將 L 改成 L_2 。本文中普通梁元素的線性剛度矩陣是由下列的 \mathbf{k}_a 和 \mathbf{k}_b 組合而成[28]

$$\mathbf{k}_a = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{k}_b = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

本文中轉接梁元素的線性剛度矩陣中 \mathbf{k}_a 和(2.7.7)是相同， \mathbf{k}_b 為一 2×2 的矩陣，是由(2.7.8)式中對應於第三及第四度的元素組成，但需將 L 改成 L_2 。

2.8 梁元素的剛度矩陣及質量矩陣

元素的剛度矩陣及質量矩陣可以由元素的節點內力對節點參數與節點加速度微分而得。因本文中元素矩陣僅用在平衡迭代，故取近似值即可，本文中的元素剛度矩陣是由 2.7 節的 \mathbf{k}_a 、 \mathbf{k}_b 和幾何剛度矩陣 \mathbf{k}_g 組合而成，本文採用的 \mathbf{k}_g 為[28]

$$\mathbf{k}_g = \frac{AE\varepsilon_0}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.8.1)$$

本文中的元素質量矩陣和 2.7 節中的質量矩陣相同。

2.9 系統運動方程式與收斂準則

系統的非線性運動方程式可表示成

$$\Psi = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^D + \mathbf{F}^V - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.9.1)$$

其中 Ψ 為系統慣性力 \mathbf{F}^I 、變形力 \mathbf{F}^D 、阻尼力 \mathbf{F}^V 及系統外力間的不平衡力。 \mathbf{F}^I 、 \mathbf{F}^D 及 \mathbf{F}^V 可由 (2.4.58 - 2.4.61)、(2.6.94)、(2.6.97)、(2.6.98)、(2.6.101) 及 (2.7.1) 式中的元素節點力、阻尼力從元素座標轉換到導槽座標後組合而成。

為了描述上的方便，本文中將導槽內節點相對於導槽的位移、速度、加速度視為獨立變數，將導槽外節點對當前導槽座標的絕對位移、速度、加速度視為獨立變數。因計算慣性力需要絕對加速度，故需以 (2.4.64) 式求得導槽內節點的絕對軸向加速度。

本文以不平衡力的 Euclidean norm 作為迭代時的誤差量度，本文中採用的收斂準則為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\sqrt{N_{eq}}} \leq e_{tol} \quad (2.9.2)$$

其中 N_{eq} 為系統自由度的數目， e_{tol} 是容許誤差值。

