

國立交通大學

電子物理研究所

碩士論文

半導體激發式被動式 Q 開關雷射其時空分布特性

Spatial and Temporal Behavior in Diode-pumped Passively

Q-switched Laser

研究生：陳怡君

指導教授：陳永富教授

中華民國九十三年六月

半導體激發式被動式 Q 開關雷射其時空分布特性

**Spatial and Temporal Behavior in Diode-pumped Passively
Q-switched Laser**

研究生：陳怡君

Student : Yi-Chun Chen

指導教授：陳永富

Advisor : Yu-Fung Chen

國立交通大學



A Thesis

Submitted to Institute of Electrophysics

College of Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master of Science

In

Electrophysics

June 2004

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十三年六月

半導體激發式被動式 Q 開關雷射其時空分布特性

學生：陳怡君

指導教授：陳永富

國立交通大學電子物理研究所碩士班



在共振腔內擺入飽和吸收體 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 晶體可得到高功率雷射脈衝輸出，而高功率雷射可應用在遠距離量測、雷達、醫療以及材料加工等方面。使用在雷射測距上之雷射，其脈衝產生時間之誤差是一嚴重變因，而本論文中，將探討不同共振腔下產生之橫模，其橫模中不同位置脈衝產生時間之差異。所得到之結果由最小幾百皮秒(ps)至最大幾十奈秒(ns)等級。

Spatial and Temporal Behavior in Diode-pumped Passively Q-switched Laser

Student : Yi-Chun Chen

Advisor : Yu-Fung Chen

**Institute of Electrophysics
National Chiao Tung University**



We can obtain high peak power laser with absorber inside cavity. High peak power lasers are applied to distance measuring, radar, medical system and industry marker process. The lasers which are used to be the distance measuring tools has a series pulse delay problem. In our thesis, we will discuss that the transverse modes of different cavities and the variation of pulse delays of different mode position. Delay in pulse arrival times from hundreds of picoseconds to several tens of nanoseconds can be observed in our experiment.

目 錄

第一章 簡介.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 本論文組織.....	1
第二章 被動式 Q 開關雷射理論模型.....	2
2.1 理論模型.....	2
參考資料	
第三章 橫模產生之機制與理論模擬.....	8
3.1 導論.....	8
3.2 近軸近似下的馬克斯威爾方程式.....	9
3.3 產生 Laguerre Gaussian Modes (LG).....	19
3.4 產生 Hermite Gaussian Modes (HG).....	22
參考資料	
第四章 非純單一模態脈衝雷射其時空分布情形.....	28
4.1 導論.....	28
4.2 動機.....	28
4.3 Multi-Mode 脈衝雷射.....	32
參考資料	
第五章 單一高階橫模脈衝雷射其時空分布情形.....	36
5.1 簡介.....	36
5.2 實驗架構與結果.....	37
5.3 強聚焦下所產生橫模.....	40
參考資料	
第六章 腔內光參數震盪器之研究.....	48
6.1 簡介.....	48
6.2 人眼安全雷射.....	49
參考資料	
第七章 結論與未來展望.....	57

圖表目錄

第二章

圖一	Q 開關脈衝形成過程.....	4
圖二	飽和吸收體透明程度與脈衝峰值電子反轉濃度關係.....	6

第三章

圖一	理論模擬 HG modes.....	13
圖二	理論模擬 LG modes.....	15
圖三	LG modes 與 HG modes 之間關係.....	19
圖四	半導體雷射輸出圖形.....	19
圖五	光纖耦合所得到之雷射在聚焦面附近其波形與位置關係.....	20
圖六	理論模擬高階 LG modes 產生之離軸位置.....	22
圖七	理論模擬高階 HG modes 產生之離軸位置.....	23
圖八	實驗與模擬結果對照.....	24

第四章

圖一	脈衝形成與輸出光束大小關係.....	29
圖二	理論模擬脈衝產生時間與光束相對位置圖.....	30
圖三	實驗架構圖.....	31
圖四	數據分析.....	31
圖五	實驗架構圖(a) 實驗輸出光斑(b).....	32
圖六	實驗結果分析.....	34

第五章

圖一	半球腔.....	36
表一	增益介質特性分析.....	37
圖二	實驗架構.....	38
圖三	雷射輸出特性.....	38
圖四	實驗結果分析.....	39

圖五	CW 輸出特性.....	42
圖六	雷射 CW 輸出強聚焦下所得圖形.....	42
圖七、八	以 Cr ⁴⁺ :YAG 作被動式 Q 開關雷射輸出特性.....	43
圖九	以 Cr ⁴⁺ :YAG 作被動式 Q 開關輸出強聚焦下所得圖形.....	44
圖十	以 SESAM 作被動式 Q 開關雷射輸出特性.....	45
圖十一	以 SESAM 作被動式 Q 開關輸出強聚焦下所得圖形.....	45

第六章

圖一	各波段光源對人眼影響.....	49
圖二	發散光與平行光對人眼之影響.....	49
表一	各波段光源對人眼所造成之病變.....	50
圖三	光源波長對視網膜之穿透與吸收關係.....	51
圖四	考慮熱透鏡效應下激發光束與腰束大小關係.....	52
圖五	實驗架構.....	53
圖六、七	雷射輸出特性.....	54



第七章

表一	各個被動式 Q 開關雷射脈衝延遲情形.....	57
----	-------------------------	----

致 謝



第一章 簡介

1.1 研究動機

利用半導體雷射激發固態晶體產生之固態雷射 (Diode-pumped solid state laser)，由於其效率高、結構緊湊及可靠性高等特性，已成為重要的雷射光源之一。近年來高尖峰功率脈衝雷射在加工、醫療及量測等應用上需求大量增加。在精確度高的雷射測距儀中，脈衝產生時間唯一重要的變因，而本實驗將探討不同型態之雷射橫模其產生脈衝時間差。所採用的飽和吸收體為摻四價鉻的鈮鋁石榴石晶體 ($\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$)，其具有較大的吸收截面積、易獲得高摻雜濃度、穩定性好、壽命長、使用方便等優點以利於本實驗使用。

探討 $\text{Nd}:\text{YAG}$ 與 a-cut $\text{Nd}:\text{YVO}_4$ 在被動 Q 開關雷射使用上之優缺點。採用半球形共振腔，解決 a-cut $\text{Nd}:\text{YVO}_4$ 雷射晶體在使用上之限制。

1.2 本論文組織

本文最主要分為七章，第一章為研究動機及論文組織。第二章為被動式 Q 開關雷射動作的機制及理論模型。第三章為橫模產生機制與理論模擬。第四章為非純單一橫模雷射其時空分佈情形。第五章為單一高階橫模脈衝雷射其時空分佈情形。第六章為腔內光參數震盪器之研究。第七章為結論與未來展望。

第二章 被動式 Q-開關雷射理論模型

2.1 理論模型

由 J.J. Degnan[1]所導出的雷射脈衝能量表示成 (1) 式，可知脈衝雷射輸出能量與增益晶體的初始 (n_i) 及最後 (n_f) 居量反轉濃度有關，接下來先探討控制 n_i/n_f 的參數。

$$E = \frac{h\nu A}{2\sigma\gamma} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \ln\left(\frac{n_i}{n_f}\right) \quad (1)$$

參考前人理論模型[2]-[4]，被動式開關雷射的基本速率方程式如下所示：

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi}{\tau_r} [2\sigma nl - (2\sigma_{gs}n_{gs}l_s + 2\sigma_{es}n_{es}l_s)] - \frac{\phi}{\tau_c} \quad (2)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma c \sigma \phi n \quad (3)$$

$$\frac{dn_{gs}}{dt} = -\frac{A}{A_s} c \sigma_{gs} \phi n_{gs} \quad (4)$$

$$n_{gs} + n_{es} = n_{s0}$$

其中參數分別為：

ϕ ：光子密度 ($\phi = \frac{\Phi}{Al}$)；

n ：增益介質電子反轉濃度；

l_s 、 l ：飽和吸收體、增益介質晶體長度；

n_{gs} 、 n_{es} 、 n_{s0} ：飽和吸收體基態、激發態和全部電子反轉濃度；

σ_{gs} 、 σ_{es} ：飽和吸收體基態與激發態有效吸收面積；

σ : 增益介質受激輻射有效面積 ;

R : 輸出耦合鏡的反射率 ;

γ : 減損因子 (一般三階雷射=2、四階雷射=1) [5], 它相當於產生一個光子所消耗的反轉電子個數 ;

A : 增益介質吸收的有效面積即激發模大小 ;

A_s : 飽和吸收體吸收的有效面積 ;

$t_r = 2l'/c$: 光子在共振腔來回一次所需要時間, l' 為光學腔的長度 ;

$t_c = \frac{t_r}{\ln\left(\frac{1}{R}\right) + L}$: 光子自我死亡時間, L 為共振腔的損耗 ;

首先將 (4) 式整理可得到 :



$$n_{gs} = n_{s0} \left(\frac{n}{n_i} \right)^\alpha \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{A \sigma_{gs}}{A_s \gamma \sigma} \quad (6)$$

式 (6) 中 α 值越大則代表飽和吸收體越容易透明。

考慮光子尚未產生時 ($\frac{d\phi}{dt} = 0$), 飽和吸收體的粒子尚停留在基態

($n_{gs} = n_{s0}$, $n_{es} = 0$), 可以得到 n_i :

$$2\sigma n_i l - 2\sigma_{gs} n_{s0} l_s - \left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) + L \right] = 0 \quad (7)$$

$$n_i = \frac{\ln\left(\frac{1}{R}\right) + L + 2\ln\left(\frac{1}{T_0}\right)}{2\sigma l} \quad (8)$$

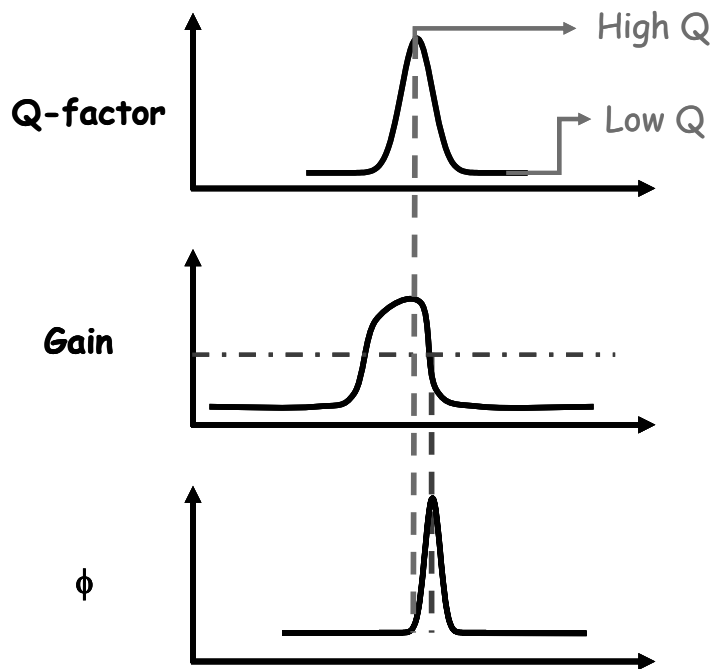
$$T_0 = e^{-\sigma_{gs} n_s l_s} \quad (9)$$

經由計算 (2)、(3)、(5) 式可得 (10) 式，其中令 $\beta = \frac{\sigma_{es}}{\sigma_{gs}}$

$$\frac{d\phi}{dn} = -\frac{l}{\gamma l'} \left[1 - \frac{(1-\beta) \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) \left(\frac{n}{n_i}\right)^{\alpha-1}}{2\sigma n_i l} - \frac{\beta \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L}{2\sigma n l} \right] \quad (10)$$

由上式可以得知兩個訊息，首先將 (10) 式積分可以得到 ϕ 與 n 的關係 $\phi(n)$ ：

$$1 - \frac{n_f}{n_i} - \frac{\beta \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L}{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L} \cdot \ln\left(\frac{n_i}{n_f}\right) - \frac{(1-\beta) \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L} \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{n_f}{n_i}\right)^\alpha \right] = 0 \quad (11)$$

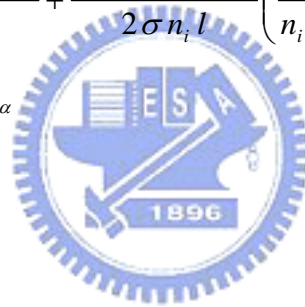


圖一

由(11)式可以得知， n_i 與 n_f 的比值關係由 α 、 β 、 T^0 及 $\ln\left(\frac{1}{R}\right)+L$ 等參數所組成，與激發能量的大小無關。這也就是為什麼當雷射的增益超過臨界值時，每一發雷射脈衝輸出的能量就與激發的功率無關，但卻與雷射晶體參數、飽和吸收體的初始穿透率及耦合輸出鏡的穿透率有關。接著我們在(10)式中令 $\frac{d\phi}{dn}=0$ 可以得到雷射脈衝在峰值時的電子反轉濃度 n_i ，與 $\alpha \rightarrow \infty$ （即視飽和吸收體為透明）情況下雷射脈衝峰值的電子反轉濃度 n_{i0} ：

$$\frac{n_t}{n_i} = \frac{\beta \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L}{2\sigma n_i l} + \frac{(1-\beta) \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right)}{2\sigma n_i l} \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^\alpha \quad (12)$$

$$\frac{n_t}{n_i} = \frac{n_{i0}}{n_i} + \left(1 - \frac{n_{i0}}{n_i}\right) \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^\alpha \quad (13)$$



將(13)式作圖二可以得到固定一 n_{i0} 時， α 越大 n_t 越小，也就是說飽和吸收體越容易透明，其雷射脈衝峰值的電子反轉濃度越小。

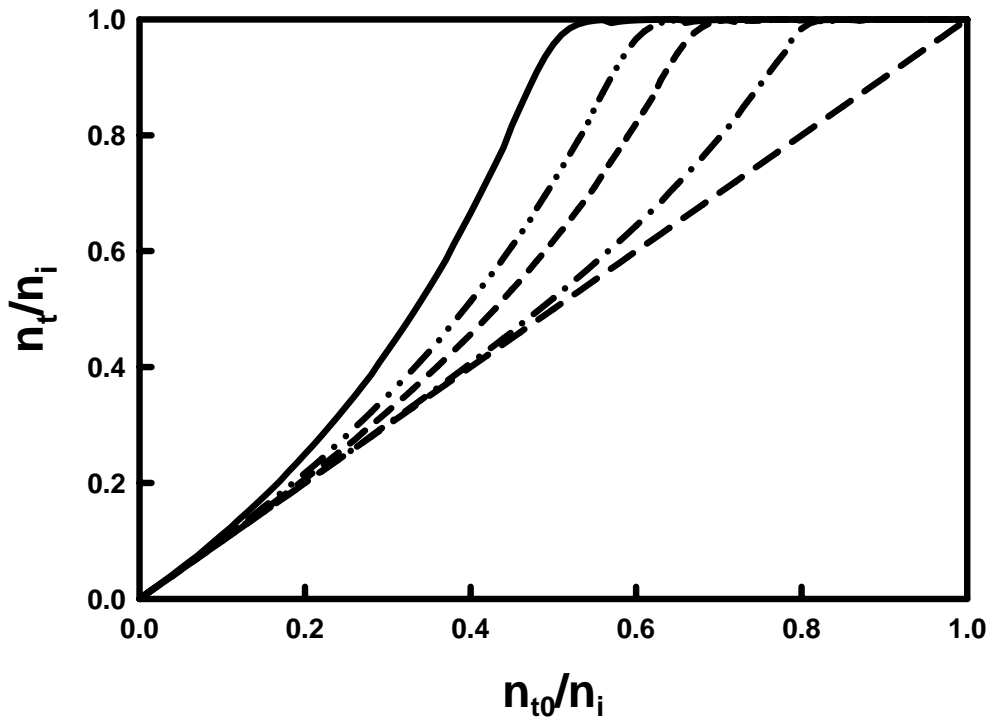
在Q開關雷射中，產生雷射脈衝需要滿足第一臨界條件與第二臨界條件[6]-[8]：第一臨界條件，指的是當共振腔內的增益剛超過共振腔內的損耗（不包含飽和吸收體的損耗），此時雷射增益介質內的居量反轉濃度開始持續增加；所謂第二臨界條件，可由光子密度與電子反轉濃度二次微分關係得到，當 $n = n_i$ 時所得曲線為凹口向上，代表光子密度呈正向成長。因此可以定義出第二臨界條件：

$$\frac{d^2\phi}{dn^2} = -\frac{l}{\gamma l'} \left[-\frac{(1-\beta)(\alpha-1)}{2\sigma l n_i^2} \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) \left(\frac{n}{n_i}\right)^{\alpha-2} + \frac{\beta \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L}{2\sigma l n^2} \right] \quad (14)$$

$$[\alpha(1-\beta)-1] \ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{R}\right) - L > 0 \quad (15)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L} \frac{\sigma_{gs}}{\sigma} \frac{A}{A_s} > \frac{\gamma}{1-\beta} \quad (16)$$

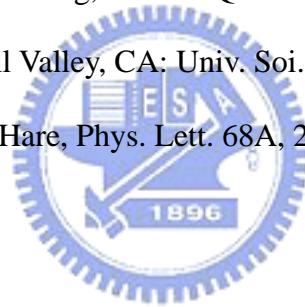
此二次臨界條件與過去 A.E.Siegman 的二次臨界條件主要的不同處在於，此理論多考慮了激發態吸收的效應 (ESA) [3][4] 和雷射增益介質與飽和吸收體上雷射模態的比值，使得整個理論模型更接近實際狀況。



圖二

參考資料：

- [1]. J.J. Degnan, "Theory of the optimally coupled Q-switched laser." IEEE J. Quantum. , 1989, 25: 214-220
- [2]. J.J. Degnan, "Optimization of passive Q-switch laser." IEEE J. Quantum Electron. , 1995, 31 :1890-1901
- [3]. G. Xiao and M. Bass, IEEE J. Quantum Electron. 1997, 33:41-44
- [4]. X. Zhang, S. Zhao, Q. Wang, Q. Zhang, L. Sun, and S. Zhang, IEEE J. Quantum Electron. 1995,31: 1890-1901
- [5]. J.J. Degnan, D.B. Coyle, and R.B. Kay, IEEE J. Quantum Electron. , 1998, 34: 887-899
- [6]. Y.F. Chen, Y.P. Lan, H.L. Chang, IEEE J. Quantum Electron. , 2001, 31: 462-468
- [7]. A.E. Siegman, Laser, Mill Valley, CA: Univ. Soi. Books, 1986, chap.27
- [8]. G.H.C. New and T.B. Q'Hare, Phys. Lett. 68A, 27-28, 1978



第三章 橫模產生之機制與理論模擬

3.1 導論：

理想雷射系統輸出中， TEM_{00} 模態為最理想的狀態。可惜在現實生活中的雷射輸出橫模鮮少有純單一模 TEM_{00} 產生，再加上不完善的光學系統也會損害雷射的傳播。

雷射共振腔中，增益介質上吸收分佈面積與激發光源強度分佈面積兩者互相重疊的程度，將主導雷射輸出功率與橫模生成的關鍵。在一般圓柱對稱且無方向性雷射元件的共振腔中，所輸出的雷射模態多為圓柱對稱的 **Laguerre-Gaussian mode**。利用座標軸轉換技術，也可將圓柱對稱模態轉換成矩形對稱的 **Hermite-Gaussian mode**。高階橫模的產生，通常是憑藉著共振腔的不對稱、布魯斯特角、鏡片缺陷、離焦等造成。一給定的雷射光束大小，其越低階模態的發散角越小，也就是說當應用於雷射遠距量測所需要的就是低階模態的雷射；然而，如果是要最高功率或是像 top hat 一樣的固定光強度的話，最好選擇操作在高階模態的雷射共振腔。

雷射增益介質截面積小時，橫模輸出則為單模我們可以這樣想像，撞擊在共振鏡片邊緣的光子在來回振盪時偏離光軸而導致消失的機率比較高，而撞擊在共振腔鏡片中央位置的光子，在來回振盪的行為中留存下來的機率自然較高，因此雷射光束中心的地方能量也就最高了。至於雷射增益介質截面積大時，橫模輸出則為多模，雷射光束在中心周圍的地方在振盪的行為中留存下來的機率也提高

了，而其雷射輸出總能量亦較高。在本章節中，將利用近軸近似法來討論在球型共振腔中 Hermite-Gaussian 和 Laguerre-Gaussian mode。

3.2 近軸近似下的馬克斯威爾方程式：

考慮一無點源存在介質中的波動方程式，可將馬克斯威爾方程式表示成下面四個式子[1]：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

將 (1) 式代入 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla^2 \mathbf{E}$ 可以將電場化簡成：

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

將 $\mathbf{E} = E(x, y, z)e^{i\omega t}$ 代入上式得到：

$$(\nabla^2 + k^2) E(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

其中， $k = \frac{n\omega}{c}$ 為波向量。而 (6) 式就是 homogeneous 的 Helmholtz's 方

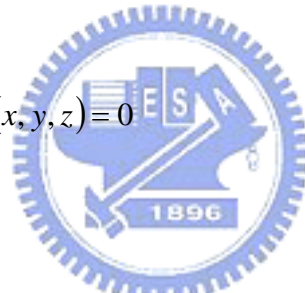
程式。在雷射電磁波行進時，主要沿著 Z 軸前進，由此我們可將電場表示成

$E(x, y, z) = U_0(x, y, z)e^{-ik_z z}$ ，其中 $U_0(x, y, z)$ 為雷射橫截面的電場分佈、 k_z 為沿著 Z 軸的波向量。由 (5) 是等號左邊可得到：

$$\nabla^2 E(x, y, z) = e^{-ik_z z} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} - k_z^2 \right) \cdot U_0(x, y, z) \quad (7)$$

在近軸近似的假設下，考慮雷射隨著 Z 軸變化與 X 和 Y 軸變化相比較是非常小的，也就是說 $\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_0(x, y, z) \ll \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot U_0(x, y, z)$ ，所以可以將此項忽略。將簡化後之 (7) 式代入 (5) 式中得到：

$$\left(\nabla_t^2 - 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} + k_t^2 \right) \cdot U_0(x, y, z) = 0 \quad (8)$$



其中 $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、 $k_t^2 = k^2 - k_z^2$ 。假設 $U_0(x, y, z)$ 為下式：

$$U_0(x, y, z) = \psi(x, y) \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-i k_z \frac{(x^2 + y^2)}{2R(z)}} \quad (9)$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$R(z) = z \cdot \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (11)$$

$z_R = \frac{k_z w_0^2}{2}$ 為 Rayleigh range

其中 $\psi(x, y)$ 為雷射光波橫向波形、 w_0 為光腰 (Beam waist)，即為光斑 $w(z)$ (Spot size) 在 $z = 0$ 的大小。在光腰位置，不僅是雷射光束光斑最小的位置，其波前曲率為無限大，即平面波。

假設 $G(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-i \frac{k_z(x^2+y^2)}{2R(z)}}$ 並代入 (8) 式，重新整理得到：

$$G(x, y, z) \cdot (\nabla_t^2 + k_t^2) \psi(x, y) + \nabla_t \psi(x, y) \cdot \nabla_t G(x, y, z) + \psi(x, y) \cdot \left(\nabla_t^2 - 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} \right) G(x, y, z) = 0 \quad (12)$$

在近軸近似假設下，當 $R(z) \gg x + y$ ， $\nabla_t G(x, y, z) \rightarrow 0$ 、

$$\nabla_t \psi(x, y) \cdot \nabla_t G(x, y, z) \approx 0, \text{ 其中 } \nabla_t^2 G(x, y, z) = - \left[\frac{k_z^2(x^2 + y^2)}{R^2(z)} + 2i \frac{k_z}{R(z)} \right] \cdot G(x, y, z) \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial z} G(x, y, z) = - \left\{ \frac{1}{R(z)} - i \frac{k_z(x^2 + y^2)}{2R^2(z)} \left[1 - \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \right\} \cdot G(x, y, z), \text{ 代入 (12) 式可以整}$$

理為：

$$\left[\nabla_t^2 + k_t^2 - \frac{4(x^2 + y^2)}{w^4(z)} \right] \psi(x, y) = 0 \quad (13)$$

在矩形對稱軸下，可使用分離變數法 $\psi(x, y) = f(x)g(y)$ ，代入 (13) 式將 x 、 y 兩變數分離：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + K_x^2 - \frac{4x^2}{w^4(x)} \right] \cdot f(x) = 0 \quad (14)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K_y^2 - 4 \frac{y^2}{w^4(y)} \right] \cdot g(y) = 0 \quad (15)$$

其中 $k^2 = k_z^2 + K_x^2 + K_y^2$ ，在 (14)、(15) 兩式與在簡諧邊界解得的與時間無關 Schrödinger equation 之間發現其相似性[2]，因此我們假設 (14) 式的解為

$$f(x) = u(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{w^2(z)}} \text{ 代入 (14) 式：}$$

$$u''(x) - \frac{4x}{w^2(z)} u'(x) + \left(K_x^2 - \frac{2}{w^2(z)} \right) u(x) = 0 \quad (16)$$

令 $\xi = \sqrt{2}x/w(z)$ ，並將 $u''(x)$ 、 $u'(x)$ 作變數變換並代入 (16) 式：

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{w(z)} \frac{du}{d\xi} \quad (17)$$

$$u''(x) = \frac{2}{w^2(z)} \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (18)$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - 2\xi \frac{du}{d\xi} + \left(\frac{K_x^2 w^2(z)}{2} - 1 \right) \cdot u = 0 \quad (19)$$

由 Hermite polynomial： $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ 可看出 (19) 式中 $\frac{K_x^2 w^2(z)}{2} - 1 = 2m$ ，

整理得並解出 (13) 式的根：

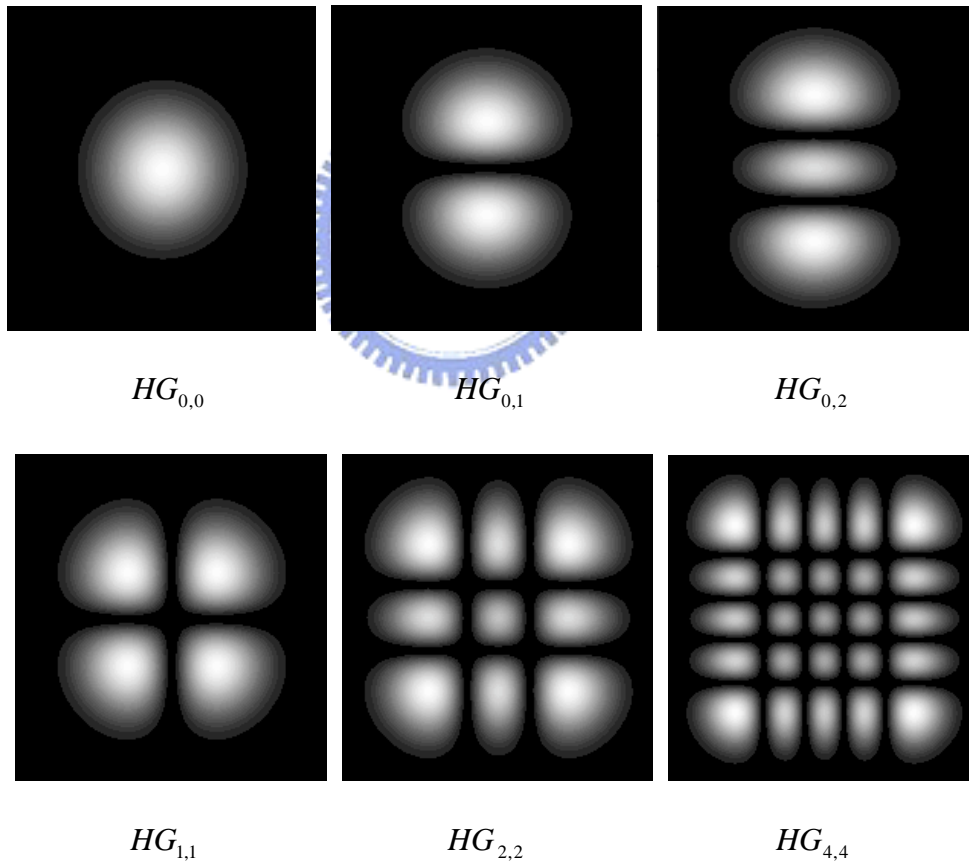
$$K_x^2 = \frac{2}{w^2(z)} (2m + 1) \quad (20)$$

$$K_y^2 = \frac{2}{w^2(z)}(2n+1) \quad (21)$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_{m,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n+1} \pi m! n!}} H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] \cdot H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \quad (22)$$

其中， $H_m(\)$ 為 m 階的 Hermite polynomial。下圖分別為 $HG_{0,0}$ 、 $HG_{0,1}$ 、 $HG_{0,2}$ 、 $HG_{1,1}$ 、 $HG_{2,2}$ 、 $HG_{4,4}$ 等 HG mode 圖形。



在圓柱座標下展開 (8) 式：

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2ik_z \frac{\partial}{\partial z} + k_t^2 \right] \cdot U_0(r, \theta, z) = 0 \quad (23)$$

其中 $\nabla_t^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 、 $U_0(r, \theta, z) = \phi(r, \theta) \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-i \frac{k_z}{2R(z)} r^2}$ ， $\phi(r, \theta)$ 為雷射

光波橫向波形。在近軸近似假設下，將 (23) 式代入 (8) 式， $R(z) \gg r$ ，則波動方程式可以表示成：

$$\left(\nabla_t^2 + k_t^2 - \frac{4r^2}{w^4(z)} \right) \cdot \phi(r, \theta) = 0 \quad (24)$$

令 $\phi(r, \theta) = \mathfrak{R}(r) e^{il\theta}$ 代入上式：

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} + k_t^2 - \frac{4r^2}{w^4(z)} \right] \cdot \mathfrak{R}(r) = 0 \quad (25)$$

假設 $\mathfrak{R}(r) = r^{|l|} e^{-\frac{r^2}{w(z)}}$ ， $F(r)$ 為波動方程式的解代入 (25) 式：

$$F'' + \left(\frac{2|l|+1}{r} - \frac{4r}{w^2} \right) \cdot F' + \left(k_t^2 - 4 \frac{|l|+1}{w^2(z)} \right) \cdot F = 0 \quad (26)$$

考慮 $t = \frac{2r^2}{w^2(z)}$ ，並將 $F''(r)$ 、 $F'(r)$ 作變數變換並代入 (26) 式

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{4}{w(z)} \sqrt{\frac{t}{2}} \frac{dF}{dt} \quad (27)$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{w(z)} \sqrt{\frac{t}{2}} \frac{dF}{dt} \right) \frac{dt}{dr} = \frac{8}{w^2(z)} t \frac{d^2F}{dt^2} + \frac{4}{w^2(z)} \frac{dF}{dt} \quad (28)$$

$$t \frac{d^2F}{dt^2} + (|l|+1-t) \frac{dF}{dt} + \frac{1}{2} \left[\frac{w^2(z)}{4} k_t^2 - (|l|+1) \right] \cdot F(t) = 0 \quad (29)$$

由 Laguerre polynomial : $xy''+(\alpha+1-x)y'+py=0$ 可看出 (29) 式中

$\frac{1}{2} \left[\frac{w^2 k_t^2}{4} - (|l|+1) \right] = p$, 整理得並解出 (24) 式的根 :

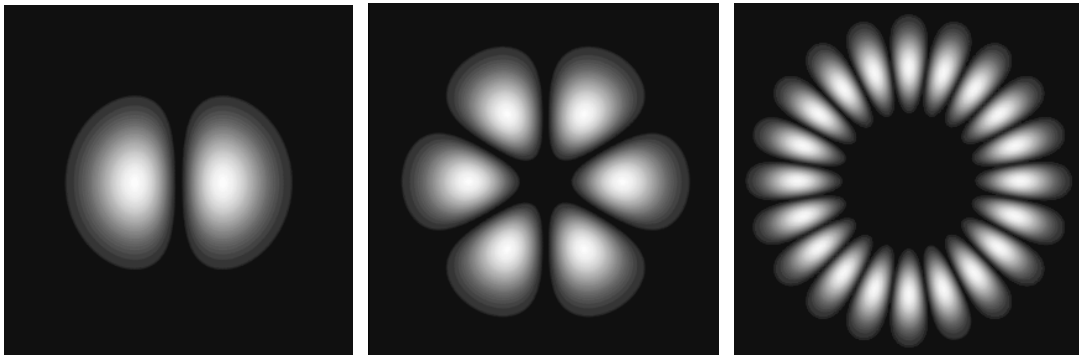
$$k_t^2 = \frac{4}{w^2} (2p + |l| + 1) \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

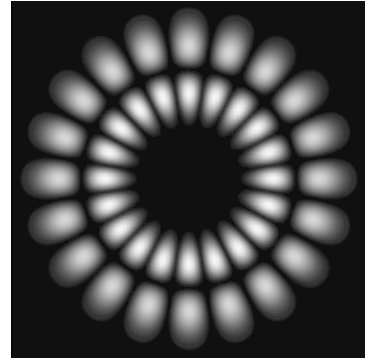
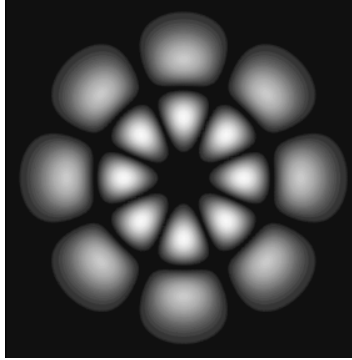
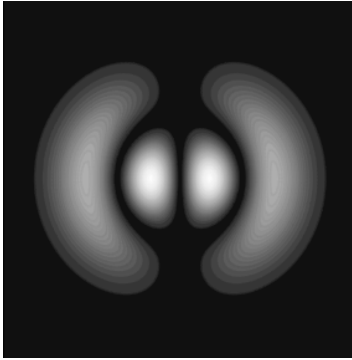
$$l = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi(r, \theta) = \sqrt{\frac{2p!}{(1+\delta_{0,1})\pi(p+1)!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l L_p \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \quad (31)$$

其中 $\delta_{0,1} = 1$ 當 $l = 0$ 、 $\delta_{0,1} = 0$ 當 $l \neq 0$ 。下圖分別作 $LG_{0,1}$ 、 $LG_{0,3}$ 、 $LG_{0,10}$ 、 $LG_{1,1}$ 、

$LG_{1,4}$ 、 $LG_{1,10}$:



$LG_{0,1}$ $LG_{0,3}$ $LG_{0,10}$  $LG_{1,1}$ $LG_{1,4}$ $LG_{1,10}$

3.3 HG 與 LG 模態之間的關係：

在 Isidoro Kimel 和 Luis R. Elias 已發表的期刊中，討論過 HG 和 LG 模態之間的關係[3]。在此，將簡短敘述兩者之間關係，並重新表示 Laguerre polynomials：

$$L_p^l(x) = \frac{2e^x x^{-l/2}}{n!} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2p+l+1} J_l(2t\sqrt{x}) dt \quad (32)$$

其中 Bessel function 表示成[3]： $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_l^{2\pi+l} e^{i(n\theta - z \sin \theta)} d\theta$ ，將 $\theta \rightarrow \theta - \phi - \frac{\pi}{2}$ 代入

Bessel function 替換：

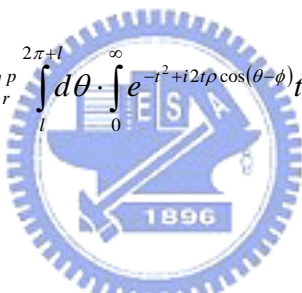
$$J_n(z) = \frac{(-i)^n e^{-in\phi}}{2\pi} \int_l^{2\pi+l} e^{i[n\theta - z \cos(\theta-\phi)]} d\theta = \frac{(-i)^n e^{in\phi}}{2\pi} \int e^{i[-n\theta + z \cos(\theta-\phi)]} d\theta \quad (33)$$

將 (33) 式代入 (32) 式可得到：

$$L_p^l(\rho^2) = \frac{(-i)^l e^{-il\phi} \rho^{-l} e^{\rho^2}}{\pi \rho!} \int_l^{2\pi+l} d\theta \int_0^\infty e^{-t^2+i2t\rho\cos(\theta-\phi)} e^{il\theta} t^{2p+l+1} dt \quad (34)$$

其中 $\rho = \frac{\sqrt{2}r}{w(z)}$ ，又將積分式中的 $e^{il\theta}$ 替換為：

$$\begin{aligned} e^{il\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^l \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^p \\ &= \left[\sum_{s=0}^l i^s C_s^l \cos^{l-s}\theta \cdot \sin^s\theta \right] \cdot \left[\sum_{r=0}^p C_r^p \cos^{2r}\theta \cdot \sin^{2(p-r)}\theta \right] \\ &= \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^p i^s C_s^l C_r^p \cos^{2r+l-s}\theta \cdot \sin^{2p-2r+s}\theta \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} e^{il\theta} \rho^l L_p^l(\rho^2) &= \\ &= \frac{(-i)^l e^{\rho^2}}{\pi \rho!} \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^p i^s C_s^l C_r^p \int_l^{2\pi+l} d\theta \cdot \int_0^\infty e^{-t^2+i2t\rho\cos(\theta-\phi)} t^{2p+l+1} \cos^{2r+l-s}\theta \cdot \sin^{2p-2r+s}\theta \cdot dt \end{aligned} \quad (36)$$


將 Hermite polynomial 表示成積分式，並將積分式之卡笛耳座標轉換為圓柱座標（ $x = \rho \cos\phi$ 、 $y = \rho \sin\phi$ 、 $t_x = t \cos\theta$ 、 $t_y = t \sin\theta$ ）：

$$H_m(x)H_n(y) = \frac{(-2i)^{m+n} e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t_x^2+t_y^2)+2i(t_x x+t_y y)} t_x^m t_y^n dt_x dt_y \quad (37)$$

$$H_m(x)H_n(y) = \frac{(-2i)^{m+n} e^{\rho^2}}{\pi} \int_l^{2\pi+l} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2it\rho\cos(\theta-\phi)} t^{m+n+1} \cos^m\theta \cdot \sin^n\theta dt \quad (38)$$

(36) 與 (38) 式比較：

$$e^{i\theta} \rho^l L_p^l(\rho^2) = \frac{(-1)^p}{2^{2p+l} p!} \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^p i^s C_s^l C_r^p H_{2r+l-s}(x) H_{2p-2r+s}(y) \quad (39)$$

同樣地，也可將 Hermite mode 表示成 Laguerre mode 的形式：

$$\begin{aligned} \cos^m \theta \cdot \sin^n \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^m \cdot \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right)^n \\ &= \left[\frac{e^{im\theta}}{2^m} \sum_{r=0}^m C_r^m e^{-i2r\theta} \right] \cdot \left[\frac{e^{in\theta}}{2^n} \frac{1}{i^n} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_s^n e^{-i2s\theta} \right] \\ &= \frac{1}{2^{m+n} \cdot i^n} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^s C_r^m C_s^n e^{-i(m+n-2r-2s)\theta} \end{aligned} \quad (40)$$

將 (38) 式中的 $\cos^m \theta \cdot \sin^n \theta$ 替換並將對 θ 的積分表示成 Bessel function 可以表示成：



$$H_m(x)H_n(y) =$$

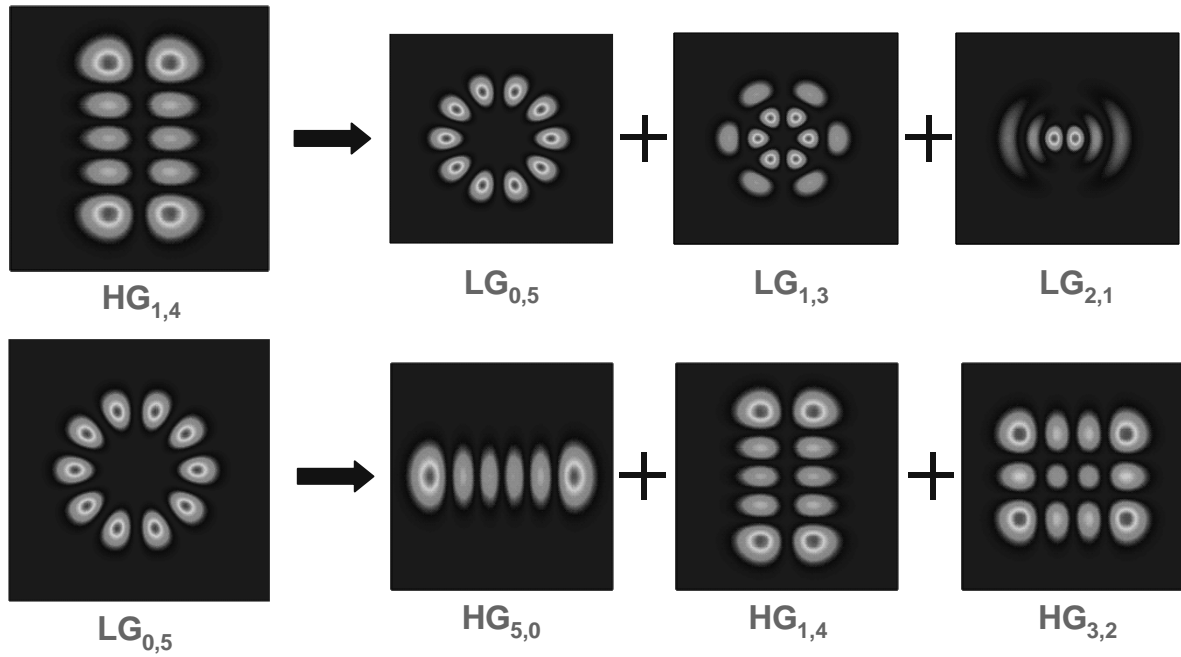
$$\frac{(-2i)^{m+n} e^{\rho^2}}{2^{m+n} i^n \pi} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^s C_r^m C_s^n \int_0^{2\pi+l} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2it\rho \cos(\theta-\phi)} t^{m+n+1} e^{i(m+n-2r-2s)\theta} dt \quad (41)$$

$$\int e^{i[(m+n-2r)+2t\rho \cos(\theta-\phi)]} d\theta = 2\pi i^{m+n-2r} e^{i(m+n-2r)\phi} J_{m+n-2r}(2t\rho) \quad (42)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{m+n+1} J_{m+n-2r}(2t\rho) dt = \frac{r!}{2} e^{-\rho^2} \rho^{m+n+1} L_r^{m+n-2r}(\rho^2)$$

$$H_m(x)H_n(y) = \text{Re} \left[(-i)^r \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^r C_r^m C_s^n (r+s)! e^{i(m+n-2r-2s)\phi} \rho^{m+n-2r-2s} L_{r+s}^{m+n-2r-2s}(\rho^2) \right] \quad (43)$$

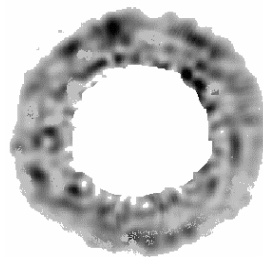
下圖也舉出 Hermite mode 與 Laguerre mode 兩者之間疊加關係：



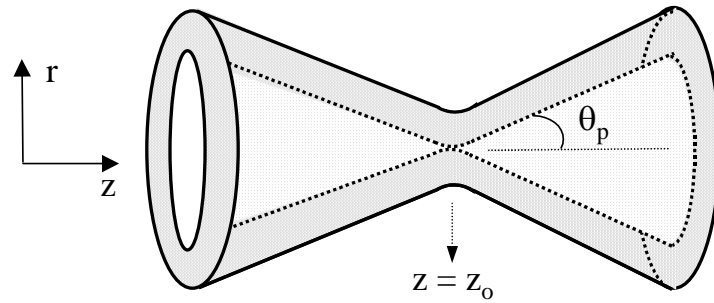
3.4 產生 Laguerre Gaussian Modes ($LG_{0,l}$) :

在此章節中，將探討如何利用單端激發之固態雷射產生不同階數的 Laguerre Gaussian modes[4]。其中產生 LG 模態的關鍵在於一離焦激發的半導體雷射，並利用理論模擬探討離焦程度與高階模態產生的關係。

對一個多模態 (multi-mode) 光纖耦合半導體雷射光源經過聚焦鏡，其波形在聚焦平面上，就像是一個 top-hat 分佈。然而，波形不在聚焦平面上時，其光波的橫截面就有如一甜甜圈 (doughnut-shaped) 如下圖：



利用此特性，將一離焦激發光源與腔內光斑有一適當之重疊，就可以產生高階之 Laguerre Gaussian mode。在下圖中，將簡單敘述出經過光纖耦合所得到之雷射，在聚焦面附近其波形與位置之關係：



由此關係，可將激發光源之光波分佈近似成 (43) 式：

$$r_p(r, z) = \frac{1}{\pi w_p^2} \frac{\alpha e^{-\alpha z}}{1 - e^{-\alpha l_c}} \cdot \Theta(r - \theta_p |z - z_0|) \cdot \Theta\left(\sqrt{(\theta_p(z - z_0))^2 + w_p^2} - r\right) \quad (43)$$

其中 w_p 為激發光之腰束 (beam waist)、 α 為增益晶體在激發光源波長下的吸收係數、 l_c 為雷射共振腔的長度、 θ_p 為光波在近似線下的發散角 (半角)、 z_0 為為焦點在晶體上的位置、 $z = 0$ 定義在增益晶體入射表面上、 $\Theta(\)$ 為 Heaviside function。此方程式控制激發光波的波形在焦平面上為 top-hat 的形式；在離開焦平面時，是一個 ring-type 的分佈。

由於 $LG_{0,l}$ 模態具有最好的重疊在環形激發光源中，所以 $LG_{0,l}$ 模態是我們預期最佳的雷射模態。一單端激發固態雷射產生 $LG_{0,l}$ 模態所需要的臨界激發功率為 [5]：

$$P_{th\ 0,l} = \frac{\Gamma I_{sat}}{\eta_p l_c} \frac{1}{\iiint s_{0,l}(r, \phi, z) \cdot r_p(r, \phi) dV} \quad (44)$$

其中， Γ 代表著在每趟光子來回中損耗與對數、 I_{sat} 為飽和強度、 $\eta_p = \eta_t \eta_a \left(\frac{\nu_l}{\nu_p} \right)$ ， η_t 表示光入射至增益介質與增益介質激發光子的比例、 η_a 表示被增益介質吸收與激發入增益介質功率的比值、 ν_p 與 ν_l 分別代表激發光與雷射的頻率、 $s_{0,l}(r, \phi, z)$ 為腔內光子分佈的情形。可由 (44) 中看出， $LG_{0,l}$ 模態的激發在於哪一階模態的重疊為較好的就有較低的激發臨界功率。

考慮單一 $LG_{0,l}$ 模態時， $s_{0,l}(r, \phi, z)$ 可表示成：

$$s_{0,l}(r, \phi, z) = \frac{4}{(1 + \delta_{0,l}) l!} \frac{1}{\pi w_0^2 l_c} (\cos^2 l\phi) \cdot \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right)^l e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \quad (45)$$

將 (43) 式與 (45) 式代入 (44) 式，並先對 r 與 ϕ 兩變數積分：

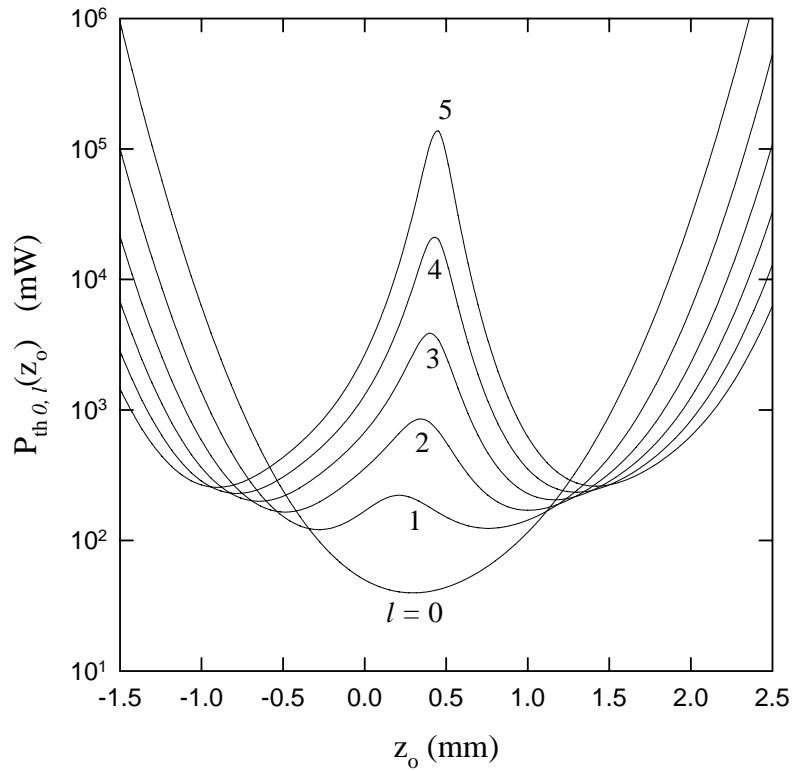
$$P_{th\ 0,l}(z_0) = \frac{\pi \Gamma I_{sat}}{\eta_p} \frac{1 - e^{-\alpha l_c}}{\alpha} \frac{w_p^2}{\int_0^{l_c} Q_l(z_0) \cdot e^{-\alpha z} dz} \quad (46)$$

$$Q_l(z_0) = \sum_{j=0}^l \frac{1}{(l-j)!} \left\{ \rho^{l-j} \cdot e^{-\rho} - \left(\rho + \frac{2w_p^2}{w_0^2} \right)^{l-j} e^{-\left(\rho + \frac{2w_p^2}{w_0^2} \right)} \right\}$$

$$\rho = 2 \left[\frac{\theta_p(z - z_0)}{w_0} \right]^2$$

下圖為離焦程度對激發臨界功率作圖，並考慮不同階數模態的臨界值。下圖參數分別為： $w_0 = 0.24\ mm$ 、 $w_p = 0.028\ mm$ 、 $\theta_p = 0.34\ rad$ 、 $\Gamma = 0.016$ 、

$$\eta_p = 0.8 \text{ 、 } l_c = 1 \text{ mm} \text{ 、 } I_{sat} = 12.87 \text{ W/mm}^2 \text{ 、 } \alpha = 3 \text{ mm}^{-1} \text{ 。}$$



由此結果顯示出，在距離焦平面 $z_0 = -0.3$ 至 $z_0 = 1.0$ 區間， $LG_{0,0}$ 模態擁有較低激發臨界功率；離開此區間，高階的 $LG_{0,l}$ 模態將比 $LG_{0,0}$ 有較低的激發臨界功率。換句話說，也就是高階模態將比低階模態更容易發生。

3.5 產生 Hermite Gaussian Modes ($HG_{m,n}$) :

考慮一維的 Hermite Gaussian mode ($HG_{m,0}$)，其激發臨界功率一樣可由(44)式得知。在共振腔中 $HG_{m,0}$ 模態的分佈與激發光源分佈個別如下[6]：

$$s_{m,0}(x, y, z) = \frac{2}{\pi w^2 2^m m! l_c} H_m^2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \cdot e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}} \quad (47)$$

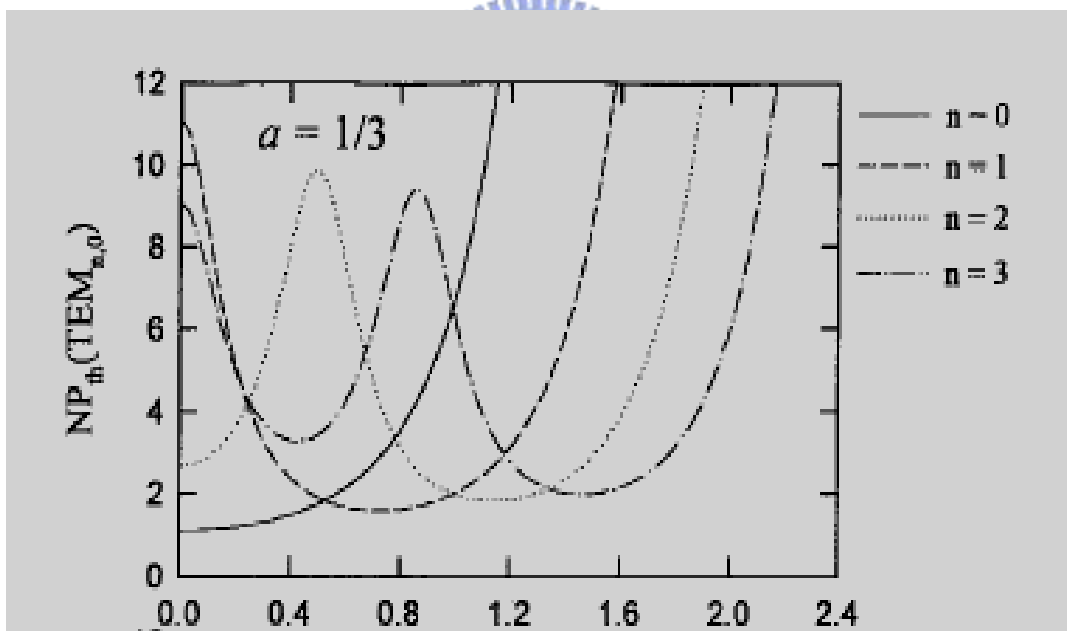
$$r_p(x, y, z) = \frac{1}{\pi w_p^2} \frac{\alpha e^{-\alpha z}}{1 - e^{-\alpha l_c}} \Theta(w_p^2 - x^2 - y^2) \quad (48)$$

將 (47) 與 (48) 兩式代入 (44) 式，並先對 x 與 y 兩變數積分：

$$P_{th\ m,0} = \frac{\pi \Gamma I_{sat}}{2\eta_p} \frac{1 - e^{-\alpha l_c}}{\alpha} \frac{2^m \cdot m!}{\int_0^{l_c} Q_m(w, w_p, \Delta x) \cdot e^{-\alpha z} dz} \quad (49)$$

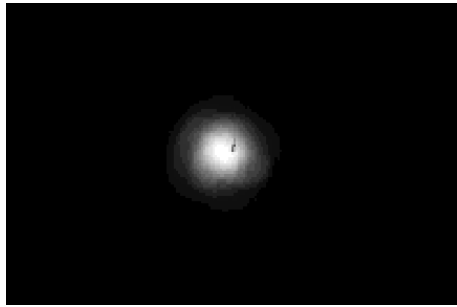
$$Q_m(w, w_p, \Delta x) = \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w \cdot w_p^2} \cdot erf\left[\sqrt{w_p^2 - (x + \Delta x)^2}\right] \cdot H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \cdot e^{-\frac{2x^2}{w^2}} dx \quad (50)$$

下圖將對激發光點離軸程度對激發臨界功率作圖：

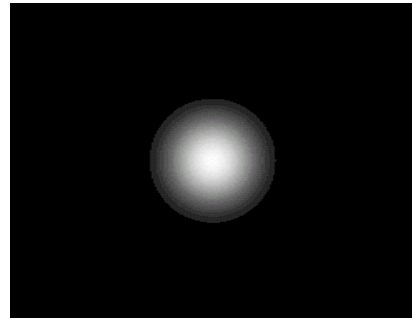


實驗結果

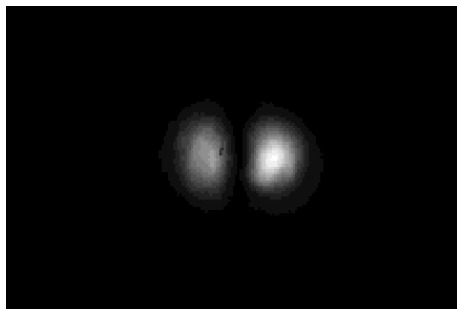
模擬結果



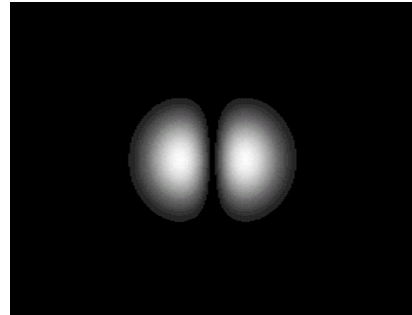
$\Delta x=0\text{mm}$



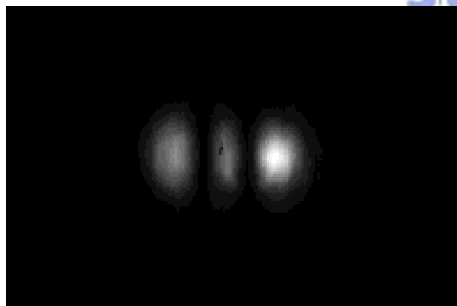
HG₀₀



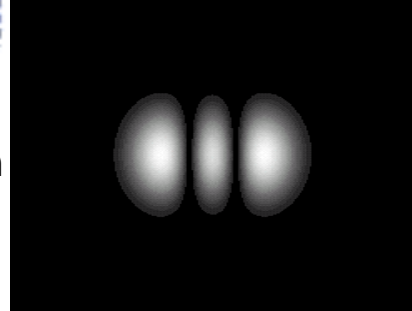
$\Delta x=0.06\text{mm}$



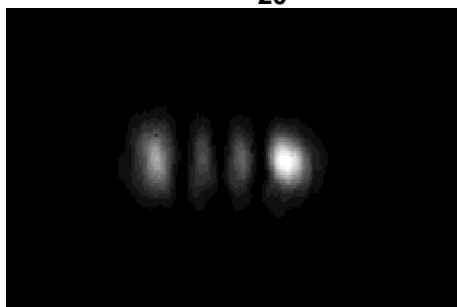
HG₁₀



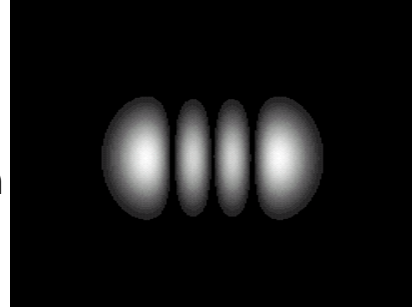
$\Delta x=0.095\text{mm}$



HG₂₀



$\Delta x=0.115\text{mm}$

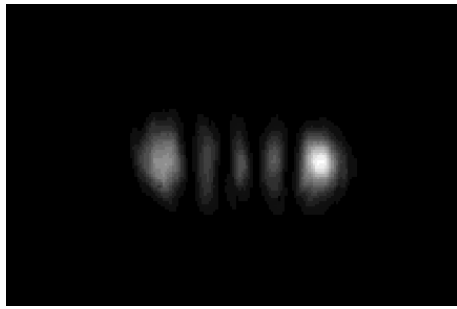


HG₃₀

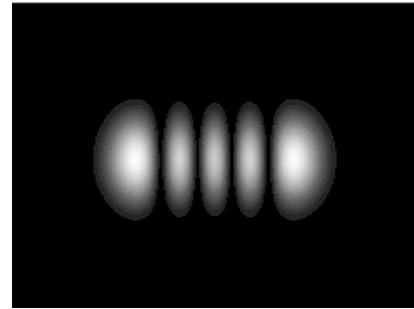


實驗結果

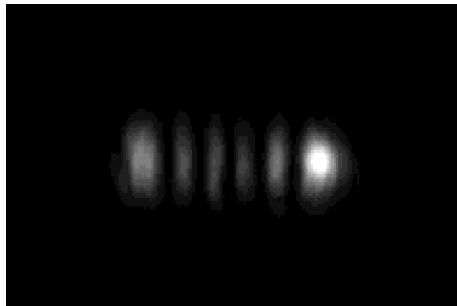
模擬結果



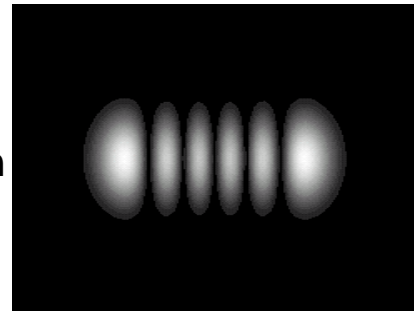
$\Delta x=0.14\text{mm}$



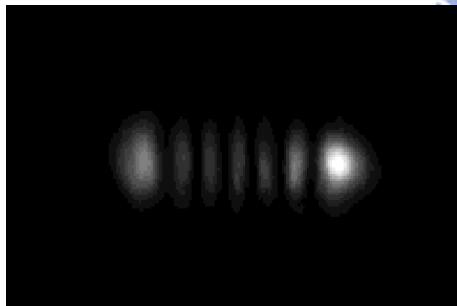
HG₄₀



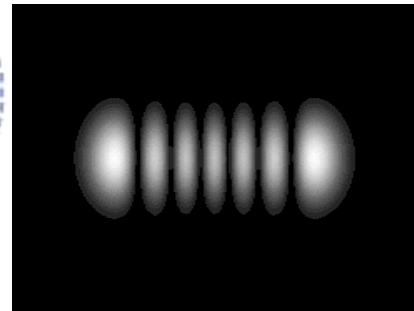
$\Delta x=0.165\text{mm}$



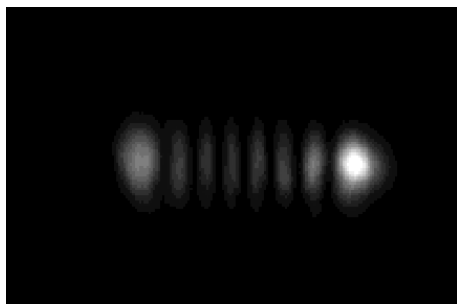
HG₅₀



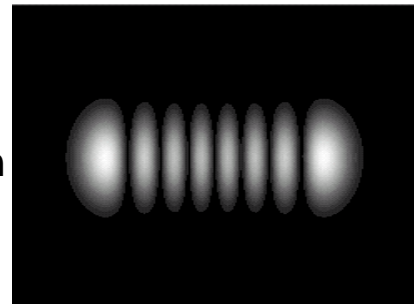
$\Delta x=0.19\text{mm}$



HG₆₀



$\Delta x=0.215\text{mm}$

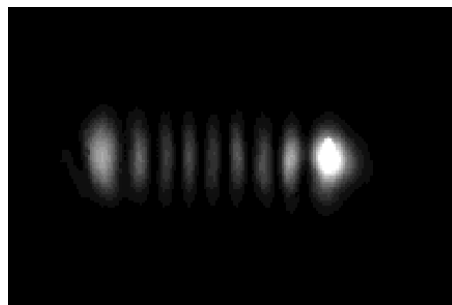


HG₇₀



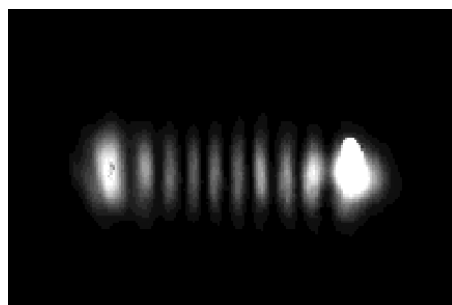
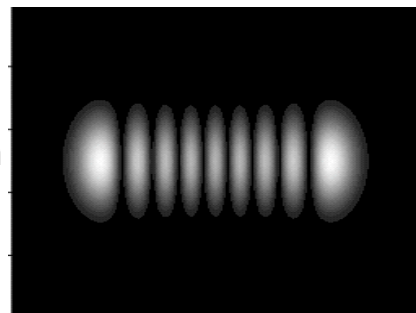
實驗結果

模擬結果



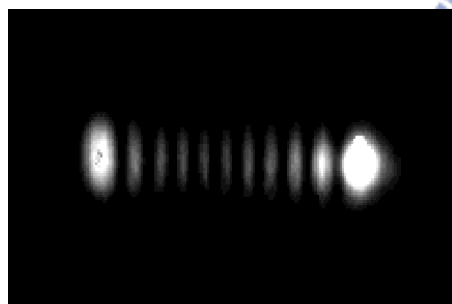
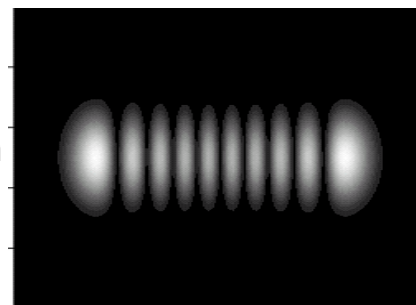
HG₈₀

$\Delta x=0.225\text{mm}$



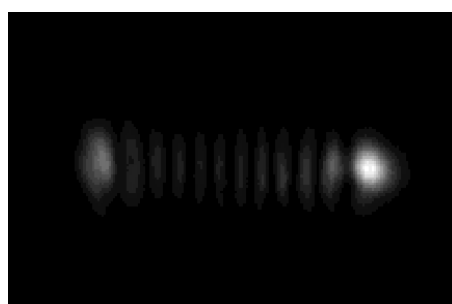
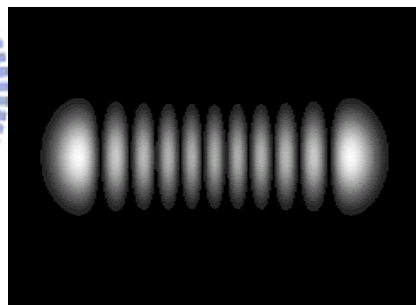
HG₉₀

$\Delta x=0.245\text{mm}$



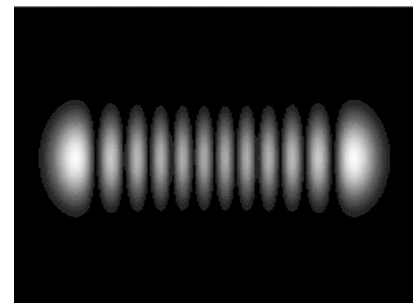
HG₁₀₀

$\Delta x=0.25\text{mm}$



HG₁₁₀

$\Delta x=0.28\text{mm}$



3.6 結論：

近軸近似下的馬克斯威爾方程式與量子力學中簡諧振子所得到的方程式有極大的相似處。在上面的討論中，明瞭雷射光束可用簡單的 Hermite-Gaussian mode 和 Laguerre-Gaussian mode 表示，並探討兩者之間的關係。產生一純 Laguerre-Gaussian mode 所使用的方法在於光纖耦合離焦的程度；產生一純 Hermite-Gaussian mode 所使用方法主要在光纖耦合離軸的程度。並使用理論模擬預測兩者離焦與離軸程度所產生之高階模態。

參考文獻：

- [1]. David K. Cheng, “Field and Wave Electromagnetics”, 2nd, ADDISON WESLEY.
- [2]. L.I. Schiff, “Quantum Mechanics”, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [3]. Isidoro Kimel and Luis R. Elias, IEEE J. Quantum Electron. 29, No.9, pp.2562-2567(1993).
- [4]. Y.F Chen, Y.P. Lan, S.C. Wang, Appl. Phys. B, 72, pp.167-170, 2001.
- [5]. Q. Deng, H. Deng, and D.G. Deppe, Opt. Lett. 22, 463 (1997).
- [6]. Y.F. Chen, T.M. Huang, C.F. Kao, C.L. Wang, S.C. Wang, IEEE J. Quantum Electron. 33, No.6, pp.1025-1031 (1997).

第四章 非純單一模態雷射其時空分佈情形

4.1 導論

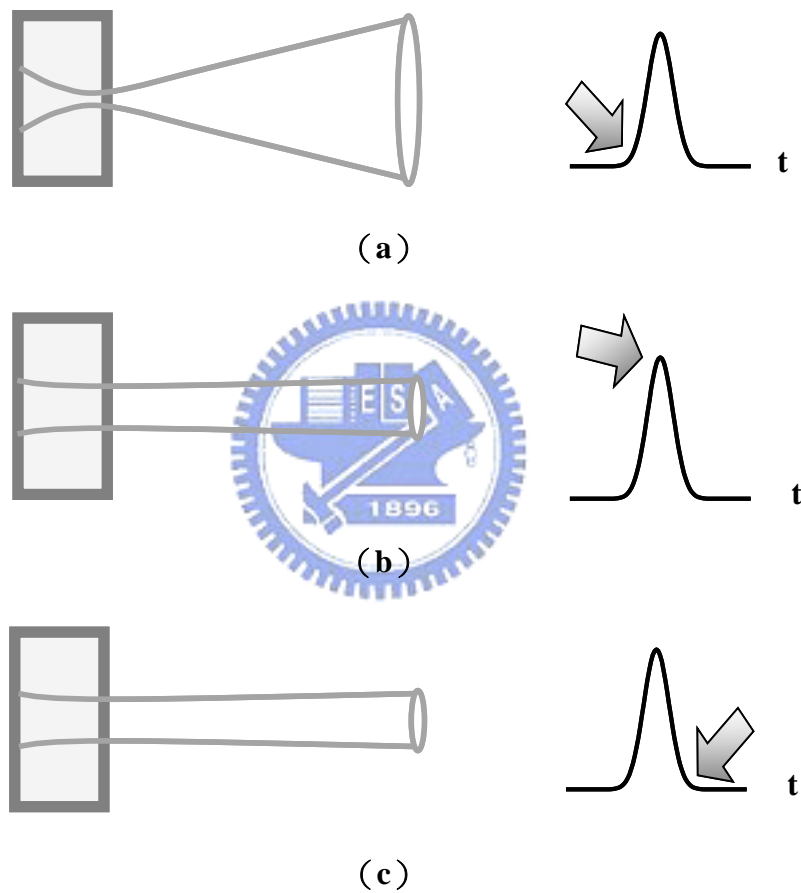
與主動式 Q 開關雷射相比，被動式 Q 開關雷射能以簡單的架構去產生脈衝式雷射。一般被動式 Q 開關具有更小巧、更堅固耐用和可參與多種工作，舉如雷射雕刻至雷射測距等工作。操控在雷射測距的使用下，輸出雷射橫模的品質就成為影響測距結果一不抗拒的變因；一橫模品質較佳的雷射，經過遠距離傳輸依舊可以維持較小光斑 (Spot size)。將雷射光應用於精確度高的測距儀中，雷射脈衝必須均勻地到達目標上；量測時脈衝抵達目標物時間有所變異或是雷射光斑上不同位置打擊到目標物將會造成量測結果有所誤差。以主動式 Q 開關雷射研究遠場時差效應已被討論過，在此將介紹以被動式 Q 開關所造成的遠場時差效應。



3.2 動機

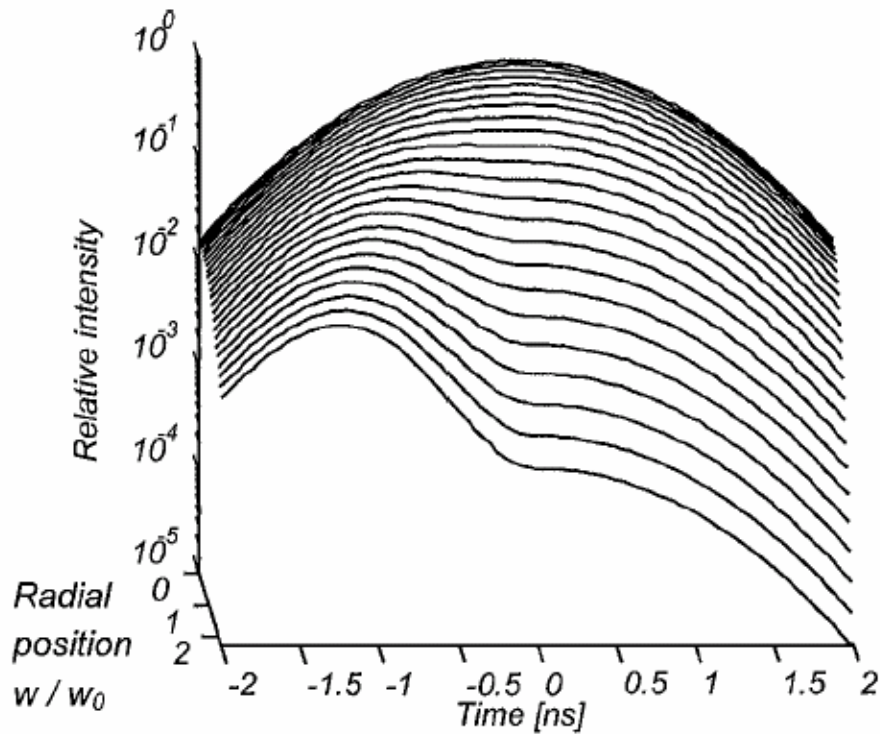
以下將簡述 Magnus Arvidsson 在 2001 年所發表之論文[1]: 在被動式 Q 開關雷射中，飽和吸收體扮演著一開關的閥門。當雷射開始啟動時，飽和吸收體基態電子吸收能量躍遷至激發態，飽和吸收體開始變透明。光子的強度控制著飽和吸收體透明的程度，由於共振腔內的光束呈現一 Gaussian 分佈曲線，因此飽和吸收體的中央應較易達到透明。這告訴我們，在脈衝產生的過程中，飽和吸收體上透明的程度也隨之改變。也可想像飽和吸收體受熱之後，產生熱透鏡效應，形成一聚焦透鏡。此聚焦透鏡在雷射共振腔中，將造成雷射光斑大小的改變與雷射發散角的改變。下圖 (a) 表示，在脈衝產生的初期，雷射光強度較弱、光斑較小，

所造成的繞射效應將有叫大的發散角；下圖（b）表示，雷射強度開始增加，發散角開始變小、遠場的雷射光斑也變小；下圖（c）表示，雷射強度開始下降，但飽和吸收體仍保持透明狀態，使得發散角與光斑並無太大變化。綜合上述討論，由於脈衝產生過程中光束大小與強度的改變，造成在遠場雷射光斑上不同的位置，其脈衝激發時間將有所不同。



圖一

下圖二中，將模擬在時、空座標下雷射強度的分佈。由此圖可以看出在距離中心較遠的位置，其脈衝出現時間叫中心位置早；換句話說，中心點與邊緣處的脈衝產生時間並不相同。

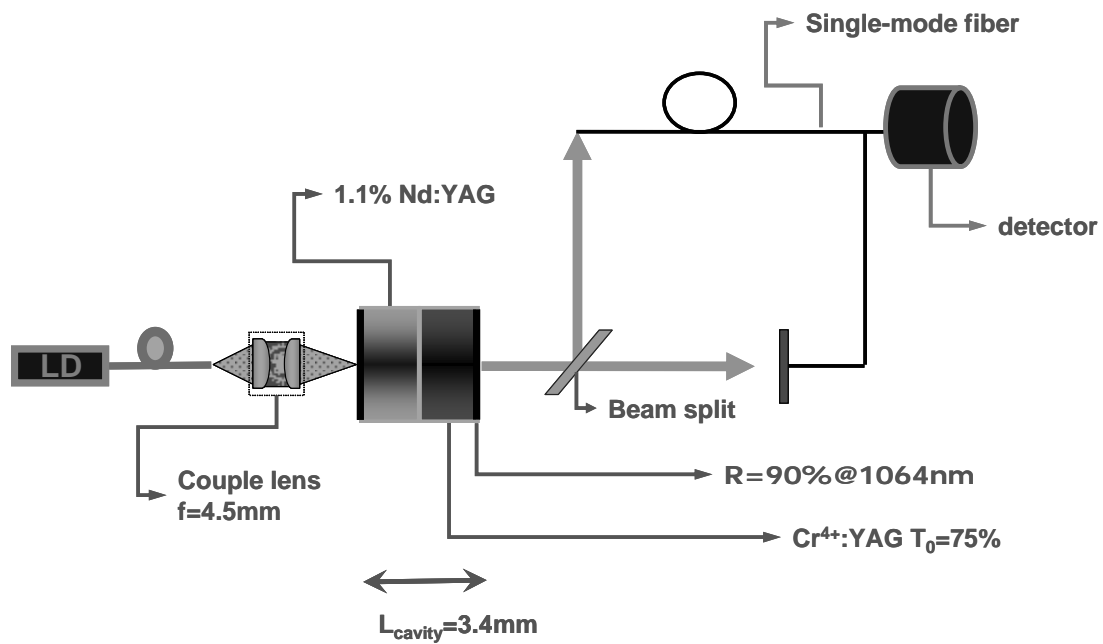


Ref: Magnus Arvidsson, "Far Field timing effects with passively Q-switched lasers", Opt. letters, vol.

26, No. 4, 2001

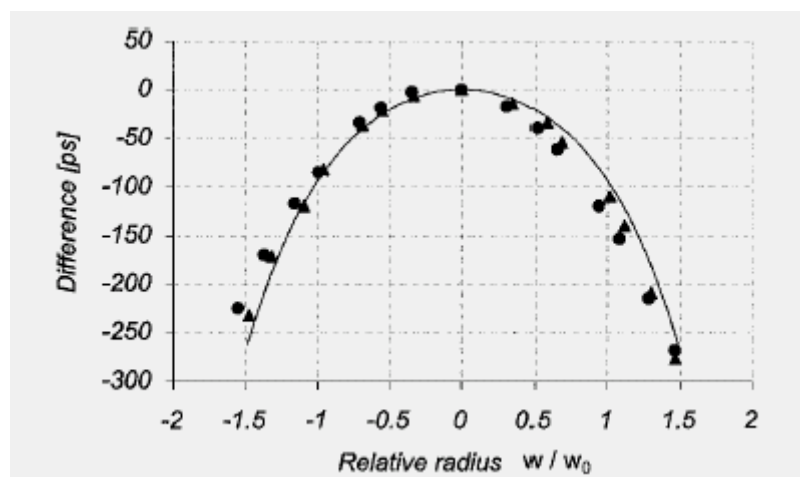
圖二

在 Magnus Arvidsson 所使用之實驗架構為（下圖三）：激發光源使用 500mW 半導體雷射，耦合入光纖，經過一焦距為 4.5mm 的耦合聚焦鏡，入射至增益介質，此增益介質為 2mm 1.1% Nd:YAG，前端鍍上對 1064nm 波段高反射的金屬鍍膜後端與飽和吸收體 1mm Cr⁴⁺:YAG 接和，在飽和吸收體後端接合上 0.4mmYAG 與反射率為 90% @1064nm 的金屬薄膜，並加入溫控。在此架構下，可產生脈衝寬度 3ns、重複率 6kHz、輸出 20mW 的脈衝雷射。在雷射輸出端加入分光鏡，使雷射光束分成兩道，一為實驗組、一為對照組。在此量測架構下，其誤差約在 5ps。



圖三

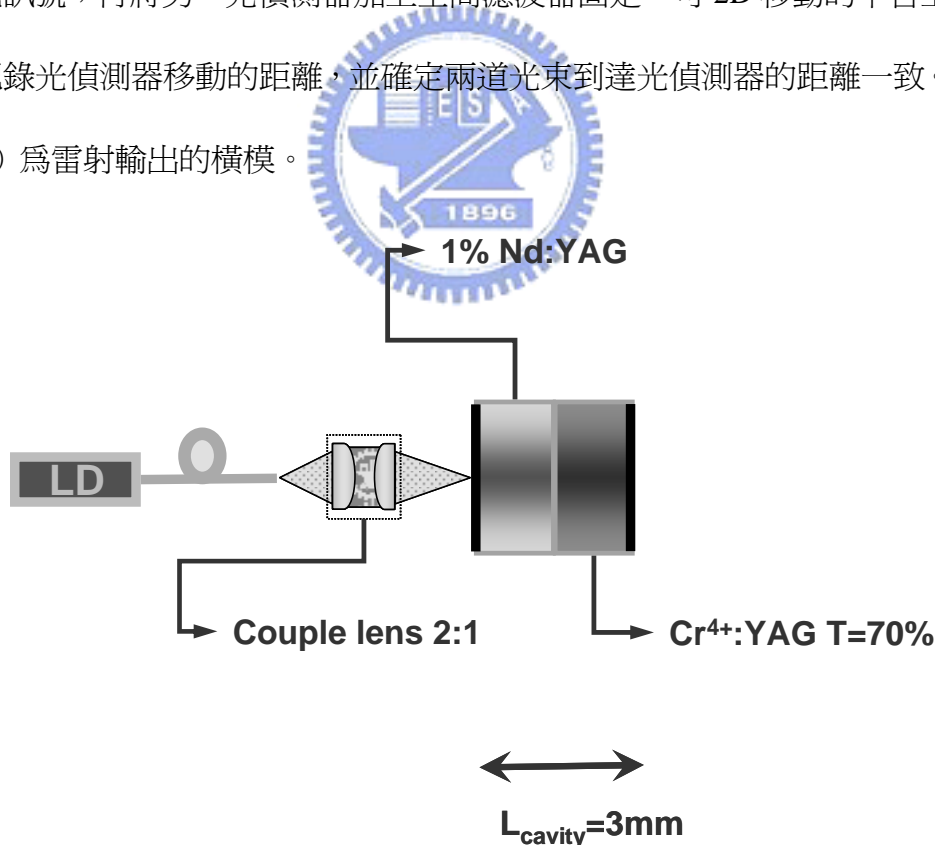
下圖四為實驗結果，三角點代表的是 x 方向位移所造成的時間差、圓點代表的是 y 方向位移所造成的時間差。由實驗結果可以發現最大的時間差大約為 270ps，使用在量測上將造成大約 81mm 的誤差。



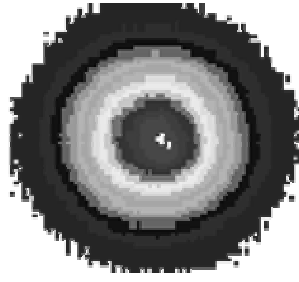
圖四

3.3 Multi-mode 脈衝雷射：

由前面討論，我們試著以同樣架構之雷射討論在橫模非單一模式時，其脈衝產生是否會有上述文章之現象。下圖五（a）為此次實驗的裝置，激發光源為輸出波長 808nm 半導體雷射，經由光纖耦合至聚焦鏡，聚到一端面接鍍有 1064nm 抗反射膜的雷射晶體(Nd:YAG)，滲雜濃度為 1%，長為 2mm、寬與高皆為 3mm，另一端與飽和吸收體 (Cr⁴⁺:YAG) 接和，在飽和吸收體另一端鍍上 1064nm 部分反射膜，此晶體外層包銅，放入銅製通水座中將溫度控制在 25°C。在固定激發功率為 2.4W，輸出為 225mW、脈衝寬度約為 1ns 的架構下，利用 Beam split 將雷射光分成兩道。利用空間濾波器將雷射光束中心點打入光偵測器中，以此為參考光訊號；再將另一光偵測器加上空間濾波器固定一可 2D 移動的平台上，以便於記錄光偵測器移動的距離，並確定兩道光束到達光偵測器的距離一致。下圖五（b）為雷射輸出的橫模。

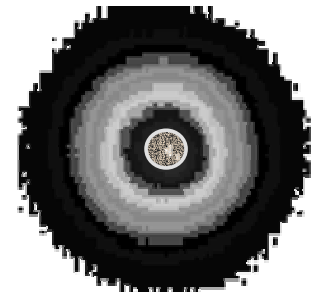
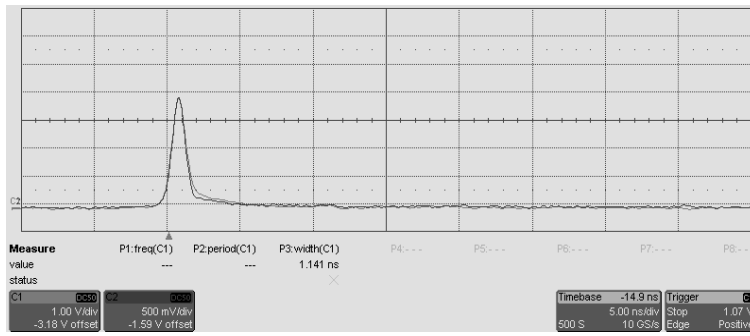


圖五（a）

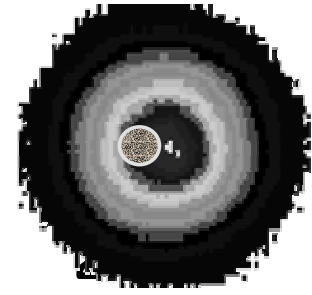
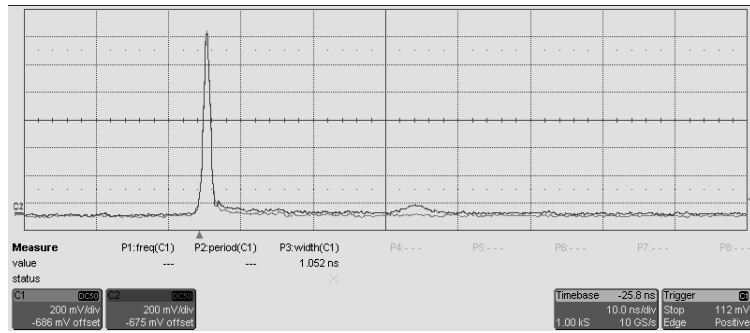


圖五 (b)

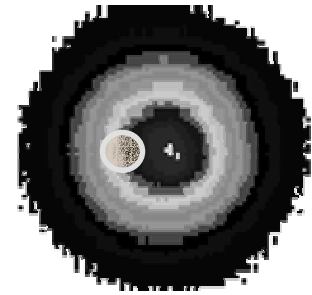
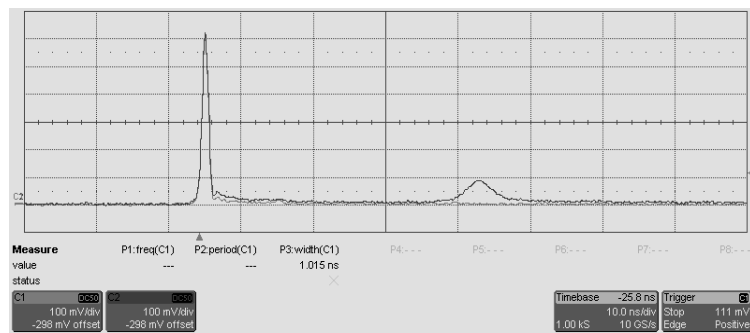
爲了觀察橫模不同位置上，其脈衝產生時間得差異，將利用 Beam split 將光束分成兩道，一爲參考組：將光偵測器之偵測孔至於橫模中心點位置，用以量測橫模中心點脈衝到達時間；另一爲實驗組：將光偵測器架在一可二維移動的平台上，以便於量測 x 方向與 y 方向二維平面上脈衝到達時間。下圖六爲使用示波器在 x 方向位移所偵測所得到圖形，其中深色爲觀察組，淺色爲參考組。由下圖得知，當距離中心點位置越遠時，第二發脈衝的強度將趨近第一發脈衝的強度。兩發脈衝時間差最大可達 20ns，將此雷射使用在精確度高的距離量測上，會產生大約 6m 的嚴重誤差。



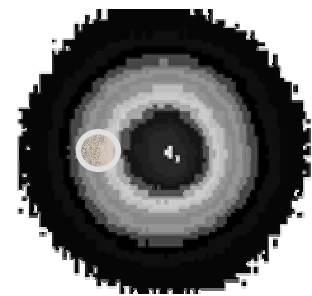
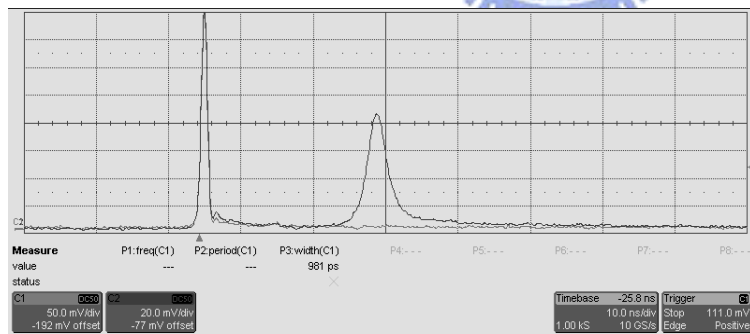
$\Delta x=0\text{mm}$



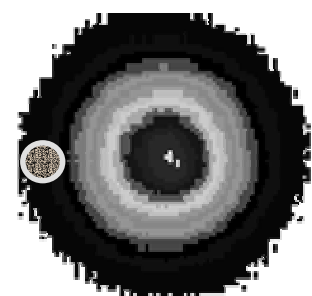
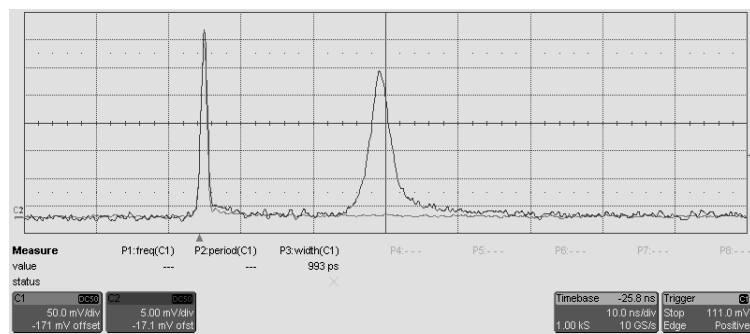
$\Delta x=2.3\text{mm}$



$\Delta x=4.3\text{mm}$



$\Delta x=5.78\text{mm}$



$\Delta x=10\text{mm}$

圖六

參考資料：

[1]. Magnus Arvidsson, Optics letter, vol. 26, no. 4, February 15, 2001

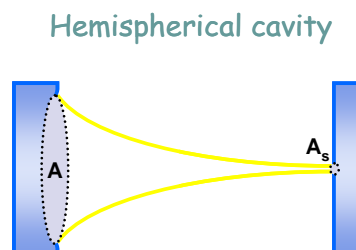


第五章 單一高階橫模脈衝雷射其時空分佈情形

5.1 簡介：

半導體二極體激發式被動式 Q 開關雷射在近幾年來有不錯的表現，尤其以 Nd : YAG 與 a-cut Nd : YVO₄ 做雷射增益介質分別有較高的瞬間功率以及較高的平均功率。在本次實驗架構中，將採用擁有較大受激輻射截面積的 a-cut Nd : YVO₄ (cross section $\sigma = 1.56 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$)，其受激輻射面積為 Nd : YAG 的 2.4 倍、為 c-cut Nd : YVO₄ 的 2.2 倍。在先前做過 a-cut 與 c-cut Nd : YVO₄ 被動式 Q 開關雷射之比較[1]。c-cut Nd : YVO₄ 晶體做為被動式 Q 開關雷射之增益介質優點為：1.較小的脈衝寬度、2.較大的脈衝能量、3. 較簡單之實驗架構。(1) 式為被動式 Q 開關的二次臨界條件[2]，在設計一被動式 Q 開關雷射時，增益介質與飽和吸收體上激發輻射面積比例與腔內光斑大小比例是一重要關鍵[3]。在被動式 Q 開關雷射之實驗架構中，使用 a-cut Nd : YVO₄ 作為增益介質，將使用一半球型共振腔（圖一）來補償 $\frac{\sigma_{gs}}{\sigma_e}$ 較小的缺陷。

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{T_0^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{R}\right) + L} \frac{\sigma_{gs}}{\sigma} \frac{A}{A_s} > \frac{\gamma}{1-\beta} \quad (1)$$



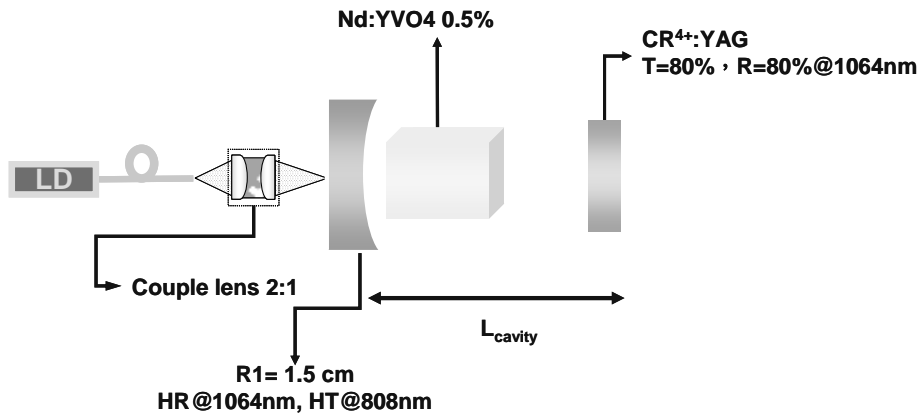
圖一

	a-cut Nd:YVO ₄	c-cut Nd:YVO ₄	Nd:YAG
Laser wavelength, nm	1064.3 1342.0	1064.3 1342.0	1064.2 1338.2
Emission bandwidth, nm (linewidth at 1064nm)	0.8	0.8	0.45
Effective laser cross section, cm ² (emission cross section at 1064nm)	15.6 x 10 ⁻¹⁹	7 x 10 ⁻¹⁹	6.5 x 10 ⁻¹⁹
Polarization	π	unpolarized	unpolarized
Radiative lifetime at 1% Nd doping, μs	~100	~100	~230
Cr⁴⁺:YAG / Gain media			
σ_{gs} / σ_e	2	4.57	4.9

表一

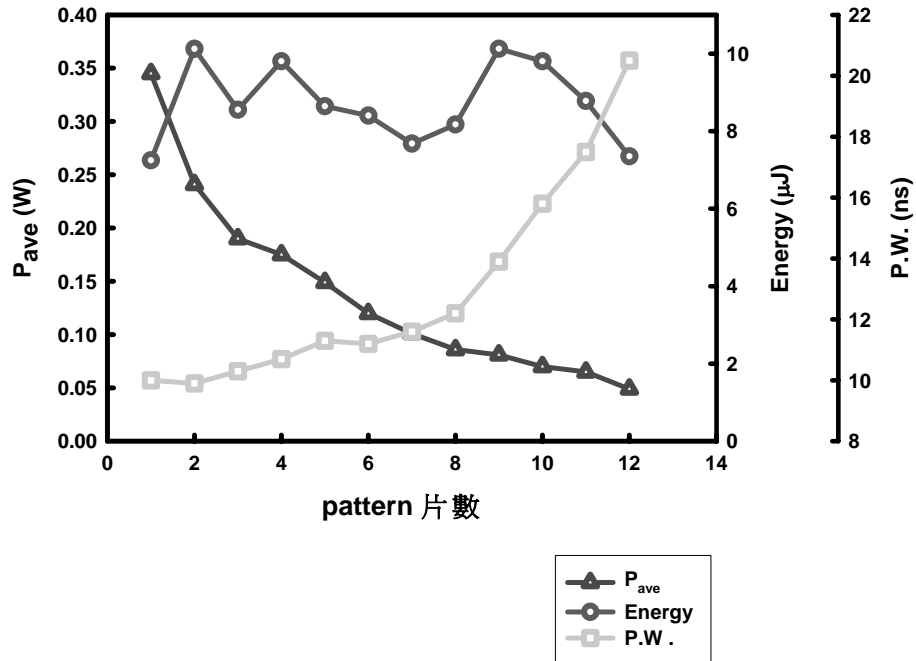
5.2 實驗架構與結果：

下圖二為 5.7 公分腔長的實驗數據圖，激發光源為輸出波長 807nm ~810nm 半導體雷射，經由直徑為 800mm 的光纖耦合至聚焦鏡（焦距為 12.5mm），透過焦距為 5cm 輸入耦合鏡（鍍有 808nm 高穿透膜及 1064nm 高反射膜），聚到兩端面皆鍍 1064nm 高穿透膜的雷射晶體（Nd：YVO₄）上，摻雜濃度 0.5%，長為 7mm，晶體外層包裹銅片，放入銅製通水座中，將溫度控制在攝氏 25 度。本實驗架構中直接在飽和吸收體上鍍 1064nm 部分反射膜，當作耦合輸出鏡，飽和吸收體初始穿透率為 80%，晶體厚度 3mm。由先前研究可以得知，高階橫模的產生，是利用將激發光源採離軸激發，即可得到高階橫模。下圖三為橫模片數對平均輸出功率、脈衝寬度及脈衝能量作圖。由圖中可得知，橫模階數越高階平均輸出功率越低、脈衝寬度越大，但脈衝能量大致保持一定。



圖二

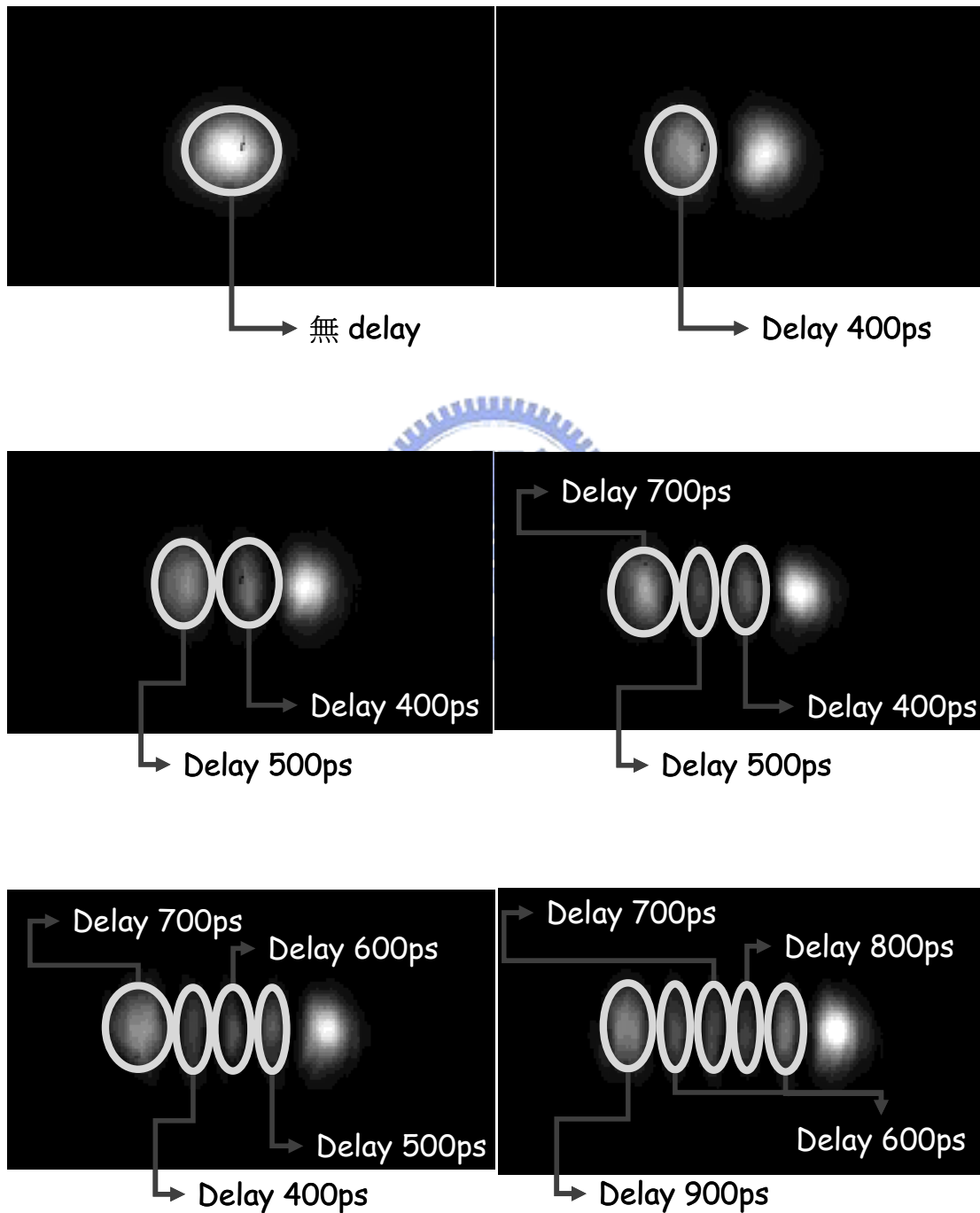
$I_{input}=2.2A$

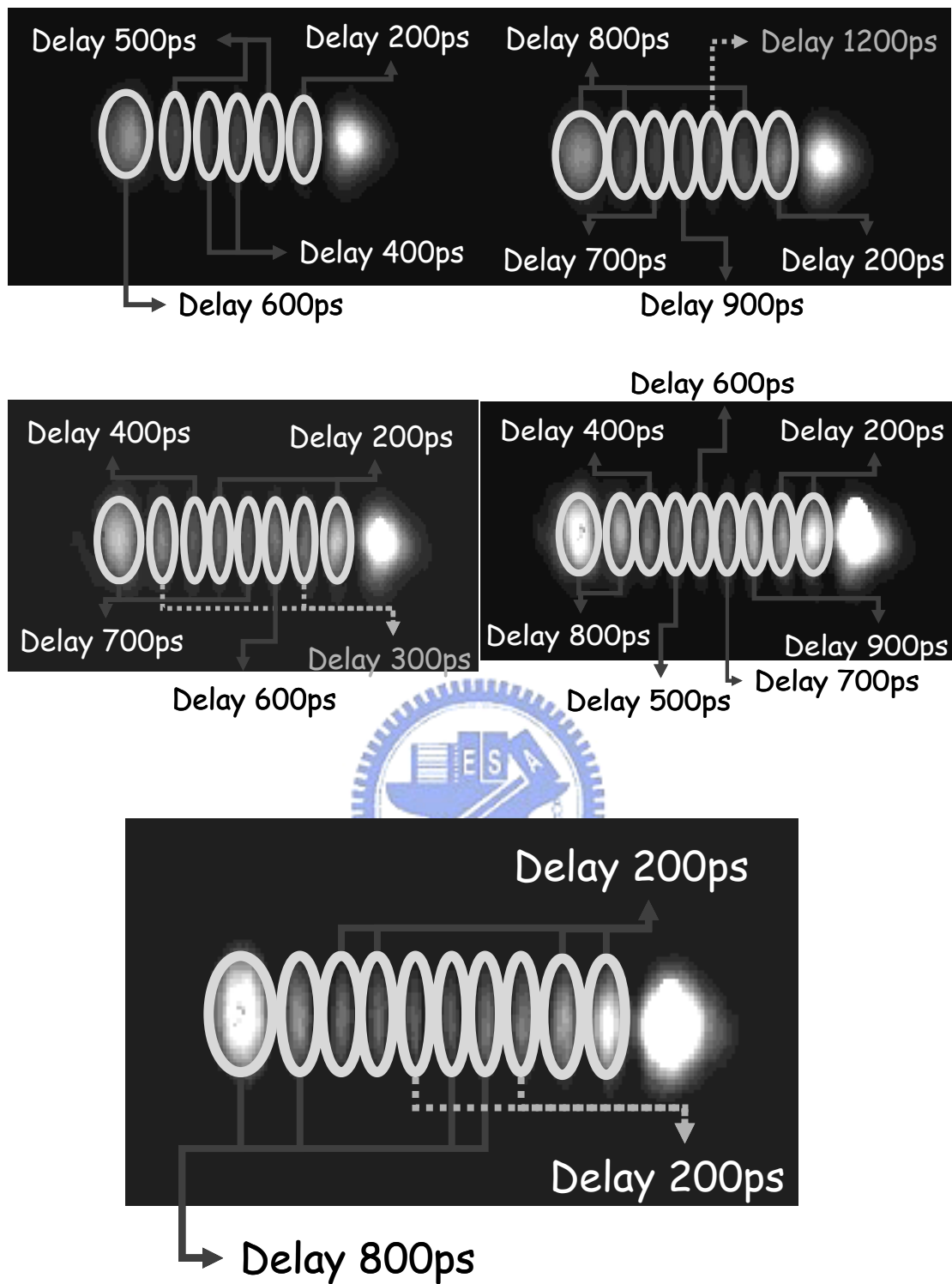


圖三

圖四中將指出雷射高階橫模其每一片橫模之間時間差的情形。光子在 1.5cm 腔長的共振腔來回一趟需要 100ps，由圖四可以發現，每片橫模之間所具有的時間差約為 100ps 的 N 倍；也就是說，每片橫模的產生約為 N 趟光子來回震盪的時

間。由實驗數據得知，假設一 $HG_{10,0}$ 模態其脈衝寬度約為 17ns，其整個完整橫模產生的時間，約為光子在共振腔中來回震盪 170 次而產生。由此推算，每一不同高階橫模的產生，所約要的光子震盪次數不同，所產生時間也有所不同。





圖四

5.3 強聚焦下所產生之橫模：

保留圖二所使用雷射架構，在輸出耦合鏡端改變其前後位置；也就是改變腔

長。當腔長越往後拉，聚焦在飽和吸收體上的光斑相對越小，在增益介質上光斑相對越大，在此架構下將產生兩種效果：1.增益介質上激發光源之光束大小將比共振腔中光斑（A）小，此效果將造成光波在增益介質上，有光程差的產生。2.強聚焦於飽和吸收體上，將有熱透鏡效應的產生。此兩效果的影響下，我們觀察橫模產生的情形如下。在實驗架構中，飽和吸收體將使用兩種不一樣的材料，一為 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ ；一為 SESAM。其中，SESAM 可以得到更高階的模態，且其損壞閥值也較高，所得到之圖形也較為清晰。在此也量測其橫模之產生是否有時間差的現象，但在量測幾組之結果都無時間差現象產生，因此可以判定此橫模之產生，應為一次產生，而非前節敘述經過幾趟光子震盪產生。

圖五：使用部分反射率為 85% 的輸出耦合鏡得到其不同位移腔長下所得到之輸出功率。

圖六：相對圖五之模態圖形。

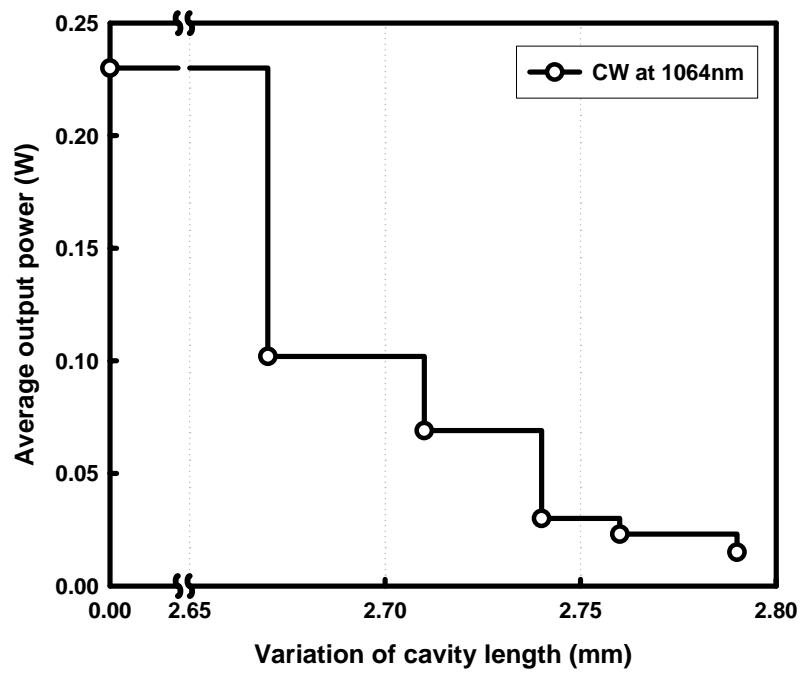
圖七：使用飽和吸收體（ $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ ）上鍍部分反射膜反射率為 80% 為輸出耦合鏡，一樣改變腔長所得到不同模態功率圖。

圖八：相對圖七之重複率及脈衝能量圖。

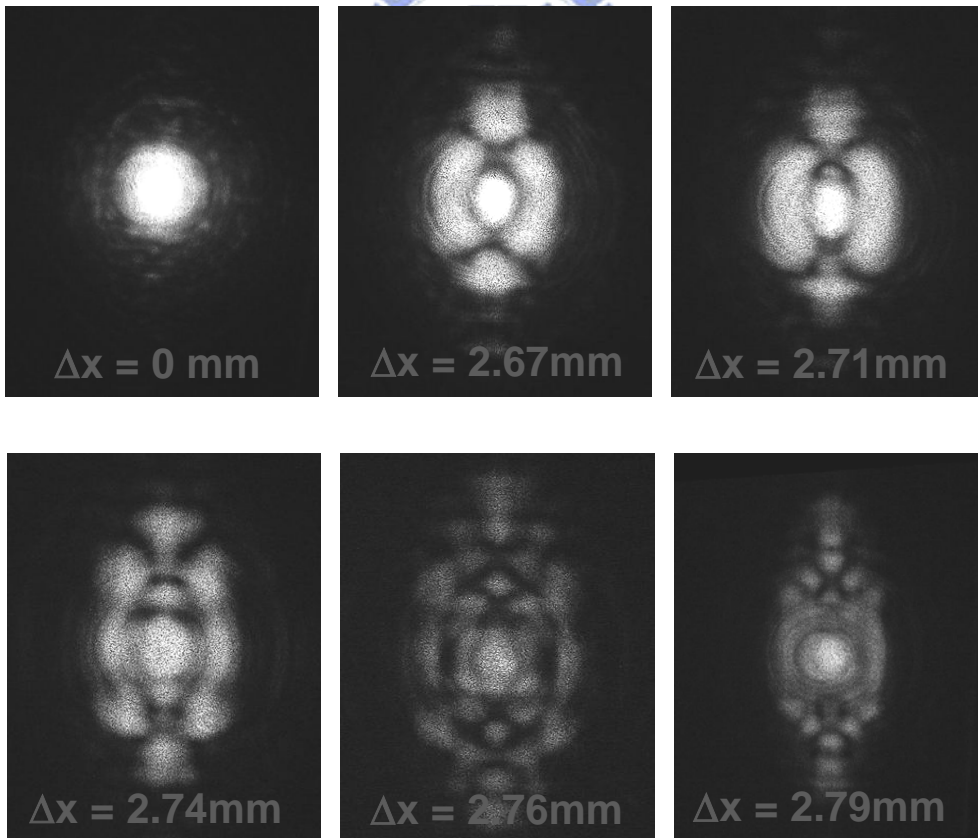
圖九：相對圖七之模態圖形。

圖十：使用飽和吸收體（SESAM）為輸出耦合鏡，一樣改變腔長所得到不同模態功率圖。

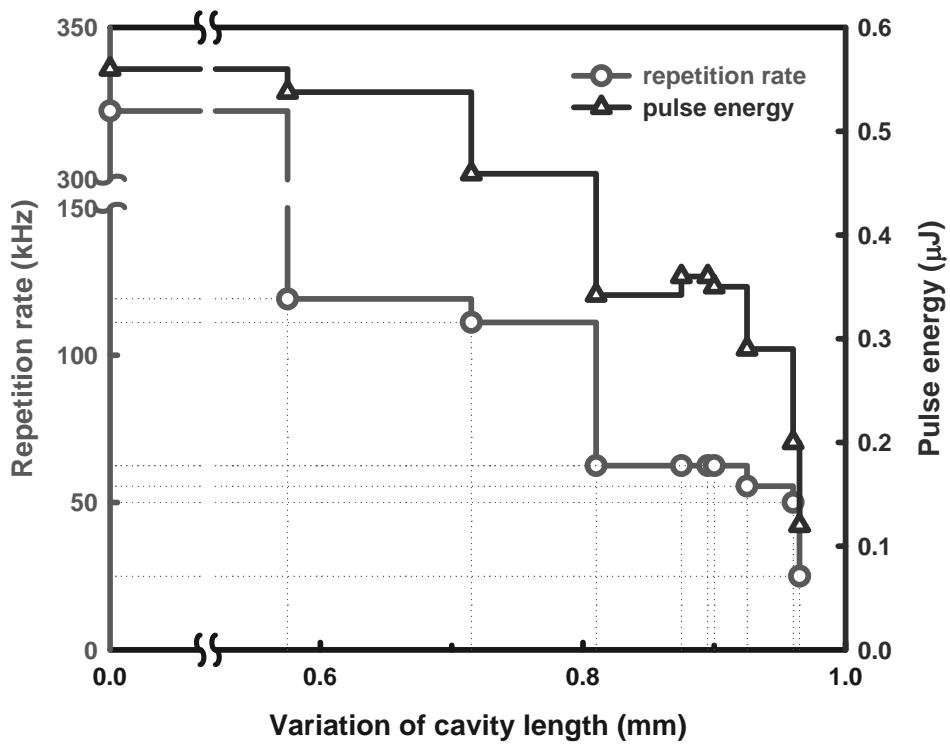
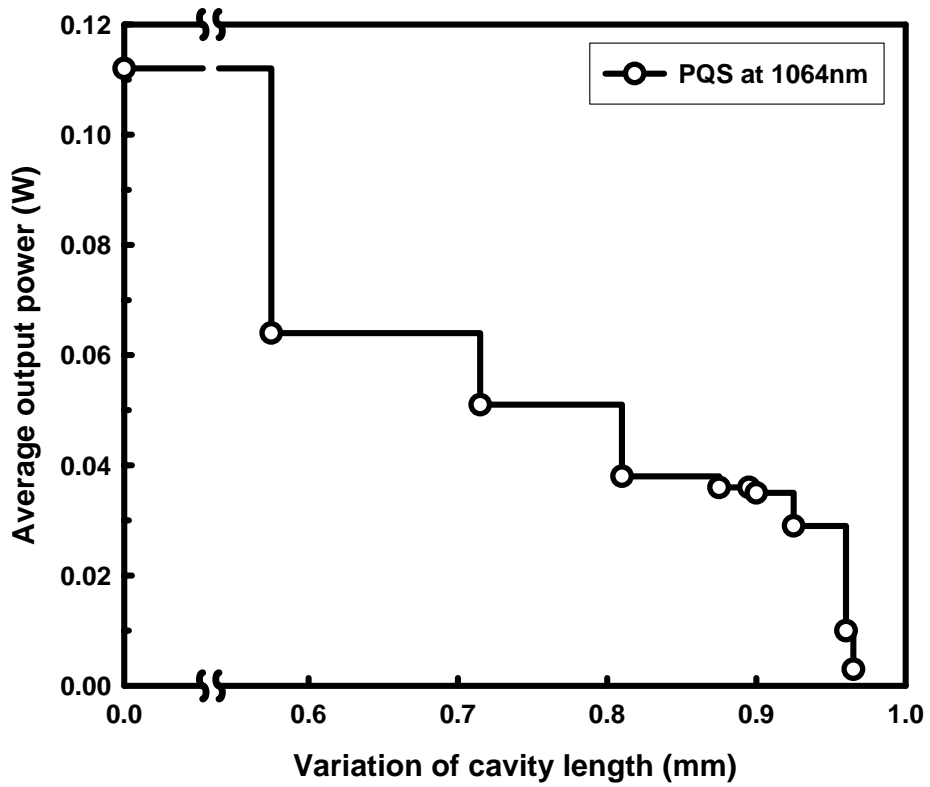
圖十一：相對圖十之模態圖形。



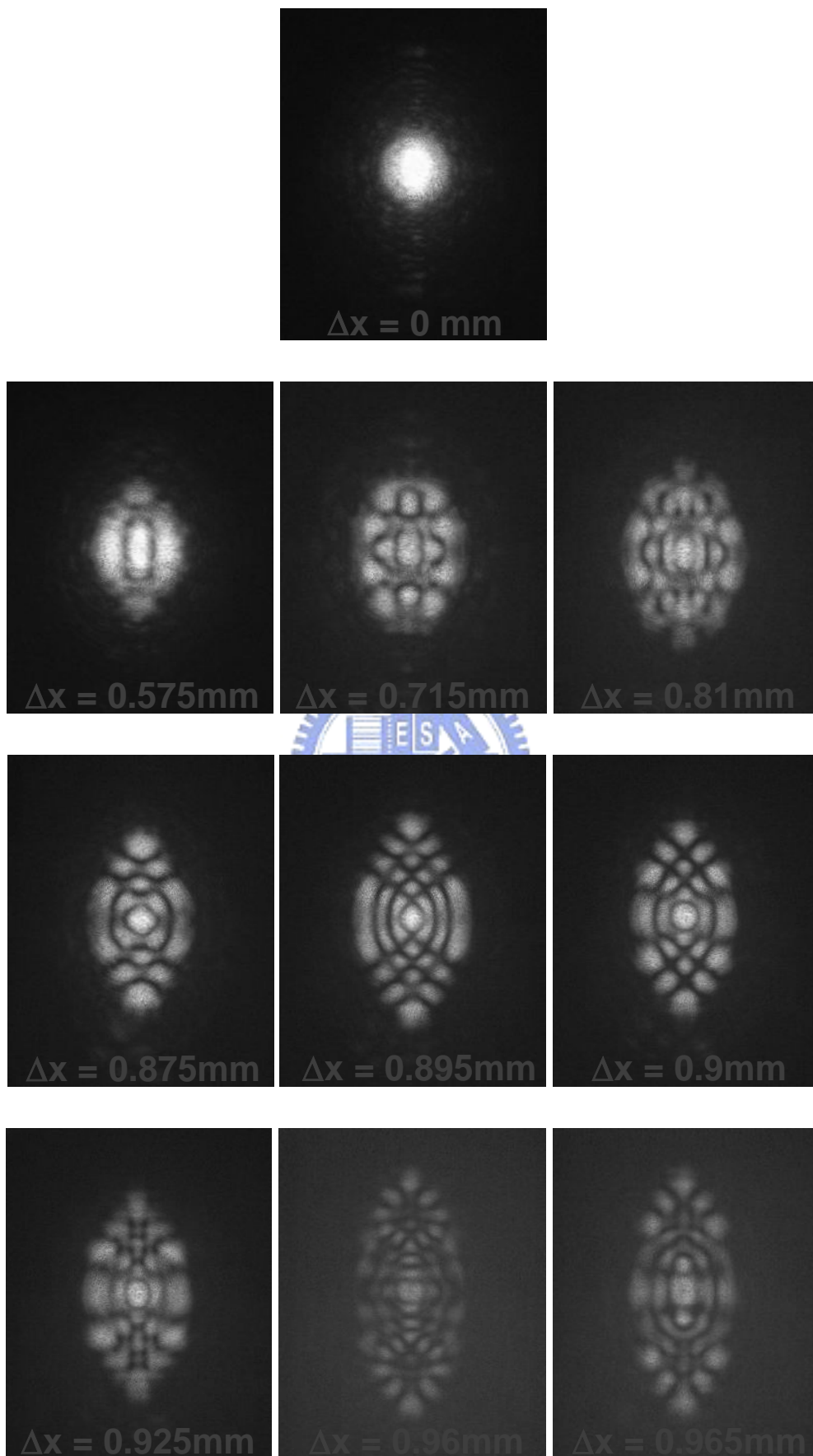
圖五



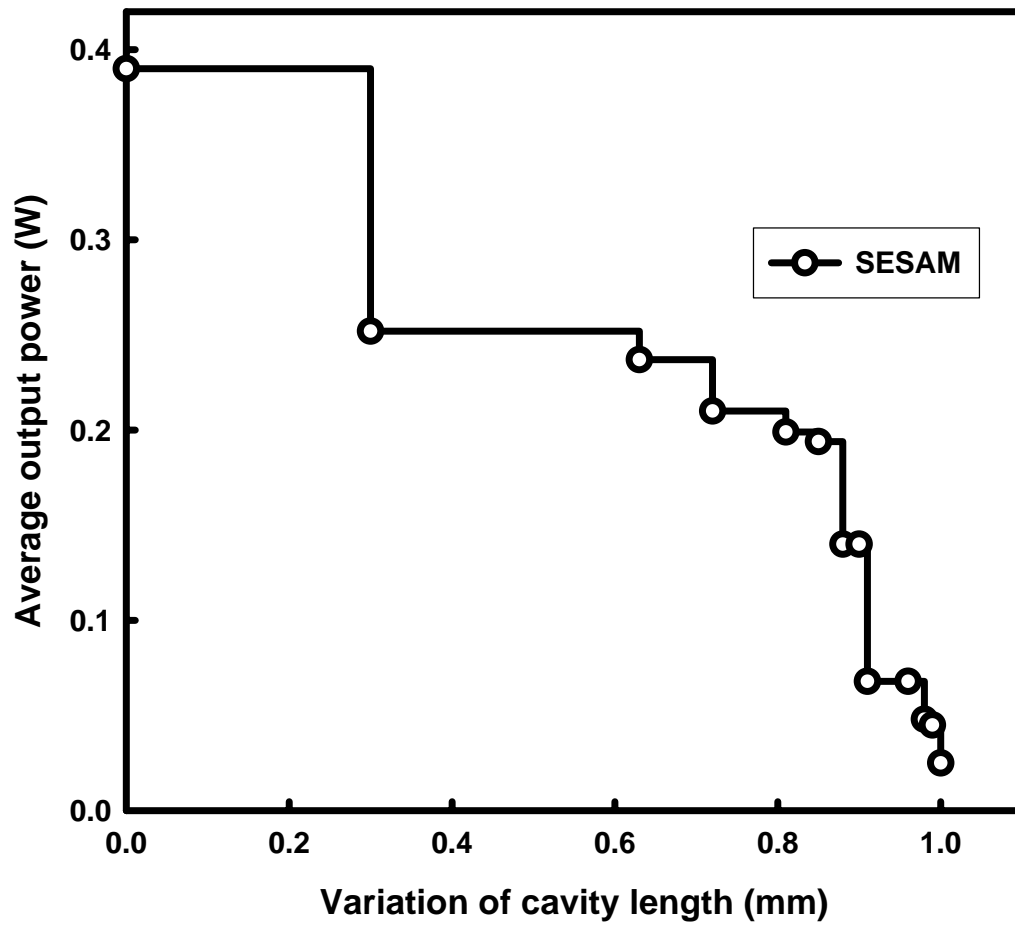
圖六



圖八

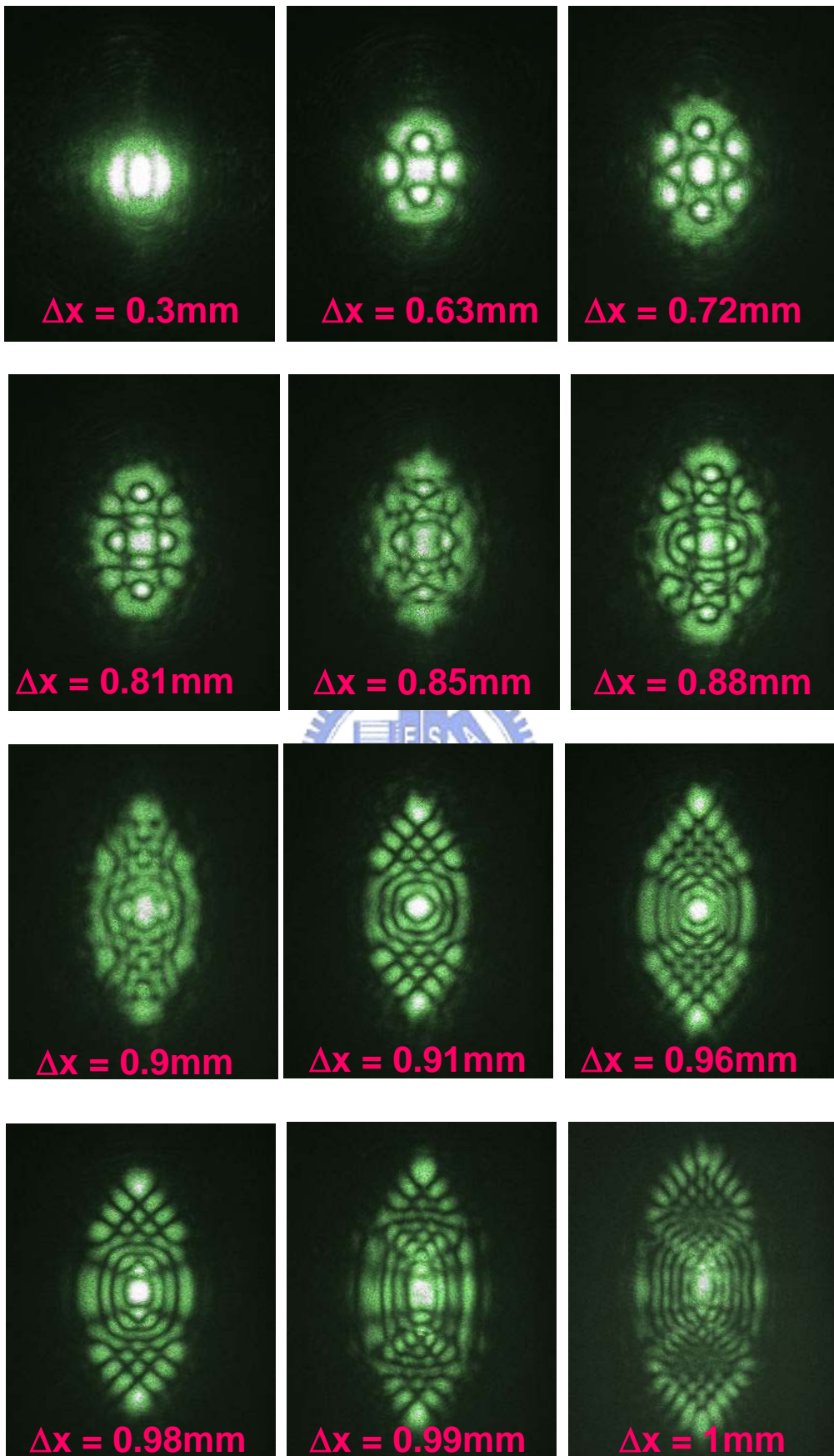


圖九



圖十





圖十一

參考資料：

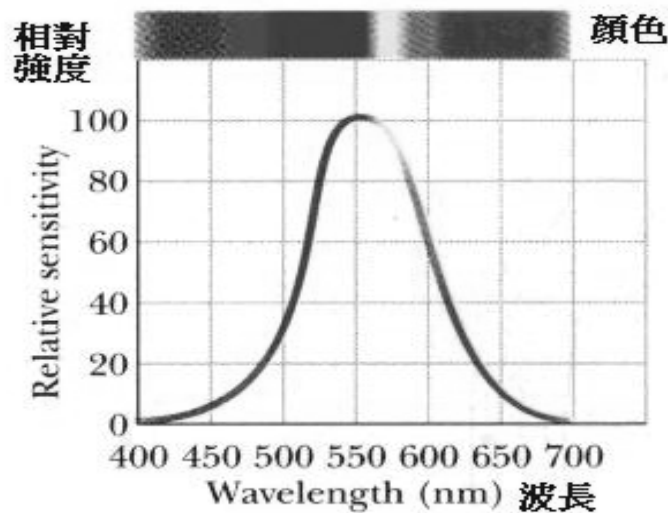
- [1]. Y.F. Chen, Y.P. Lan: Appl. Phys. B74, 415 (2002).
- [2]. A.E. Siegman: *Lasers* (University Science, Mill Valley, CA 1986) p. 1024
- [3]. G. Xiao, M. Bass: IEEE J. Quantum Electron. QE-33, 41 (1997)

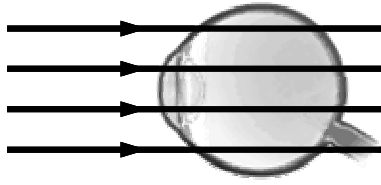


第六章 腔內光參數震盪器之研究

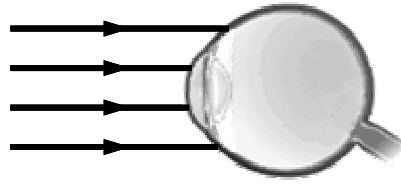
6.1 簡介：

眼睛是人類身上最為複雜的器官之一，其工作方式和我們一般使用的照相機很相似。其中眼球的虹膜就像光學儀器的光圈，可調整光的入射量。而眼球的水晶體則類似無段變焦透鏡可以聚集光線而由睫狀肌來調整焦距。另外，視網膜對接受到的光線起反應，並藉由視神經將視覺感受傳達到大腦。雷射對於人類眼睛的傷害一般來說比對皮膚表面的傷害還更加顯著，尤其在可見光至遠紅外線波段（圖一）[1]。由下圖二可以看出一平行入射光進入人眼之後，將聚焦於視網膜上的一小區域，由於通過水晶體的聚焦，將使光強度在單位面積上提升至 10 萬倍。雷射光又較一般光於有更高的照度，所以安全的雷射實為一重要研究。

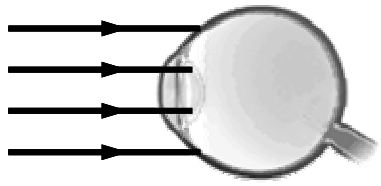




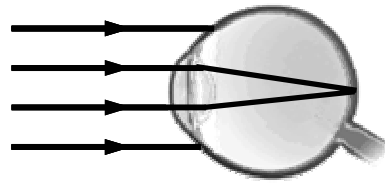
a. Microwaves and Gamma Rays



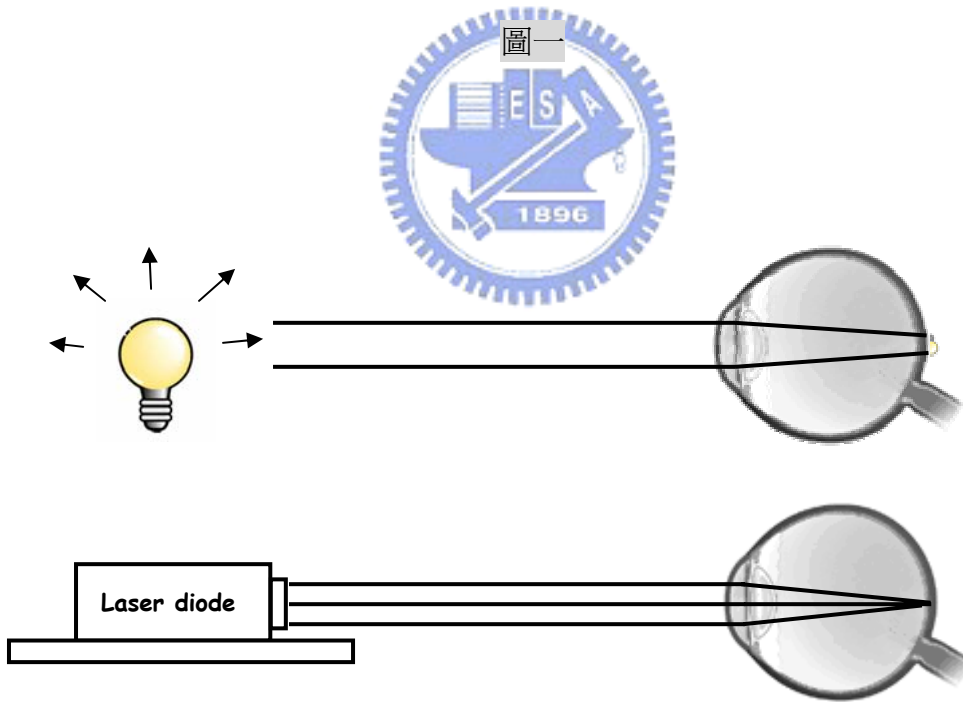
b. Far Ultraviolet and Far Infrared



c. Near Ultraviolet



d. Visible and Near Infrared



圖二

6.2 人眼安全雷射：

同一介質對不同波段光源之吸收率並不相同，所造成的傷害也不一樣，若對

眼球照射的曝光量大於某個臨界值，不論哪個波段的光源，都將對眼球造成傷害，因眼球中各介質對不同光源之吸收率及靈敏度都不相同 [1]。

大部分討論輻射光對人體影響的研究，都針對雷射光的傷害，雖然雷射光對人體的滲透性弱，但其光束非常集中，單位面積的功率很大，只須在很短的曝光時間內，就會對眼睛造成傷害。在下表一[1]中，將表示不同波段的雷射光對人類眼睛所造成之傷害。

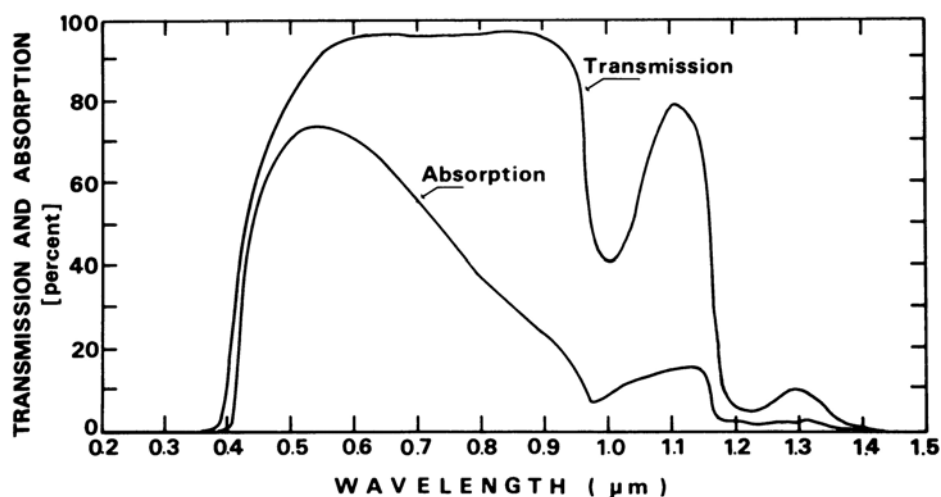
	UV-B	UV-A	Visible	IR-A	IR-B	IR-B
波長	0.2	0.315	0.4	0.78	1.4	3 1000
眼睛病變	角膜炎	光化學效應所造成白內障	光化學效應與熱效應所造成是網膜損傷	白內障 視網膜燒毀	水漾液混濁 白內障 視網膜燒毀	角膜燒毀

表一

一般軍用雷射脈衝測距儀多為：紅寶石、摻鉍、CO₂ 等。0.69 μ m 的紅寶石雷射測距儀為最早使用的軍用雷射測距儀，其擁有結構簡單、緊湊等優點；但由於其工作波長屬於紅外波段，極易暴露目標，加上對人眼及不安全，目前除少數應用外已被淘汰。摻鉍雷射測距儀的主要優點在於隱蔽性、效率及脈衝重複率大等，因此在 60 年代廣泛被使用，主要缺點為：1.工作波長為 1.06 μ m，在大氣中的衰減較大，不完全適合霧氣和戰場煙霧等環境條件。2. 1.06 μ m 波長之雷射發光之後，經人眼聚焦至視網膜，在短距離中若不加上防護裝置觀察，將造成永久失明，但在戰場使用上卻有不可取代之優點。CO₂ 雷射測距儀，為 70 至 80 年代

針對摻鉍雷射缺點所研發出來的測距儀，主要缺點為不適合濕氣重的自然環境下操作。

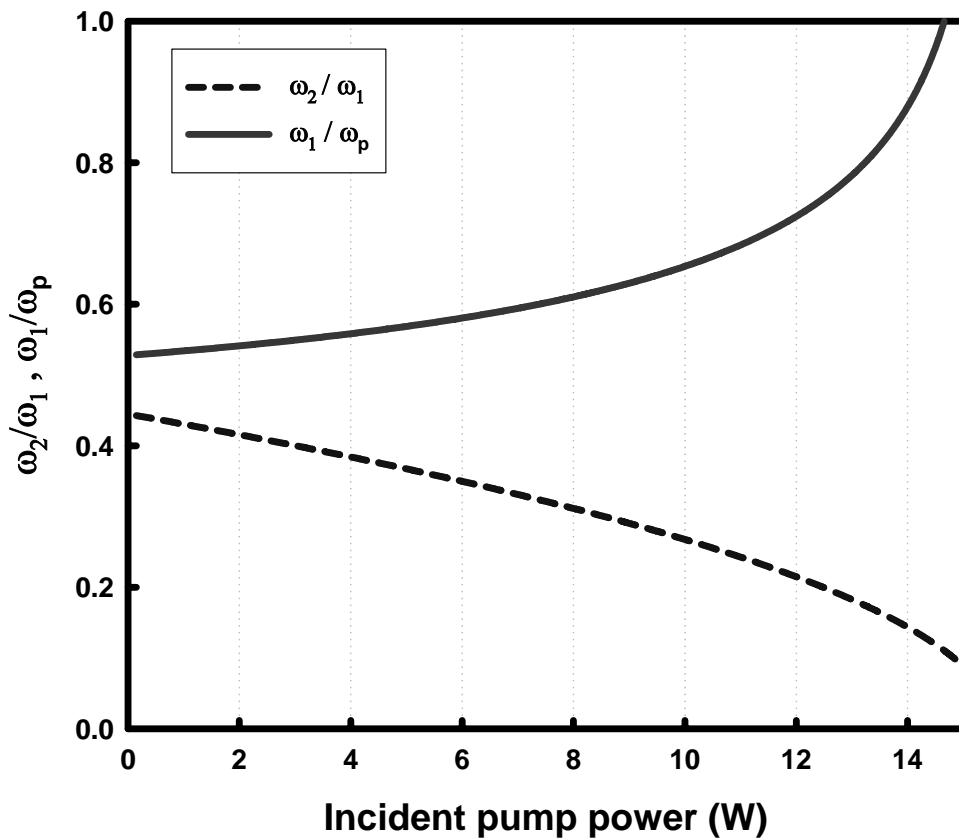
在光通訊以及光偵測研究中，人眼安全波段之雷射光是一重要工具。雷射光對人眼的傷害，一般以雷射光的波長、功率、曝曬時間以及人眼組織來決定。下圖表示出不同波長對視網膜的吸收與穿透情形，由下圖三[1]可知，在可見光波段過渡曝曬容易造成視網膜燒傷。



圖三

在雷射測距儀的應用上，工作波長在 1.5-1.6 μm 、脈衝寬度為奈米級的脈衝雷射是一不可或缺的工具。使用被動式 Q 開關雷射產生接近 1.5 μm 波長的雷射包括： $\text{Co}^{2+}:\text{LaMgAl}_{11}\text{O}_{19}$ [2]、 $\text{Er}:\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F}$ [3]、 $\text{U}^{4+}:\text{CaF}_2$ [4]、 $\text{U}^{4+}:\text{SrF}_2$ [5]、 $\text{Co}^{2+}:\text{ZnSe}$ [6]、 $\text{Cr}^{2+}:\text{ZnSe}$ [7]及 SESAM[8]等晶體。另一產生人眼安全雷射的技術為光參數震盪器，近年來使用腔內光參數震盪器產生 1.5 μm 波段雷射以唯一重要技術，腔內光參數震盪器的優點在於其非線性晶體的損毀閾質較高。在先前已利用光參數震盪器技術並使用半球型共振腔產生 1.572 μm 波長輸出功率為 255mW 的人眼安全雷

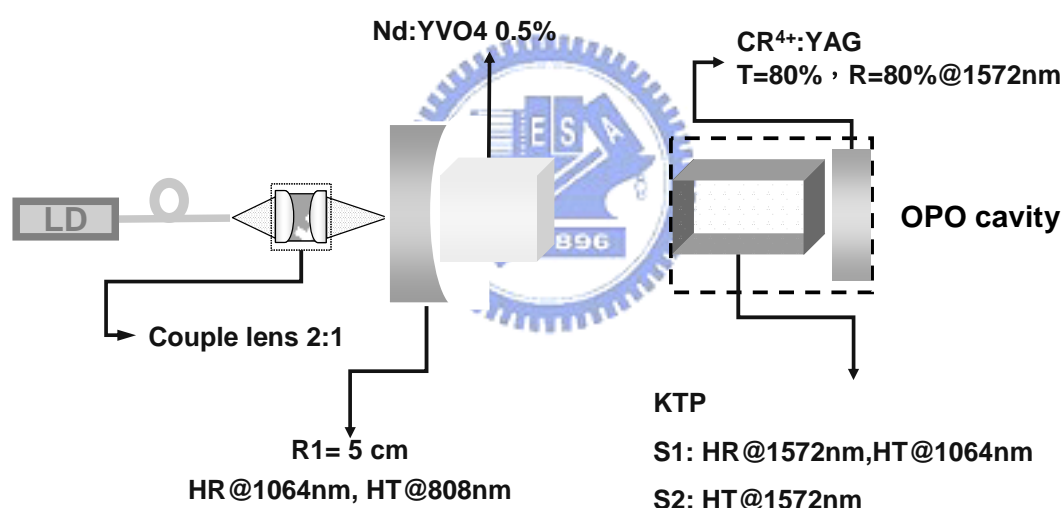
射[10]。接著將考慮熱透鏡效應，在加入考慮熱透鏡效應時，需考慮 Pumping spot size 與腔內 beam waist 大小的關係[9]如下圖；將功率增加，觀察在使用半導體雷射激發被動式 Q 開關雷射之輸出功率以及平均能量大小。



圖四

下圖為實驗架構，為一腔內光參數震盪器之雷射，飽和吸收體 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 上鍍金屬膜當作一輸出鏡使用，共振腔採一近似半球型共振腔，腔長 5.7 公分。使用激發光源輸出波長為 807nm~810nm 的半導體雷射經由直徑為 800 μm 的光纖耦合至聚焦鏡，聚焦鏡焦距約為 12.5mm 耦合率約為 92%，雷射輸入至共振腔內之光斑大小約為 350 μm 。透過焦距為 5cm 輸入耦合鏡（鍍有 808nm 高穿透膜及 1064nm 高反射膜），聚到兩端面皆鍍有 1064nm 高穿透膜的雷射晶體（a-cut $\text{Nd}:\text{YVO}_4$ ）上，摻雜濃度為 0.5% 長度為 7mm，此雷射晶體為了避免高功率 pumping

所造成碎裂所以使用低摻雜濃度之晶體，晶體外層包裹銅片，放入銅製的通水座中，將溫度控制於 25 度，並將雷射晶體儘量靠近輸入耦合鏡。而光參數震盪器之腔體由表面鍍膜之 KTP 與表面鍍膜之 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 組成。在 KTP 的選擇上，將使用長度 20mm、TYPEII noncritical phase-matching ($\theta = 90^\circ$ and $\phi = 0^\circ$)，以得到較高之非線性轉換效率並保持走離腳為 0 度。在非線性晶體 (KTP) 前端鍍上 1572nm 高反射膜與 1064nm 高穿透膜；後端鍍上 1572nm 與 1064nm 抗反射膜。在飽和吸收體 ($\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$) 的使用上，選擇一厚度 3mm、初始穿透率為 80% 針對 1064nm 波長。在 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 後端鍍上 1572nm 部分反射膜 (PR=85%) 與 1064nm 高反射膜。

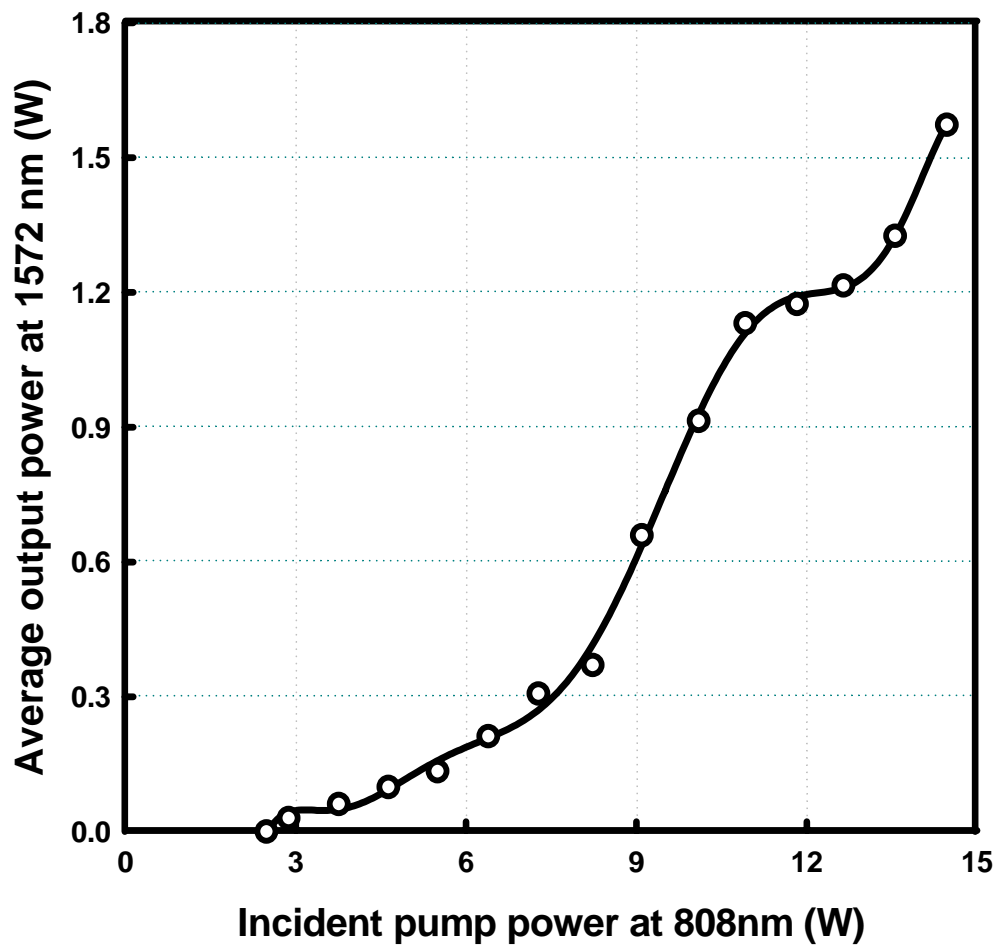


圖五

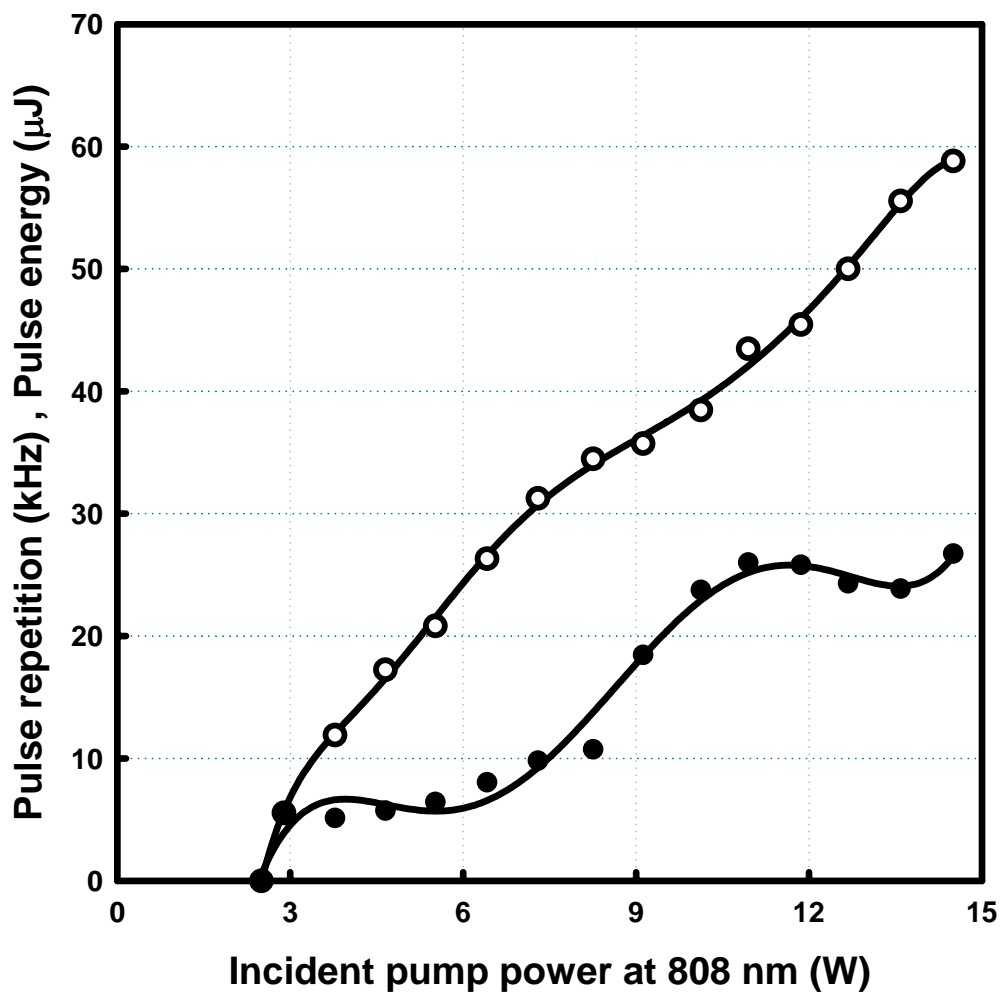
圖六表示輸入功率對輸出 1572nm 波長雷射功率，在 14.5W 輸入功率下可得到 1.56W 輸出。

圖七表示 1572nm 波長的雷射脈衝能量與脈衝重複率，可由圖中得知兩個訊息：第一，在 14.5W 輸入功率下可以得到重複率 58.8kHz 的雷射輸出；第二，脈衝能量在一開始隨著輸入功率增加而增加，當輸入功率大於 10W 時，進入飽和

區域，由此飽和曲線可以得知，此被動式 Q 開關雷射已達到最佳使用效率[11]。



圖六

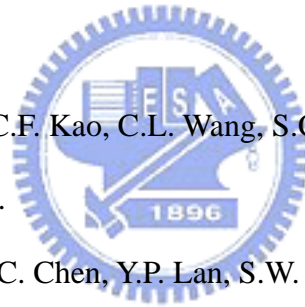


圖七

參考資料：

- [1]. David Sliney and Myron Wolbarsht, "Safety with Lasers and Other Optical Sources", PLENUM.
- [2]. K.V. Yumashev, I.A. Denisov, N.N. Posnov, V.P. Mikhailov, R. Moncorge, D. Vivien, B. Ferrand, Y. Guyot, J. Opt. Soc. Am. B16 (1999) 2189.
- [3]. K. Spariosu, R.D. Stultz, M. Birnbaum, J.A. Hutchinson, Appl. Phys. Lett. 62 (1993) 2763.
- [4]. R.D. Stultz, M.B. Camargo, M. Birnbaum, J. Appl. Phys. 78 (1995) 2959.

- [5]. R.D. Stultz, M.B. Camargo, M. Lawler, D. Rockafellow, M. Birnbaum, in: W.R. Bosenberg, M.M. Fejer (Eds.), *Advanced Solid State Lasers*, OSA Trends in Optics and Photonics Series, vol. 19, Optical Society of America, Washington, DC, 1998, p.155.
- [6]. R.D. Stultz, M.B. Camargo, S.T. Montgomery, M. Birnbaum, K. Spariosu, *Appl. Phys. Lett.* 64 (1994) 948.
- [7]. M. Birnbaum, M.B. Camargo, S. Lee, F. Unlu, R.D. Stultz, in: C.R. Pollock, W.R. Bosenberg (Eds.), *Advanced Solid state Lasers*, OSA Trend in Optics and Photonics Series, vol.10, Optical Society of America, Washington, DC, 1997, p.148.
- [8]. R. Fluck, R. Haring, R. Paschotta, E. Gini, H. Melchior, U. Kelly, *Appl. Phys. Lett.* 72 (1998) 3273.
- [9]. Y.F. Chen, T.M. Huang, C.F. Kao, C.L. Wang, S.C. Wang, *IEEE J. Quantum Electron.* 33 (1997) 1424.
- [10]. Y.F. Chen, S.W. Chen, Y.C. Chen, Y.P. Lan, S.W. Tasi, *Appl. Phys. B* 77 (2003) 493.
- [11]. Y.F. Chen, Y.P. Lan, H.L. Chang, *J. Quantum Electron.* 37 (2001) 462.



第七章 結論與未來展望

表一為各個被動式 Q 開關雷射所量測得到的脈衝延遲時間，其中以隱藏式非單一模態之時間延遲最為嚴重，在距離量測上將有 6 m 的誤差，在高階橫模中也有近百 ps 的延遲。

Nd : YAG		Nd : YVO ₄	
Fundamental mode	Multi mode	Single HG mode	Geometry mode
No pulse delay	About 20ns pulse delay	About ~ hundred ps pulse delay	No pulse delay

表一

在未來工作中，將可以進一步模擬脈衝雷射形成的情形，並精確計算出不同脈衝雷射每依橫模之時間差，更藉此瞭解橫模產生之順序。