

第二章 時間系統與坐標系統

坐標系統與時間系統是描述衛星動態，處理觀測數據和確定觀測站位置的數學與物理基礎，由於地球的公轉和自轉，所以在天球中，地球隨時都在動，衛星在太空中亦隨時在運動，所以一般在衛星定軌道時都是在慣性坐標系中，然而吾人要探求重力場與衛星軌道之關係時，重力位是建構在地固坐標系中，所以坐標系統與坐標轉換在衛星大地學中是相當重要。在本文研究所使用之各種資料，其時間系統與坐標系統並不完全一致，因此，在分析時必須清楚了解各種資料之時間系統及坐標系統，例如 IERS 之 Bulletin 是採 UTC 系統，而 DE200 是採 TDT 系統，低軌衛星軌道是採 GPST 系統等，因此本章將對時間系統、坐標系統二個參考系統進行闡述。

2.1 時間系統

時間系統和坐標系統是所有空間大地測量技術的基礎。在天文學和太空科學技術中，時間系統是精確描述天體和人造衛星運行位置，及其相互關係的重要基準，也是人們利用衛星進行定位的重要基準。當進行衛星追蹤衛星（SST）任務時，時間系統更形重要，以下先就時間系統進行介紹。

時間包含有「時刻」(Epoch) 和「時間間隔」(Time Interval) 二個概念，「時刻」指發生某一現象的瞬間，在天文學和衛星定位中，與所獲數據對應的「時刻」也稱為「曆元」；而「時間間隔」，則指發生某一現象所經歷的過程始末時刻之差。所以，時間間隔測量，也稱為相對時間測量，而時刻測量相應地稱為絕對時間測量[Seeber, 1993]。

測量時間，即建立時間系統，必須先建立一個測量的基準，包括時間的單位（尺度）和原點（起始曆元）。一般來說，任何一個可以觀察的周期運動現象，只要符合以下要求，都可以用作確定時間的基準。

- 運動應是連續的，周期性的；
- 運動的周期應具有充分的穩定性；
- 運動周期必須具有複現性，即要求在任何地方和時間，都可以通過觀測和實驗，複現這種周期性運動。

當我們選擇的周期運動現象不同，便產生了不同的時間系統。衛星大地測量學用到的重要時間系統包括：

1. 世界時系統 (Universal Time, UT)：為了表達地面觀測與空間固定參考框架的關係，需考慮地球在慣性空間中與時間相依的軸向，此時，適用的時間系統為基於地球自轉現象導得的世界時系統。
2. 動力時系統 (Dynamical Time, DT)：為了精確描述衛星的運動，需要均勻的時間觀測量做為衛星運動方程的獨立變數，適用的時間系統為由地球繞太陽軌道運動所導得的動力時系統。
3. 原子時系統 (Atomic Time, AT)：像衛星雷射測距等需要精確測定訊號傳遞時間，需要一個統一、高解析度、易於各界接受的時間系統，適用的時間系統為由原子物理所導得的原子時系統。

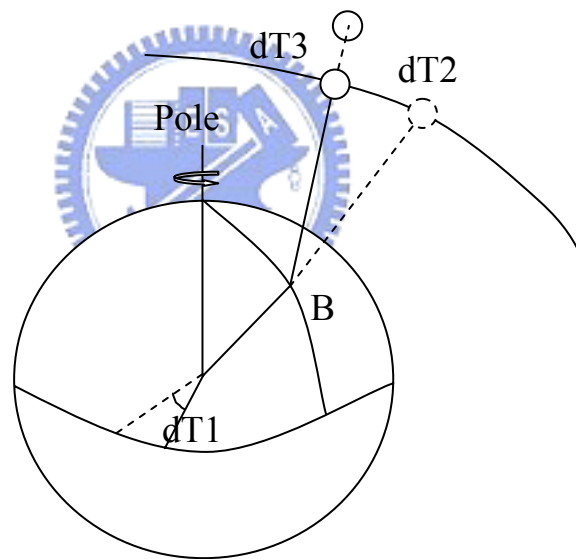


圖 2-1 時間誤差對於衛星大地測量之影響[Seeber, 1993]

由圖 2-1 可知，在衛星大地應用中，相對應於 1 cm 定位誤差的時間誤差量級，如在赤道由地球自轉產生的 1 cm 定位誤差相對應的時間誤差約為 2×10^{-5} 秒 (dT1)；在近地軌道的衛星運動 1 cm 誤差相對應的時間誤差約為 1×10^{-6} 秒 (dT2)；由訊號傳遞時間導得的衛星距離 1 cm 誤差相對應的時間誤差約 1×10^{-10} 秒 (dT3) [Seeber, 1993]。

以下將就進行精密衛星軌道定軌時需要使用的世界時系統、動力時系統、原

子時系統及協調世界時、GPS 時間系統等進行介紹。

2.1.1 世界時系統

地球的自轉運動是連續的，且比較均勻，人類最先建立的時間系統-世界時系統，便是以地球自轉運動為基準。基於觀察地球自轉運動時，所選空間參考點不同，世界時系統又分為恒星時、平太陽時和世界時等。

1. 恒星時 (Sidereal Time, ST)

以春分點為參考點，由春分點的周日運動所確定的時間，稱為恒星時。

春分點連續二次經過本地子午圈的時間間隔為一恒星日，含 24 個恒星小時。所以恒星時，在數值上等於春分點相對於本地子午圈的時角。因為恒星時是以春分點通過本地子午圈時刻為原點計算的，同一瞬間對不同測站的恒星時各異，恒星時具有地方性，所以有時也稱之為地方恒星時。

由於歲差、章動的影響，地球自轉軸在空間的指向不是固定的，春分點在天球上的位置亦然。對於同一曆元，有真北天極和平北天極、真春分點和平春分點之分，相應的恒星時也有視恒星時和平恒星時之分，它們之間的關係及定義如圖 2-2：

$$\text{則} \quad \text{LAST-LMST}=\text{GAST-GMST}=\Delta\psi \cos \varepsilon \quad (2-1)$$

$$\text{GMST-LMST}=\text{GAST-LAST}=\lambda \quad (2-2)$$

λ ：天文經度

$\Delta\psi$ ：赤經章動 (nutation in longitude)

ε ：黃赤交角 (obliquity ecliptic)

(2-1) 式又稱二分點方程式，即 Equation of Equinoxes，但其嚴格轉換見 (2-6) 式。

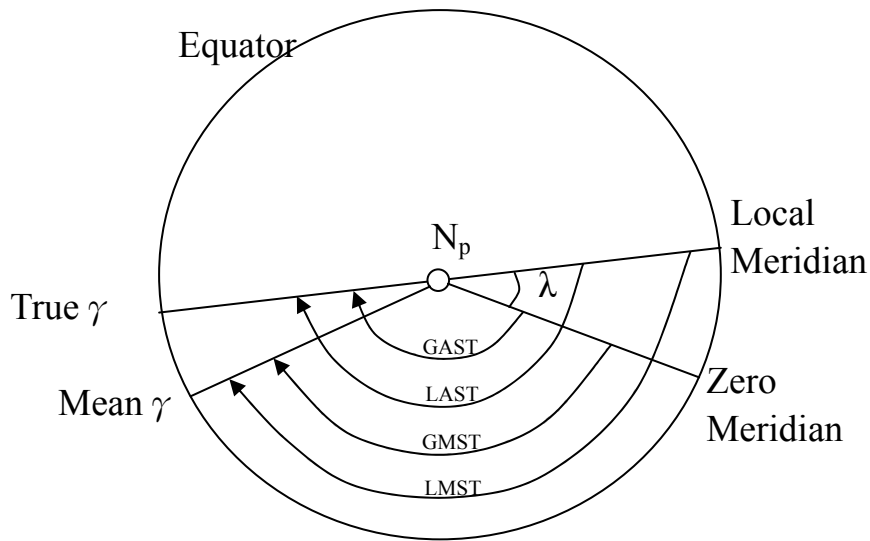


圖 2-2 恒星時的定義

LAST：地方視恒星時 (Apparent Local Sidereal Time)，指真春分點地方時角。

GAST：格林威治視恒星時 (Apparent Greenwich Sidereal Time)，指真春分點的格林威治時角。

LMST：地方平恒星時 (Local Mean Sidereal Time)，指平春分點地方時角。

GMST：格林威治平恒星時 (Greenwich Mean Sidereal Time)，指平春分點的格林威治時角。

恒星時是以地球自轉為基礎，並與地球的自轉角度相對應的時間系統。

其中格林威治視恒星時 (GAST) 可由下列式子求得 [McCarthy, 1996]：

(1) 在 1982 年，Aoki 指出格林威治平恒星時和世界時 (UT) 的關係如下：

$$GMST_{0h_{UT1}} = 6^h 41^m 50^s .54841 + 8640184^s .812866T'_u + 0^s .093104T'^2_u - 6^s .2 \times 10^{-6} T'^3_u, \quad (2-3)$$

其中 $T'_u = d'_u / 36525$ ， d'_u 表示與 J2000.0 時間間隔之日數，即 (UT10h - J2000.0)。

(2) 在格林威治平恒星時的時間段，於 UT1 系統自 0 時至觀測當時之平恒星時之計算如下：

$$GMST = GMST_{0h UT1} + r[(UT1 - UTC) + UTC], \quad (2-4)$$

其中， r 是世界時與恒星時的時間尺度比值

$$r = 1.002737909350795 + 5.9006 \times 10^{-11} T'_u - 5.9 \times 10^{-15} T'^2_u \quad (2-5)$$

UT1-UTC 的值可由 IERS 取得。

(3) 1983 年，Aoki 與 Kinoshita 提出赤經的累積歲差及章動如下：

$$GST = GMST + \Delta\psi \cos \varepsilon + 0''.00264 \sin \Omega + 0''.000063 \sin 2\Omega \quad (2-6)$$

其中 Ω 是月球軌道升交點的平經度 (Mean longitude of the ascending node of the lunar orbit)。

由 VLBI 及 LLR 觀測得知 IAU1980 章動經驗公式存在毫弧秒 (milli-arcseconds) 誤差，所以在 IERS1996 中，Herring 做了一些章動修正如下：

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \Delta\psi_{IAU1980} + \delta \Delta\psi \\ &= \sum_{i=1}^{106} (\Delta\psi)_i \sin(\psi_i) \cong -17''.200 \cdot \sin \Omega \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &\approx \Delta\varepsilon_{IAU1980} + \delta \Delta\varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{106} (\Delta\varepsilon)_i \cdot \cos(\psi_i) \end{aligned} \quad (2-8)$$

2. 平太陽時 (Mean Solar Time, MT)

由於地球公轉軌道為一橢圓，根據天體運動的克卜勒定律可知，太陽的視運動速度是不均勻的，故以視太陽作為觀察地球自轉運動的參考點，不符合建立時間系統的基本要求，故假設平太陽的視運動速度，等於視太陽周年運動的平均速度，且其在天球赤道上作周年視運動。平太陽連續二次經過本地子午圈的時間間隔，為一個平太陽日，而一個平太陽日包含 24 個平太陽小時。與恒星時一樣，平太陽也具有地方性，故常稱為地方平太陽時或地方平時。

3. 世界時 (Universal Time, UT)

以平子夜為零時起算的格林威治平太陽時稱為世界時。

以 GAMT 代表平太陽相對於過格林威治子午圈的時角，則世界時與平太陽時之間的關係為

$$UT = \text{GAMT} + 12(\text{H}) \quad (2-9)$$

世界時與平太陽時的尺度相同，其差別在於原點不同。

世界時系統是以地球自轉為基礎，但由於地球自轉軸有極移現象，且地球的自轉速度因長期減緩現象及短周期變化、季節性變化等，導致速度不均勻。為了彌補地球自轉周期不穩定的缺陷，從 1956 年開始，便在世界時中引入了極移改正和地球自轉速度的季節性改正，得到的 UT1 和 UT2 世界時，而未經改正的世界時，一般表示為 UT0，其關係如下：

$$UT1 = UT0 + \Delta\lambda \quad (2-10)$$

$$UT2 = UT1 + \Delta TS \quad (2-11)$$

這裡， $\Delta\lambda$ 為極移改正，其表示式為

$$\Delta\lambda = \frac{1}{15}(x_p \sin \lambda - y_p \cos \lambda) \tan \varphi \quad (2-12)$$

其中， φ 、 λ 為天文緯度與經度， x_p 、 y_p 為極運動。 ΔTS 為地球自轉速度季節性變化的改正，從 1962 年起，國際上採用的經驗公式為

$$\Delta TS = 0.022 \sin 2\pi t - 0.012 \cos 2\pi t - 0.006 \sin 4\pi t + 0.007 \cos 4\pi t \quad (2-13)$$

t 是白塞爾年歲首回歸年的小數部分

世界時經過極移改正後，仍含有地球自轉速度變化的影響，而 UT2 雖經地球自轉季節性變化的改正，仍含有地球自轉速度長期變化和不規則變化的影響，所以世界時 UT1、UT2，仍不是一個嚴格均勻的時間系統。

2.1.2 原子時 (Atomic Time, AT)

為符合太空科學技術和現代天文學與大地測量學新技術的發展和應用的需

求，從 20 世紀 50 年代，便建立以物質內部原子運動特徵為基礎的原子時系統。

因為物質內部的原子運動，所輻射和吸收的電磁頻率，具有很高的穩定性和複現性，由此建立的原子時，便成為最理想的時間系統。

原子時秒長的定義：位於海平面上的鈹¹³³原子基態二個超精細能級，在零磁場中運動輻射振盪 9192631770 周所持續的時間，為一原子時秒。該原子時秒作為國際單位制（SI）秒的時間單位，嚴格確定了原子時的尺度，而原子時的原點由下式確定：

$$AT=UT2-0.0039(S) \quad (2-14)$$

原子時出現後，許多國家都建立了各自的地方原子時系統，但不同的地方原子時之間存在著差異，因此，國際上利用約 100 座原子鐘，經過比對及數據處理推算出統一的原子時系統，稱為國際原子時（International Atomic Time, TAI）。

原子時是通過原子鐘來守時和授時的，因此，原子鐘振盪器頻率的準確度和穩定度，便決定了原子時的精度，常用的幾種頻率標準和特性如表 2-1 所示。

表 2-1 常用振盪器特性比較[周忠漢等，2002]

特徵值		振盪器的種類			
		晶體振盪器	鈷汽泡	鈹原子束	氫原子雷射器
相對頻率	1 秒	$10^{-6} \sim 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-11} \sim 5 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-11} \sim 5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-13}$
穩定度	1 天	$10^{-6} \sim 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-12} \sim 5 \cdot 10^{-13}$	$10^{-13} \sim 10^{-14}$	$10^{-13} \sim 10^{-14}$
鐘誤差一微秒的時間		1 秒~10 天	1 天~10 天	7 天~30 天	7 天~30 天
相對頻率再現性		不可應用，必須校準	10^{-10}	$10^{-11} \sim 2 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-13}$
相對頻率漂移		$10^{-9} \sim 10^{-11}/\text{天}$	$10^{-11}/\text{月}$	$<5 \cdot 10^{-13}/\text{天}$	$<5 \cdot 10^{-13}/\text{年}$

原子時為高精度的時間基準，普遍地用於精密測定衛星訊號的傳播時間。

2.1.3 動力時（Dynamical Time, DT）

在天文學中，天體的星曆是根據天體動力學理論建立的運動方程而編算的，其中所採用的獨立變量是時間參數 T，T 被定義為動力時。動力時的特點是抽象，

且具有統一時間尺度。根據天體運動方程所對應的參考點不同，動力時可分為二種：

- 太陽系質心動力時 (Barycentric Dynamical Time, TDB)，是相對於太陽系質心的運動方程所採用的時間參數。
- 地球質心動力時 (Terrestrial Dynamical Time, TDT)，是相對於地球質心的運動方程所採用的時間參數，又稱為 TT 或 ET (Ephemeris Time)。

地球質心動力時 (TDT) 的基本單位是國際制秒 (SI) 與原子時的尺度一致。國際天文學聯合會 (IAU) 定義於 1997 年 1 月 1 日原子時 (TAI) 0 時與地球質心動力時 (TDT) 的關係為：

$$TDT = TAI + 32.184(S) \quad (2-15)$$

若以 ΔT 表示地球質心動力時 (TDT) 與世界時 (UT1) 之間的時差，則可得

$$\Delta T = TDT - UT1 = TAI - UT1 + 32.184(S) \quad (2-16)$$

該差值 (ΔT) 可通過國際原子時與世界時的比對而確定，通常載於天文年曆中。

由於衛星軌道方程是基於 Newton 力學，必須在足夠精確的慣性框架中才有效，相應的時間系統也必須是一種特殊的動力時系統。因為地球質心動力時 (TDT) 嚴格均勻的時間尺度和獨立的變量，常被採用來描述衛星的運動。

2.1.4 協調世界時 (Coordinated Universal Time, UTC)

由於以地球自轉為基礎的世界時需求仍廣，但是受地球自轉速度長期變慢趨勢影響，近二十年來，世界時每年比原子時約慢 1 秒，二者之差逐年累加。為了避免原子時與世界時之間產生過大的偏差，從 1972 年開始採用了一種以原子時秒長為基礎，在時刻上儘量接近於 UT1 世界時的折衷時間系統，稱為協調世界時 (UTC)，或簡稱協調時[Seeber, 1993]。

協調世界時的秒長，等於原子時的秒長，採用閏秒 (Leap Seconds) 的方法，使協調時與世界時的時刻相接近。當協調時與世界時的時刻差超過 $\pm 0.9(S)$ 時，便在協調時中引入一閏秒 (正或負)，閏秒通常是在每年的 1 月 1 日 0 時或 7 月

1 日 0 時調整。具體日期由國際地球自轉服務組織 (IERS) 安排並通告。

協調時與國際原子時之間的關係，由下式定義：

$$\text{TAI}=\text{UTC}+1^s \times n \quad (2-17)$$

其中 n 為調整參數，其數值由 IERS 發布。

UT1 (Universal Time 1) 是表徵地球自轉的時間系統，它與 UTC 之間的差不超過 0.7 sec。由於地球自轉速遠的不均勻性，UT1 也是不均勻的，在應用並不方便。但是由於 UT1 具有表徵地球自轉的性質，所以在很多應用中必須使用 UT1。

為了服務用戶，IERS 在 Bulletin D 公告 UT1-UTC 數值，以使用戶可輕易地由 UTC 得到相應的 UT1。在 IERS 的 Bulletin D 91 號公告內載明自 2005 年 3 月 17 日 0 時起，UT1-UTC 數值為 -0.6，直到新的公告變更為止。

2.1.5 GPS 時間系統 (GPST)

全球定位系統 (GPS) 為了精密導航的需要，建立了專用的時間系統--GPST，由 GPS 主控站的原子鐘控制，屬原子時系統，其秒長與原子時相同，但與國際原子時具有不同的原點。

GPST 和 TAI 在任一瞬間均有一常量偏差，為

$$\text{TAI}-\text{GPST}=19(\text{S}) \quad (2-18)$$

將式 2-17 代入，得 GPST 與 UTC 之間的關係：

$$\text{GPST}=\text{UTC}+1^s \times n-19(\text{S}) \quad (2-19)$$

其中 n 是自 1961 年 1 月 1 日起累計閏秒，例如，在 2002 年 1 月 1 日之 $n=32\text{sec}$ ，其後隨著時間的累計，二者之間的差別將表現為秒的整位數。而 GPST 與 UTC 的時刻，則定於 1980 年 1 月 6 日 0 時一致。

本文的研究和資料處理使用 J2000.0 曆元為時間基礎。J2000.0 曆元定義為儒略日 2451545.0 是基於 (UTC) JD，等於 (TDT) JD 為 $2451545.0 + (\text{TDT} - \text{UTC})$ 。

2.2 坐標系統

在衛星追蹤衛星技術應用中，坐標系統的採用及不同坐標系統間的轉換是很重要的，因為所運用的儀器設備、載具軌道、SST 觀測量（包括衛星的位置、距離）等都需要基於某類坐標系統，同時還需要進行坐標系統之間的轉換加以整合、計算，例如衛星運動軌道方程是應用慣性坐標系統 (CIS)，地球重力場模型、地面追蹤站坐標應用地固坐標系統 (CTS)，衛星上酬載儀器也有自身的觀測系統和坐標參考系統，如加速度儀的儀器固定坐標系統 (IFX)、衛星固定坐標系統 (SBF) 等。此外，衛星軌道坐標系統 (RTN) 也被用於特定擾動力的分析。為了應用 SST 資料進行地球重力場推算，不同的坐標系統之間必需進行轉換，例如 GPS 衛星精密星曆採用 CTS 系統，LEO 衛星位置也應用 CTS 系統，當從衛星動力學角度分析 LEO 衛星的運動時就不可避免的要涉及 CIS 與 CTS 系統之間的轉換。

2.2.1 天球坐標系統 (Celestial Coordinate System)

天球坐標系統係架構於以地球質心 M 為中心，半徑 r 為任意長度的天球之坐標系統，其原點在地心， Z 軸指向北天極 P 、 X 軸指向春分點 γ ， Y 軸垂直於 X 軸、 Z 軸，組成右手坐標系。在天文學中，通常把天體投影到天球的球面上，並用球面坐標系統來表示或研究天體的位置及天體間的關係。

天球，是指以地球質心 M 為中心，半徑 r 為任意長度的一個假想球體，其示意圖如圖 2-3：

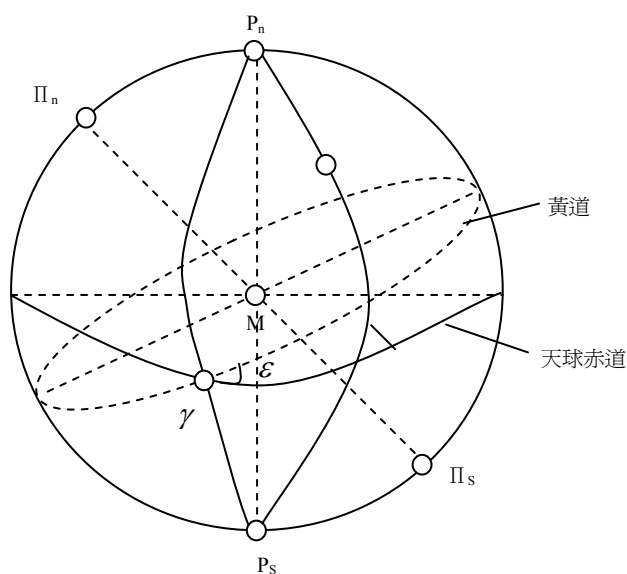


圖 2-3 天球示意圖

其相關定義如下：

天軸：地球自轉軸的延伸直線。

天極：天軸與天球的交點 P_n 和 P_s 稱為天極，其中 P_n 為北天極， P_s 為南天極。

天球赤道面：通過地球質心 M 並與天軸垂直的平面。

天球赤道：天球赤道面與天球相交的大圓。

天球子午面：包含天軸並通過地球上任一點的平面，稱為天球子午面。

天球子午圈：天球子午面與天球相交的大圓。

時圈：通過天軸的平面與天球相交的大圓。

黃道：地球公轉的軌道面與天球相交的大圓。

黃赤交角 (ε)：黃道面與赤道面的夾角，稱為黃赤交角，約 23.5° 。

黃極：通過天球中心，且垂直於黃道面的直線與天球的交點稱為黃極。其中靠近北極的交點，稱為北黃極 (Π_n)；靠近南天極的交點，稱為南黃極 (Π_s)。

春分點 (γ)：當太陽在黃道上由天球的南半球向北半球運行時，黃道與天球赤道的交點。

2.2.1.1 天球坐標系統定義

任一天體 s 的位置，在天球坐標系中，可用天球直角坐標系和天球球面坐標系兩種形式描述，如圖 2-4 所示，

在天球直角坐標系中，天體 s 的坐標表示為 (x,y,z) 。其定義是：原點位於地球質心 M ； Z 軸指向天球北極 P_n ； X 軸指春分點； Y 軸垂直於 XMZ 平面，與 X 軸和 Z 軸構成右手坐標系統。

在天球球面坐標系統中，天體 s 的坐標表示為 (α, δ, r) 。其定義是：原點位於地球質心 M ；赤經 α 為含天軸和春分點的天球子午面與過天體 s 的天球子午面之間的夾角；赤緯 δ 為原點 M 至天體 s 的連線與天球赤道面之間的夾角；向量長度 r 為原點 M 至天體 s 的距離。

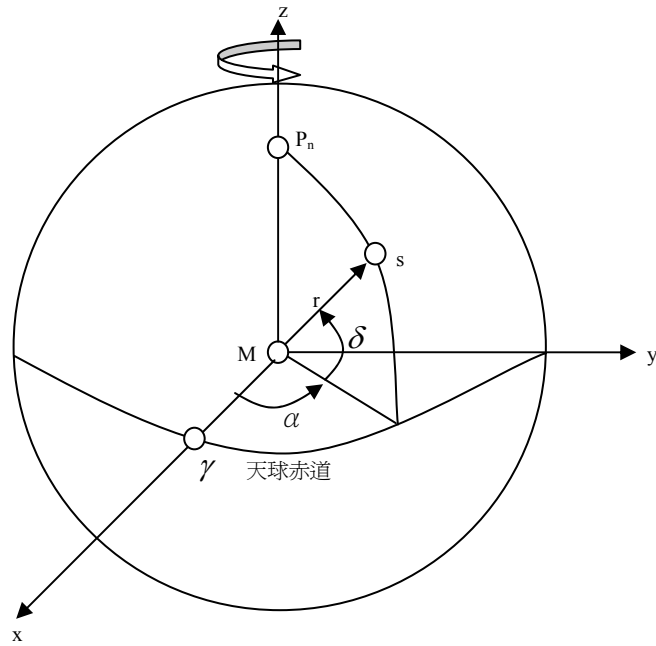


圖 2-4 天球直角坐標系與天球球面坐標系

天球直角坐標系和天球球面坐標系間之轉換關係如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \delta \cdot \cos \alpha \\ \cos \delta \cdot \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

或

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha &= \arctan \frac{y}{x} \\ \delta &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (2-21)$$

由於天球直角坐標系與天球球面坐標系和地球的自轉無關，對於描述天體或人造地球衛星的位置和狀態尤其方便，所以應用都很普遍。

2.2.1.2 歲差及章動 (Precession and Nutation)

由於實際的地球接近於一個赤道隆起的橢球體，在日月引力和其他天體引力對地球隆起部分作用下，地球繞太陽運轉時，自轉軸的方向無法保持不變，進而使得春分點在黃道上緩慢西移，這種現象稱為歲差。在歲差影響下，地球自轉軸

繞北黃極產生緩慢的旋轉，從北天極上方往下看為依順時鐘方向旋轉，因而使北天極以同樣的方式在天球上繞北黃極產生旋轉。

地球自轉軸的方向變化，主要是由日月引力共同作用的結果，其中月球的引力影響最大，太陽引力的影響約為月球引力影響的 0.46 倍。如果月球的引力及其運行的軌道都是固定不變，同時忽略其他行星引力的微小影響，那麼日月引力的影響，將使北天極繞北黃極，以順時鐘方向緩慢的旋轉，構成如圖 2-5 所示的一個圓錐面。

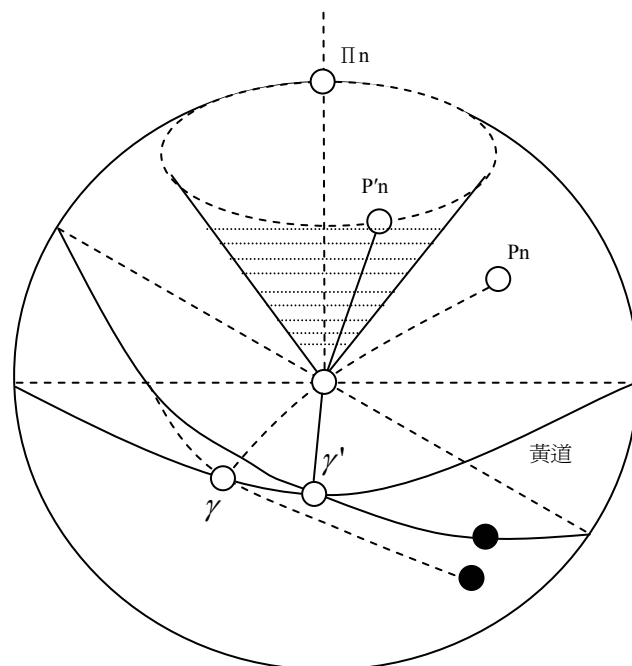


圖 2-5 歲差影響

這時，在天球北天極的軌跡，近似構成一個以北黃極為中心，以黃赤交角為半徑的小圓。在這個小圓上，北天極每年西移約 50.371 秒，週期大約 25800 年，這種規律運動的北天極，稱為瞬時平北天極，而與之相應的天球赤道和春分點，稱為瞬時天球平赤道和瞬時平春分點。

將觀測時的北天極定義為瞬時北天極（或真北天極），而與之相應的天球赤道和春分點，稱為瞬時天球赤道和瞬時春分點（或真天球赤道和真春分點），則在實際上，因太陽和其他行星引力的影響，月球的運行軌道以及月、地間的距離不斷變化，瞬間北天極將繞著瞬時平北天極旋轉，大致成橢圓形軌跡，其長半徑

約 9.21 秒，短半徑約 6.85 秒，週期約 18.6 年。這現象稱為章動，如圖 2-6。

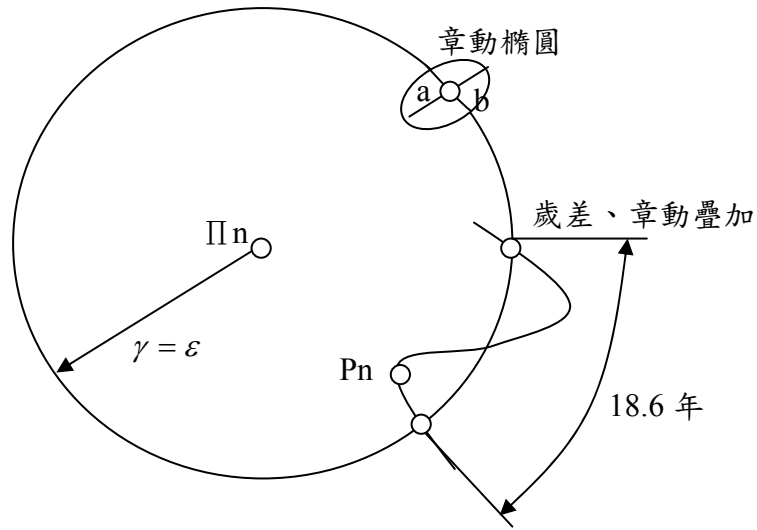


圖 2-6 章動影響

2.2.2 慣性坐標系 (Conventional Inertial System, CIS)

為了建立一個與慣性坐標相近的坐標系，以便應用牛頓力學定律來研究衛星轉動規律，國際大地測量協會 (International Association of Geodesy, IAG) 和國際天文學聯合會 (International Astronomical Union, IAU) 決定，以 1984 年 1 月 1 日後啟用的標準天球坐標系為慣性坐標系，其坐標軸的指向，是以 2000 年 1 月 1 日 15 時 TDB 為標準曆元 (J2000.0) 的赤道和春分點所定義，以該時刻地球之瞬時自轉軸和地心至瞬時春分點的方向，經該瞬時的歲差及章動改正後，分別作為 Z 軸和 X 軸的指向，由此所構成之天球坐標系。

表 2-2 CIS 定義

原點	地球質量中心	
參考平面	J2000.0 曆元地球赤道面	
坐標軸	X _{CIS}	J2000.0 曆元平春分點
	Y _{CIS}	與 X _{CIS} 和 Z _{CIS} 構成右手系
	Z _{CIS}	J2000.0 曆元平天極
系統	Cartesian 直角坐標系	

為了精確計算衛星坐標，需將慣性坐標系的衛星坐標換算到觀測瞬間的瞬時平慣性坐標系統，即做歲差改正；再將瞬時平慣性坐標系的坐標，轉換到瞬時慣性坐標系統，即做章動改正，其作業如下：

1. 歲差改正

歲差改正為將慣性坐標系的坐標軸加以旋轉與瞬時平慣性坐標系統一致，令 $(x, y, z)_{CIS}$ 和 $(x, y, z)_{Mt}$ 分別表示慣性坐標系和瞬時平慣性坐標系，其間關係為：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{Mt} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CIS} \quad (2-22)$$

$$P = R_3(-z)R_2(\theta)R_3(-\zeta)$$

其中

$$R_3(-z) = \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$R_3(-\zeta) = \begin{bmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z, θ, ζ 分別為與歲差有關的三個旋轉角。

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.6406161^\circ T + 0.0000839^\circ T^2 + 0.0000050^\circ T^3 \\ z &= 0.6406161^\circ T + 0.0003041^\circ T^2 + 0.0000051^\circ T^3 \\ \theta &= 0.5567530^\circ T + 0.0001185^\circ T^2 + 0.0000116^\circ T^3 \end{aligned} \quad (2-24)$$

其中 $T = (t - t_0) / 36525$ 是標準曆元 t_0 至觀測曆元 t 的儒略世紀數。

2. 章動改正

經過章動改正將瞬時平慣性坐標系轉換至瞬時慣性坐標系，求得衛星瞬間位置。

令 $(x, y, z)_t$ 表示瞬時慣性坐標系統之坐標，則它與 $(x, y, z)_{Mt}$ 間之關係為

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t = N \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{Mt} \quad (2-25)$$

$$N = R_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\varepsilon)$$

$$R_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon - \Delta\varepsilon) & -\sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon - \Delta\varepsilon) & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$R_3(-\Delta\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ 0 & -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

式中， ε 、 $\Delta\varepsilon$ 、 $\Delta\psi$ 分別為黃赤交角、交角章動及赤經章動。

在地球自轉軸章動影響下，黃道與赤道的交角通常表示為

$$\varepsilon = 23^{\circ}26'21.448'' - 46.815''T - 0.00059''T^2 + 0.001813''T^3 \quad (2-27)$$

而關於 $\Delta\varepsilon$ 、 $\Delta\psi$ ，則可由國際天文學聯合會所採用的最新章動理論，在天文年曆中查得相關係數值，計算相應的 $\Delta\varepsilon$ 、 $\Delta\psi$ 值。

由此,根據 (2-3) 和 (2-4) 式可得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_I = N P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CIS} \quad (2-28)$$

有時採用 Cartesian 直角坐標系來表示衛星的運動不夠方便，吾人亦可採用 Kepler 六個軌道元素表達衛星運動。兩者本質一致，可以進行嚴格的數學轉換，詳見 6.3 節 (6-41) 式。

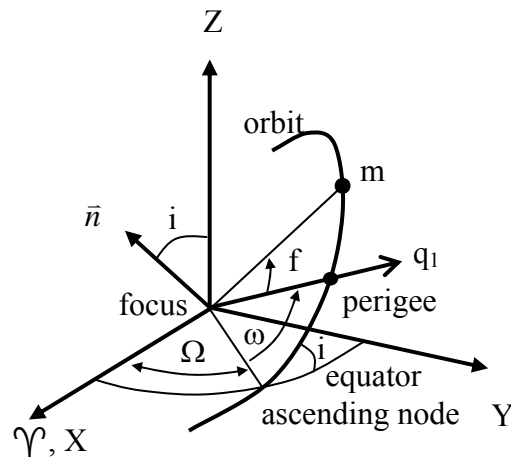


圖 2-7 Kepler 軌道元素與慣性坐標系

如圖 2-7，Kepler 六個軌道元素為：

長半徑 (Semi-major Axis) : a

偏心率 (Eccentricity) : e

軌道傾角 (Inclination) : i

昇交點赤經 (Right Ascension of the Ascending Node) : Ω

近地點幅角 (Argument of Perigee) : ω

平近點角 (Mean Anomaly) : M

真近點角 (True Anomaly) : f

2.2.3 地固坐標系統 (Conventional Terrestrial System, CTS)

地固坐標系統是為了描述地面觀測站位置所建立與地球體聯結的坐標系統，依表達方式又可分為直角坐標系及大地坐標系，其關係如圖 2-8。

直角坐標系定義為原點 O 與地球質心重合， Z 軸指向地球北極， X 軸指向格林威治子午線與地球赤道交點， Y 軸垂直於 XOZ 平面構成右手坐標系。

表 2-3 CTS 定義

原點	地球質心	
參考平面	平地球赤道面	
坐標軸	X_{CTS}	位於平赤道面內，指向起始子午線
	Y_{CTS}	與 X_{CTS} 和 Z_{CTS} 構成右手系
	Z_{CTS}	平北極
系統	Cartesian 直角坐標系	

大地坐標系定義為地球橢球的中心與地球質心重合，橢球的短軸與地球自轉軸相合，大地緯度 ϕ 為過地面點的橢球法線與橢球赤道面的夾角，大地經度 λ 為過地面點的橢球子午面與格林威治平大地子午面之間的夾角，橢球高 h 為地面點沿橢球法線至橢球面的距離。

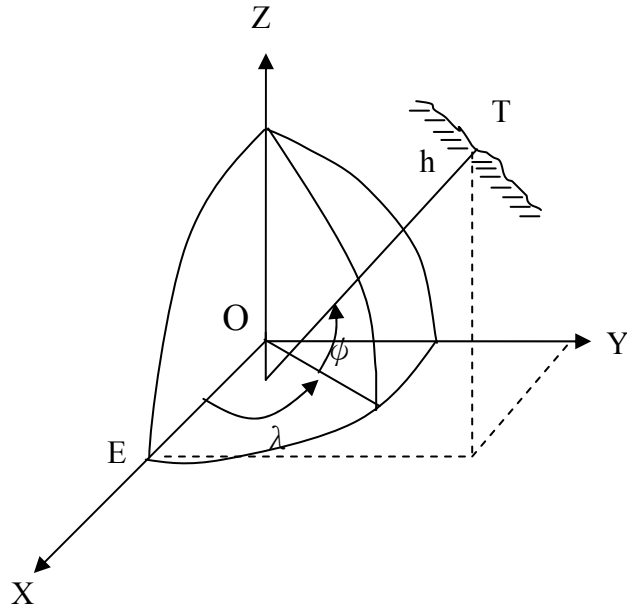


圖 2-8 直角坐標系與大地坐標系關係

於地面任一點 T 的地固坐標系坐標，均可表示為 (X, Y, Z) 與 (ϕ, λ, h) ，其間的換算關係如下：

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= [N(1 - e^2) + h] \sin \phi \end{aligned} \quad (2-29)$$

其中， N 為橢球的卯酉圈曲率半徑， e 為橢球的第一偏心率， a 、 b 分別表示橢球的長半徑和短半徑

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-30)$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

經由下式，直角坐標可轉換為大地坐標：

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h} \right)^{-1} \\ \lambda &= \tan^{-1} \frac{Y}{X} \\ h &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \phi} - N \end{aligned} \quad (2-31)$$

其中 ϕ 、 h 需漸近疊代計算。

由於地球自轉軸相對地球體的位置是隨時間變化的，地極點在地球上的位置亦隨時間變化的，這種現象稱之為地極移動，簡稱極移。而觀測瞬間的地球自轉軸所處的位置為瞬時地球自轉軸，相應的極點稱為瞬時極。

地極在地球表面上的運動，主要包含兩種週期性的變化，一種週期約一年，振幅約為 0.1 秒的變化；另一種張德勒（Chandler）週期變化，週期約 432 天，振幅約 0.2 秒的變化。

瞬時極的位置及運動可透過一平面直角坐標系來描述，於通過地極的某一平均位置（平極 \bar{P}_n ），且與地球表面相切的平面上定義直角坐標系（如圖 2-9），令原點與平極 \bar{P}_n 相合， x_p 軸指向格林威治平均天文台， y_p 軸指向格林威治零子午面以西 90 度的子午線方向，任一曆元 t 的瞬時極 P_n 的位置，可表示為 (x_p, y_p) ，其數值由 IERS 推算後定期公布。

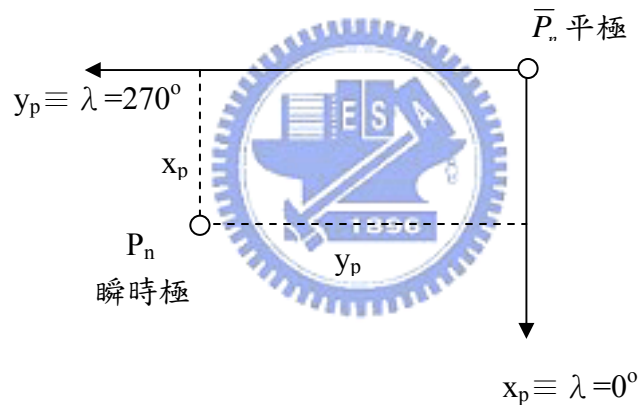


圖 2-9 地極平面直角坐標系

國際天文學聯合會與國際大地測量協會於 1967 年建議採用義大利 Carloforte、美國 Gaithersburg、Ukiah、前蘇聯 Kitab、日本 Mizusawa 等 5 個緯度服務站的 1900 至 1905 年的平均緯度所確定的平均地極位置作為基準點，稱為國際協議原點（Conventional International Origin, CIO），與之相應的地球赤道面稱為平赤道面。地固坐標系統採用 CIO 做為協議地極（Conventional Terrestrial Pole, CTP），並以之為基準點；瞬時地固坐標系是以瞬時極為基準點之坐標系。

今以 $(XYZ)_{CTS}$ 和 $(XYZ)_t$ ，分別表示同一點位於地固坐標系和觀測曆元 t 的瞬時地固坐標系的坐標，則其間之關係如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t \quad (2-32)$$

$$M = R_2(-x_p)R_1(-y_p)$$

由於地極坐標為微小量，M 可由下式表之

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

由於地固坐標系與慣性坐標系之原點均位於地球質心，原點相同；瞬時地固坐標系與瞬時慣性坐標系的 Z 軸指向相同；二瞬時坐標系 X 軸的指向不同，其間夾角為春分點的格林威治視恒星時 (GAST)，則瞬時慣性坐標系與瞬時地固坐標系間之轉換關係，可表示為：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_t = R_3(GAST) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t \quad (2-34)$$

$$R_3(GAST) = \begin{bmatrix} \cos(GAST) & \sin(GAST) & 0 \\ -\sin(GAST) & \cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將 2-35 式代入 2-33 式，可得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS} = MR_3(GAST) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_t \quad (2-35)$$

再將 2-28 式代入，可得到 CTS 與 CIS 間的轉換公式如下

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CTS} = SNP \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CIS} \quad (2-36)$$

$$S = R_2(-x_p)R_1(-y_p)R_3(GAST)$$

2.2.4 衛星軌道坐標系 (RTN)

為了便於對特定擾動力（如大氣阻力主要集中在 T 方向）進行分析，吾人常將作用於衛星的力分解到衛星軌道坐標系統 (RTN) 下進行分析。此外，在

RTN 系統下，還便於對各項誤差進行分析，如利用 HL-SST 模式研究恢復地球重力場時，徑向（R 方向）的軌道誤差佔非常重要地位。

表 2-4 RTN 定義

原點	衛星質心	
參考平面	當地切平面	
坐標軸	R	徑向，背向地球質心（radial）
	T	切向，也稱沿軌向（transverse 或 along-track）
	N	軌道面法向（normal 或 cross-track）與 R 和 T 構成右手系
系統	Cartesian 直角坐標系	

CIS 與 RTN 坐標系的轉換公式如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CIS} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-u) \begin{bmatrix} R \\ T \\ N \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

$$u = w + f$$

其中 u 為緯度幅角（argument of latitude），參考圖 2-7。

2.2.5 衛星固定坐標系統（Spacecraft Body Fixed System, SBF）

衛星固定坐標系主要作用是定義衛星在慣性空間中的姿態，同時建立各相關酬載儀器坐標系與慣性系的關係，其定義如表 2-5。例如星載加速度儀是固定在衛星質量中心處，其軸系與衛星固定坐標系平行，在轉換加速度儀觀測量到 CIS 或 CTS 時都需要使用 SBF 作為中間過渡坐標系統。

表 2-5 SBF 定義[GFZ homepage]

原點	衛星質量中心	
參考平面	衛星設計時的主平面	
坐標軸	X_{SBF}	沿衛星運動方向，Roll 軸
	Y_{SBF}	沿 Pitch 軸
	Z_{SBF}	沿 Yaw 軸
系統	Cartesian 直角坐標系	

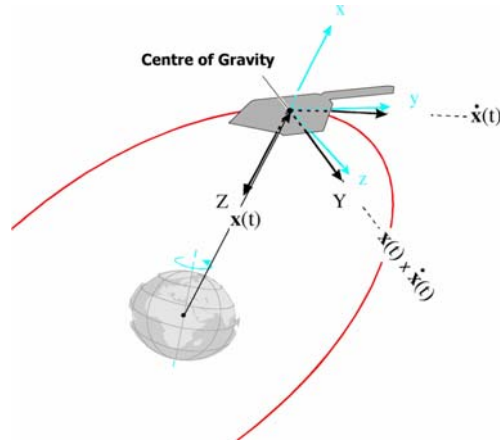


圖 2-10 SBF 與 IFX 坐標系統[GFZ homepage]

如圖 2-10 所示，CHAMP 衛星固定坐標系為 $(X_{SBF}, Y_{SBF}, Z_{SBF})$ ，其坐標軸的指向分別為 X_{SBF} -滾動方向、 Y_{SBF} -俯仰方向、 Z_{SBF} -偏航方向；而 $(X_{IFX}, Y_{IFX}, Z_{IFX})$ 是星載加速度儀坐標系。IFX 與 SBF 之間可透過衛星的設計參數進行轉換，其轉換公式如下：

$$X_{SBF} = R_1(-90^\circ)R_3(90^\circ)X_{IFX} \quad (2-38)$$

SBF 與 CIS 之轉換公式見 4.5 節 (4-60) 式。

2.2.6 儀器固定坐標系統 (Accelerometer Instrument Fixed System, IFX)

衛星上的酬載儀器之觀測是基於儀器固定坐標系統 (IFX)，如星載加速度儀在實施觀測時，其觀測量是基於該酬載的 IFX 坐標系。以 CHAMP 所載 STAR 加速度儀為例 (與 GRACE 所載 SuperSTAR 的定義相同)，其坐標系的定義如表 2-6。

表 2-6 IFX 定義[GFZ homepage]

原點	儀器質量中心位置	
參考平面	加速度儀參考面	
坐標軸	X_{IFX}	與衛星的 Z_{SBF} 軸平行，但反向
	Y_{IFX}	平行於衛星的 X_{SBF} 軸
	Z_{IFX}	與 X_{IFX} 和 Y_{IFX} 構成右手系 (與衛星的 Y_{SBF} 軸平行，但反向)
旋轉角	Φ	X_{IFX} 軸旋轉角
	Θ	Y_{IFX} 軸旋轉角
	Ψ	Z_{IFX} 軸旋轉角
系統	Cartesian 直角坐標系	

星載加速度儀觀測量是基於 IFX 系統來量測作用於衛星本體的非保守力加速度，經由衛星的設計參數可以轉換為 SBF 系統下各方向的加速度分量，再聯合恆星敏感器的姿態測量資料可以化算到 CIS 系統下各方向的加速度分量，進而分解為 RTN 系統下之資料，得到 RTN 各方向的非保守力加速度分量。接下來就可以方便地分析軌道徑向誤差或各非保守擾動力對衛星的影響，從而得到比較直接的分析結果。



