

透過電腦輔助建構動態學習環境之研究

研究生：郭亮偉

指導教授：全任重 博士

陳明璋 博士

國立交通大學理學院網路學習碩士專班

摘 要

數學教師在教學的過程中常會遇到許多的教學內容，在傳統的教學環境中無法讓學習者利用較為直觀的方式進行學習，然而在電腦及網路發達的現在，正可利用此一工具補充傳統教學模式的不足。

本研究將透過探討 van Hiele 的幾何思考層次、不同學習理論與 CAL 的關連性，及利用電腦軟體在數學學習上應用的實例。並藉由這些理論來實際發展數學教材，以及依據所使用軟體的特性，分別探討不同數學問題在教學上的實例及可行性。

在第三章中將利用 Cabri Geometry 及 Cabri Java 可在網頁中輕易呈現動態幾何的性質，並透過網頁相關而適當的連結，探索三角形中 M-configuration 這個問題。第四章中將透過 Cabri Geometry、Cabri Java 及 Cabri 3D 將歐氏幾何與非歐幾何（上半平面及球面幾何）產生連結，希望讓學習者可透過相關網頁的呈現，由歐氏幾何進入非歐幾何的世界。所有的研究結果均透過網頁的呈現，網址為 <http://163.19.108.5/~liang/>。

Constructing Dynamic Learning Environment Using Computer

student : Liang-Wei Guo

Advisor : Jen-Chung Chuan

Ming-Jang Chen

Degree Program of E-learning
College of Science
National Chiao-Tung University

Abstract

Mathematic teachers often encounter the problem that lots of the content cannot be learned by students in an ocular way. Nowadays, computers and network can be used as the supplement to the traditional learning environment and solve the problem.

The study will discuss the "van Hiele five-phase learning model", the correlation between learning theory and CAL, and the examples of using computer software in mathematical learning. Teaching material for mathematics is developed from these theories. Then the feasibility and instances of mathematical instruction are discussed according to the software used.

In chapter 3, we explore the problem of "M-configuration in the triangle", Cabri Geometry and Cabri Java are adopted. Dynamic geometry can be easily presented on the website and guided learning can be correlated through appropriate hyperlinks. In chapter 4, we show how Euclidean Geometries and Non-Euclidean Geometries (The Upper Half-Plane Model and Spherical Geometry) are connected by the use of Cabri Geometry, Cabri Java and Cabri3D. Learners can enter the domain of Non-Euclidean Geometries from Euclidean Geometries through the presentation of related hyperlinks. All results of study are presented on <http://163.19.108.5/~liang/>.

誌 謝

在研究所學習期間有許多需要感謝的人，首先要感謝指導教授全任重老師的照顧與提攜，在我有疑惑或遭遇困難的時候，老師總是能澄清我的疑慮，並鼓勵我、使我增加信心，老師豐富的學識涵養指引我學習的方向，老師對知識的渴求與不斷自我成長的態度，更是我效法的目標。

另一位要感謝的老師是陳明璋老師，在專班學習期間，老師將他的發現及成果不吝的與同學們分享，使我得以增進知識。更感謝老師不吝指出我論文及學習上的不足，使我有改進的機會。還要感謝口試委員莊祚敏教授對論文的建議。

再來要感謝許多專班的學長姐：龍榕淑、邱建偉、楊哲青…等。在學習上給予我鼓勵及協助。感謝學校的同事：文彥、祥宇及大嫂淑崙協助英文摘要的書寫，瑋懋更提供許多適時的協助。

最後，特別要感謝我的女朋友怡婷及我的家人，在我最需要幫助的時候，從旁協助，沒有他們的支持與鼓勵，我是無法完成這篇論文的。

曾幫助過我的人太多，無法一一詳述，在此僅向他們敬上最大的感謝之意。

目 錄

中文摘要.....	ii
英文摘要.....	iii
誌謝.....	iv
目錄.....	v
表目錄.....	vii
圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究方法.....	2
第二章 文獻探討.....	4
2.1 學習理論.....	4
2.1.1 van Hiele的幾何思考層次.....	4
2.1.2 數學學習理論與CAL.....	7
2.2 可運用在電腦輔助學習上的軟體.....	12
2.2.1 動態幾何系統 (Dynamic Geometry System).....	13
2.2.2 電腦代數系統 (Computer Algebra System).....	14
2.2.3 其他軟體.....	15
第三章 M-configuration的發現與性質探討.....	17
3.1 名詞解釋.....	18
3.1.1 座標系.....	18
3.1.2 Conjugates.....	20
3.1.3 Perspective triangles射影三角形.....	23
3.2 Construction M-configuration.....	24
3.2.1 探索.....	24
3.2.2 M-configuration作圖.....	25
3.2.3 等價作圖.....	29
3.3 M-configuration延伸性質.....	32
3.4 M-configuration與三角形的心.....	34
第四章 利用Cabri3D初探非歐幾何.....	36
4.1 幾何基本元素.....	36
4.2 幾何性質作圖.....	40
4.3 歐氏幾何定理在上半平面及球面上的型態.....	44
4.4 歐氏幾何定理在非歐幾何上不成立的例子.....	48
第五章 討論與建議.....	50
5.1 結果.....	50

5.2	討論.....	50
5.3	建議.....	51
參考文獻.....		53



表目錄

表 3- 1 三角形五心的三線座標.....	19
表 3- 2 三角形三心的Homogeneous Barycentric Coordinates.....	19
表 3- 3 三角形的心Isogonal conjugate.....	20

圖目錄

第一章 序論

圖 1- 1 研究架構圖.....	3
-------------------	---

第二章 文獻探討

圖 2- 1 電腦輔助學習的三環關係圖，引自邱貴發（民 83）	4
圖 2- 2 數學解題流程圖.....	13

第三章 動態探索代數與幾何

圖 3- 1 M-configuration.....	18
圖 3- 2 Trilinear coordinates.....	18
圖 3- 3 三角形五心.....	19
圖 3- 4 Homogeneous Barycentric Coordinates.....	19
圖 3- 5 Isogonal conjugate.....	20
圖 3- 6 外心垂心Isogonal conjugate.....	20
圖 3- 7 Locus of isogonal conjugate.....	20
圖 3- 8 Isotomic conjugate.....	21
圖 3- 9 Gergonne 和 Nagel Isotomic conjugate.....	21
圖 3- 10 Locus of isotomic conjugate.....	21
圖 3- 11 Harmonic conjugates.....	22
圖 3- 12 Ceva conjugate.....	22
圖 3- 13 Anticevian triangle of a point.....	23
圖 3- 14 P1-ceva conjugate to P2.....	23
圖 3- 15 Perspective triangles.....	23
圖 3- 16 探索 1.....	24
圖 3- 17 探索 2.....	24
圖 3- 18 探索 3.....	25
圖 3- 19 M-configuration作法 1.....	25
圖 3- 20 外心垂心Isogonal conjugate1.....	25

圖 3- 21 H' 、A、B、C共圓	26
圖 3- 22 M-configuration作法 1 之證明	26
圖 3- 23 M-configuration作法 2.....	27
圖 3- 24 M-configuration作法 2 之證明	27
圖 3- 25 M-configuration作法 3.....	28
圖 3- 26 M-configuration作法 3 之證明	28
圖 3- 27 類M-configuration.....	29
圖 3- 28 等價作圖 1	29
圖 3- 29 等價作圖 1 作法.....	30
圖 3- 30 等價作圖 2	30
圖 3- 31 等價作圖 2 作法.....	30
圖 3- 32 等價作圖 3	31
圖 3- 33 等價作圖 3 之作法.....	31
圖 3- 34 M-configuration proposition1	32
圖 3- 35 M-configuration proposition2	32
圖 3- 36 M-configuration proposition3	32
圖 3- 37 M-configuration proposition4	33
圖 3- 38 M-configuration proposition5	33
圖 3- 39 M-configuration proposition6	33
圖 3- 40 M-configuration proposition7	34
圖 3- 41 $X(92)$ (Kimberling, 1998)	34
圖 3- 42 Clawson point $X(19)$	35
圖 3- 43 $X(63)$: Isogonal conjugate of $X(19)$	35
圖 3- 44 $X(92)$: Isotomic conjugate of $X(63)$	35

第四章 利用 Cabri3D 初探非歐幾何

圖 4- 1 line上半	36
圖 4- 2 line球面	36
圖 4- 3 u-segment上半	37
圖 4- 4 u-triangle上半	37
圖 4- 5 triangle球面	37
圖 4- 6 u-circle上半	38
圖 4- 7 circle球面	38
圖 4- 8 u-center上半	39
圖 4- 9 perpendicular at point上半	40
圖 4- 10 perpendicular at point球面	40
圖 4- 11 perpendicular from point上半	40
圖 4- 12 perpendicular from point球面	40

圖 4- 13 perpendicular to two lines上半	41
圖 4- 14 perpendicular to two lines球面	41
圖 4- 15 two limiting parallel u-lines上半	42
圖 4- 16 two tangents to u-circle from point上半	42
圖 4- 17 two tangents to u-circle from point球面	42
圖 4- 18 Angle bisector上半	43
圖 4- 19 Angle bisector球面	43
圖 4- 20 蝴蝶定理.....	44
圖 4- 21 蝴蝶定理上半.....	44
圖 4- 22 蝴蝶定理球面.....	44
圖 4- 24 Pappus' Theorem	45
圖 4- 25 Pappus' Theorem上半	45
圖 4- 26 Pappus' Theorem球面	45
圖 4- 28 Pascal Theorem	45
圖 4- 29 Pascal Theorem上半	45
圖 4- 30 Pascal Theorem球面	45
圖 4- 31 Desargues' Theorem	46
圖 4- 32 Desargues' Theorem上半	46
圖 4- 33 Desargues' Theorem球面	46
圖 4- 34 Radical center	46
圖 4- 35 Radical center上半	46
圖 4- 36 Radical center球面	46
圖 4- 37 Isogonal conjugate	47
圖 4- 38 Isogonal conjugate上半	47
圖 4- 39 Isogonal conjugate球面	47
圖 4- 40 ex_Isogonal conjugate	47
圖 4- 41 ex_Isogonal conjugate上半	47
圖 4- 42 ex_Isogonal conjugate球面	47
圖 4- 43 Isotomic conjugate	47
圖 4- 44 Isotomic conjugate上半	47
圖 4- 45 Isotomic conjugate球面	47
圖 4- 46 Miquel	48
圖 4- 47 Miquel上半	48
圖 4- 48 Miquel球面	48
圖 4- 49 共圓垂足.....	48
圖 4- 50 共圓垂足上半.....	48
圖 4- 51 共圓垂足球面.....	48
圖 4- 52 Symmetry midpoint	49

圖 4- 53 Symmetry midpoint上半	49
圖 4- 54 Symmetry midpoint球面	49
圖 4- 55 Fermat point	49
圖 4- 56 Fermat point上半	49
圖 4- 57 Fermat point球面	49



第一章 緒論

本章主要在說明研究的動機、目的及研究方法。

1.1 研究動機

傳統的數學學習是由教師在教室藉由一支粉筆及三吋不爛之舌外加大量的試題演練，就可以分析、講述課本中的定理，而學生總是被動的聽取知識，針對定理、公式進行大量而重複的運算，缺乏主動學習的能力及忽略概念之間的關連性，在題型稍作變換時即無法利用先前的知識來解決問題。有鑑於此，九年一貫的目標強調學生能夠擁有帶著走的能力，在九年一貫數學領域綱要中所要培養學生的能力有：

- (1) 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。
- (2) 學習應用問題的解題方法。
- (3) 奠定下一階段的數學基礎。
- (4) 培養欣賞數學的態度及能力。

其中在幾何教學上，教育部（民 92）將圖形與空間的瞭解分為知覺性的瞭解、操弄性的瞭解、構圖性的瞭解、論述性的瞭解。要達到論述性的瞭解首先要有充分的知覺性的瞭解、操弄性的瞭解，才能得心應手。另外，幾何的啓蒙活動應該藉由探索、研究與討論生活中的形體，充分使用學生的幾何概念，熟練地描述與表徵周遭的環境。這些實驗、觀察、探索的活動需要不斷地安排在不同學習層次中，探索形體的要素、發現性質、找出形體間的關係，讓學生透過有趣的實作學習活動更了解幾何世界，促進他們幾何思維的能力。

由於近年電腦科技的發達使得數學的實作學習活動除了紙筆運算、摺紙活動（幾何作圖）、模型教具外，還可利用動態幾何系統與電腦代數系統來進行數學實驗。NCTM 指出數學的教與學當中，科技產品--計算機與電腦是不可或缺的，它影響了數學教學的方式，也提高了學生的學習能力，NCTM 也建議各層次的老師為了教導數學技能與概念，而讓學生達到有效的學習，都應該使用科技的工具（NCTM,2000），NCTM 並提到電腦繪圖技術使我們能探討代數與幾何的關連性。

我國在「中小學資訊教育總藍圖」中更明白訂下四年指標，欲達成「教師均能運用資訊科技融入教學，教學活動時間達20%」之目標，並期望由老師帶動學生、學生影響家長，進而提升全民運用資訊能力與學習素養。藉由資訊融入教學，學生可以大量獲得資訊，進而達成學生主動學習的目標（教育部，民90）。從建構主義觀點：有意義的學習並非由直接的動機或是環境壓力所驅使的，而是由內在心裡與外在環境的交互影響而發生的心裡結構上的改變。透過資訊融入教學，及教

師適當的引導可以達到學生主動學習的目標。

另外，有許多的研究指出，利用電腦視覺化的增強有利學生在幾何上的學習，如 Bishop(1989)覺得電腦產生的圖像能對學生的視覺化產生一個激勵的影響。Clements 和 Battista(1992)也建議在幾何學習上可採用適當的電腦軟體來輔助學習。Hansen(1998)提到 21 世紀「電腦」將是日常生活的一部份，而且各階段的教學將廣泛運地在電腦環境為基礎下去進行。他也認為「因為電腦程式很著重在視覺化的使用，因此視覺的思考必須學習。」因此電腦在學童視覺化發展中式很重要的工具。

我國在九年一貫能力指標所要培養國人的十大能力指標中：「欣賞、表現與創新」；「生涯規劃與終身學習」；「尊重、關懷與團隊合作」；「規劃、組織與實踐」；「運用科技與資訊」；「主動探索與研究」；「獨立思考與解決問題」，也與電腦有著密不可分的關係，因此我們可以透過科技、電腦及網路的幫助讓學生從教學活動中思考、解決問題，以達到教學的目標。

本研究希望透過數種電腦軟體營造動態學習環境，期能提供高互動性、高傳播性、可重複性以及可呈現動態模擬與圖形變換能力，藉此引導學生進行數學猜測與思考。

1.2 研究目的

依據 Cabri geometry 及 Cabri3D 這兩套軟體的特性，透過探討 van Hiele 的幾何思考層次及學習理論在電腦教學上的應用，依據理論基礎選定適當的學習內容在網頁上建構動態幾何學習環境，讓學習者可以透過網站上的引導進行有系統幾何學習，進而主動進行問題探索及提升問題解決能力。

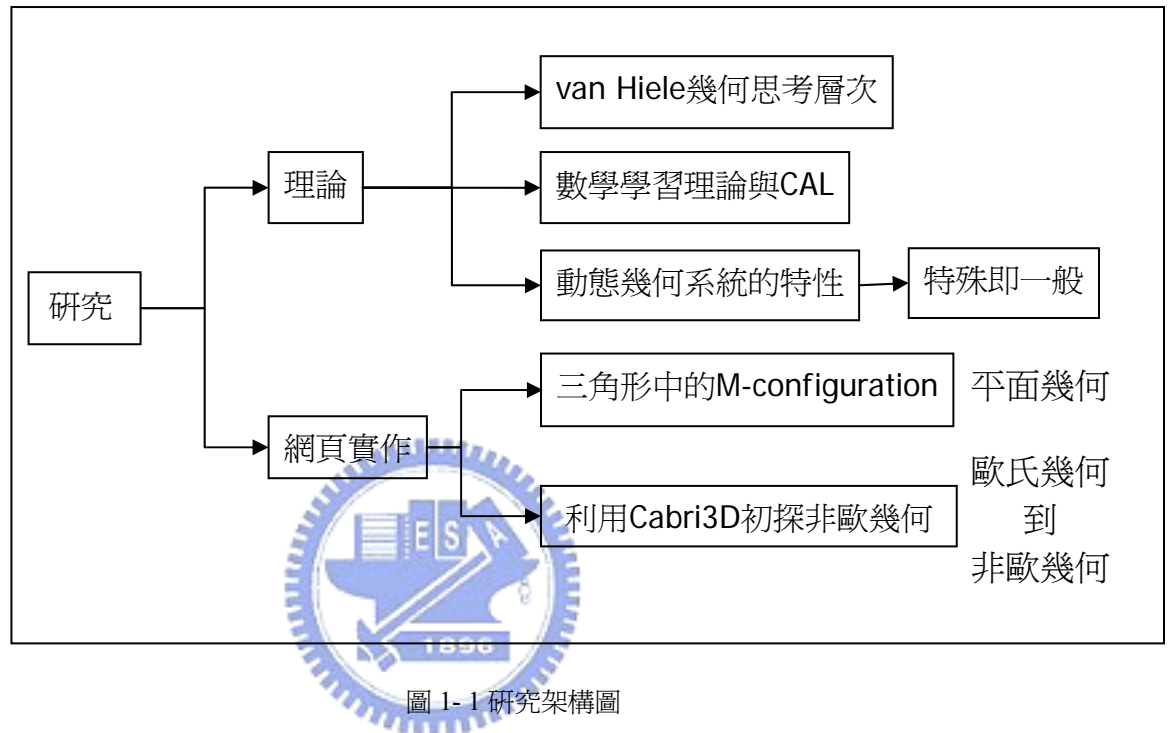
1.3 研究方法

- 1、參考 van Hiele 的幾何思考層次與學習理論在電腦輔助學習上的應用，並依此作為設計動態幾何學習環境的依據。
- 2、參考目前網路上已有的電腦輔助教學模組，並依據所要呈現的主題進行配合適當的軟體進而設計教學內容。
- 3、將所選定的主題與使用軟體配合，在網頁上呈現動態的學習素材。
- 4、而在網頁的實作上
 - (1) 利用 Cabri Geometry 及 Cabri3D 兩套軟體製作所要呈現的幾何內容。
 - (2) 使用 Frontpage 製作網頁，透過 Cabri Java 展示由 Cabri Geometry 所產生的*.fig 檔。若有需要逐步解說作圖過程，或者有需要解說模擬過程，都需另外在網頁裡添加恰當的參數。將 Cabrijava.jar 傳送在相同的子目錄下。
 - (3) 使用 Frontpage 製作網頁，利用參數<embed src="*.cg3" width="600"

height="500" align="right"></embed>將 Cabri3D 的檔案*.cg3 嵌入網頁中。

- (4) 在網頁中解說作圖過程，並給予適當的提示。
- (5) 將網頁依相關性，作適當的連結。
- (6) 在網頁上提供適當的學習單引導學習。

研究架構圖：



第二章 文獻探討

邱貴發(民83)認為電腦輔助學習的核心概念是指在某個文化社會環境中，以領域知識為主幹，運用合適的學習理論及電腦科技輔助該領域知識的學習。根據這個概念，學習理論和電腦科技都是依據領域知識而選用的，此三者關係如下圖：

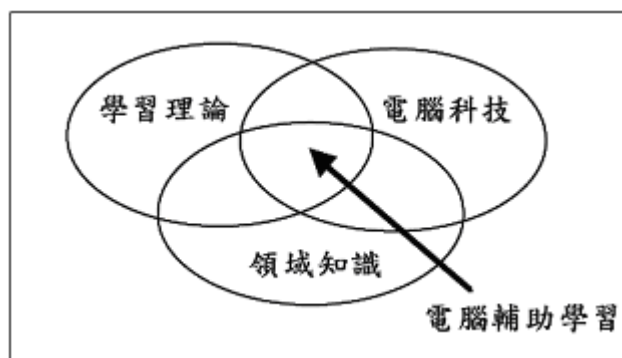


圖 2-1 電腦輔助學習的三環關係圖，引自邱貴發（民 83）

本章將就學習理論在電腦輔助學習上的原則與應用，在電腦輔助數學學習上可使用的軟體以及本研究使用的軟體加以討論。

2.1 學習理論

2.1.1 van Hiele 的幾何思考層次

van Hiele 幾何思考層次理論在1957年由荷蘭數學教育學家Dina van Hiele-Geldof 和她的丈夫Pierre Marie van Hiele 所提出，他們將學生的幾何思考分成五個層次：(1)視覺、(2)分析、(3)非形式演繹/抽象、(4)演繹、(5)嚴密系統。層次和層次之間是不連續的。

有些學者用層次0 到層次4 來表示這五個層次，如: Burger & Shaughnessy, 1986；Crowley, 1987；Fuys, Geddes, & Tischler, 1988；Hoffer, 1983。另有學者用層次1 到層次5 來表示這五個層次，如: Clements & Battista,1991；Mayberry, 1983；Usiskin, 1982；Wirsup,1976。

本研究採用 van Hiele 在 1986 針對 5 個層次提出的說法：

(1) 層次 1 視覺(Visualization)：

學童可藉由圖形的輪廓由視覺及觀察來辨別、比較及分類形體（如三角形、長方形、角、平行線等。），幾何形體對此階段的學童而言是整體的物件，不含有組成成分及屬性，也無法使用語言一般化特定形體。可以透過實體操作，如旋轉與平移，來辨別圖形的異同，可以使用非數學的術語，知道各種圖形，但是卻無法瞭解這些圖形的真正意義。

(2) 層次 2 分析(Analysis)：

此層次的學童可具備圖形辨識特徵的能力，依據圖形的觀察組成圖形的基本要素分析幾何概念，但不能辨別出圖形之間的相關關係（如：可藉由四邊相等來辨別菱形，但卻無法連結菱形、正方形、平行四邊形、長方形之間有何關係），可利用實際的操作對一群的圖形，發現共有的性質及特性，並藉此特性使用文字描述圖形。

(3) 層次 3 非形式演繹(Informal Deduction)：

此層次的學童，可以針對兩個形體之間的關係加以說明，能形成並使用圖形的定義（如：平行四邊形的對邊平行對角相等），並接受圖形的等價關係，能以非正式的討論取理解相關的幾何關係，但仍不能掌握公理化演繹的意義。

(4) 層次 4 形式演繹(Formal Deduction)：

此層次的學童可在一個公設系統下能用演繹邏輯證明定理，並建立相關定理的結構，可經由抽象推理的過程來證明幾何問題，也能理解一個定理的正逆定理的差異性，即充分必要條件的差異（如：正方形四邊相等，但四邊相等的四邊形不一定是正方形。）

(5) 層次 5 嚴密系統(Rigor)：

此層次的學生可以在不同的公理系統中建立定理，並分析比較這些系統的特性（如歐式幾何與非歐幾何等），此層次的幾何是抽象的。學生可以建立一組公設的一致性與獨立性，以及不同公設集的等價性，甚至能創造一個幾何的公設系統。據 van Hiele(1986)的說法，此層次只是理論的需要，在教學上並沒有實用的價值。

根據他們的研究發現，這些思考層次的發展是循序漸進的，學生之思考能力到達某一層次之後，才可以依序發展至下一層次。為了促使學生從一個思考層次發展到另一個較高的思考層次，他們在幾何教學上也提出了「五階段學習模式」，依序為學前諮詢(Information)、引導學習方向(Guided Orientation)、解說(Explication)、自由探索(Free Orientation)、統整(Integration)等五個階段。透過這五個階段，學生藉此可以提升其思考層次。此五階段分述如下：

第一階段 學前諮詢、訊息階段(Information)：

教師說明教材、資料及學習領域，使學生易於掌握。並藉由觀察與發問瞭解學生的先備知識，以作為教學的參考。

學生需熟悉所要操作的領域，如：分辨例子與非例子。

第二階段 引導學習方向(Guided Orientation)：

教師透過適當的選擇教材以有次序、系統的呈現給學生，並爲了讓學生更加瞭解學習的內容，應包含設計的簡短課題用以指導學生參與經過仔細規劃的討論活動。

學生藉由資料來深入探究，並了解整個學習的方向，熟悉幾何概念所抽離的東西。

第三階段 解說、明示階段(Explication)：

教師將教材系統的呈現給學生，使學生瞭解得以自己的語言表達幾何概念，並引導學生將幾何概念提升到理解的層次。

學生覺察到關係，並組織自身的直覺知識，嘗試以話語表達，學習伴隨著對象事物而來的數學專門語言。

第四階段 自由探索(Free Orientation)：

教師選擇適當的教材及幾何問題，鼓勵學生思考與解答這些幾何問題，透過提示不同的思考方向，讓學生得以反思各種問題的解法，並適時介紹所需之概念及解題過程。

學生在不同問題（方式）上遭遇更多複雜且有許多步驟的課題，當他們試著用已學過的概念及關係解決問題時，除了經驗的獲得外，更可以在不同主題中增加許多明確的關連性，並可利用這些關連性來解決更多的問題。

第五階段 統整、整合(Integration)：

教師鼓勵及啓發學生理解及應用幾何知識，強調利用數學結構作爲思考的模式，並提供學生將已知道的東西之「整體的概念」來幫助統整過程，並注意不可以提出新的或不一致的概念來加入考慮的條件。

學生將所學過的題材作一摘要，來統整自己的知識，透過內化吸收且統一宗旨與關係，加以轉變成一套新的思考模式。

2.1.2 數學學習理論與 CAL

Jonassen(2000)將電腦與學習分成三個階段：

- 1、從電腦學知識(learning from computer)：CAI
 - (1) 訓練與練習軟體(drill and practice)
 - (2) 指導式軟體(tutoring system)
 - (3) 智慧指導式軟體(intelligent tutoring system)
- 2、學電腦知識(learning about computer)：
- 3、用電腦學知識(learning with computer)：心智工具(Mindtools)，誘發學習者從事批判性思考與高層次學習的心智夥伴(intellectual partners)。電腦應用來完成下列事項：
 - (1) 電腦支援知識建構(knowledge construction)
 - (2) 電腦支援探索活動(explorations)
 - (3) 電腦支援做中學(learning by doing)
 - (4) 電腦支援對話學習(learning by conversing)

電腦是支援反思學習(learning by reflecting)的心智夥伴，以下透過各種學派來討論電腦輔助學習的原則，及透過該學派在電腦輔助學習的應用原則。

2.1.2.1 行為主義

行為主義的主要論點，藉由刺激與反應的模式來改變學生的行為，行為主義認為知識獨立於學習者的外在環境中，可以將之結構化及模式化，藉由教學的過程教給學習者。

編序教學理論是行為主義中的一個學派，將教材經過分析成許多的小單元，將各小單元按先後層次關係加以組織，由淺入深，最後呈現完整的教材，讓學生得以個別學習。在學習過程中要給予學生適當的刺激，正確者給予正增強，錯誤時必須改變反應。

根據以上原則，行為主義應用在電腦輔助學習的應用（沈中偉，民 84）：

- 1、設計前先確定學習目標、學習者的特性及先備知識。
- 2、將每個大單元分成數個小單元，每次只教導一個小單元。
- 3、教材安排由簡而難循序漸進。
- 4、回饋或增強之方式應適合學習者的年齡、程度與需求。
- 5、當學習者達到教學目標時給予正增強，且給予之增強應讓學習者無法預

料或不固定，以維持學習動機。且回饋應是積極性與親和性的。

- 6、對於正確的回答應給予立即回饋，對於錯誤的回答應給予訊息性的回饋或改正性的回饋，藉由提示鼓勵學習者更深入地思考。
- 7、配合教材與學習者的特性，給予集中式練習或分散式練習，以達精熟教材的目的。

2.1.2.2 認知學派的學習理論

認知心理學是研究人類思考之路程，人類如何獲取知識、儲存知識即使用知識為研究核心。認知心理學者認為學習者的內部認知結構與建構知識的過程雖然不易觀察，但他們才是學習成功的關鍵。

Piaget 將認知發展看成一個不斷同化與調適的歷程，此歷程導致認知結構的重組。張春興（民 80）廣義而言，認知心理學者重視學習者的「心智活動」與「知的歷程」；狹義而言，認知心理學者探討人類頭腦這個黑盒子在處理訊息時，是如何經由感官注意、編碼、儲存與檢索訊息，以及如何建構認知結構。

認知心理學在電腦輔助學習課程軟體設計與發展的原則如下：（沈中偉，民 84）

- 1、瞭解學習者的思維模式與先備知識，以便於教材設計適合學生的程度。
- 2、由於短期記憶的容量有限，為避免負荷過重，應提供功能選單(menu)與圖示(icon)，以避免記憶很多操作指令。
- 3、一個畫面只呈現一個重要的概念或資訊，重點部分以不同的顏色將其凸顯出來，以吸引學習者。
- 4、呈現重要教材內容，速度不能太快，需留點時間讓學習者編碼或組織新訊息。
- 5、以反覆練習的方式，使學習者能夠將新訊息予以編碼後，轉化成內部表徵，以利儲存至長期記憶中。
- 6、組織教材內容，使其具有連慣性，使學習者進行深層處理(deep processing)，以利於記憶保留(retention)更長久。
- 7、學習者可依自己的需求控制學習順序與速度。
- 8、回饋應提供訊息性的功能，以利學習者進一步思考。
- 9、根據 Paivio 的雙重編碼理論，資訊以視覺心像與語意編碼和儲存，因此應提供學習者多重的資訊檢索管道，如圖表、圖形、影像、動畫、音效等視聽覺元素，以增加學習者選擇性注意及內在連結的建立。
- 10、呈現多媒體教材前，可以使用「前導組體」(advance organizer)，將新教材與舊知識相聯結，使得新教材的學習變得有意義，以引起學習動機與促進記憶與學習。

2.1.2.3 建構主義的學習理論

有意義的學習並非由直接的動機或是環境壓力所驅使的，而是由內在心裡與外在環境的交互影響而發生的心裡結構上的改變。建構主義相信先備知識在一個學習者的學習過程中扮演必要的角色，老師與同儕之間的社交活動也會影響學習者知識的建構，老師在建構教學中，扮演的角色不是支配者而是引導者，引導學生進行建構的學習。

蔡今中（2001）使用 Black 及 McClintock 於 1996 年提出的 the Interpretation Construction Design Model (ICON model)。提以建構為取向的科學教學的八大原則：

- 1、 真實情境活動中的觀察 (observations in authentic activities)：科學教學中呈現的一些事實，往往遠離了日常生活，以致於學生常需要使用使用記憶的方式，來背誦科學的原則。Pooh 主張科學教育的問題需定義更寬鬆，以致於學生可以藉由日常生活的觀察，來加強學生學習科學的想法，並利用這些想法去解決日常生活中會遇到的問題。
- 2、 解釋性建構 (interpretation construction)：建構主義思想中的知識不是被動的接受，而是藉由認知主動積極建立的概念。更進一步，隨著老師的引導，可以建立藉由自我審查尋找證據的能力。科學家對於科學的解釋漸漸改變為科學不是從自然界中發現的，改為一種由人類自行創造來解釋自然現象的方法。
- 3、 情境化先備知識 (contextualizing prior knowledge)：學生在接受正式的科學教育前已建立了一套非親身經歷的科學知識，科學教育者通稱為迷失概念。所以科學教師需要建立可讓學生探索或應用先備知識的內容，才能診斷出他們的迷失概念。
- 4、 認知衝突 (cognitive conflict)：由矛盾或反常的資料所引起的認知衝突情境是挑戰學生迷失概念所必須的條件，而且矛盾事件的發生是讓學生進行概念轉變時的一個步驟。
- 5、 認知學徒制 (cognitive apprenticeship)：認知學徒制的流程為樹立典範→指導訓練→消失，老師需要在學生建構科學知識時給予真正的引導，建構主義一方面將學習視為個人知識的建構，另一方面又強調由教師引導的認知學徒制的重要性。
- 6、 合作學習 (collaboration)：學習應被視為學生參與經由老師、同儕和其他學生協商的有意義建構的社交活動，為數眾多的教育學者強調合作學習對學生知識建構的重要性，從建構主義的觀點，教育學者應鼓勵學生在發現，闡釋和情境化中可採合作式。建構主義科學教師需要與學生商談經驗和解釋，然後經由知識的共同建構達到有說服力的解釋。老師也需要說服學生接受科學概念的價值 (Newton et al ., 1999)。

- 7、多元闡釋 (multiple interpretation)：科學並不代表真相，所以科學家可以從不同但合理有系統的看法來解釋同一自然現象，可由不同的理論觀點來解釋或解決科學問題。在經過不同理論觀點的環境之中，學生可了解每個理論的限制與與能力，然後塑造起對科學更具真正的印象，建構教育學者在讓學生於科學中由更完整的想法圖像中可提供多元的評價模式。
- 8、多元呈現 (multiple manifestations)：一個合理的科學概念，可以同時應用在許多情況下。因此，教育學者也建議當學習一個新的科學概念時，呈現它的“豐富性”是學生概念轉變的必要條件之一。

將建構主義理論用來設計多媒體電腦輔助學習環境的原則，可歸納如下（沈中偉，民84），

- 1、設計豐富而真實的情境或模擬情境，鼓勵學習者主動而積極地詮釋知識，而不是被動地獲得知識。
- 2、應給予學習者適當的操控權，由學習者自行控制學習的順序、內容、速度，以利學習者主動操弄、探索及重組知識。

Atkins（1993）提出設計多媒體電腦輔助學習環境的原則：

- 1、有文字、聽覺、或視覺提示之適應活動（Orientation activities），使學習者專注於新資訊，促使新資訊能在學習者的短程記憶中保持久一點。
- 2、前導組體的概念或錨點的概念在素材一開始就引入，使學習者意識到新資訊即將出現。
- 3、有忠告聲明（advice statements）、幫助工具（help facilities）、建議等後設認知策略，以使學習者獲得更有效率的參與及資訊處理。
- 4、經常安排作決定的時機，以及直接相關的遊戲或模擬，這些結果要立即可見。
- 5、使用「比較與縮小（compare and contrast）」、「觀察與確認（observe and identify）」之活動，期使學習者分析、綜合、總結、描述、解決問題。
- 6、提供學習者多樣的資訊來源，以便探索與發現。
- 7、學習者能來回於現象的符號表徵（symbolic representation of phenomena）與現實生活的指示對象（the real-life referent）。
- 8、期望學習者透過實例與自身經驗的反應，能建立假設（hypotheses）、闡釋（explanations）、定義（definitions）、類目（categories）、規則（rules）等等。

- 9、在電腦模擬時，提供學習者能控制的變因。
- 10、提供學習者能犯錯並從中獲得學習的電腦環境。
- 11、和「專家」互動。

2.1.2.4 發展WEB介面教學環境

綜合以上各種學派的理論，發展電腦輔助學習是一個新興且具潛力的課題，並且由於近年來網際網路發展迅速，知識取得容易，學習者可以透過網路迅速獲得大量的資料，從原本的單一電腦系統轉變成透過 WEB 介面的學習環境。

（周倩,蔡今中,2003）指出在傳統課程的發展：Tyler (1949)的 model 是最早被大家認可的，主要是四個基本點來探討課程的發展：教學目標、教學經驗、教學結構、教學評量。後來 Taba (1962)提出一個更複雜卻更有效的課程發展 model。共有七個階段：定義教學對象和他們的需求、確認教學的目標、選定學科內容的範圍、組織學科內容的順序與結構、選定呈現的方法和媒體、設計評量的活動、施行具有信效度的評鑑。

發展 Web-based 的課程：由於 Web-based 遠距學習的特殊性和傳統課程發展架構，將上述的七個階段分別作探討。

- 1、定義教學對象和他們的需求：除了對學生的認知、情意、心裡層面的瞭解外，還要瞭解他們計算能力及學習環境的本質。另外在設計介面的時候，可使用註冊的機制來區隔瀏覽者與學習者的差異，利用電子郵件可以達到互動的機制，最後可試著提供不同型態的課程給不同的學生，以建立一個以學生為中心的教學方式。
- 2、確認教學的目標：將課程的出處從教師轉到學生，教師在 Web-based 的學習環境中，轉變為隱性的教師。Relan 和 Gillani 指出一個在以學生為中心的 Web-based 課程中，學生彼此的交談的時間大於教師講授的時間，而且可以使學生自己決定學習方向。
- 3、選定學科內容的範圍：Web 是較為開放性、不固定，因此在製作內容時應使用多向性、節點、連結和網路的概念，在課程豐富的情況下，可讓學生的學習持續下去。但是在使用連結的時候，Draves (2000)指出在學生使用這些連結的時候，教師需提供一些引導給學生，至少需分三個分類：Critical , Important , Nice 等如此學生可視時間許可自行學習。Chou 和 Lin (1998)這種引導會變成知識圖的形式有這種架構後，可幫助學生在可成內容中更快速有效的去尋找與學習。
- 4、組織學科內容的順序與結構：由於 hypertext 允許使用者擁有最大的自由度以非線性的方式去探索內容，因此教師和設計者就必須去組織 Web 課

程的順序，使得課程能夠最適合學生原有的知識和技能但不失學習彈性，再經過適度的引導，學生才不致迷失在過多的資訊中。一般而言在設計時可使用 next 的方式，並設計必要瀏覽的部分，選取最重要而基本的概念當成索引，次一級（延伸性）的概念再透過連結的方式呈現，課程內容就像是一件件少量的巢狀結構，經實驗證實是有效的方法。

- 5、選定課程呈現的方法和媒體：Kearsley (2000)認為使用圖示、圖表、標示等的一些圖片對大部分的線上課程教材是非常有益處的。同時可結合聲音、影像的技術，設計者至少需要有多媒體製作的基本能力，加上其他的技術支援，才能將想法完整呈現。
- 6、設計評量的活動：Bugbee (1996)用電腦學習，適合使用電腦來作評量。Harrison 和 Bergen (2000)建議在設計線上家庭作業時，必須準備好一系列很詳細的回家作業，包含了研讀、回答問題和問題解決，還包含了教材的線上討論，學生可在討論中進步且是持續的進步。
- 7、施行具有信效度的評量：引導一個具有信效度的 Web-based 課程評量，在科目內容、課程、媒體及管理上需要專家來協助，以能為持續更新及修訂版建立一個合理的工作行程。

2.2 可運用在電腦輔助學習上的軟體

數學教學及學習中有很重要的一部份是證明，而學生最不容易接受的也是證明，在教學上的順序要先引導學生：察覺不同→猜測問題→大量觀察→視覺證明→邏輯上的證明。國中部分的證明大部分是以幾何證明為主，是證明教學上比較容易下手的。

在一般的數學教室中進行幾何的教學時，往往會產生一些困擾，對許多學生而言，課本上有許多的性質、定理在課堂上所能呈現的僅僅只是繪製幾個圖形後，就要學生相信這些性質，對尚未進入 van Hiele 形式演繹層次的學生而言這是很難接受的結果。但若是在教學的時候適當導入軟體使用，可藉由大量的觀察及實驗，經由適當的引導甚至讓學生自行察覺性質，這樣的教與學方式在提升學生的思考層次上有很大的幫助。

教師在教學中可導引學生使用 Polya 的解題策略：1、特殊化，2、一般化，3、類化，4、歸納，在問題尚未明朗之前或是無法找到規則之前，可將問題特殊化至較明顯的例子中，先進行猜測，接下來利用猜測假設的性質進行驗證。接下來針對較為一般性的性質進行猜測，重複進行驗證到可歸納的結論。由歸納法引向演繹法；特例引向一般證明。

將上述的流程畫成流程圖如下：

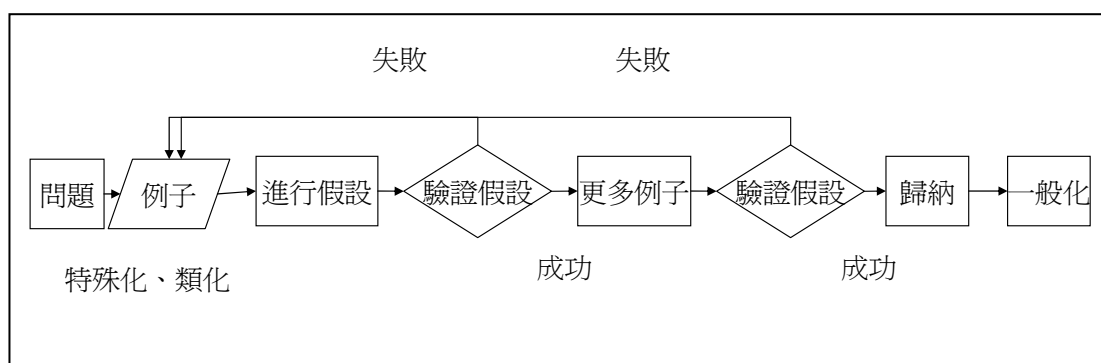


圖 2-2 數學解題流程圖

上述的流程在傳統的教學模式中，較不易得到的是大量的訊息，而在電腦輔助教學中卻是很容易達到的部分，一般來說電腦軟體在數學教學上的運用可分為三類：1、動態幾何系統，2、電腦代數系統，3、其他軟體...等。以下將針對不同軟體的特性逐一討論。

2.2.1 動態幾何系統（Dynamic Geometry System）

幾何的教學通常均偏重在形式的演繹及證明上面，但在幾何概念的建構以及從觀察、歸納而發現幾何性質的過程卻常常被忽略，幾何的許多題材也因動態圖形的不易顯示，而需要高度想像力才能被瞭解。動態幾何發展的主要目的是讓學習者可以較為直觀的方法，利用尺規作圖的方法來作圖，與傳統紙筆方式的尺規作圖最大的差別是在：當圖形完成後，學習者可利用滑鼠拖曳點或圖形，可讓圖形產生變化，也可以觀察軌跡還有動態的變化，藉由動態觀察來獲得平時不易獲得的大量觀察資料。

動態幾何的特性可歸納如下：

1、尺規作圖及圖形的可變異性：

市面上有許多的繪圖軟體，其主要目的是設計與繪圖，並未考慮到幾何教學的需要，當圖形畫出後圖形就固定了，無法方便的操作及變化圖形。動態幾何軟體使用尺規作圖的原理，所有利用圓規直尺可做出的圖形，都能利用幾何軟體提供的作圖工具便利的製作出精確的圖形，並利用這些工具的組合，製作複雜的幾何圖形。利用滑鼠對完成的圖形，進行拖曳來改變形狀或移動位置，或是使用幾何變換的功能來觀察圖形的變化，使幾何軟體可以進行臆測、探索幾何性質的工具。

2、動態連續變化：

使用上述的拖曳功能將圖形或構成元素改變位置、形狀或幾何變換時，其改變是連續且漸進的。透過圖形、度量連續性的變化，來進行幾何猜

測與實驗，可以得到傳統幾何作圖所無法得到的大量數據及變化，進而發現幾何的不變性。並可以利用此種變化特性得到直觀的結果，藉此來習得更多的幾何性質。

3、特殊即一般（保持結構性）：

幾何證明的過程中，所畫出的圖形是一個特殊的圖形，但在證明的過程中卻一直將它當成一般的圖形，在證明完畢之後，我們也會認定所證明的是具有相同已知條件的任意圖形所擁有的性質。但許多學生對於證明過程中，圖形所代表的一般化性質並不瞭解。若將圖形改變形狀後，可能就認為是不同的問題。在動態幾何環境下所做的幾何圖形，因使用者可任意移動圖形的構成元素，而圖形雖在構成元素改變相對位置或改變形狀後，但幾何結構不變，所以得到的是一般化的圖形，但仍保持圖形的特徵性質。而這種能保持圖形特徵性質的一般化幾何圖形，不只能幫助學生瞭解具有這種特徵圖形在證明過程的代表性，也是在教學中提供學生觀察、比較、臆測、驗證幾何圖形性質的重要工具。

4、記錄作圖過程：

較強的動態幾何軟體，通常具有紀錄操作或作圖過程的功能，在幾何作圖的過程中，可以將作圖歷程記錄下來，當下次作圖的工具。只要選出工具，訂出基本元素，就利用軟體作圖，省去重新作圖的過程，此過程得到的圖形同樣是一般化的圖形，透過許多的基本工具，除了可以將原本複雜的作圖過程簡化，更能透過作圖過程檢驗出學生解題思考歷程，於事後進行分析學生解題及作圖的思考歷程，以利教學的進行。

5、重複試驗：

當幾何軟體製作出一般化的圖形後，部分軟體可透過 JAVA SCRIPT 的幫助讓圖形在網路上呈現，不但可以快速的傳遞，更可以讓學生進行重複的試驗，不會有檔案被學習者更改而無法重複使用的問題。

目前國內較常使用的動態幾何軟體有 Geometer's Sketchpad，Cabri Geometry，目前 cabri 的公司又發展出 Cabri3D，可使用尺規作圖的方法來繪製 3D 的圖形，可以除了跟 Cabri Geometry 一樣可以進行拖曳，還可以旋轉座標軸或切換不同視角以進行觀察。本研究將藉由上述動態幾何系統的特性，以 Cabri Geometry 及 Cabri3D 這兩種軟體，來發展動態幾何的學習題材。

2.2.2 電腦代數系統（Computer Algebra System）

電腦代數是利用演算法的方式，目的是去解決代數的微分、積分、線性、非線性方程式、多項式系統的求解，以及利用代數的方法來作 2D、3D 圖形的繪製，在數學的實驗與學習可藉由數值的改變來觀察代數系統的圖形變化。目前較有名

的代數系統有 Maple，Mathematica。

電腦代數系統在教學及數學實驗上的應用：

1、利用高速運算的能力解決複雜的計算：

如在求圓周率 π ：若 l_n 、 l_{2n} 分別代表單位圓內接正 n 邊形、正 $2n$ 邊形的邊長，則可利用遞迴關係 $(l_{2n})^2 = 2 - \sqrt{4 - (l_n)^2}$ ，逐步推導出 π 的近似值。或利用二分逼近法或牛頓法解多項方程式的根。

2、利用數值方法輔助動態幾何解題：

李政豐（民 92）在探討兩函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形交點個數，透過 GSP 的數學實驗中學生發現在 $0 < a < 0.066$ 時，兩函數有三個交點，於是利用 Maple 的畫圖功能加以確定，在利用數學方法證明後，最後使用 Maple 利用牛頓法對特定的 a 值解出交點座標。

在上述實驗中可透過動態幾何軟體發現某些規則，在規則尚未獲得證實前可利用電腦代數軟體協助作初步的確認，也可協助解決動態幾何軟體所缺乏的數值運算能力。

3、利用方程式來繪製幾何圖形：

在動態幾何軟體中因設計的概念的緣故，故針對方程式來繪製圖形的設計較為簡單，而在電腦代數系統中（如 Maple），只要設定變數就可輕易將方程式所對應的圖形呈現出來。

4、3D 圖形的繪製：

立體的圖形要在平面呈現，有一定的困難度，但在電腦代數軟體（如 Maple）中可以透過立體座標的建立，將立體的圖形呈現出來，可以利用視角的轉換觀察圖形，並可透過 VRML 的技術在網路上呈現完成的圖形，以便於學習者觀察圖形。

5、製作動態 GIF 圖檔：

Maple 中有個功能可以將數個 frame 組合成動態的 GIF 圖檔，方便在網路上的傳遞，利用函數的變化可以快速的建立一系列的動態圖形。

2.2.3 其他軟體

除了上述的兩大類數學軟體外，目前有許多研究透過 Flash、Powerpoint、Excel 等來製作數學學習素材，如李俊儀（民 93）、黃俊榮（民 93）利用 Flashmx 發展

GP2 的幾何繪圖工具；陳明璋教授利用 Powerpoint 發展 Mathps 的外掛程式，這些研究讓數學教師可以透過一些常見的軟體來發展適當的模組進行教學活動。李政豐(民 92)、陳國唐(民 93)、彭元豐(民 92)將 Mathematics Magazine 的 proof without word 透過 Powerpoint 製作成有次序且具動態、視覺化的學習素材，提供另一種的學習方式。國高中函數的學習也可透過 Excel 的使用，讓學生針對函數與函數圖形產生關連性，對後續的代數學習有許多的幫助。



第三章 M-configuration 的發現與性質探討

第三、四章將透過動態幾何軟體“特殊即一般”的特性來發展數學教學素材實例，首先在本章使用 Cabri Geometry 、Cabri Java 來探討一個有趣的幾何問題：發現三角形中 M-configuration 的找法及針對此問題討論後續的性質，期能利用認知學派、建構主義在電腦輔助學習課程軟體設計與發展的原則及 van Hiele 提出的“提升幾何思考層次的五階段學習模式”，建立適當的網頁及教學素材，讓學習者得以透過動態及視覺化之學習內容的呈現來進行探索學習。

在2004年國際科展（The Intel International Science and Engineering Fair）中，兩名俄國的中學生，以“The M - Configuration of a Triangle”這個題目參展，其中他們的主要研究結果是找出 $\triangle ABC$ 中三組M-configuration B-Ca-Aa-Ba-C，

C-Ab-Bb-Cb-A，A-Bc-Cc-Ac-B，連 \overline{AAa} 、 \overline{BBb} 、 \overline{CCc} ，發現三線會交於一點X92，

此結果與三角形的心(triangle center)有密切的關係。參照其指導教授在2003年發表的論文(A.Myakishev (2003), “The M-Configuration of a Triangle”, Forum Geometricorum, Volume 3, pp135–144.)，發現他在最初證明的過程中所使用的方法為利用Trilinear coordinates（三線座標系）進行證明，對於中學數學程度的學習者而言，此方式過於艱難且不夠直觀，故希望透過動態幾何軟體的特性（重複實驗、特殊即一般、及記錄作圖過程）輔助，將問題轉化成中學數學程度的學習者即可進行學習的問題，並透過網頁的連結將相關的知識組合成為一個完整的學習教材。

在 3.1 中，將針對此問題中會遇到的名詞逐一解釋，以利後續主要問題的探討。3.2 則是以引導學習者進行探索的角度出發，希望透過此一模式讓學習者在學習時可以在發現數學問題時得以透過動態幾何軟體進行思考、實驗進而獲得問題解決。再則當學習者學習利用動態幾何的工具解決單一問題後，期能讓學習者從獲得的結果進行延伸性問題的探討，再利用不同面向的思考方式尋求問題解法的多元性。3.3 及 3.4 研究者將 Myakishev 所發現的性質與 Kimberling 針對三角形的心所做的研究加以整理，並以動態幾何網頁的方式予以呈現，讓學習者得以統整先前所得的結果。

3.1 名詞解釋

M-configuration

任意 $\triangle ABC$ 中，求：在 \overline{BC} 上取 P 點， \overline{AB} 上

取 Q 點， \overline{AC} 上取 R 點，使得

$\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}$ ，在銳角三角形中，形狀

如 M，則稱 B-Q-P-R-C 為一組

M-configuration。

(A.Myakishev (2003), “The M-Configuration of a Triangle”, Forum Geometricorum, Volume 3, pp135–144.)

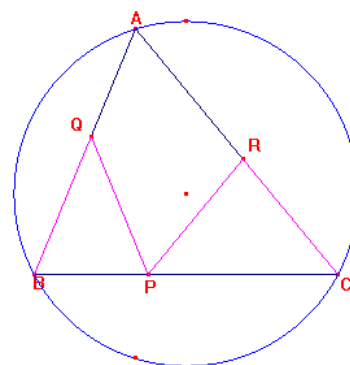


圖 3- 1 M-configuration

3.1.1 座標系

(1) Trilinear coordinates of a point 三線座標

Define：

P 為平面上的一點，自 P 對 $\triangle ABC$ 三邊作垂線，垂足為 D、E、F， $\overline{PD} = k\alpha$ ， $\overline{PE} = k\beta$ ，

$\overline{PF} = k\gamma$ ，則 P 的 Trilinear coordinate 為

$P(\alpha, \beta, \gamma)$ 或是表示成 $P = \alpha : \beta : \gamma$ 。

Theorm

$P = \alpha : \beta : \gamma$ ，實際的 Trilinear 距離為 $k\alpha, k\beta, k\gamma$ ，則

$k = 2\sigma / (a\alpha + b\beta + c\gamma)$ 其中 σ 為 $\triangle ABC$ 的面積。

(Kimberling, 1998)

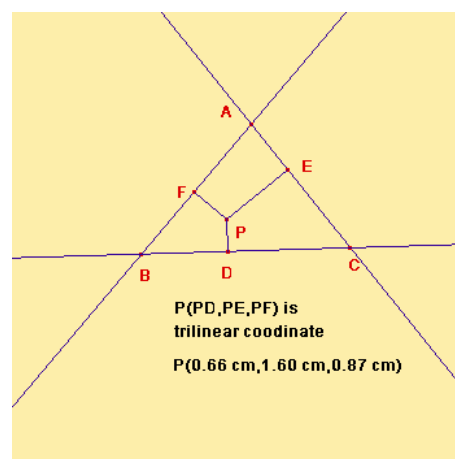


圖 3- 2 Trilinear coordinates

表 3- 1 三角形五心的三線座標

內心 incenter	$\alpha:\beta:\gamma=1:1:1$
重心 centroid	$\alpha:\beta:\gamma=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} =$ $\csc A : \csc B : \csc C$
外心 circumcenter	$\alpha:\beta:\gamma=\cos A : \cos B : \cos C$
垂心 orthocenter	$\alpha:\beta:\gamma=\sec A : \sec B : \sec C$
旁心 excenter 以 A-excenter 為例	$\alpha:\beta:\gamma=-1:1:1$

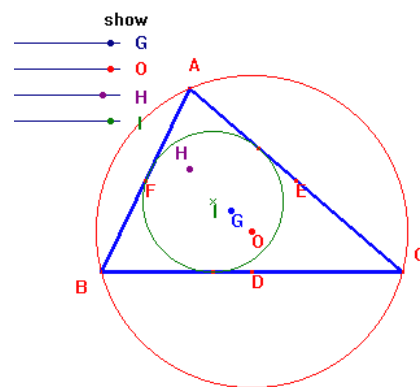


圖 3- 3 三角形五心

(2)Homogeneous Barycentric Coordinates

Define :

P 是平面上一點，則 P 對 $\triangle ABC$ 的 Homogeneous Barycentric Coordinates 為數對 (α,β,γ) ，其中 $\alpha : \beta : \gamma = \Delta PBC : \Delta PCA : \Delta PAB$

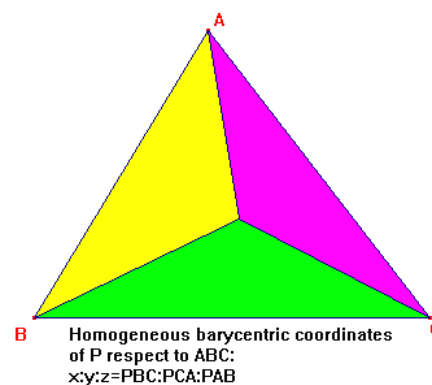


圖 3- 4 Homogeneous Barycentric Coordinates

三角形三心的 Homogeneous Barycentric Coordinates

表 3- 2 三角形三心的 Homogeneous Barycentric Coordinates

內心 incenter	$(a : b : c)$
重心 centroid	$(1 : 1 : 1)$
外心 circumcenter	$a^2(b^2 + c^2 - a^2) :$ $b^2(c^2 + a^2 - b^2) :$ $c^2(a^2 + b^2 - c^2)$

3.1.2 Conjugates

(1) Isogonal conjugate 等角共軛

Define :

$\triangle ABC$ 做三條角平分線，平面上任取一點不在邊上的 P 點，連接 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、 \overline{CP} 分別對角平分線鏡射，三線交於同一點 P' ，稱為 isogonal conjugate。

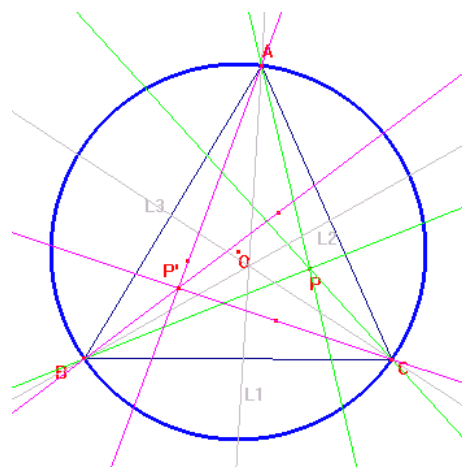


圖 3- 5 Isogonal conjugate

例：

表 3- 3 三角形的心 Isogonal conjugate

三角形的心	Isogonal conjugate
外心 circumcenter	垂心 orthocenter
內心 incenter	內心 incenter
重心 centroid	似重心 symmedian

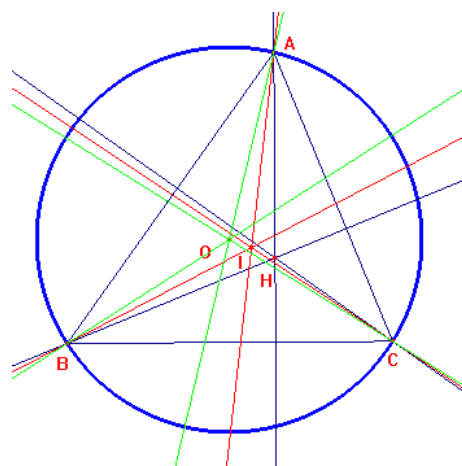


圖 3- 6 外心垂心 Isogonal conjugate

Locus of isogonal conjugate :

- 1、 Q 為 $\triangle ABC$ 外接圓上一點
- 2、 P 為 \overline{OQ} 上一點
- 3、 P 對 $\triangle ABC$ 作等角共軛得 P' 點，將 P' 對 Q 取 locus (軌跡)。

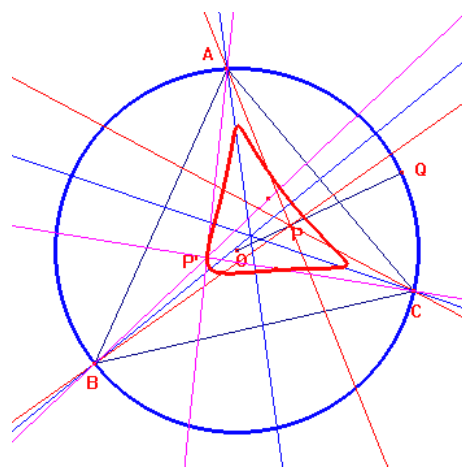


圖 3- 7 Locus of isogonal conjugate

(2) Isotomic conjugate

Define :

取 $\triangle ABC$ 中三邊的中點 M_1 、 M_2 、 M_3 ，及平

面上任取一點不在邊上的 P 點，連接 \overline{AP} 、

\overline{BP} 、 \overline{CP} 交三邊於 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ，分別將 Q_1 、

Q_2 、 Q_3 對 M_1 、 M_2 、 M_3 反射得 Q_1' 、 Q_2' 、

Q_3' ，連 $\overline{AQ_1'}$ 、 $\overline{BQ_2'}$ 、 $\overline{CQ_3'}$ ，三線交於一點

P' ，稱為 Isotomic conjugate。

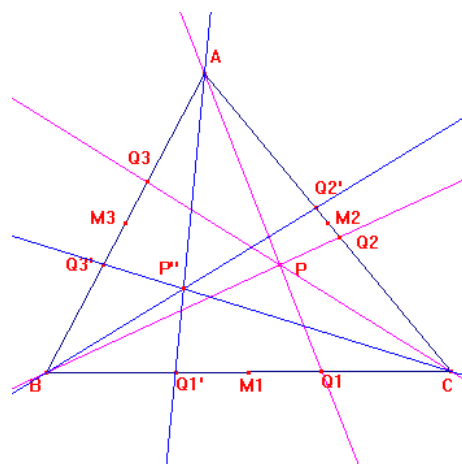


圖 3- 8 Isotomic conjugate

例：

Gergonne 和 Nagel points 互為 Isotomic conjugate。



圖 3- 9 Gergonne 和 Nagel Isotomic conjugate

Locus of isotomic conjugate :

1、 Q 為 $\triangle ABC$ 外接圓上一點

2、 P 為 \overline{OQ} 上一點

3、 P 對 $\triangle ABC$ 取 isotomic conjugate 得 P' 點，
將 P' 對 Q 取 locus。

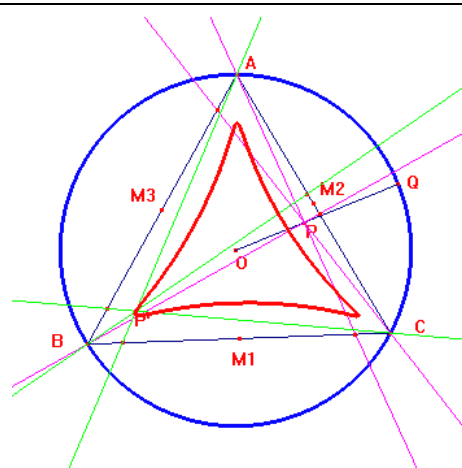


圖 3- 10 Locus of isotomic conjugate

(3) Harmonic conjugates

Define :

W、X、Y、Z 四點共線，若

$$|\overline{WY}| \cdot |\overline{ZX}| = |\overline{WZ}| \cdot |\overline{YX}|, \text{ 則稱 Y、Z 依 W、X 兩}$$

點 Harmonic conjugates。

W、Y、X 三點共線，求 Z 點使得 Y、Z 依 W、X 兩點 Harmonic conjugates。

1、任取不在線上的 X' 點，連 $\overline{X'Y}$ ， $\overline{X'W}$ ，

$\overline{X'X}$ 。

2、在 $\overline{X'Y}$ 任取一點 W'，連 $\overline{X'W'}$ 、 $\overline{WW'}$ 交

$\overline{X'W}$ 、 $\overline{X'X}$ 於 Y'、Z'。

3、連 $\overline{Y'Z'}$ 交 \overline{WX} 於 Z 點。

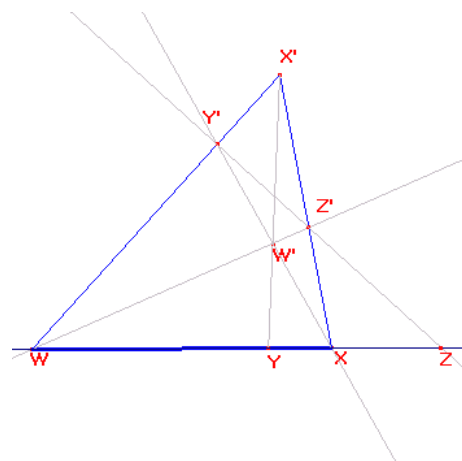


圖 3- 11 Harmonic conjugates

(4) Ceva conjugate

Define :

Cevian triangle of a point

1、P 為不在 $\triangle ABC$ 邊上的一點，連 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、

\overline{CP} 交三邊於 A'、B'、C'。

2、 $\triangle A'B'C'$ 稱為 $\triangle ABC$ 對 P 的 Cevian triangle。

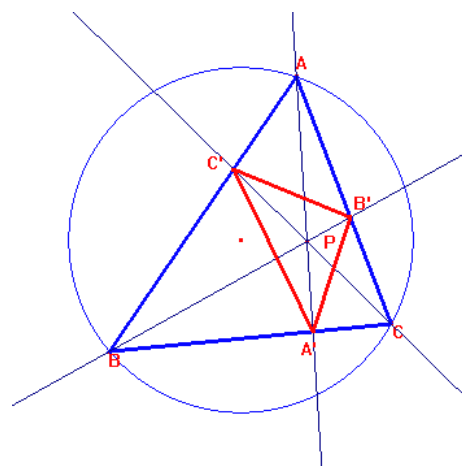


圖 3- 12 Ceva conjugate

Define :

Anticevian triangle of a point

1、P 為不在 $\triangle ABC$ 邊上的一點，連 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、

\overline{CP} 交三邊於 A' 、 B' 、 C' 。

2、P 對 A、A' 兩點作 Harmonic conjugates 得 A'' ，同理取 B'' 、 C'' 。

3、 $\triangle A''B''C''$ 稱為 $\triangle ABC$ 對 P 的 Anticevian triangle。

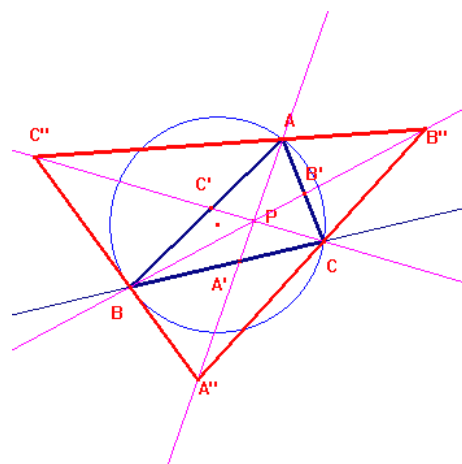


圖 3- 13 Anticevian triangle of a point

Define :

P1-ceva conjugate to P2

1、P1、P2 為不在 $\triangle ABC$ 邊上的點，且 $P1 \neq P2$ 。

2、 $\triangle A1B1C1$ 為 $\triangle ABC$ 對 P1 的 Cevian triangle，且 $\triangle A2B2C2$ 為 $\triangle ABC$ 對 P2 的 Anticevian triangle。

3、連 $\overline{A1A2}$ 、 $\overline{B1B2}$ 、 $\overline{C1C2}$ 三線交於一點 P3，此點稱為 P1-ceva conjugate to P2。

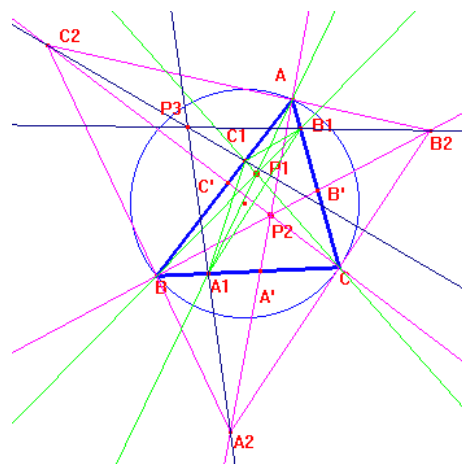


圖 3- 14 P1-ceva conjugate to P2

3.1.3 Perspective triangles 射影三角形

Define :

兩相異 $\triangle A1B1C1$ 和 $\triangle A2B2C2$ ，若 $\overline{A1A2}$ 、

$\overline{B1B2}$ 、 $\overline{C1C2}$ 三線交於一點 P，則稱 $\triangle A1B1C1$ 和 $\triangle A2B2C2$ 為 Perspective triangles，P 稱為 center of perspective。

$\overline{A1B1}$ 、 $\overline{A2B2}$ 交於 $C3$ ， $\overline{A1C1}$ 、 $\overline{A2C2}$ 交於 $B3$ ，

$\overline{B1C1}$ 、 $\overline{B2C2}$ 交於 $A3$ ，則三點共線，此線稱為 perspectrix

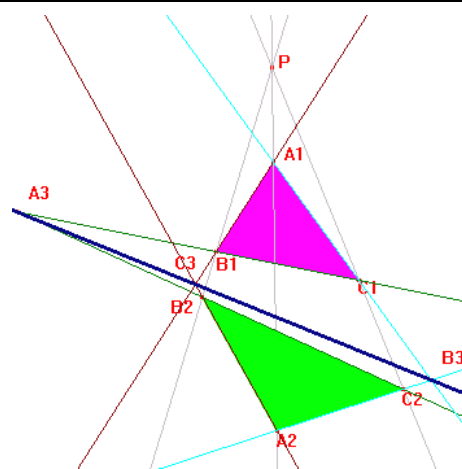


圖 3- 15 Perspective triangles

3.2 Construction M-configuration

3.2.1 探索

根據 Polya 的解題策略：1、特殊化，2、一般化，3、類化，4、歸納，在問題尚未明朗之前或是無法找到規則之前，可將問題特殊化至較明顯的例子中，先進行猜測。

步驟一：從摺紙的想法出發，將銳角 $\triangle ABC$ ，

頂點 B 依 \overline{BC} 邊對折交 \overline{BC} 於 P 點，頂點 C 與

P 點依 \overline{BC} 對折，如何才能使

$\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}$ ，要求得

$\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}$ ，也就是求得 P 點使得

$\overline{BP} : \overline{PC} = \cos B : \cos C$ 。

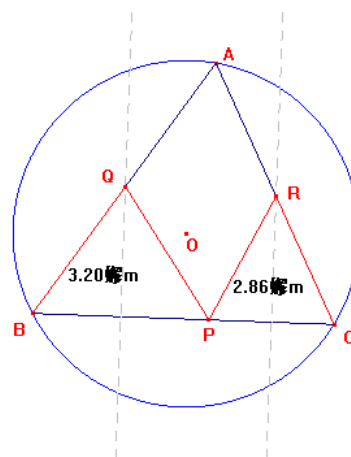


圖 3-16 探索 1

步驟二：利用銳角、直角、鈍角三角形，及正三角形、等腰三角形使用 cabri java 在網頁上的測試，並給予適當提示。

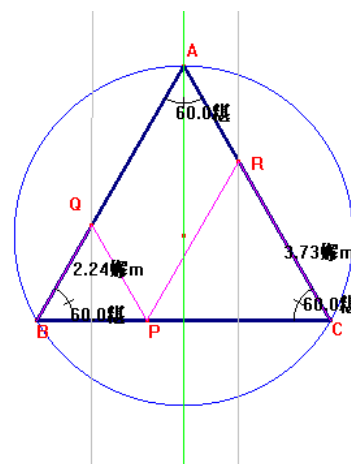


圖 3-17 探索 2

步驟三：接著透過隱藏按鍵的協助（將內心、重心、外心、垂心分別隱藏或顯示），提供學習者更多的猜想，及驗證的空間，最後再導引到作圖及證明。

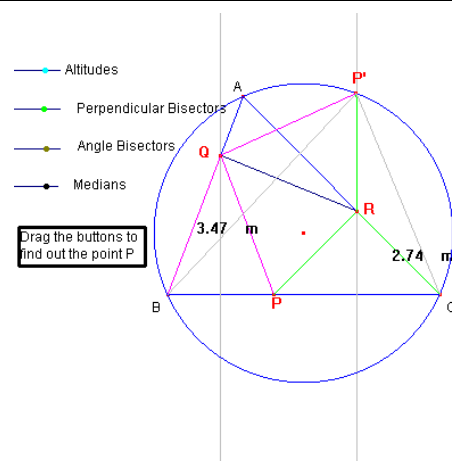


圖 3- 18 探索 3

3.2.2 M-configuration 作圖

從上述的探索中發現 M-configuration 的作圖法：(1)作法一：

- 1、過 A 作 \overline{BC} 的高交外接圓於 H' 。
- 2、作 \overline{BC} 的中垂線交圓於 A' 點。
- 3、連接 $\overline{A'H'}$ 交 \overline{BC} 於 P 點。
- 4、分別作 \overline{BP} 、 \overline{CP} 的中垂線交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 Q、R。
- 5、P、Q、R 即為所求。

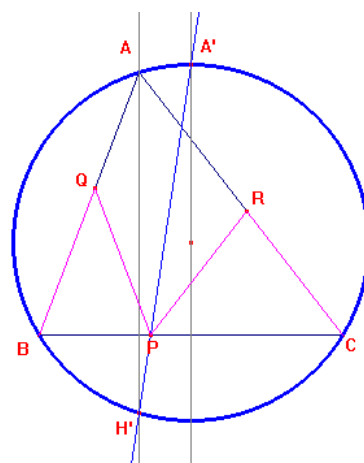


圖 3- 19M-configuration 作法 1

證明前先考慮以下兩個性質。

性質一：任意 $\triangle ABC$ 中，O 為外心，H 為垂心， \overline{AE} 為角平分線，則 $\angle BAD = \angle CAH$ ，且 $\angle EAD = \angle EAH$ 。

證明：CLEAR

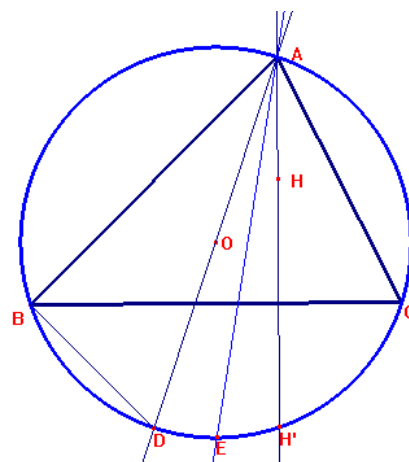


圖 3- 20 外心垂心 Isogonal conjugate1

性質二：任意 $\triangle ABC$ 中， H 為垂心， H 對任一邊作對稱得 H' ，則 H' 、 A 、 B 、 C 共圓。
證明：CLEAR

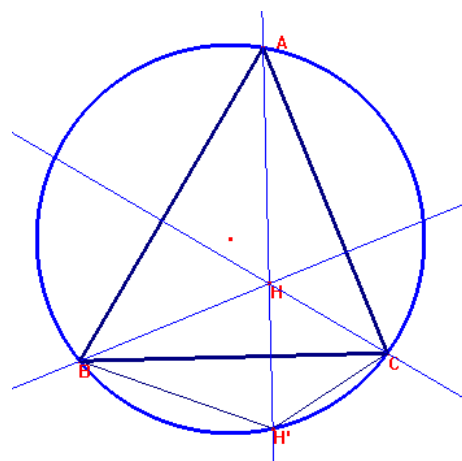


圖 3-21 H' 、 A 、 B 、 C 共圓

作法一證明：

1、連 \overline{AO} 交圓於 E 點，連 \overline{BE} 、 \overline{CE} ，其中 O

為圓心，則 $\overline{BE} : \overline{EC} = \cos C : \cos B$

2、由性質一、二得知 $\angle BAH' = \angle CAE$ ，則

$$\widehat{BH'} = \widehat{CE}, \quad \overline{BC} \parallel \overline{H'E}$$

3、 $\overline{BC} \parallel \overline{H'E}$

$$\overline{BE} : \overline{EC} = \cos C : \cos B = \overline{CH'} : \overline{BH'}$$

4、 A' 為 \widehat{BAC} 的中點 $\angle BH'A' = \angle CH'A'$

$\angle BH'A' = \angle CH'A'$ 且

$$\overline{BE} : \overline{EC} = \cos C : \cos B = \overline{CH'} : \overline{BH'}$$

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \cos B : \cos C$$

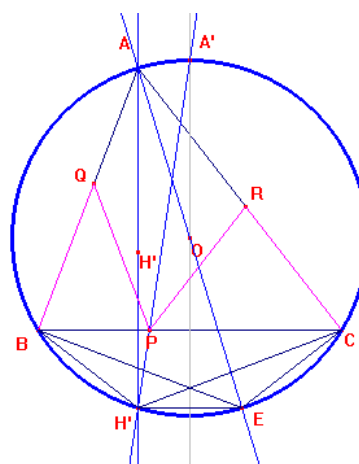


圖 3-22 M-configuration 作法 1 之證明

(2)作法二

過垂心 H 平行 $\angle BAC$ 之角平分線交 \overline{BC} 於 P ,

分別作 \overline{BP} 、 \overline{CP} 的中垂線交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 Q 、

R 。

則： $B-Q-P-R-C$ 為 $\triangle ABC$ 之 M-configuration。

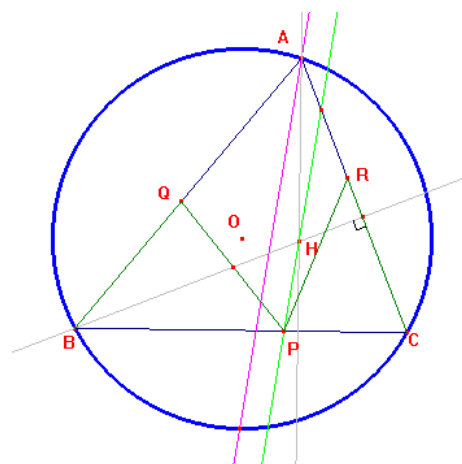


圖 3- 23 M-configuration 作法 2

證明：

1、過 O 作 \overline{BC} 之平行線 L

2、將 $\angle BAC$ 之角平分線 $\overline{AA''}$ 對 L 反射得

$\overline{A'H'}$ ，其中 H' 也是垂心 H 對 \overline{BC} 之反射。

3、 $\overline{A'H'}$ 與 \overline{BC} 交點 P ，連 \overline{PH} 。

4、 $\angle A''AH' = \angle AH'A''$ ， $\angle PH'A = \angle A'HA$

$\angle A''AH' = \angle PH'A$ ， $\overline{PH} \parallel \overline{AA''}$

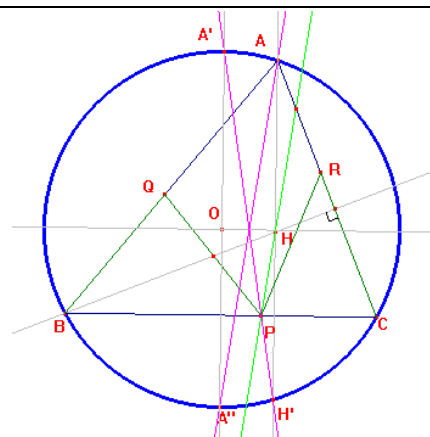


圖 3- 24 M-configuration 作法 2 之證明

(3)作法三

BAC 之角平分線 \overline{AD} 交圓 O 於 D 點，連
 \overline{BD} 、 \overline{CD} ，作 $\overline{OQ} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{OR} \parallel \overline{CD}$ 交 \overline{AB} 、 \overline{AC}
 於 Q、R，由 R 作 \overline{BC} 的垂線 L，C 對 L 作鏡
 射得 P，則：B-Q-P-R-C 為 ΔABC 之
 M-configuration 。

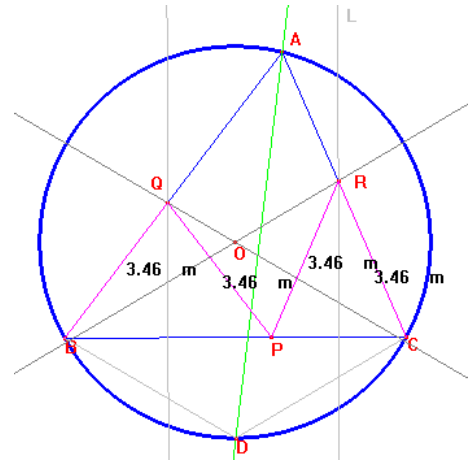


圖 3-25 M-configuration 作法 3

證明：(Alexei,2003)

1、M 為 \overline{BC} 中點，Y、Z 分別為 Ca 、 Ba 在 \overline{BC}
 上的垂足。

$$2、\overline{OM} = \frac{1}{2} a \cot A = la(\cos B + \cos C) \cot A$$

$$\overline{CaY} = la \sin B$$

$$\overline{MY} = \frac{1}{2} a - la \cos B = la \cos C$$

3、考慮 CaOX ：

$$\frac{\overline{CaY} - \overline{OM}}{\overline{MY}} = \frac{\sin B - (\cos B + \cos C) \cot A}{\cos C}$$

$$= \frac{\sin B \sin A - (\cos B + \cos C) \cos A}{\cos C \sin A}$$

$$= \frac{-\cos(A+B) - \cos C \cos A}{\cos C \sin A}$$

$$= \frac{\cos C(1 - \cos A)}{\cos C \sin A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \tan \frac{A}{2}$$

$\text{CaOX} = \text{MBA}'$ ，故 $\overline{CaO} \parallel \overline{BA}'$ ，同理

$$\overline{BaO} \parallel \overline{CA}'$$

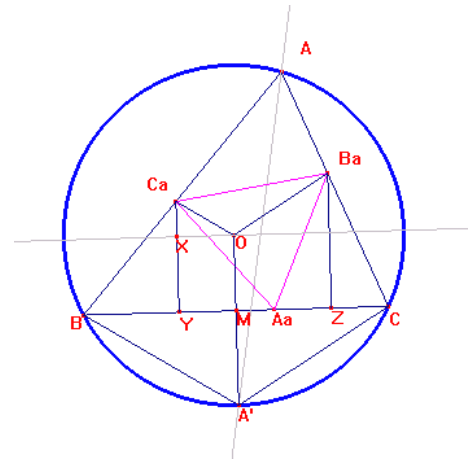


圖 3-26 M-configuration 作法 3 之
證明

(4)又發現類似 M-configuration 的另一種作圖：

$\triangle ABC$ 中，以 B、C 為端點的 M-configuration：

1、由作法一中，作 \overline{BC} 的中垂線交圓於 A'、A'' 點。

2、連 $\overline{A'H'}$ 與 \overline{BC} 交於 Aa1，可得一組 M-configuration：B-Ca1-Aa1-Ba1-C。

3、連 $\overline{A''H'}$ 與 \overline{BC} 交於 Aa2。

4、作 $\overline{Aa2C}$ 、 $\overline{Aa2B}$ 之中垂線，交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 Ca2、Ba2。

5、B-Ca2-Aa2-Ba2-C 構成另一組 M-configuration。

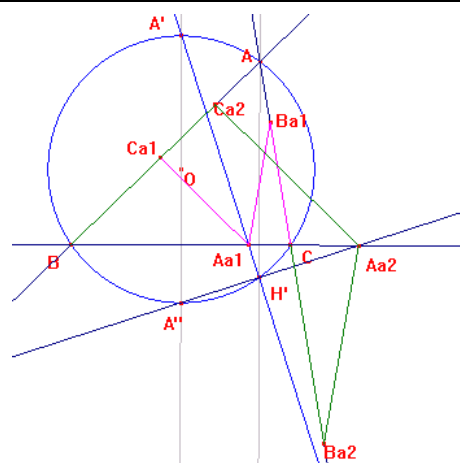


圖 3-27 類 M-configuration

Remark：

$$\overline{BCa2} : \overline{BCa1} = (\cos^2 B - \cos^2 C) : 1$$

證明：clear

3.2.3 等價作圖

等價作圖 1：

任給一直線 L，L 上任取三點 B、C、P。

求：作兩等腰三角形 $\triangle BQP$ 、 $\triangle PRC$ ，且

$$\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}。$$



圖 3-28 等價作圖 1

作圖：

- 1、作 \overline{BC} 的中垂線 L_1 ， L_1 上任取一點 O 。
- 2、以 O 為圓心， \overline{BO} 為半徑作圓 O ， L_1 交圓於 A' 點。
- 3、連接 $\overline{A'P}$ 交圓 O 於 H' 點。
- 4、過 H' 作 $L_2 \perp \overline{BC}$ 交圓 O 於 A 點。
- 5、連 \overline{AB} 、 \overline{AC} 。

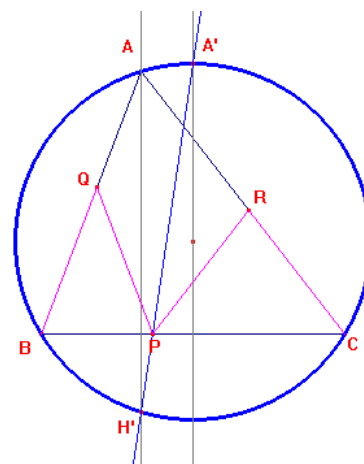


圖 3-29 等價作圖 1 作法

- 6、分別作 \overline{BP} 、 \overline{CP} 的中垂線交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 Q 、 R 。 $\triangle BQP$ 、 $\triangle PRC$ 即為所求。

等價作圖 2：

不共線的三點 B 、 C 、 Q ，其中 $4\overline{BQ} > \overline{BC}$ 。

求：作兩等腰三角形 $\triangle BQP$ 、 $\triangle PRC$ ， P 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}$ 。



圖 3-30 等價作圖 2

作圖：

- 1、以 Q 為圓心， \overline{BQ} 為半徑畫圓交 \overline{BC} 於 P 點。
- 2、以 C 為圓心 \overline{BC} 為半徑畫圓，並作 \overline{CP} 的中垂線交圓於 R 。
- 3、則 $\overline{BQ} = \overline{QP} = \overline{PR} = \overline{RC}$

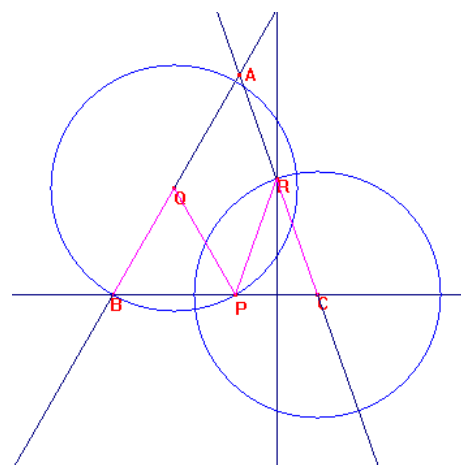


圖 3-31 等價作圖 2 作法

等價作圖 3：

不共線的三點 B、Q、R。

求：作 M-configuration B-Q-P-R-C

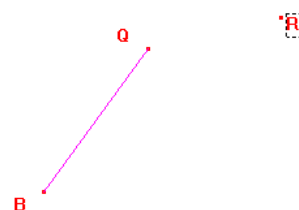


圖 3-32 等價作圖 3

作圖：

- 1、以 Q 為圓心， \overline{BQ} 為半徑畫圓，與 \overline{QR} 之中垂線交於 P。
- 2、連 \overline{BP} ，過 R 作 \overline{BP} 之垂線 L。
- 3、P 對 L 作鏡射得 C。
- 4、則 B-Q-P-R-C 為 M-configuration。

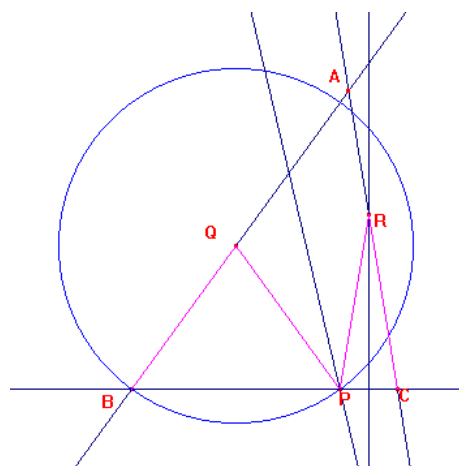


圖 3-33 等價作圖 3 之作法

3.3 M-configuration 延伸性質

除了上述的作圖及性質外，透過 Cabri 的實驗，可發現以下的性質：

性質：

B-Ca-Aa-Ba-C 為 $\triangle ABC$ 之 M-configuration，
則 $\triangle ACaBa$ 之外接圓 a：過 $\triangle ABC$ 之外接圓 O 點，
b：過 $\triangle AaBaCa$ 之垂心 H_a

證明：

a：由作法三即可得。

b：令 H_a 是 $\triangle AaBaCa$ 的垂心，則 $\angle BaHaCa = \pi - \angle BaAaCa = \pi - \angle BAC = \pi - \angle CaABa$ 。故 H_a 在 $\triangle AaBaCa$ 的外接圓上，再則 $\triangle AaBaCa$ 是

等腰三角形， $\overline{BaHa} = \overline{CaHa}$ 故 H_a 在 $\angle A$ 的角平分線上。

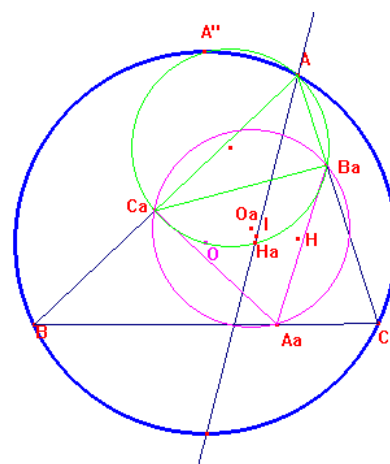


圖 3-34 M-configuration proposition1

REMARK a：

$\triangle ACaBa$ 、 $\triangle BCBaAb$ 、 $\triangle CBcAc$ 之外接圓交於 $\triangle ABC$ 之外接圓 O 點。



圖 3-35 M-configuration proposition2

REMARK b：

$\triangle AaBaCa$ 、 $\triangle AbBbCb$ 、 $\triangle AcBcCc$ 的垂心 H_a 、 H_b 、 H_c 形成的三角形是 $\triangle ABC$ 對內心 I 的投影。

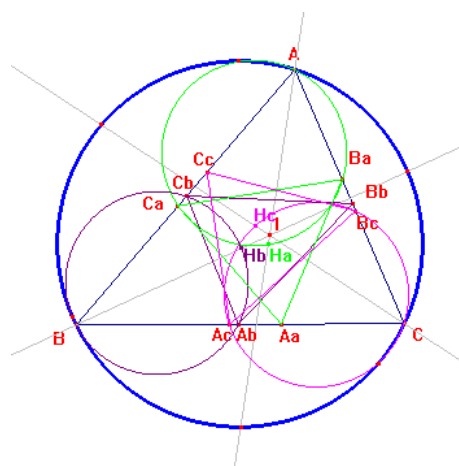


圖 3-36 M-configuration proposition3

性質 c :

$\triangle AaBaCa$ 之外接圓心 Oa 到 O 及 H 等距離。

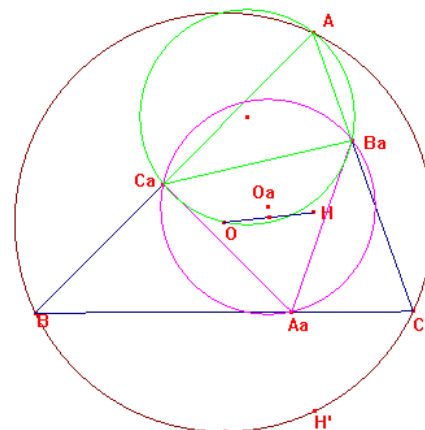


圖 3- 37 M-configuration proposition4

REMARK c :

$\triangle AaBaCa$ 、 $\triangle AbBbCb$ 、 $\triangle AcBcCc$ 之外接圓心

Oa 、 Ob 、 Oc 三點共線，且在 \overline{OH} 的中垂線上。

證明：CLEAR



圖 3- 38 M-configuration proposition5

若等腰 $\triangle BCaAa$ 中垂線上的心記為 Pa,b ，同樣的心在等腰 $\triangle CBaAa$ 記為 Pa,c 。

則： $\overrightarrow{BP_{a,b}}$ 、 $\overrightarrow{CP_{a,c}}$ 兩線交於 Pa 。

同理： $\overrightarrow{AP_{b,a}}$ 、 $\overrightarrow{CP_{b,c}}$ 兩線交於 Pb ， $\overrightarrow{AP_{c,a}}$ 、

$\overrightarrow{BP_{c,b}}$ 兩線交於 Pc 。

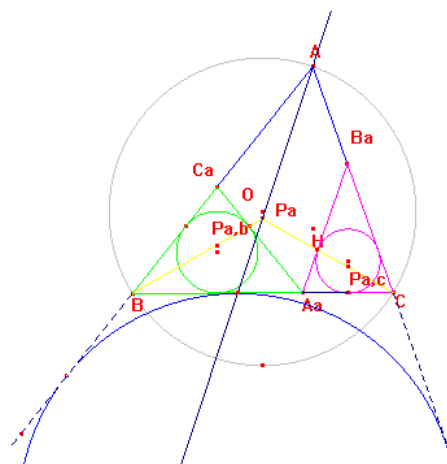


圖 3- 39 M-configuration proposition6

性質 d :

$\Delta PaPbPc$ 是 ΔABC 對 P 的投影。

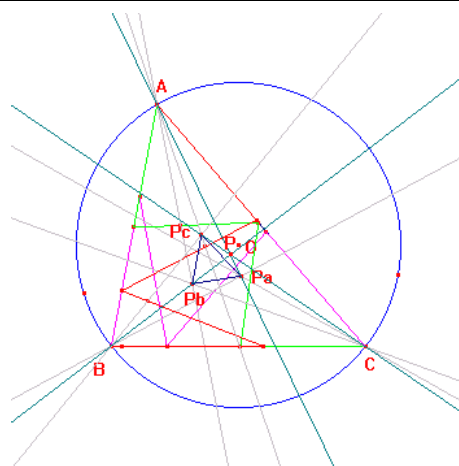


圖 3- 40 M-configuration proposition7

3.4 M-configuration 與三角形的心

本研究參考 Kimberling(1998) 的內容後，發現 X(92)除了可以使用 M-configuration 尋找外，還有其他不同的找法：

X(92) :

分別對三角形三邊作三組 M-configuration :

B-Ca-Aa-Ba-C , C-Ab-Bb-Cb-A ,

A-Bc-Cc-Ac-B , 連 \overline{AAa} 、 \overline{BBb} 、 \overline{CCc} , 三線交於一點，此點稱為 X(92)

證明： $\overline{BCa} = \overline{CaAa} = \overline{AaBa} = \overline{BaC}$

$$\overline{BAa} : \overline{AaC} = \cos B : \cos C , \text{ 同理}$$

$$\overline{CBb} : \overline{BbA} = \cos C : \cos A ,$$

$$\overline{ACc} : \overline{CcB} = \cos A : \cos B ,$$

由 Ceva's Thm 可得證 \overline{AAa} 、 \overline{BBb} 、 \overline{CCc} , 三線交於一點

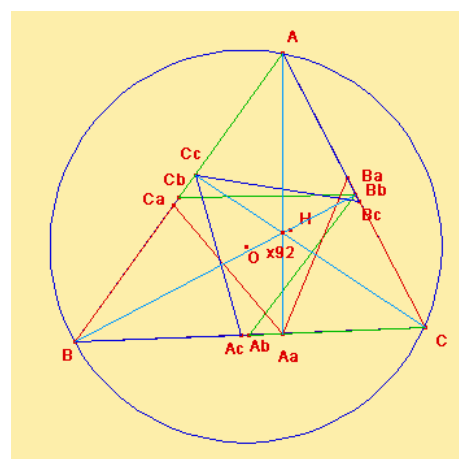


圖 3- 41X(92) (Kimberling,1998)

X(92) : CEVAPOINT OF INCENTER AND CLAWSON POINT

X(92), Trilinear : $\csc 2A : \csc 2B : \csc 2C$

X(92), Barycentric : $\sec A : \sec B : \sec C$

X(92) = isogonal conjugate of X(48)

X(92) = isotomic conjugate of X(63)

參考自(<http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/>)

Clawson point X(19):

- 1、Homothetic center of the orthic triangle (垂足三角形) and extangents triangle(外切三角形)
- 2、 $\triangle ABC$ 的外接圓與三個旁切圓交於D、E、F、G、H、I六點，連DE、FG、HI三線兩兩相交於A'、B'、C'三點，連AA'、BB'、CC'三線共點，此點稱為**clawson point**。(Yiu, 2000)

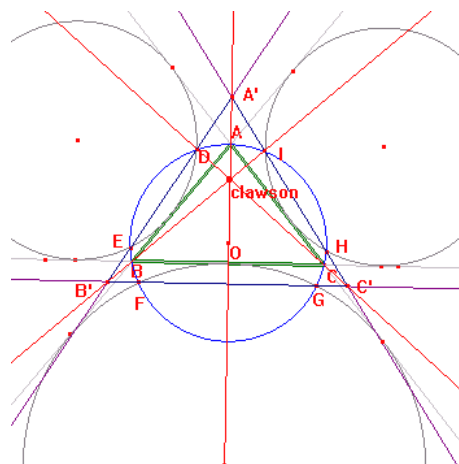


圖 3- 42 Clawson point X(19)

X(63) : Isogonal conjugate of X(19)

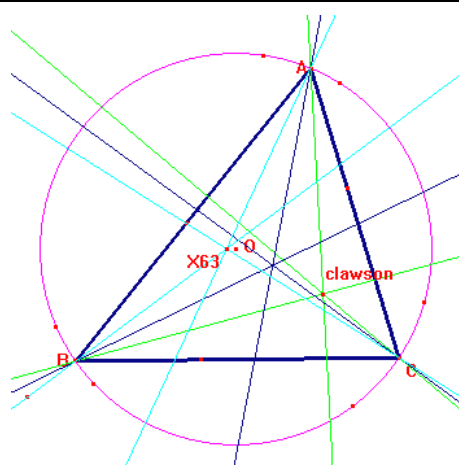


圖 3- 43 X(63) : Isogonal conjugate of X(19)

X(92) : Isotomic conjugate of X(63)

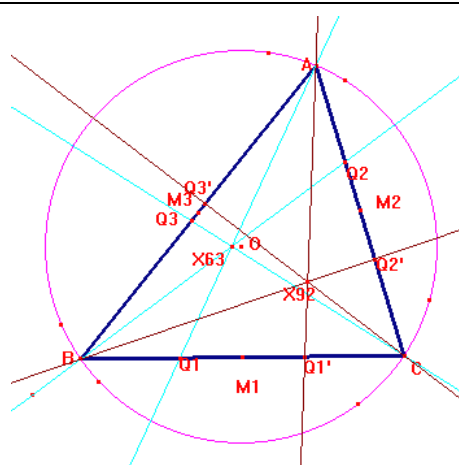


圖 3- 44 X(92) : Isotomic conjugate of X(63)

第四章 利用 Cabri3D 初探非歐幾何

在van Hiele的幾何思考層次中，第五階段嚴密系統(Rigor)：學生可以在不同的公理系統中建立定理，並分析比較不同系統中的特性，這個層次是抽象的，van Hiele 並指出此層次只是理論的需要，在教學上並無實際的價值。在本章中嘗試歐氏幾何與非歐幾何兩種系統加以比較予以呈現，由van Hiele的理論中可知，要讓學習者從一種公理系統過渡到另一種的公理系統是很困難的，從學習者的角度來看，當學習者初次接觸非歐幾何時，一定會感覺到這是非常抽象的概念，尤其若是僅利用書本上的呈現更是不易理解的。但若是在教學時能透過適當的工具進行引導，讓學生能以更直觀、視覺化及動態的方式來體驗非歐幾何的奧妙，可以讓學習者更容易接受不同於歐氏幾何的幾何體系。

本章將透過比較侯杰材（民91）在Cabri針對上半平面模型所發展的uhpm.men的模組，及使用Cabri3D所設計呈現的球面幾何學習網頁，來比較呈現兩種非歐幾何（上半平面模型及球面幾何）的基本性質，及一些歐氏幾何的定理在上半平面模型及球面幾何中的型態，嘗試著透過動態、視覺化的呈現來導引學習者學習非歐幾何。

在4.1中將分別介紹兩種非歐幾何體系中的基本元素。4.2則將分別呈現兩種非歐幾何作圖中所需要的一些基本作圖法，如：垂直線、切線、角平分線...等。在4.3及4.4，透過歐氏幾何中一些著名的定理，如：蝴蝶定理、Fermat點...等，探討這些定理在非歐幾何中是否依然成立。

4.1 幾何基本元素

1、line

過兩點的line在上半平面上是半圓，且其圓心在x軸上。

球面幾何上即是大圓（圓心在球心上）

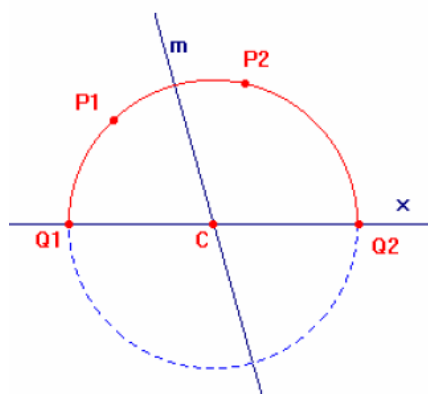


圖 4- 1 line 上半

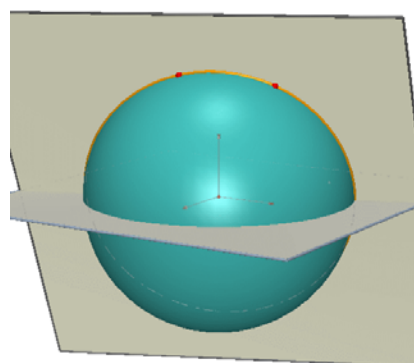


圖 4- 2 line 球面

1、作 $\overline{P_1P_2}$ 的中垂線交x軸於c。

1、作過球面上兩點P1、P2及球心的平面。

2、以c為圓心 $\overline{cP1}$ 為半徑畫圓，交x軸於

Q1、Q2則 $\widehat{Q1P2Q2}$ 即為所求。

2、則平面與球相交的軌跡即是要求的直線。

2、segment

過兩點的line，取兩點間的部分

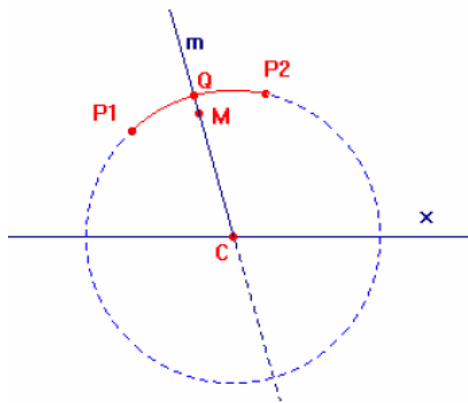
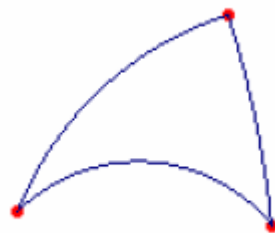


圖 4-3 u-segment 上半

3、triangle

上半平面上的三角形內角和 $<180^\circ$

球面幾何中三角形內角和 $>180^\circ$



u-triangle

圖 4-4 u-triangle 上半

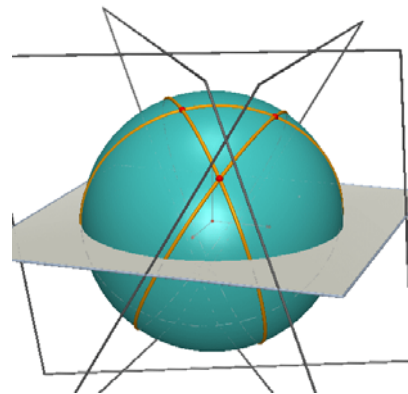


圖 4-5 triangle 球面

4、circle

在上半平面上選擇兩點P1、P2，其中P1為圓的hyperbolic center，P2在圓周上。

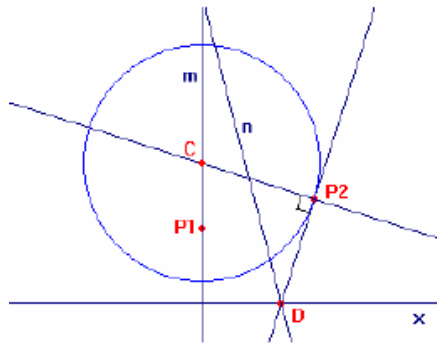


圖 4- 6 u-circle 上半

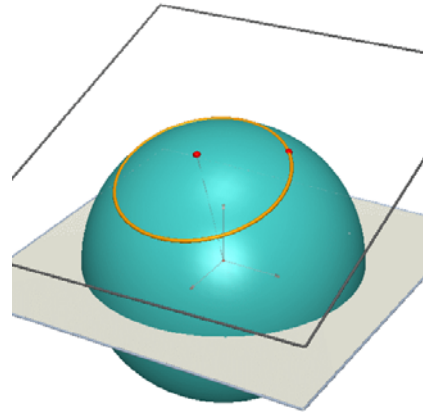


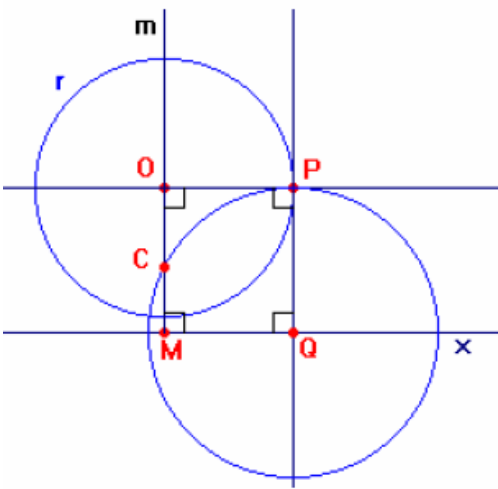

圖 4- 7 circle 球面

- 1、作P1、P2的中垂線交x軸於D，連 $\overline{P_2D}$
- 2、過P1作x軸的垂線，過P2作 $\overline{P_2D}$ 的垂線。
- 3、兩線交於C，以C為圓心 $\overline{CP_2}$ 為半徑作圓。
- 4、則圓C即為以P1為u-center，P2為圓上一點的u-circle。

- 1、球面上兩點P1、P2、球心O，連 $\overline{OP_1}$ 。
- 2、過P2作與 $\overline{OP_1}$ 垂直面，與球相交的曲線即為circle。

5、u-center

在上半平面上選取一u-circle，則u-center是在上半平面中的圓心。

 <p>圖 4- 8 u-center 上半</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 1、以O為歐氏幾何的圓心任意長為半徑作圓，作\overline{MO}垂直x軸。 2、作\overline{PO}垂直\overline{MO}，其中P在圓上。 3、P在x軸上的投影為Q，以Q為圓心PQ為半徑交\overline{MO}於C，則C為給定圓的 hyperbolic center (u-center) 	

4.2 幾何性質作圖

1、perpendicular at point (過線外一點的垂直線)

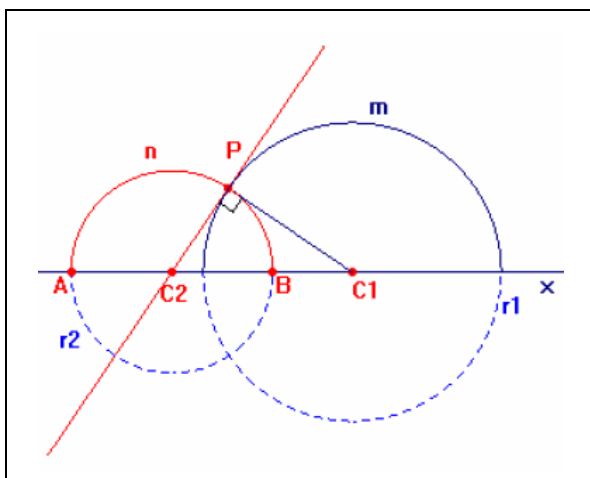


圖 4- 9 perpendicular at point 上半

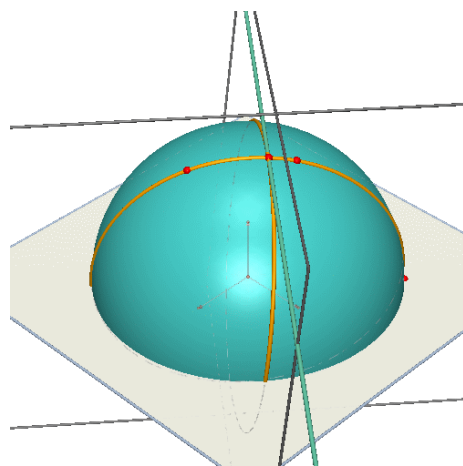


圖 4- 10 perpendicular at point 球面

1、 r_1 為歐氏幾何中的圓包含 m ， $\overline{PC_2}$ 為 r_1 的切線，與 x 軸交於 C_2 。

2、以 C_2 為圓心， $\overline{PC_2}$ 為半徑作圓 r_2 ，交 x 軸於 A 、 B 。

3、則 \widehat{APB} 即為所求。

如上圖

2、perpendicular from point (線上一點作垂直線)

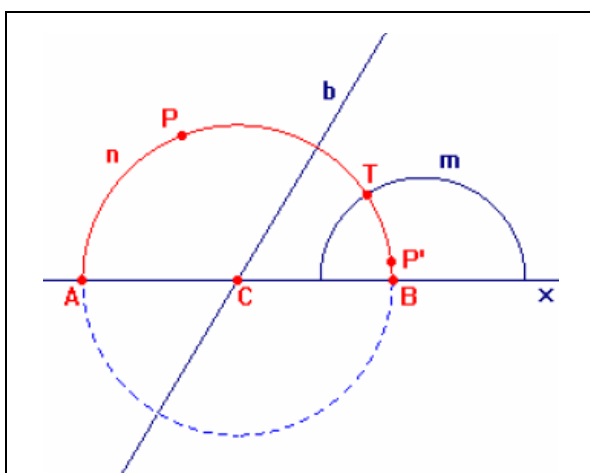


圖 4- 11 perpendicular from point 上半

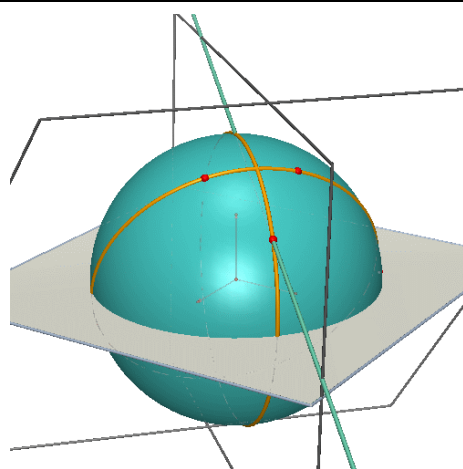


圖 4- 12 perpendicular from point 球面

1、令 P' 為 P 依 u - line m 的反演變換。

如圖

2、則過P、P'的u- line n即為所求。

3、perpendicular to two lines（與兩直線垂直的直線）

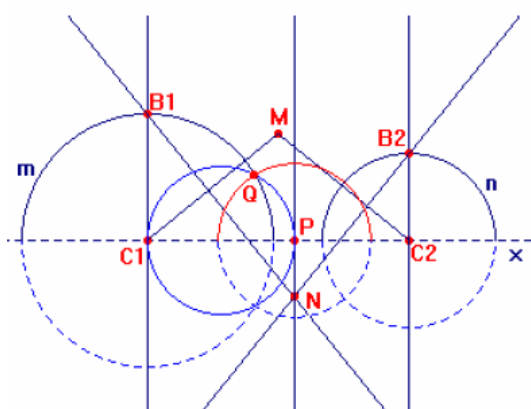


圖 4- 13 perpendicular to two lines 上半

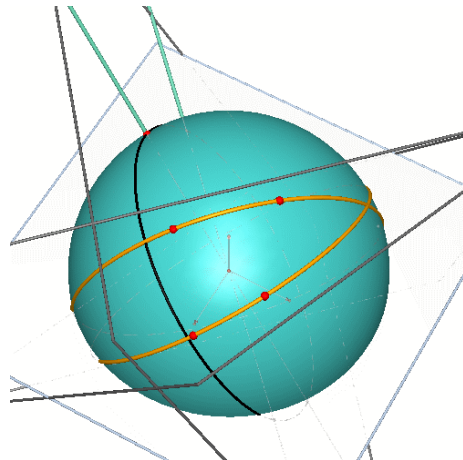


圖 4- 14perpendicular to two lines 球面

1. 令C1與C2是u- lines m與n的圓心，
 $\overline{B1C1}$ 、 $\overline{B2C2}$ 垂直x軸。
- 2、M是B1與B2的中點，作 $\overline{B1N} \perp \overline{C1M}$ 、
 $\overline{B2N} \perp \overline{C2M}$ 兩線交於N點。
- 3、作 $\overline{PN} \perp$ x軸，垂足為P，以 $\overline{PC1}$ 為直
徑作圓交m於Q。
- 4、以P為圓心， \overline{PQ} 為半徑畫圓，即為所
求。

- 1、作兩條line，其兩平面的交線L
- 2、作與L垂直之平面，與圓相交的軌跡
即為所求。

4、two limiting parallel u-lines (平行線)

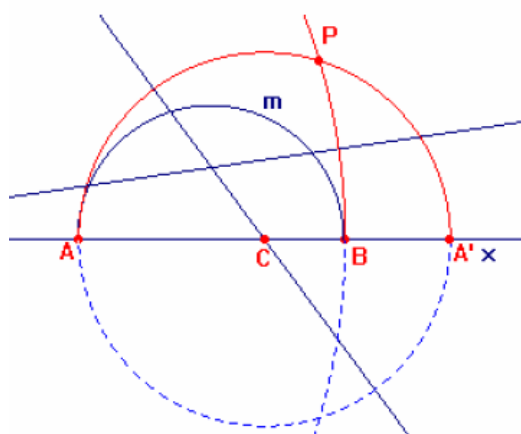
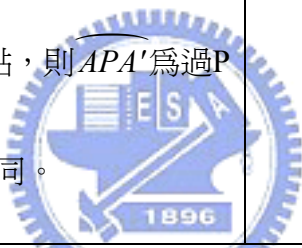


圖 4-15 two limiting parallel u-lines 上半

- 1、A與B分別為m的在上半平面的終點，作 \overline{PA} 的中垂線交x軸於C點。
- 2、令A'是A對C的對稱點，則 APA' 為過P與m平行的u-line。
- 3、過B的平行線作法相同。



5、two tangents to u-circle from point (圓外一點作切線)

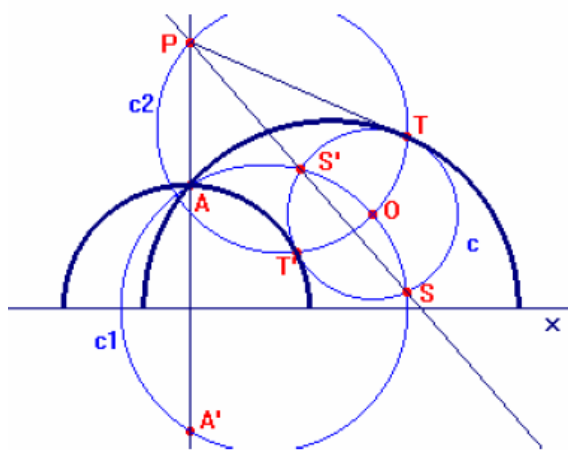


圖 4- 16 two tangents to u-circle from point 上半

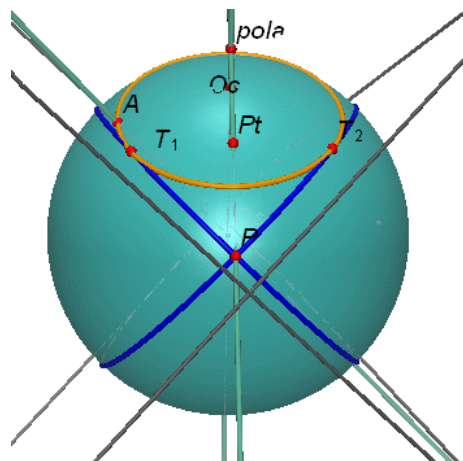


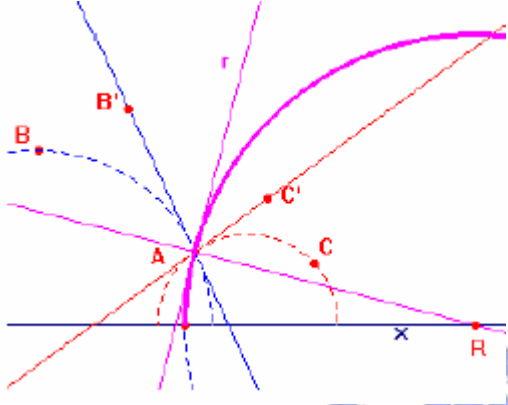
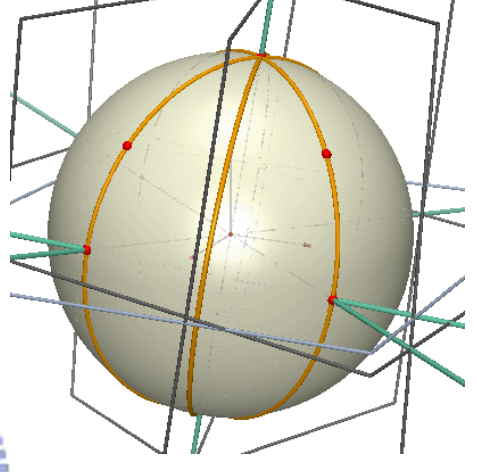
圖 4- 17 two tangents to u-circle from point 球面

- 1、O是圓c的Euclidean center，A'是A對x軸的反射。
- 2、過O、A、A'作圓，與圓c交於S及S'。

- 1、過A作球的polar。
- 2、作直線L過polar及圓外一點P，交球於Pt。

<p>3、$\overline{AA'}$、$\overline{SS'}$交於P點，以\overline{OP}為直徑作圓交圓c於T、T'。</p> <p>4、則T、T'分別為切點且u-lines \widehat{AT}、$\widehat{AT'}$是切線。</p>	<p>3、過Pt作直線L的垂直面交circle於兩點T1、T2，作line PT1、PT2即為切線，T1、T2即為切點。</p>
---	--

6、Angle bisector（角平分線）

 <p>圖 4- 18 Angle bisector 上半</p>	 <p>圖 4- 19 Angle bisector 球面</p>
<p>1、作 $B'AC'$的歐氏幾何角平分線r。</p> <p>2、過A作r的垂直線交x軸於R點。</p> <p>3、則過A且歐氏幾何圓心為R的u-line即為所求的角平分線。</p>	<p>1、球面上三點A、B、C，球心O，過O作\overline{OA}的垂直面，與\overline{AC}、\overline{AB}交於E、F。</p> <p>2、過A作\overline{EF}的垂直面，與球相交的圓即為 BAC之平分線。</p>

4.3 歐氏幾何定理在上半平面及球面上的型態

1、蝴蝶定理

圓上任取一弦 \overline{AB} ，任作過 \overline{AB} 的中點 P 的兩弦 \overline{CD} 、 \overline{EF} ，連 \overline{CF} 、 \overline{DE} 交 \overline{AB} 於 G 、 H ，則 P 為 \overline{GH} 的中點。

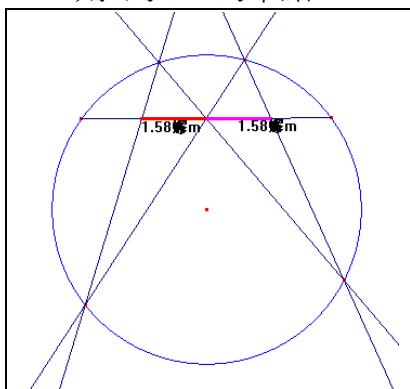


圖 4- 20 蝴蝶定理

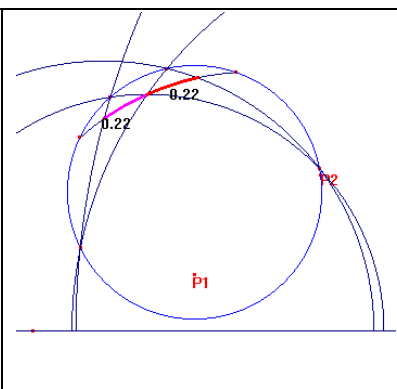


圖 4- 21 蝴蝶定理上半

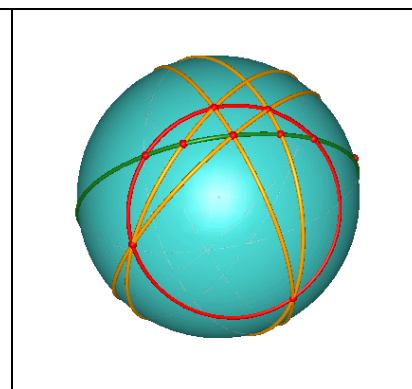


圖 4- 22 蝴蝶定理球面

歐氏幾何證明：

1、作 $\overline{GI} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{GJ} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{HK} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{HL} \perp \overline{CD}$ 。令

$$\overline{PA} = \overline{PB} = x。$$

2、則 $\triangle CGI \sim \triangle EKH$ ， $\overline{CG}/\overline{EH} = \overline{GI}/\overline{HK}$ ， $\triangle FGJ \sim \triangle DHL$ ，

$$\overline{GF}/\overline{HD} = \overline{GJ}/\overline{HL}，\triangle PGI \sim \triangle PLH，\overline{GI}/\overline{HL} = \overline{PG}/\overline{PH}，$$

$$\triangle PGJ \sim \triangle PHK，\overline{GJ}/\overline{HK} = \overline{PG}/\overline{PH}。$$

3、則 $\overline{PG}^2/\overline{PH}^2 = \overline{GI}/\overline{HL} * \overline{GJ}/\overline{HK} = \overline{GI}/\overline{HK} * \overline{GJ}/\overline{HL} = \overline{CG}/\overline{EH} * \overline{GF}/\overline{HD} =$

$$(\overline{AG} * \overline{GB})/(\overline{BH} * \overline{HA}) = (x - \overline{PG})(x + \overline{PG})/(x - \overline{PH})(x + \overline{PH}) = (x^2 - \overline{PG}^2)/(x^2 - \overline{PH}^2)$$

$$\overline{PG} = \overline{GH}$$

Reference: <http://mathworld.wolfram.com/ButterflyTheorem.html>

<http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/Butterfly.shtml>

L. Bankoff(1987), The Metamorphosis of the Butterfly Problem, *Mathematics Magazine*, v 60, issue 4, 195-210

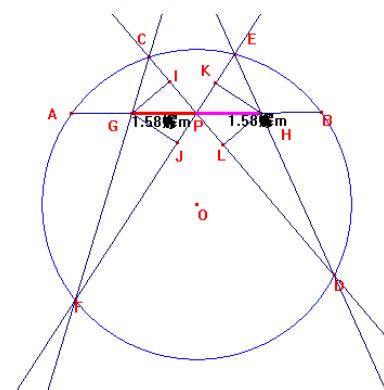


圖 4- 23 蝴蝶定理證明

2、Pappus' Theorem

L1上相異三點A1、A2、A3，L2上相異三點B1、B2、B3，則 $\overline{A_1B_2}$ 、 $\overline{A_2B_1}$ 交點P1， $\overline{A_1B_3}$ 、 $\overline{A_3B_1}$ 交點P2， $\overline{A_2B_3}$ 、 $\overline{A_3B_2}$ 交點P3，P1、P2、P3三點共線。

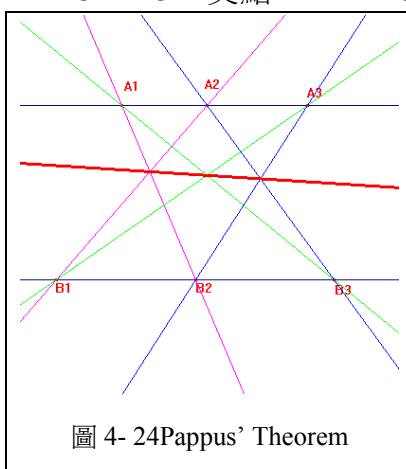


圖 4- 24Pappus' Theorem

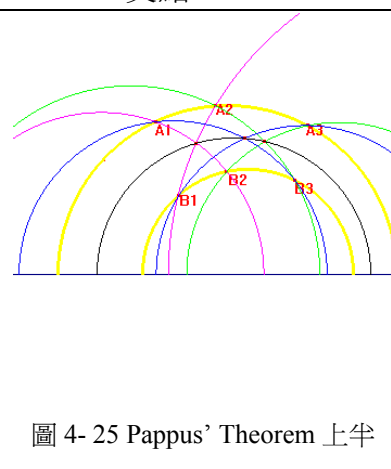


圖 4- 25 Pappus' Theorem 上半

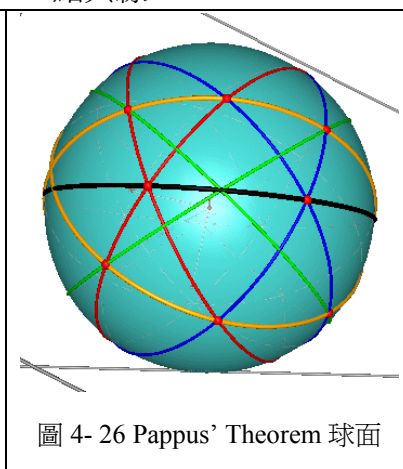


圖 4- 26 Pappus' Theorem 球面

證明：考慮 ΔPQR ，及截線 $B_1P_1A_2$ 、 $A_1P_1B_3$ 、 $A_3P_2B_2$ 、 $A_1A_2A_3$ 、 $B_1B_2B_3$ ，由 Menelaus 定理可得 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{23} 三點共線。

Reference:

<http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/Pappus.shtml>

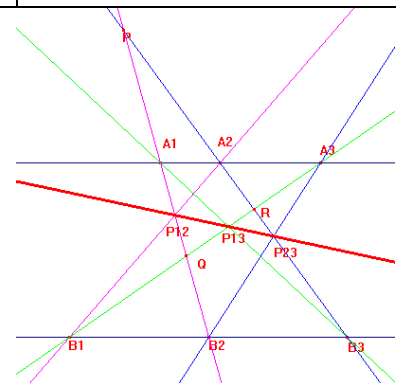


圖 4- 27 Pappus' Theorem 證明

3、Pascal Theorem

若A1,A2,A3,B1,B2,B3共圓，則 $\overline{A_1B_2}$ 、 $\overline{A_2B_1}$ 交點P1， $\overline{A_1B_3}$ 、 $\overline{A_3B_1}$ 交點P2， $\overline{A_2B_3}$ 、 $\overline{A_3B_2}$ 交點P3，P1、P2、P3三點共線。

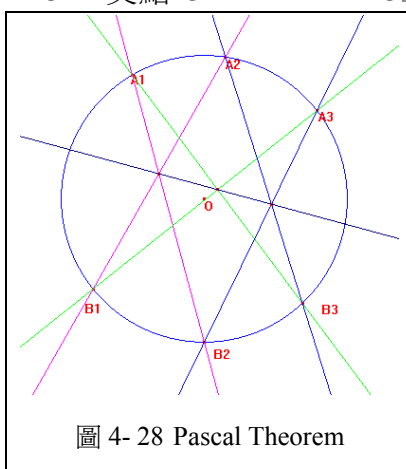


圖 4- 28 Pascal Theorem

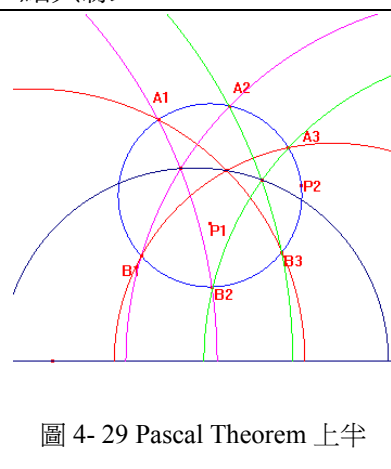


圖 4- 29 Pascal Theorem 上半

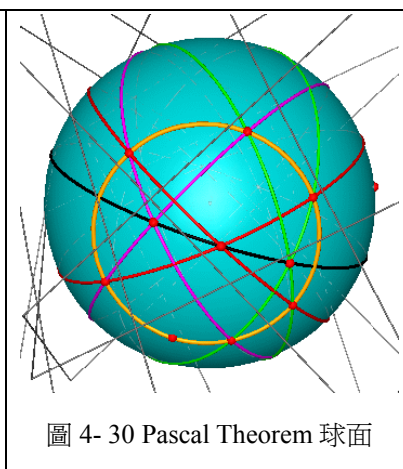


圖 4- 30 Pascal Theorem 球面

Reference: <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Pascal.shtml>

4、Desargues' Theorem

以 O 為投影中心的兩三角形 $\triangle A'B'C'$ 及 $\triangle ABC$ ，若且為若 $\overline{A'B'}$ 、 \overline{AB} 交點 C'' ，
 $\overline{A'C'}$ 、 \overline{AC} 交點 B'' ， $\overline{B'C'}$ 、 \overline{BC} 交點 A'' ，則 A'' 、 B'' 、 C'' 三點共線。

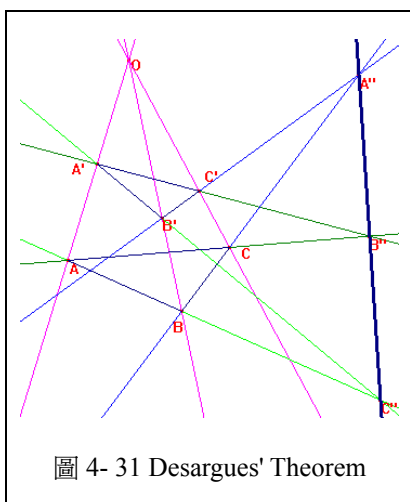


圖 4- 31 Desargues' Theorem

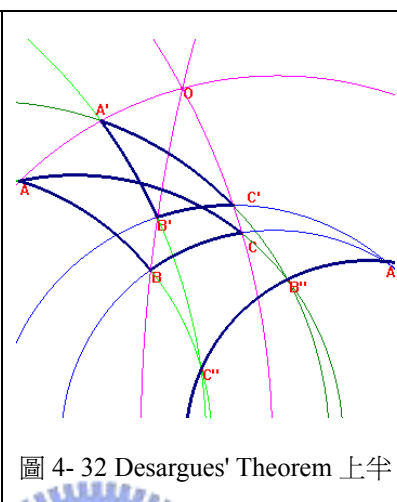


圖 4- 32 Desargues' Theorem 上半

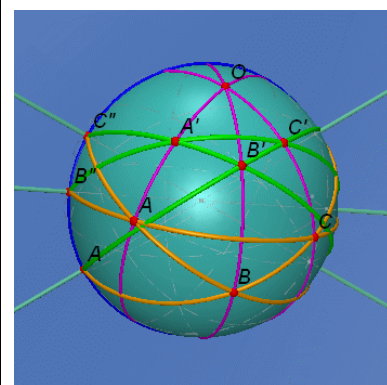


圖 4- 33 Desargues' Theorem 球面

Reference: <http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html>

5、Radical center of the three circle

三圓兩兩相交於兩點，且沒有三圓交於同一點的狀況，則此六點構成的三弦共點。

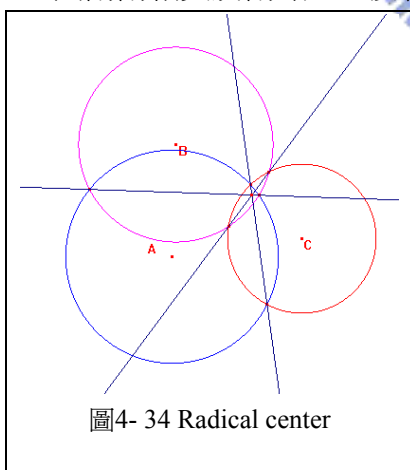


圖4- 34 Radical center

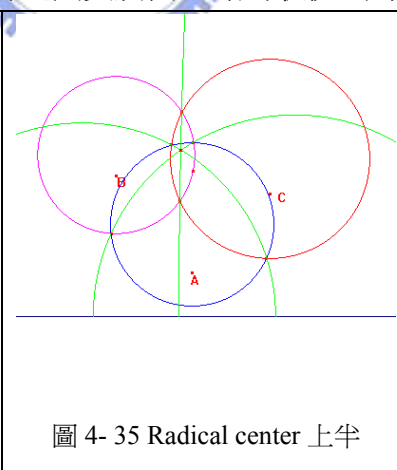


圖 4- 35 Radical center 上半

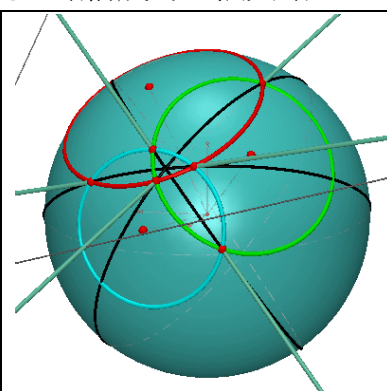
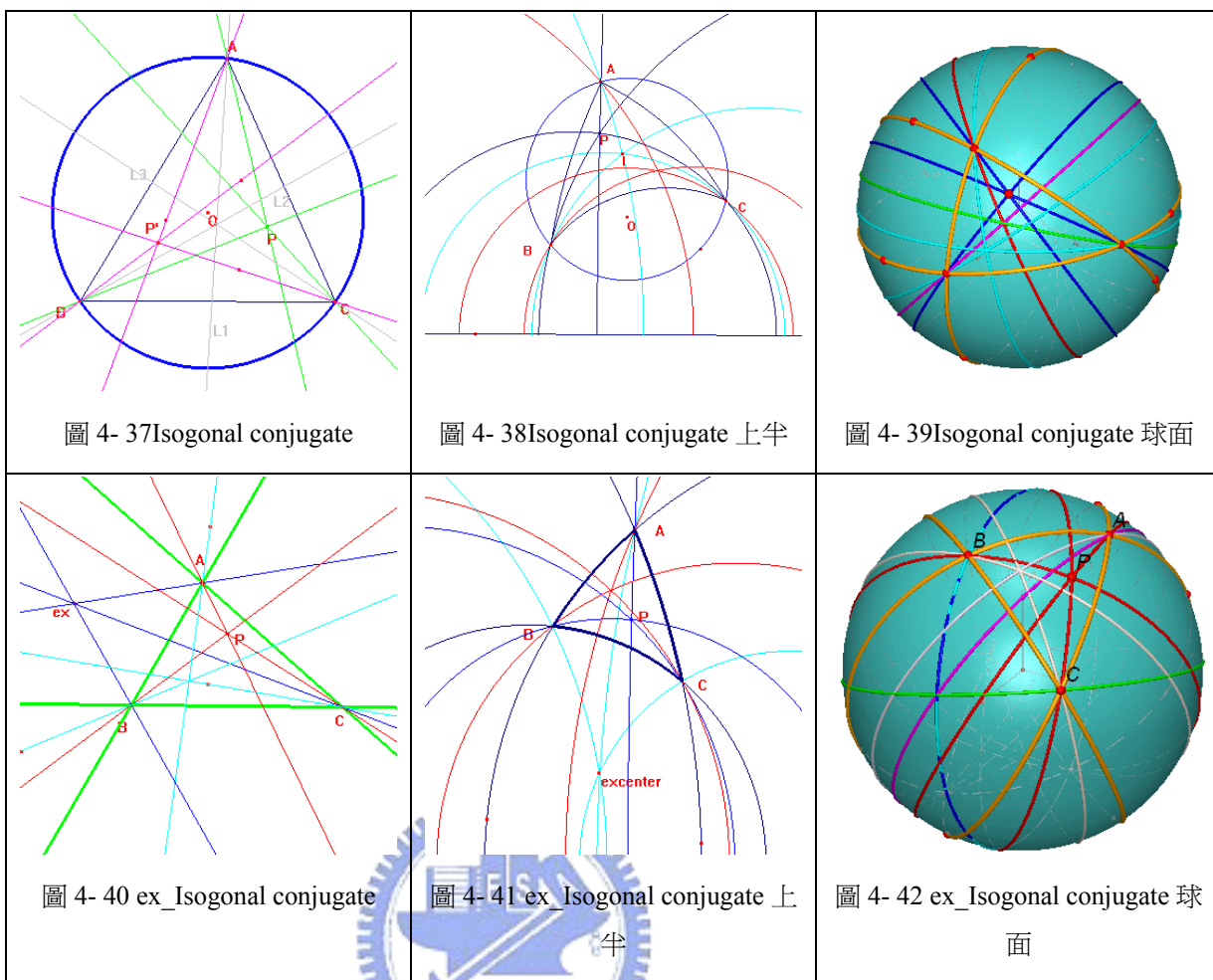


圖 4- 36 Radical center 球面

Reference: <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/RadicalCenter.shtml>

6、Isogonal

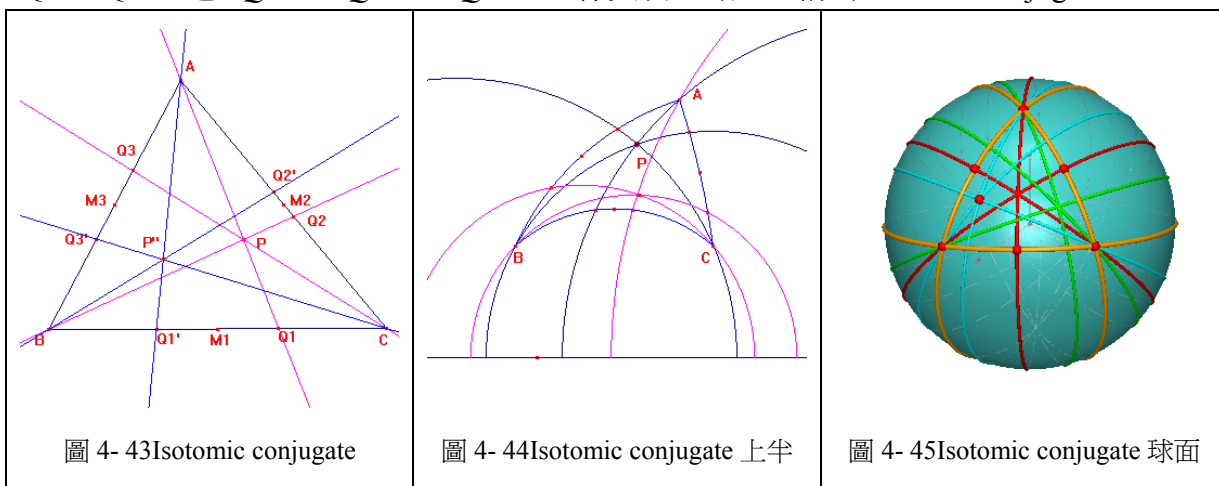
$\triangle ABC$ 做三條角平分線，平面上任取一點不在邊上的 P 點，連接 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、 \overline{CP} 分別對角平分線鏡射，三線交於同一點 P' ，稱為 Isogonal conjugate。



Reference: <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Conjugality.shtml>
<http://mathworld.wolfram.com/IsogonalConjugate.html>

7、Isotomic

取 $\triangle ABC$ 中三邊的中點 M_1 、 M_2 、 M_3 ，及平面上任取一點不在邊上的 P 點，連接 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、 \overline{CP} 交三邊於 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ，分別將 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 對 M_1 、 M_2 、 M_3 反射得 Q_1' 、 Q_2' 、 Q_3' ，連 $\overline{AQ_1'}$ 、 $\overline{BQ_2'}$ 、 $\overline{CQ_3'}$ ，三線交於一點 P' ，稱為Isotomic conjugate。



Reference: <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Conjugality.shtml>

4.4 歐氏幾何定理在非歐幾何上不成立的例子

1、Miquel

$\triangle ABC$ 三邊上各取一點 A', B', C' ，則 $\triangle ABC$ 的三個 Miquel circles 分別過 $AC'B'$, $BA'C'$, 及 $CB'A'$ 。依據 [Miquel's theorem](#), 三個 Miquel circles 交於同一點，此點稱為 [Miquel point](#)。

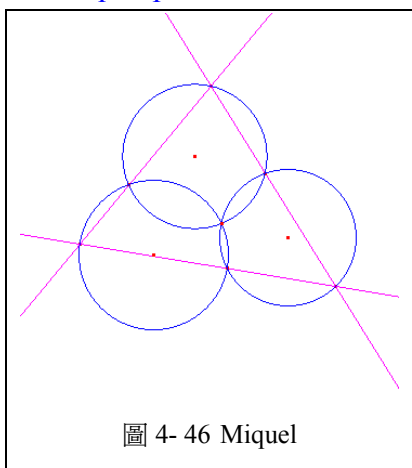


圖 4-46 Miquel

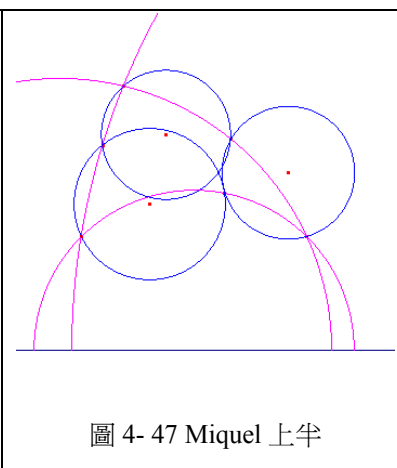


圖 4-47 Miquel 上半

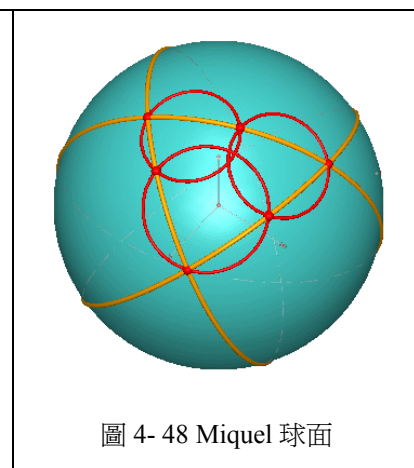


圖 4-48 Miquel 球面

Reference: <http://mathworld.wolfram.com/MiquelsTheorem.html>

2、共圓垂足

$\triangle ABC$ 內部一點 P 對三邊作垂線，垂足分別為 D, E, F ，以此三點作圓交圓於 D', E', F' ，對此三點作垂線則三線交於一點，在上半平面及球面上是否仍成立？

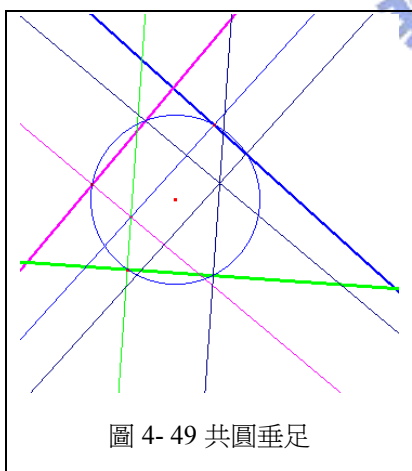


圖 4-49 共圓垂足

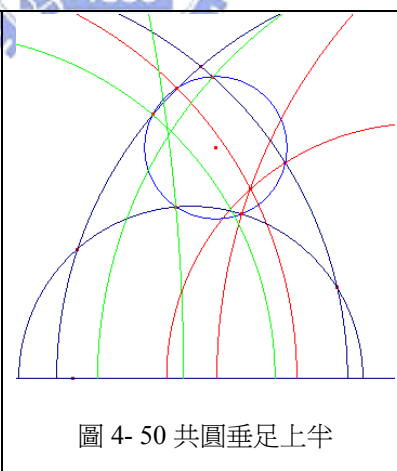


圖 4-50 共圓垂足上半

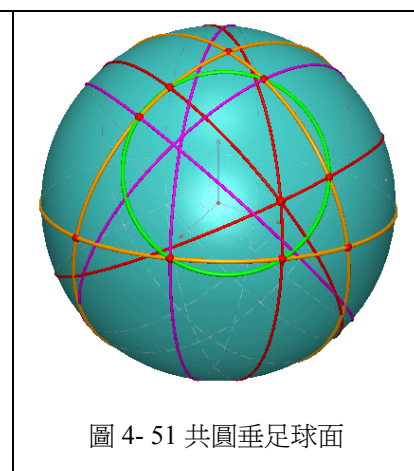


圖 4-51 共圓垂足球面

Reference: <http://sylvestermath.nthu.edu.tw/d2/gc-04/spherical-geometry/6.html>

3、Symmetry midpoint

Lines of the same color are symmetrical with respect to a midpoint. 在上半平面及球面上是否仍成立？

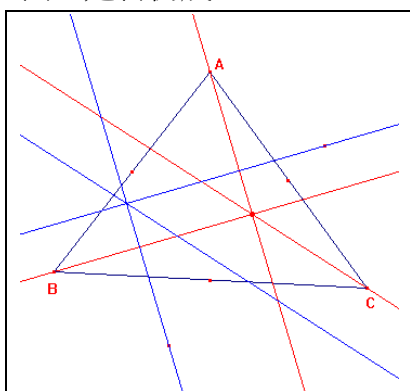


圖 4- 52 Symmetry midpoint

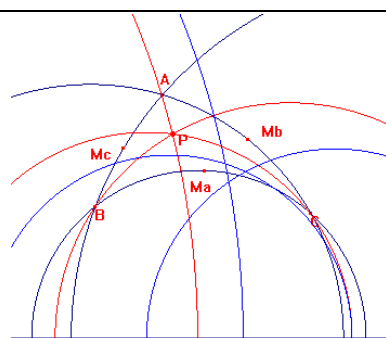


圖 4- 53 Symmetry midpoint 上半

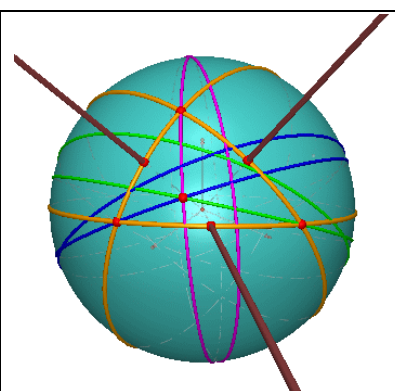


圖 4- 54 Symmetry midpoint 球面

Reference: <http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/gc-04/spherical-geometry/3.html>

4、Fermat point

$\triangle ABC$ 分別以三邊作正三角形 $\triangle ACE$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ABF$ 連 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 三線段交於一點 P，此點稱為 **Fermat point**。 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{CF} = \overline{BE} = \overline{AD}$ ，P 為到三頂點距離和最小的點。

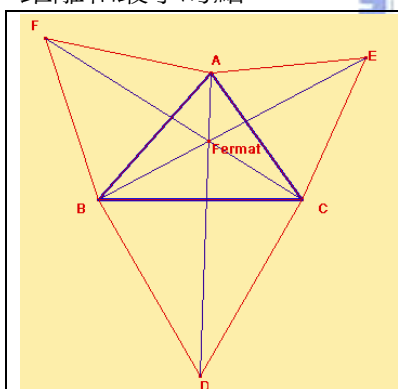


圖 4- 55 Fermat point

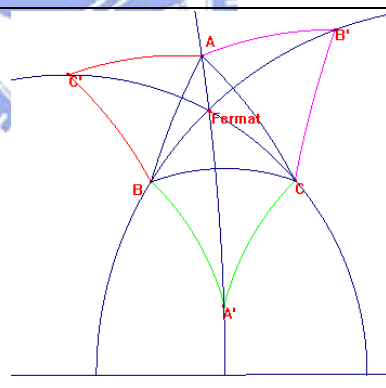


圖 4- 56 Fermat point 上半

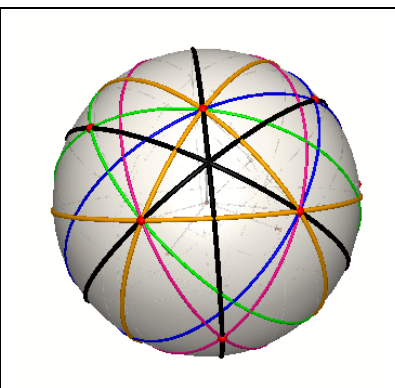


圖 4- 57 Fermat point 球面

Reference: http://www.cut-the-knot.com/Generalization/fermat_point.shtml

第五章 討論與建議

5.1 結果

本研究希望可以透過電腦輔助建構動態學習環境，透過不同的學習理論及使用軟體的特性分別來探討三個方向的問題在教學上的可行性及實例。本研究網頁的設置以（周倩、蔡今中，2003）所題出”發展 Web-base 課程的七個階段”為主要的設計架構，將學習內容分別予以呈現，並透過超連結將不同的學習內容加以連貫。

在第三章中利用 Cabri Geometry 及 Cabri Java 等軟體的特性：可在網頁中以視覺化的方式呈現動態幾何的性質，並透過網頁相關而適當的連結，進行探索三角形中 M-configuration 這個問題。本研究在網頁的設置上使用了認知心裡學在電腦輔助學習課程軟體設計與發展的原則，並與書面的證明方式相互比較，可發現內容的呈現更為視覺化，簡化問題的解法成為較容易被接受的方式，且學習者在學習的過程中因為網頁的設置讓學習者可以自行控制學習的順序、速度，以利學習者主動操弄、探索及重組知識。

第四章中透過 Cabri Geometry、Cabri Java、Cabri3D 等軟體在網頁上的呈現，讓歐氏幾何與非歐幾何（上半平面及球面幾何）產生連結，學習者經由網頁的依序呈現，學習者可依據學習的需求自行控制學習的速度，而概念的學習可從介紹、引導到自行探索，由歐氏幾何引導進入非歐幾何的世界。在網頁內容中，並補充了參考資料的連結，對需要進行延伸學習學習者，提供了更多的資訊來源，提供了與傳統學習不同的學習型態。經由網頁及教學者適當的引導概念的建立，讓學習者可從被動的接受知識轉而主動的進行學習活動。

以上所有的研究結果均透過網頁的呈現，網址為<http://163.19.108.5/~liang/>。

5.2 討論

Cabri Geometry 是在動態幾何學習上的利器，尤其是透過 Cabri Java 的程式碼可讓學習者在沒有 Cabri Geometry 的環境中依然可以透過網路進行觀察，且不會有改變原始檔案的問題，藉此可以重複觀察實驗產生一般化的結論，再則透過適當的超連結將同樣的概念或是相關問題結合，可讓學習者的知識產生結構化的改變。

以往立體幾何雖然也有像 Maple、Mathematical 等軟體，可以透過方程式及程式的撰寫來進行圖形的繪製，但是卻有學習門檻過高、所製作的圖像不夠直觀及圖像一旦完成後即無法進行變動以進行實驗等缺點。

而 Cabri3D 是新發展出的軟體，與 Cabri Geometry 類似皆為動態幾何軟體，主要是針對立體幾何所發展的軟體，學習者可透過尺規作圖的方式對立體幾何進行直觀的學習，並可以透過不同視角觀察及進行實驗，但本研究中並沒有特別著墨

在立體幾何方面，不過針對此部分研究後續將有很大的發展空間。

在本研究中主要針對球面幾何、上半平面模型及歐氏幾何等三方面問題，希望藉著網頁的呈現將不同的幾何體系擺在同一位置進行思考，其中主要是利用 Cabri3D 尺規作圖的方式提出問題讓學習者能夠利用直觀的方式探討球面幾何，並利用網頁的超連結使得兩種（上半平面及球面幾何）非歐幾何與歐氏幾何問題之間產生相關性，而不像以往要學習非歐幾何需要憑空想像導致學習效果不彰。但是，目前的研究僅限於研究一些基礎性質，後續研究者可利用此工具進行更深入的討論。

Cabri3D 這套軟體是使用 XML 的協定進行圖像的繪製，此軟體使用至今覺得幾項缺點尚待克服：

- 1、硬體需求較高，在清大數學圖書館的電腦教室使用本套軟體時，常常會有延遲、甚至當機的情形發生，導致部分學習者學習意願不高，故需要有較強的 CPU、顯示卡及記憶體，才能有較順暢的學習。
- 2、目前在網路的傳遞上不如 Cabri Geometry 來的便利，主因為尚未有類似 Cabri Java 的模組，故需要有 Cabri3D 的軟體才能閱讀並學習放在伺服器上的檔案，故在學習及資訊傳遞上造成相當大的阻礙。
- 3、在 Cabri Geometry 中有一項極為良好的設計，即是依之前作圖的過程重新作圖，但在 Cabri3D 中卻無法記錄作圖的流程，這使得在網頁或檔案的傳遞上僅能呈現已完成的圖像，這樣並不利於學習者學習。故需透過文字記錄作法，並利用網頁方能將資訊完整呈現。
- 4、在*.cg3 嵌入 Internet explorer 放上伺服器後，如果網頁製作使用到框架的結構，容易發生無法讀到檔案的狀況。

這些缺點仍待 Cabri3D 後續版本進行更新，尤其是第 2 及第 3 點是較為急需改進的部分，使得網路上的學習者或使用者可以更容易使用本軟體所製作出來的數學學習素材，或是透過此軟體的使用更能輕易學習立體幾何。

5.3 建議

數學教師在傳統幾何教學的過程中往往會遇到許多的數學內容，無法透過較為直觀、動態的方式呈現，容易造成學習者的學習成效低落，而現在電腦及網路發達正可以提供教學者及學習者有別於傳統教學方式來進行教與學。但在眾多的學習內容及電腦軟體中，並非全都適合透過電腦學習，更需要適性化的選擇教材及軟體時。再則，由於一份教材從開發、修正到成熟，需要大量的人力，而目前有許多的研究者針對許多學習的內容開發了不同的教材，但是受限於學校的軟硬體設備的缺乏、教師資訊能力的不足、及教材內容的封閉性，容易造成人力的重複、時間的浪費，且無法達到教材設計者原先預期的效果。若能透過適當的整合這些學習內容，並開發更多且適當的數學素材模組，以提供教學者及學習者完整且有系統的學習環境，並針對數學教師提供軟體的教學，以激發更多的想法及更

多樣的學習素材。除此之外，還需改進學校的硬體及軟體環境，現在新竹市的國中小每班至少有一台電腦，但是由於資訊教室的缺乏，在教學的時候充其量只能當作示範的平台，而無法讓學生在學習的過程中真正的進行操作，提供直接實驗的機會。只有在硬體、軟體、教材及教師資訊素養四方面提升之下，將資訊融入教學的遠景才能真正的落實。



參考文獻

- A. Myakishev (2003), "The M-Configuration of a Triangle", Forum Geometricorum, Volume 3. 135–144.
- Botana F., & Valcarce J. L. (2002). "A dynamic-symbolic interface for geometric theorem discovery". Computers & Education 38 (2002) 21–35.
- Chou, C., & Tsai, C. C. (2003). "Developing Web-based curriculum: Issues and challenges". Journal of Curriculum Studies, 34(6), 623-636.
- C. Kimberling (1998), "Triangle centers and central triangles", Congressus Numerantium, 129 1–285.
- C. Kimberling (1994), "Central points and central lines in the plane of a triangle", Math. Magazine, 67 163–187.
- C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, May 23, 2003 edition available at <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- Colette, L.(2000), "Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts For The Complex Activity of Proving". Educational Studies in Mathematics, Kluwer Academic Publishers. Netherlands, 44: pp151–161.
- E. Roanes -Lozano & E. Roanes –Macias.(2003). "A bridge between dynamic geometry and computer algebra". Mathematical and Computer Modelling , 37 1005-1028.
- George Polya (1953/1992) 。 How to solve it 。閻育蘇（譯），張公緒（校）。怎樣解題。台北：九章出版社。
- George Polya (1957/1993) 。 Mathematics and Plausible Reasoning 。李心煽、王日爽、李志堯（譯），張理京、楊祿榮（校）。數學與猜想。台北：九章出版社。
- G. L. EBERT(2001), *Constructions in Finite Geometry Using Computer Algebra Systems*, J. Symbolic Computation, Academic Press 31, pp55-70
- Jean M. Laborde & Frank Bellemain(1998), *Cabri Geometry II*, Texas instruments, Software.
- Jean M. Laborde & Eric Bainville(2004), *Cabri 3D*, Cabrilog team, Software.
- P.Yiu (2000), "The Clawson Point and Excircles", Unpublished.
- P.Yiu, "Introduction to the Geometry of the Triangle", Summer 2001, version 2.0402, Unpublished.
- Tsai, C.-C. (2001) The interpretation construction design model for teaching science and its applications to internet-based instruction in Taiwan. International Journal of Educational Development, 21 (5), 401--415.
- 左台益，梁勇能（民90）。「國二學生空間能力與van Hiele幾何思考層次相關性研究」。師大學報四十六卷第一、二期【科學教育類】。國立台灣師範大學。
- 左銓如、季素月（民87）。初等幾何研究（pp.180-181）。台北：九章出版社。
- 全任重（民85）。「圓規、直尺與Cabri-geometre」。數學傳播，20（1），3-14。
- 全任重（民88）。「高等幾何動態化研究(三)」(國科會專題研究成果報告，

NSC-88-2511-S-007~5)。國立清華大學。

全任重(民 89)。「網路上的動態幾何」(國科會專題研究成果報告，89-2511-S-007-008)。國立清華大學。

全任重(民 90)。「CabriJava 與非歐幾何」(國科會專題研究成果報告，90-2521-S-007-001)。國立清華大學。

全任重(民 92)。「Cabri Geometry 與動態幾何」(國科會專題研究成果報告，91-2520-S-007-005)。國立清華大學。

全任重(民 93)。幾何作圖課，<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/d2/gc-04/>。

全任重(民 91)。幾何作圖課，<http://steiner.math.nthu.edu.tw/disk3/gc-02/index.html>。

全任重(民 92)。數學實驗課，<http://steiner.math.nthu.edu.tw/disk3/exp-03/index.html>。

李政豐(民 92)。「資訊科技融入數學教學模組實務的研究」。國立交通大學網路學習碩士專班論文。

李政豐(民 91)。數學公式：圖說公式證明。萬腦奔騰數學網：數學科學和資訊科技共舞，交大理學院，未出版，台灣新竹。

李偵生(民 91)。「發展數學科 GSP 教學模組之行動研究—以商高定理為例」。國立高雄師範大學數學系碩士論文。

李俊儀(民 92)。「資訊科技融入數學教學模組之開發與研究---以國中平面幾何基礎課程教學為例」。國立交通大學網路學習碩士專班論文。

陳國唐(民 92)。「建構動態數學學習環境之研究」。國立交通大學網路學習碩士專班論文。

侯結材(民 91)。「上半平面模型中的一些工具」。國立清華大學數學系碩士學位論文。

侯結材(民 91)。幾何實驗室，<http://steiner.math.nthu.edu.tw/ne01/jth/>。

許志農(民 86)。「算數與幾何」。國立台灣師範大學數學系，未出版。

黃俊榮(民 92)。「幾何探索軟體之開發與應用」。國立交通大學網路學習碩士專班

論文。

梁勇能（民 89）。「動態幾何環境下，國二學生空間能力學習之研究」。國立台灣師範大學數學研究所數學教育組碩士論文。

趙文敏(民76)。 大學微積分(上)，書銘出版事業有限公司。

趙文敏(民77)。 大學微積分(下)，書銘出版事業有限公司。

顏貽隆（民 91）。「建構互動式學習環境實務之研究」。國立交通大學網路學習碩士專班論文。

