

第四章 研究結果與討論

本研究主要在探討線上討論融入數學寫作過程對於學生數學學習成就與數學學習態度之影響，及分析實驗組學生在線上討論融入數學寫作過程中之解題想法，因此本章首先以量化資料說明線上討論融入數學寫作活動對於學生數學學習成就表現及數學學習態度之影響，再以質化資料分析討論學生在線上討論融入數學寫作過程中所呈現的內容。

第一節 線上討論融入數學寫作活動對學生數學學習成就之影響

為探討實施線上討論融入數學寫作活動對於學生數學學習成就之影響，先以表 11 描述實驗處理後學生在數學學習成就測驗得分之平均數及標準差。表 11 顯示實驗組的分數 ($M=75.13$) 高於控制組 ($M=69.52$)，且在同一數學能力水準層面中，實驗組低、中、高三組的平均分數 ($M=108.14$ ； $M=89.23$ ； $M=33.70$) 均高於控制組的平均數 ($M=100.60$ ； $M=71.14$ ； $M=21.86$)。

表 11 實驗處理與學生各數學能力水準之學習成就平均數及標準差

數學能力	實驗組			控制組		
	人數	平均數	標準差	人數	平均數	標準差
	31	75.13	34.27	31	69.52	35.85
高能力組	7	108.14	9.84	10	100.60	14.25
中能力組	14	89.23	15.36	14	71.14	25.72
低能力組	10	33.70	19.03	7	21.86	20.52

註：測驗得分最高為 122 分，最低為 0 分

為了解實驗組與控制組學生在實驗處理之後，其數學學習成就之間是否有顯著差異及探討實驗處理與學生數學能力水準間的關係，本研究以實驗處理及學生數學能力水準為自變項，以實驗組與控制組學生在研究者自編測驗之得分為依變項，並以其在「國中系列學業性向測驗」之得分為共變項，進行二因子共變數分析。

首先進行組內迴歸係數同質性檢定，結果顯示 F 值 = 1.587 ($p=.214$) 未達顯著差異，顯示符合組內迴歸係數同質性的假定，可進行共變數分析。

共變數分析之結果如表 12。

表 12 實驗處理與學生各數學能力水準之學習成就共變數分析摘要表

變異來源	SS'	Df	MS'	F 值	P
實驗處理	1578.954	1	1578.954	4.397	.041*
數學能力	28669.933	2	14334.967	39.923	.000***
實驗處理 x 數學能力	363.661	2	181.831	.506	.605
誤差	19389.487	54	359.065		

註：* $p < .05$ *** $p < .001$

表 12 顯示實驗處理與數學能力水準的交互作用，其 F 值 = .506 ($p = .605$) 未達顯著水準，表示不同教學方法與不同數學能力水準對學生的學習成就表現無交互作用，研究假設二未獲得支持。

接著進行實驗處理之主要效果考驗，表 12 顯示實驗組與控制組在學習成就調整後平均數之間的差異達顯著水準 ($F = 4.397, p < .05$)，表示學生數學學習成就的高低會因所接受教學方法的不同而有顯著差異，研究結果顯示實驗組的平均得分 (76.49) 顯著優於控制組 (65.32)。因此，研究假設一獲得支持，此結果與林文忠 (2002) 研究所得結果相似，即實驗組經過線上數學寫作活動後，其解題能力表現顯著優於控制組。

第二節 線上討論融入數學寫作活動對學生數學學習態度之影響

為了解實施線上討論融入數學寫作活動對於學生數學學習態度之影響，本研究依據學生在「數學學習態度問卷」中各題的回答內容分析其對數學的喜好程度。首先以獨立樣本 t 檢定探討實驗組與控制組學生其數學學習態度是否有顯著差異，再以相依樣本 t 檢定探討實驗組學生其前後測數學學習態度是否有顯著差異，最後根據研究發現進行討論。

一、實驗組與控制組「數學學習態度問卷」之後測比較

研究者依學生於問卷描述語句中所呈現的態度傾向給予 1、3、5 分共三個等級，表 13 呈現實驗組與控制組學生在「數學學習態度問卷」後測中各題所得之 t 考驗、平均數及標準差。

表 13 不同實驗處理之學生其數學學習態度傾向後測之 t 考驗、平均數及標準差

組 別	題目	平均數	標準差	t 值
實驗組	一	3.06	1.50	-.629
控制組		3.32	1.72	
實驗組	二	4.48	1.15	.568
控制組		4.29	1.51	
實驗組	三	2.94	1.31	-1.663
控制組		3.45	1.12	
實驗組	四	1.90	1.45	-.090
控制組		1.93	1.42	
實驗組	五	3.90	1.54	.555
控制組		3.69	1.44	
實驗組	全部問題	3.26	.75	-.512
控制組		3.36	.76	

由表 13 可知，實驗組與控制組學生在數學學習態度問卷之整體平均得分依序為 3.26 及 3.36，實驗組得分略低於控制組，但未達顯著差異 ($t = -.512, p > .05$)，表示實驗組學生在實施線上討論融入數學寫作活動之後，其數學學習態度未明顯優於控制組學生，因此研究假設三未獲得支持。

此外，從各題中平均得分可知，實驗組與控制組學生在第一題「你喜歡數學嗎？」，其得分依序為 3.06 及 3.32，且實驗組對於數學的喜好大部分傾向尚可（喜歡：9 人；尚可：14 人；不喜歡：8 人），控制組則是傾向喜歡（喜歡：14 人；尚可：8 人；不喜歡：9 人）。第二題「你覺得學習數學對你的日常生活有沒有什麼幫助？」此題中，實驗組與控制組平均分數較高（實驗組：4.48，控制組：4.29），即多數學生認為學習數學是有用處的。第三題「你在學校上數學課時的心情如何？」，實驗組平均得分為 2.94，控制組為 3.45，且實驗組（喜歡：6 人；尚可：18 人；不喜歡：7 人）及控制組（喜歡：9 人；尚可：20 人；不喜歡：2 人）的大部分學生其態度皆傾向尚可。在第四題「你對自己的數學成績滿意嗎？」，實驗組與控制組平均分數較低（實驗組：1.90，控制組：1.93），顯示多數學生不滿意其數學成績。在第五題「你喜歡老師上數學課的方式嗎？」，實驗組平均得分為 3.90，控制組為 3.69，且實驗組（喜歡：19 人；尚可：7 人；不喜歡：5 人）及控制組（喜歡：14 人；尚可：11 人；不喜歡：4 人）的大部分學生

表示喜歡老師的上課方式。

二、實驗組「數學學習態度問卷」之前後測比較

表 14 呈現實驗組學生在「數學學習態度問卷」前後測中各題所得之 t 考驗、平均數及標準差。

表 14 實驗組學生其數學學習態度傾向前後測之 t 考驗、平均數及標準差

測量階段	題數	平均數	標準差	t 值
前 測	一	3.19	1.49	.373
後 測		3.06	1.50	
前 測	二	4.74	0.86	1.072
後 測		4.48	1.15	
前 測	三	2.87	1.26	-1.000
後 測		2.94	1.31	
前 測	四	1.45	0.99	-1.880
後 測		1.90	1.45	
前 測	五	3.65	1.66	-.941
後 測		3.90	1.54	
前 測	全部問題	3.18	0.77	-.528
後 測		3.26	0.74	

由表 14 可知，實驗組學生在「數學學習態度問卷」前後測之整體平均得分依序為 3.18 及 3.26，後測得分略高於前測，但未達顯著差異 ($t = -.528, p > .05$)，表示實驗組學生在實施線上討論融入數學寫作活動之後，其數學學習態度未明顯優於實驗前，因此研究假設四未獲得支持。

此外，從各題中平均得分可知，實驗組學生在「數學學習態度問卷」後測中的第三、四、五題之數學學習態度較前測正向，即實驗組學生在實施線上討論融入數學寫作活動後，能減低對數學的焦慮程度、對數學成績較為滿意及更喜歡教師的教學方式。

接著，研究者以下表 15 來呈現實驗組低、中、高三組不同數學能力之學生在「數學學習態度問卷」上其態度改變傾向之情形。

表 15 實驗組學生其數學學習態度改變傾向之人數一覽表

題 目	正向態度改變 之人數 (人)	合計 (人)	負向態度改變 之人數 (人)	合計 (人)
一	高能力組 1	3	高能力組 0	4
	中能力組 2		中能力組 3	
	低能力組 0		低能力組 1	
二	高能力組 0	1	高能力組 1	4
	中能力組 0		中能力組 2	
	低能力組 1		低能力組 1	
三	高能力組 1	8	高能力組 4	8
	中能力組 2		中能力組 3	
	低能力組 5		低能力組 1	
四	高能力組 1	9	高能力組 3	5
	中能力組 4		中能力組 2	
	低能力組 4		低能力組 0	
五	高能力組 2	7	高能力組 2	6
	中能力組 3		中能力組 3	
	低能力組 2		低能力組 1	

由表 15 得知，實驗組學生在實施線上討論融入數學寫作活動後，其數學態度呈現正向之人數與呈現負向之人數差距不多，但呈現正向態度改變者，多屬於低能力組學生，而呈現負向態度改變者，則多屬於中、高能力組學生。

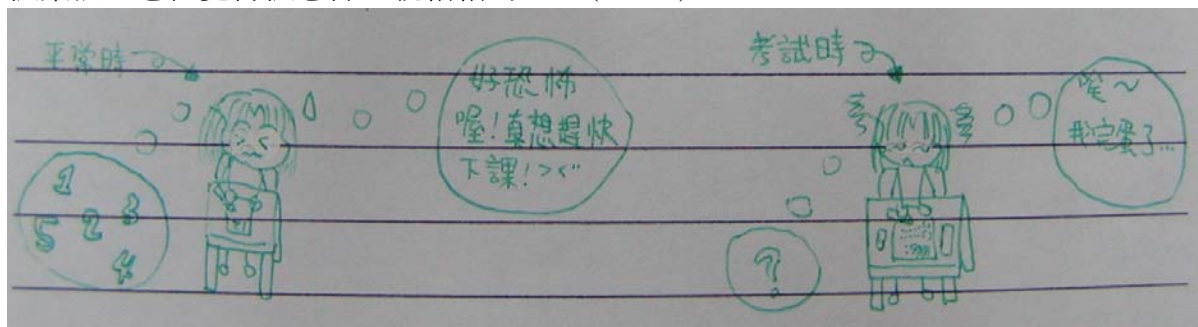
三、討論

本研究發現實驗組學生在接受線上討論融入數學寫作課程後，其數學學習態度與控制組學生無異，且實驗組學生其前後測數學態度亦未有顯著改變，即實施線上討論融入數學寫作活動並未顯著改變實驗組學生對數學的學習態度，此部分研究結果與薛麗卿（1998）、袁媛（2003）相似。

推究其原因，可能是由於學生自小學一年級即接受數學的學習，期間已經過六年的學習，對數學此科目已持有一定的態度，即使線上討論融入數學寫作課程可稍微提高學生的學習興趣，但態度是持久且一致性的行為傾向，無法在短時間內改變。此外，數學學習態度與數學學習興趣有關，

又數學學習興趣主要取決數學成績的高低(陳容枝, 2003), 而國中數學課程的難度比國小高許多, 可能導致成績不如國小, 結果就如同本研究「數學學習態度問卷」結果所示, 學生不滿意其數學成績; 再加上家長與教師對學生數學成績的要求, 更讓學生對數學學習產生焦慮感, 進而影響其數學學習態度(邱俊仁, 2003), 如同下圖實驗組學生所描述。

很緊張, 心裡覺得很恐怖, 就糟糟的><!(12925)



雖然實施線上討論融入數學寫作活動並未明顯改變實驗組學生對數學的喜好程度, 但是有 19 位學生在態度問卷後測中表示用電腦來學習數學十分有趣、輕鬆, 可以藉由親自操縱電腦來討論課外的數學題目, 不僅容易理解且能增加課外的數學知識。其中更有 2 位學生表示實驗前的數學課有些古板、上課氣氛嚴肅, 因而不喜歡上數學課, 但是在實驗過後, 其態度有明顯的轉變, 認為:

課業輔導課用電腦上數學真不錯, 這樣的上課方式很特別, 我還以為國中數學課有多可怕多討厭, 但老師讓我了解上數學課原來也能這麼輕鬆。(12916)

課業輔導課去電腦教室上, 比較會寫出自己真正的問題, 不會隨便寫寫, 應付老師。(12933)

由上述學生的回饋可得知, 實施線上討論融入數學寫作活動的上課氣氛較傳統教學方法輕鬆、活潑, 亦提升學生學習數學的興趣。

第三節 實驗組學生在線上討論融入數學寫作過程中之解題想法

為了解實驗組學生在線上討論融入數學寫作過程中的解題想法, 本研究首先依據劉祥通、周立勳(1997)所分類的數學寫作活動內容, 界定研究者所設計的線上討論之題目是屬於某類的數學寫作內容, 再分析該題學

生所呈現的寫作內容。

一、記事 (logs)

題目 (二 Q1)：對於第一單元的「1-1 以符號代表」、「1-2 認識等量公理」、「1-3 圖像解題與符號記錄」及「1-4 媽媽的生日」，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，有 29 位學生對於此單元寫出自己的問題。其中 11 人表示對於化簡一元一次式有學習上之困擾；12 人表示對於如何解一元一次方程式有學習上之困擾；6 人表示對於應用問題有學習上的困擾。以下就上述三種狀況加以說明。

1. 在化簡一元一次式部分：學生的困擾來自於去括號及變號的運算，尤其是含有負係數的算式（例如：化簡 $-(-3x+2)-x$ ）。原因可能是在九年一貫能力指標中，將負數相關的單元編排在八年級（國二），因此各教材出版社未在國一教材中編列負數相關單元，以致當學生自我評量時，一旦接觸到算式含負係數的題目，會較不熟悉負數符號運算規則，不會化簡。

*變號比較不會，負號什麼變蝦咪的，我不懂耶，例如： $2\{-2(2x+5)\}$ 。(020117)
我覺得是括號部分比較搞不懂，因為滿複雜，例如： $7x-2(x-2)$ 。(020132)*

2. 在解一元一次方程式部分：學生反應較不瞭解移項法則及方程式係數含有小數的求解問題。學生在解方程式時多以等量公理的概念來處理，即算式兩邊作同加、同減、同乘、同除的運算（例如： $X-3=2$ ，兩邊同時加 3，成為 $X-3+3=2+3$ ，得到 $X=2+3$ ）；而移項法則是承接等量公理運算的結果（例如： $X-3=2$ ，經過等量公理的運算，得到 $X=2+3$ ），比較 $X-3=2$ 與 $X=2+3$ 此兩數學代數式，即可發現，原本在等號左邊的負 3，移到右邊之後會變成正 3，此就是移項的概念。

整體來說，等量公理跟移項法則皆可解出方程式的未知數。但課本教材只介紹等量公理，未說明解方程式亦可使用移項法則，導致學生較不熟悉移項的運算規則，有可能在數字、符號移項的變號上出問題。至於係數含有小數的方程式，可能是學生對於小數運算的效率不佳，例如 $1.56x=10$ ，

可以將小數點往後移一位快速解出答案，但學生大多使用直式運算方式計算，雖然可以算出答案，但較費時。

移項法則-移來移去還要變號，有時會忘記，例如： $2x=x+3$ 。(020108)

解一元一次方程式，例如： $1.2(x-0.5)-0.7x=1.4$ 。(020124)

3. 在應用問題方面：學生的困擾大多是不知如何把一般的文字敘述，轉化成數學方程式。事後與家長的對談中得知，學生的中文程度有較弱的現象，導致不懂題目的意思，對於瞭解題意的能力較欠缺。

應該是應用問題的部份，例如：小安與同學佈置校慶會場，發現4條童軍繩與285公分的繩子連的長度等於5條半的童軍繩連成的長度，問1條童軍繩的長度是多少？我不懂得怎麼列算式。(050117)

例如：一瓶可樂倒滿4個杯子~還剩下540ml，如果倒滿6個杯子剩下50ml，請問這瓶可樂有多少ml？我不太知道要怎麼列式~所以不太會算嚕^^"。(050122)

應用問題的地方，舉例一個撲滿裡有5元硬幣及50元硬幣兩種，5元硬幣有x元，50元硬幣比5元硬幣多4個，已知撲滿裡共有1300個，問5圓及50元硬幣各幾枚，不知道該從何算起。(050109)

從學生的寫作內容中，研究者亦發現，學生對於簡化一元一次式 $(x+8) + (2x+4)$ 與解一元一次方程式 $(x+8) + (2x+4) = 0$ 的算法會混淆，前者是以去括號、同類項合併來簡化，後者則需再加上使用等量公理或移項法來求解未知數。學生往往在求後者時，會在算式前面多出「=」的符號，如下所示，與簡化一元一次式的過程混淆。

$$\begin{aligned} & (x+8) + (2x+4) = 0 \\ & = x+8+2x+4 = 0 \\ & = 3x+12 = 0 \\ & = 3x = -12 \\ & = x = -4 \end{aligned}$$

經過線上討論融入數學寫作的活動，發現學生在此單元有上述的困擾，因此研究者在教學時的補救處理如下：首先叮嚀學生簡化一元一次式與解一元一次方程式此兩者的差異，接著再加強學生對於文字符號、等號

及去括號的運算，使學生瞭解運算的規律。至於解應用問題方面，其重點在於轉譯能力的訓練（袁媛，1992），亦即加強學生對於一般文字敘述轉化成數學方程式。

題目（三 Q1）：對於第二單元的「2-1 數的規律」及「2-2 奇數與偶數」，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，有 30 位學生對於此單元寫出自己的意見。其中 12 位學生表示對此單元較沒問題，18 位學生則表示有以下三種問題：

1. 不會以代數式表示數列規律的一般項：9 位學生表示對於求整數數列第 N 項的一般式有困難，例如以文字符號來表示數列的第 N 項。

呃...我感到不會的問題是...

例如：第一列： $1 \setminus 2 \setminus 3 \setminus 4 \setminus 5 \setminus 6 \setminus 7 \setminus \dots \setminus N$

第二列： $5 \setminus 8 \setminus 11 \setminus () \setminus 17 \setminus () \setminus 23 \dots ()$

就是 $(3N+2) \dots$ 之類的 \uparrow 。(030131)

研究者從課堂中發現，學生知道數列呈現何種規律，瞭解項與項之間差了多少，但大多不會使用未知數來表示數列第 N 項，顯示學生對於運算數列規律一般式仍有困難。由（二 Q1）與（三 Q1）學生提出的問題可發現，學生較不熟悉亦不熟練文字符號的運算，例如：解方程式、化簡算式、找數列一般項。

2. 較難察覺出複雜數列的規律：3 位學生對於求分數數列第 N 項的數值有學習上的困難，例如： $1/2, 2/3, 3/4, 4/5 \dots$ ，此數列第 30 個數是多少？

我在 2-1 的數的規律比較有問題，例：觀察下列分數出現的規律： $1/1, 2/1, 1/2, 3/1, 2/2, 1/3, 4/1, 3/2, 2/3, 1/4 \dots$ 請問 $3/6$ 排在第幾個數上？因為..就是很難懂。(030124)

應用問題，指定開頭的兩個數，並令下一個數為前二數之和，按此規則依順序寫出數字，例如： $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 。請問第 10 個數字為奇數還是偶數？(030140)

我覺得我在數的規律比較有問題，例如：因為還要算出總和，如果數很多的話還要一直算。(030115)

研究者發現這些數列多屬於兩種數列的合成，與教材中出現之例子大多不相同，其規律亦較複雜且難以察覺，因此學生觀察這些數列規律時就會產生困擾。例如：分數的數列規律牽涉到兩種數列規律的合成，可能造成學生在數列規律的觀察時產生錯亂情形；而奇、偶的數列規律問題則屬費波納契數列，依其出現奇數、偶數的規律而言，是屬遞迴數列的一種，其數列的數字規律依序為奇、奇、偶、奇、奇、偶……，此與學生所認知的奇、偶、奇、偶……此一般的數列規律不同，因此當學生以既有的認知概念去詮釋新概念時，可能會無法立即觀察出數列規律。

3. 不會描述數列的規律現象：2 位學生對於要如何來描述日曆規律有困難。

例如：觀察星期日直行的數列：4 號、11 號、18 號、25 號，你發現有什麼規律？(030111)

從學生寫出的問題中，研究者觀察到學生不太會描述數列呈現的規律現象。但題目若改成計算數列的某項，例： $\{4, _, 18, 25\}$ ，多數的學生都可求出空格處是 11。換句話說，求出數列某項對學生而言還算容易，但要用自己的話描述這個數列所呈現的規律現象則有困難。

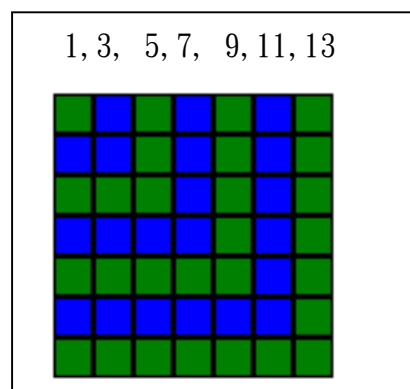
題目（四 Q1）：我們在上星期已經學過了第二單元「2-3 數型關係」，對於這些單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂？（請同學具體地寫出自己的問題）

全部 31 位學生中，有 30 位學生對於此單元寫出自己的意見，其中 13 位學生表示對此單元較沒問題，17 位學生表示較無法察覺複雜的數型呈現何種規律，因此若要求學生解出數列中的某項或數列的總和時便出現困難，例如：「求出數列（如下所示）第十列的第五個數？求出第一列到第十列總共有幾個數字？」

題目： 1
2, 3
4, 5, 6
7, 8, 9, 10
11, 12, 13, 14, 15
⋮
⋮

研究者發現學生可能對「2-1 數的規律」及「2-2 奇數與偶數」這兩個單元的概念尚未理解，較難的課程又接踵而至，導致學生產生更多的問題。此外，研究者從學生的聯絡簿亦發現，學生對於求數型關係總和的題目，若不會掌握其規律並利用規律來求解時，則學生會使用逐項累加的方式來計算數型的總和，例如：求 $1+2+3-4+5+6+7-8+\dots+37+38+39-40$ 的總和，學生會從 $1+2$ 先運算，再計算 $+3$ ，再計算 -4 ， \dots 直到 -40 ，雖然這個方式一樣可算出正確答案，但相對而言會花較多的時間在運算上。

由於學生在 (二 Q3) 表示傾向於喜歡使用圖像來解題，因此研究者在事後的補充說明中將題目轉化成圖形，再來進行教學。例如：求 $1+3+5+7+9+11+13=?$ 剛好可以轉化成邊長為 7 之正方形 (如右圖)，所求的答案恰巧是正方形的面積： $7 \times 7 = 49$ 。學生得知此數型關係之後，第一時間的反應覺得十分神奇，認為怎會如此恰巧竟然可使用這方法來計算，似乎學生在這樣的解說之下，表現出欣賞數型關係奧妙之處。



題目 (六 Q1)：對於「3-1 長方形的放大與縮小」及「3-2 放大縮小圖的對應關係」這兩個單元，你分別學到了什麼？

全部 31 位學生中，有 29 位學生對於此單元有寫出自己的看法。其中 20 位學生只簡略地寫出自己學到相似概念。例如：「我學到相似」，或「我學到了放大圖與縮小圖之間的關係」，並沒明確地表達自己學會的數學概念及內容，讓研究者感覺學生只是跟著「主題」在作答，即多數學生呈現問 A 答 A 的現象。另有 9 位學生進一步寫出圖形相似應具備的條件，例如以長方形放大 (縮小) 後，長和寬會變長 (縮短) 來說明圖形相似之條件是對應邊成比例，並以角度不會改變來說明另一相似條件是對應角相等。不過，研究者發現學生可能受到課本所呈現內容的影響，導致大部分學生以長方形的例子來說明自己學到相似的數學概念。

比例.相似<放大縮小>幾倍，例如：1.一般所講的放大或縮小的倍數，指的是長或寬，而不是面積...2.如果圖形邊成比例.角度一樣，那就是相似圖。(060140)

我學到長方形放大後，角度還是不會變，但長和寬會變長，縮小後長和寬會縮短，角度不變。(060120)

題目(六 Q2)：承上，請舉例說說看這兩個單元中哪些內容比較難、比較不了解？為什麼？

全部 31 位學生中，有 29 位學生對於此單元寫出自己的問題。其中 7 位學生表示無法解決相似形的問題，尤其是相似形對應邊長與面積的計算。例如：「有甲、乙兩個正三角形，甲的邊長是 2，乙的邊長是 10，求乙面積是甲面積的幾倍？」。有 3 位學生提及圖形經旋轉或放大後，會不清楚旋轉後的對應關係，故要找出對應邊、對應點有困擾。1 位學生(060234)提及判別兩個圖形是否相似有困難，例如：「說明正方形與菱形是否相似，並寫出你的理由！」。研究者發現這幾位有提出問題的學生，在上一題(六 Q1)表示有學到相似，可是在此題(六 Q2)卻提出對於求解問題有困擾。比較(六 Q1)與(六 Q2)學生的寫作內容可以發現，學生只是寫出數學名詞，卻沒有明確地說出其概念內容，因而得知學生知道數學名詞，並不見得理解其概念。

研究者在課堂上發現，學生對於邊長與放大(縮小)倍數是呈現線性規律的計算較沒問題，反倒是對於面積與放大(縮小)倍數是呈現平方規律有問題。從學生計算題目的情況中亦觀察得知，學生會將兩相似圖形面積關係視為跟邊長關係一樣是呈現線性規律，此種直觀的認知會產生計算錯誤的情形。例如：「有甲、乙兩個正三角形，甲的邊長是 2，乙的邊長是 10，求乙面積是甲面積的幾倍？」許多學生的答案是 5 倍。研究者推論原因可能是學生以邊長的 5 倍關係作為面積關係之答案。因此研究者在課堂補充說明此類問題時，使用以下方式：正方形的面積是邊長乘邊長，因此可先計算出兩個正方形的面積，再將兩個正方形的面積相除來求出放大後的倍數，就上述題目來說，可求出甲、乙正方形的面積分別為 4 及 100，所以乙面積是甲面積的 $100 \div 4 = 25$ 倍。因為兩個相似正方形面積的計算比兩個相似三角形面積較容易，讓學生感受面積的變化，並非跟邊長一樣，來澄清學生的概念。學生事後表示，經由研究者以簡單實際的例子解說後，對於概念較能掌握清楚。

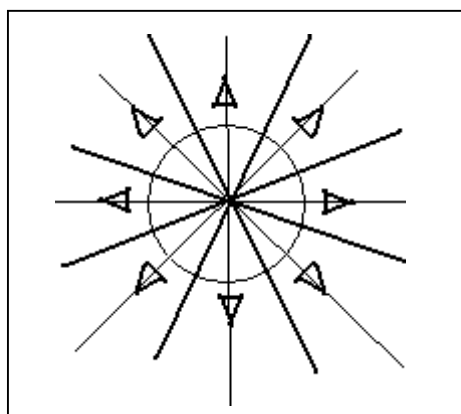
題目(七 Q1)：對於「4-1 生活中的對稱圖形」及「4-2 找對稱軸」這兩個單元，你學到了什麼？

全部 31 位學生中，有 27 位學生表示學到對稱的數學概念。但大多以一句簡單的敘述來表示自己所理解的數學知識。例如：我學到了什麼是對稱圖形、我學到了如何找對稱軸。其中有 5 位學生察覺到日常生活中有許多東西是屬於對稱圖形。例如圓、硬幣、聖誕樹、英文字母 A E T H W 等，亦有學生提及只要具有對稱軸的圖形即可判定是否為線對稱圖形。此外，研究者發現學生所舉的例子大多為英文字母、錢幣、圓形，而這些線對稱圖形多出自於課本例子、習作習題，較少從日常生活中自行思考出不同於課本教材的對稱圖形，例如眼鏡、籃球。

*我學會了生活中有許多的東西都有對稱軸...也學會了怎麼找出對稱軸。(070123)
我學到了對稱軸！ex: 有一個的聖誕樹！求出它的對稱軸？(070111)*

題目（七 Q2）：承上，對於這兩個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？
請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，其中有 12 位學生表示學習上的困難，這 12 位學生中有 5 名學生提及某些圖形看起來似乎是線對稱圖形，但實際上並不是線對稱而容易造成誤判。例如：平行四邊形，看起來似乎是線對稱圖形，但實際上卻不是，這表示判別是否為線對稱圖形時，容易受到直觀視覺的影響。此外，7 名學生對求出圖形對稱軸個數的問題較感到棘手。例如下圖的太陽圖形，正確的對稱軸應是 8 條，但學生往往只畫出通過三角形頂點的 4 條對稱軸。此外，圓形的對稱軸有無限多條，但學生表示不知道要畫幾條才代表無限多條，由此可發現目前學生尚未具備「無限」的數學概念。



應該是 4-2 找對稱線，因為有些圖看似有對稱線，可是就是沒有，例如：平行四邊形。(070203)

應該是 4-2 的找對稱軸，因為有些圖形看起來好像有很多條又好像沒有，例如：禁止標誌或者是太陽的圖形。(070219)

找對稱軸-EX：例如圓形，他有無線多的軸，那要畫幾條呢？(070207)

題目（八 Q1）：對於「4-3 運用對稱性剪出多邊形」及「4-4 對應點與對稱性」這兩個單元，你學到了什麼？

此題跟上一題（七 Q1）同屬一個單元，學生回應的內容亦與（七 Q1）類似，全部 31 位學生也多是簡短的敘述其所學到的數學名詞。例如：提到「學到如何找出對稱點及對稱軸」。此外，有 8 位學生進一步指出學會了利用對應點來輔助畫出對稱圖形以及利用對折方式來判別圖形是否為線對稱。觀察學生寫作回應的內容，學生提到自己學會的數學知識就恰巧是「4-3」及「4-4」的標題，比較學生對於（六 Q1）、（七 Q1）的回應內容亦是有類似的情形發生，例如：我學會放大與縮小、對稱圖形、對稱軸。即學生大多不會進一步解釋他到底學會、瞭解什麼樣的數學概念，即使知道有這數學名詞，亦不一定真正瞭解這數學名詞有何意義、內涵。

我學到了下次如果要剪紙的話可以先折一折再剪。(080116)

我學到圖片對摺後，原來的 A 或 B 點對應到 A1 或 B1 的識別方法。(080119)

題目（八 Q2）：承上，對於這兩個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些不懂。

全部 31 位學生中，有 12 位數學生表示對於這兩個單元較沒問題，這是八次線上討論融入數學寫作活動以來，學生表示較沒問題的一次，且大多數學生的平時考、月考成績都還不錯。6 位學生表示對於對稱點的對應方式有問題，例如：「某點在 X-Y 平面上，則對於 X、Y 軸的對應點要怎標示？」，學生不知道對稱點的連線與對稱軸呈垂直關係。此外，研究者也發現這幾位有提出問題的學生，在上題（八 Q1）表示自己已學會對稱，可是在此題（八 Q2）卻提出對稱的問題，這跟（六 Q1）、（七 Q1）寫作的情況類似，可見學生所表示學會的數學概念，大多是指數學「名詞」，而非數學「概念」。

我覺得對稱點與對稱線比較難，因為要畫出對稱軸另一邊的對稱點比較難耶。
(080216)

研究者發現，當寫作題目問及學生對於該教材單元學到什麼數學概念時，學生都僅簡單呈現該單元所學的數學名詞來表達自己學會的數學概念，例如（六 Q1）、（七 Q1）、（八 Q1），這狀況會讓研究者較無法從學生寫作內容判斷學生是否已具備正確概念及其思考歷程為何。但當題目是問及對此單元有什麼不懂的地方時，例如（六 Q2）、（七 Q2）、（八 Q2），學生會寫出較多的想法、意見，這對研究者而言，較有助於來判別、解讀學生的想法為何，是否有真正瞭解數學概念。因此，設計數學寫作題目時，宜詢問學生：「你對於哪個概念不懂？為什麼不懂？請舉例說明。」來取代「你學到什麼概念？」，或可直接問「該概念的意義為何？請用你自己的話，說看看！如果可以的話，也請舉例說明之。」，也許如此的問法較能瞭解學生概念理解的程度。

題目（十 Q1）：對於「5-1 近似值」、「5-2 實際長度的範圍」及「5-3 誤差」這三個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，有 23 位學生表示對於這三個單元有解題上的問題；其中 19 位學生會使用四捨五入求出實際值的近似值（概數），但題目若是反過來要求學生計算近似值的實際值範圍時，學生大多有困難。研究者觀察發現平常同學們的學習多使用背誦公式（ $\text{近似值} - \text{測量單位}/2 \leq \text{實際值範圍} < \text{近似值} + \text{測量單位}/2$ ）來求出答案。有 4 位學生對於誤差的表示方式有困擾，尤其是絕對誤差與相對誤差之間的換算，例如：要求學生將一件商品的重量 $500\text{g} \pm 10\text{g}$ （絕對誤差）換算成 $500\text{g} \pm 2\%$ （相對誤差）。由此可發現，學生對於不清楚的數學概念，多半會使用背誦公式的方法來學習數學。

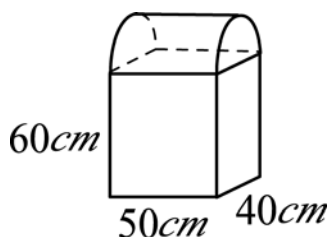
5-2 實際值的範圍我比較不會，例如：學校約有 3200 人（百人為單位），求實際值的範圍？（100126）

呃.....我拿之前考的第 5 單元來說吧！第 10 題的(c)小題--丙商品的重量為 $500\text{g} \pm 20\text{g}$ ，丁商品的重量為 $1000\text{g} \pm 20\text{g}$ ，哪種商品的「相對誤差」表示的百分比比較大？像這種百分比我比較不懂怎麼換ㄝ@@'''，若公式我是背起來了=.=....就是不

研究者發現學生對於四捨五入求近似值的計算多半了解，但如要求算出實際值範圍，則會有困難，不知道該如何去求解。研究者推論學生會覺得「四捨五入求近似值」比「求實際值範圍」的運算較簡易，原因是求實際值範圍所用的解題概念比四捨五入複雜，求實際值範圍要具備不等式範圍、最小測量單位、近似值等概念，但四捨五入只要知道哪個位數要捨去、進位即可。因此研究者教學時利用數量較小且是正整數的近似值例題來進行實際值概念解說，例如：「哪些數四捨五入之後會變成 100（以 10 為單位）？」，從多寫幾個數值的方法，推導出到底這些數最大、最小是多少，形成範圍的概念，讓學生去理解、反思「實際值範圍」的意義。

題目（十一 Q1）：對於「6-1 柱體體積」、「6-2 簡單柱體的合成」這兩個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，其中 9 位學生表示對於 6-2 合成柱體其體積之計算較有困難。例如：一個柱體（如下圖），由半圓柱和長方體組合而成，其長為 50cm、寬為 40cm、高為 60cm，求其體積。



學生對於 6-1 柱體體積計算較沒有困擾，這可能是因學生在國小階段學過求解有規律物體的體積，所以較沒問題，但對於合成柱體體積計算是國小未曾接觸的教材，加上學生尚未熟悉空間概念，或是未能掌握立體圖形心象概念，造成計算錯誤。

6-2 簡單柱體的合成有些疊起來的圖形不知道怎麼算比較好，例如：有一塊積木共三層每一層的長.寬.高都是 40cm，求體積。因為他算出來只有一塊，容易把他算*3，所以比較不會。(110119)

題目（十二 Q1）：對於「6-3 容積與體積」這個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，有 21 位學生表示意見。其中有 9 位學生提及不懂中空容器容積的計算，中空容器是由實心容器（實體體積）中間部分挖空而成，其挖空的部分簡稱為容積，周圍的部分則是中空容器的體積。學生會計算實心容器的體積，但卻不會計算中空容器的容積，研究者認為這可能是因學生對於「空間心象」關係不熟悉，導致在計算中空容器的容積時，不會計算容器容積問題的厚度，即容積的長與寬應是體積長與寬扣除兩邊的厚度，再乘以容積的高扣除兩邊的厚度【若是無蓋中空容器，則只需扣除一邊的厚度，以數學式表示容積即為 $(長 - 2 \times 厚度) \times (寬 - 2 \times 厚度) \times (高 - 2 \times 厚度)$ 】。

此外，12 位學生提及不懂單位之間的換算，因體積所使用的單位是立方公尺，容積是公升，此兩者所使用的單位不同。研究者發現學生可能尚未熟悉個別單位間的關係，導致單位換算的困難。研究者實際教學經驗是，若使用貨幣單位來當作教學範例，學生較易瞭解換算的概念的效果，例如：「若 1 塊美金可以換成 30 塊台幣，那麼 15 塊美金可以換成多少台幣？600 元台幣又可以換成多少美金？」，因為貨幣較生活化，幾乎是天天在接觸，而一般題目常出現的長度、重量、體積、容積等單位換算，平常學生較不常使用，容易讓學生產生距離感。因此，教師可設計「量」的教學活動，先讓學生熟悉日常生活的長度、重量……單位，協助學生建立對於單位的認知。

像無蓋的空容器該如何算體積？例如：無蓋中空容器，板子厚度 0.5，求容積？類似低題目... ㄉ....！（120131）

換算單位吧-我會搞混-到底是幾：幾，我不知道～～” 例如：1 公秉=幾立方公尺。（120107）

題目（十三 Q1）：對於「7-1 圖形的切割與組合」、「7-2 幾何量的表示法」這兩個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，其中有 11 位學生表示在使用未知數來表示幾何量

有問題，例如以未知數來表示三角形內角和、面積、柱體體積，即學生在代數符號運算普遍有相當大的困擾，但題目若是以數值的方式呈現，學生尚可求出答案來，可見學生的認知發展多未出現形式運思期所具有之思考特徵。另有 5 位學生表示，在圖形切割後，對於要重新組成的新圖形不知會有何變化，失去對「圖形心象」的掌控。在 92 學年度第一次國中學力測驗第 22 題，題目如下：

22. 圖(十)是由白色紙板拼成的立體圖形，將此立體圖形中的兩面塗上顏色，如圖(十一)所示。下列四個圖形中哪一個是圖(十一)的展開圖？

(A)

(B)

(C)

(D)

圖(十)

圖(十一)

有考生把考卷上的圖片剪下來求答，方法可能較麻煩且有違規之嫌（被監考老師判定為毀損試題本，但事後學力測驗全國試務委員會判定雖毀損試題本但不處分，原因主要是其行為不是”故意”毀損，且學生的出發點是這樣比較容易看出展開圖是哪一個！），學生這樣實事求是的態度，讓研究者認為使用實際物體教學會有助於學生對於幾何圖形的學習。因此，研究者在補充教學時，使用實際物體來切割、組合，以此方法進行補充說明，讓學生對於「圖形心象」比較能有概念、掌控！

要算一個柱體...然後把數字變成文字符號...然後算出這個柱體的體積..比較不懂，例如：梯形柱底面梯形的兩底分別為 a 、 b ，高為 h ，柱高為 k ，求梯形柱的底面積 = _____、三角柱的體積 = _____ (130123)

我覺滴就是把圖形切割後再拼成另一種圖形><"這《地方我比較不會啦！因為切割後那《圖形我會判斷錯誤~~所以那種題目我比較不會^^" (130122)

題目(十四 Q1)：對於「7-3 圖形與幾何量的變動關係」這個單元，你覺得自己在哪一部分比較有問題？請同學舉例寫出，並說明為什麼你對這些題目不懂。

全部 31 位學生中，其中有 10 位學生表示幾何圖形經過壓縮、邊長延伸等變化後，對於其(表)面積、體積代數式及其形狀會呈現何種變化感到有困難，例如：「把長方體壓縮之後的形狀為何？其體積為何？」，可能是學生對於「圖形心象」的掌握較不佳，大部分學生表示須以實際物體操作過，才知道會呈現何種變化。此外，學生亦不會使用代數符號來表示長方體壓縮後的表面積及體積，因此加強學生代數符號的使用，對於國一新生而言是一件重要的教學工作。

例如：一個長方體..將它稍微壓扁後..則可視為一個平行四邊形..請問此長方體與平行四邊形的(表)面積有何變化..體積有何變化??表面積的表是蝦咪意思阿?!好難唷 >0<"。(140123)

綜合學生在記事方面的寫作內容，有下列學習的問題：1. 對於文字符號運算概念不理解，導致往後遇上有文字符號運算的題目時，多會產生困擾；2. 分數、小數計算能力不佳，較欠缺數字感；3. 單位換算的概念不理解且不常使用，因此產生距離感；4. 對於數學概念的描述多是單元的數學名詞，而非數學概念；5. 幾何圖形的心象掌握能力不佳，需以實際物體幫助理解或解題。

此外，從學生的回應內容來看，記事的問題多屬於前一個星期課堂上所授課的內容，學生若熟悉、理解整個概念，其回應的內容就較能重點式的指出其學習心得、學習困難所在，但多數學習低成就的學生，則較無法在寫作活動中寫出自己的想法。換句話說，可能學生在學習上有某種程度的困擾，也不知道自己哪個數學概念不會，亦不曉得要回應什麼內容。此外，研究者發現，學生在課堂上較不敢開口請教老師問題，故研究者可間接知道學生的學習思考過程，因此這活動似乎可以有效地促進師生間數學概念之溝通。

二、作總結的寫作 (summarizing writing)

題目 (三 Q3) : 數字運算的結果

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

你看到了什麼？從上面的式子中，你觀察到了什麼？請把它寫下來！

全部 31 位學生都有對這個問題表示他們的想法，以下分成兩種情形說明之。

1. 26 位學生表示有觀察到算式呈現某種規律：5 位學生以觀察到乘數有幾個 1，來描述算式的規律現象，但其餘 21 位學生僅表示有觀察到算式是有規律的，並沒具體描述是呈現何種規律。

被我看規律了^{^^}，有 4 個 1，所以 1234 到 4，然後再回來。(030307)

我觀察有規律嚕！因為 $11 \times 11 = 121$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

有發現嗎？就是看乘數有幾個 $\rightarrow 111 \times 111$ 有 3 個 1，所以囉 $= 12321$ 。(030331)

2. 5 位學生不知所云：即研究者不知其欲表達的意思為何，例如：學生寫出「 $11 \times 11 = 121$ ， $111 \times 111 = 12321$ 」(030319)，只是把題目的算式再寫了一次。

研究者事後在課堂跟學生之補充解說：乘數的位數跟答案有呈現一種規律，當乘數的位數是 n 時，答案是 $12 \cdots n \cdots 21$ 。學生事後表示，其大多瞭解規律的現象，但就是不太會用文字敘述來說明規律之現象，顯見學生數學溝通能力之不足。

題目 (三 Q4) : 承上，根據觀察的結果，你能推測出 11111111×11111111 的值嗎？請把你的想法寫下來！

全部 31 位學生中，有 29 位學生能回答出正確答案。這 29 位學生中，有 19 位是透過觀察數列規律而不是用計算即寫出正確答案；有 3 位學生是

使用 windows 所提供的小算盤程式，來計算結果；其餘 7 位學生則是直接把答案寫出，沒說明任何解題想法。

在上一題（三 Q3）中，學生多半不能使用文字清楚地來描述算式的規律現象，但在這題卻有超過半數以上的學生（19 人）能透過規律的觀察寫出正確答案，由此可見學生對於數學算式計算的能力優於描述規律現象的能力。

題目（四 Q3）：0 是屬於奇數還是偶數？

有這樣的說法 $0=2 * 0$ (0 是 2 的倍數)，所以有人支持 0 是偶數；但 0 卻可以被所有的奇數整除(0 也是所有奇數的倍數)，所以也有人把 0 歸類為奇數。

根據上述的說法，請問同學你支持 0 是偶數還是奇數？請把你的看法寫下來！

31 位學生都有寫出自己的看法，研究者將其論述歸類如下：

1. 認為 0 是偶數：有 21 位學生認為 0 是偶數。其中有 12 位學生的理由是數字排列的規律應該是奇偶相間；有 2 位學生的看法是兩個奇（偶）數之間的差為 2；有 5 位學生的想法是因為最後一個數字為零的數，都是偶數，例如：10、100……；其餘 2 位學生只是認為 0 是偶數，並未提出自己額外的看法。

我支持是偶數~因為：數的排列 0, 1, 2, 3, 4, 5....., x, 都是奇, 偶, 奇, 偶.....
所以 0 是偶 1 是奇 2 是偶....。(040302)

0 是偶數，因為 10.20.30.40.50.60. 有 0 的都是偶數(040318)

2. 認為 0 既是奇數也是偶數：有 7 位學生似乎不能找出推翻兩種論述之理由，因此認同 0 既是奇數也是偶數，甚至於有 2 位學生自創 0 是「中性數」此一名詞。

我覺得 0 都可以等於吧 $>M<$ 因為 0 可以除以任何數~所以我覺得是奇數也是偶數
 $\wedge 0 \wedge \sim \sim !$ (040322)

我覺得是中性數，因為被奇數或偶數都可以整除。(040317)

3. 認為 0 不是奇數也不是偶數：有 2 位學生只單純認為 0 不是奇數也不是偶數，並未說明原因。

4. 認為 0 是自然數：有 1 位學生認為 0 是自然數，但並未進一步說明理由。

我覺得 0 不是偶數也不是奇數，因為 0 是自然數。(040316)

研究者於課堂對學生的補充說明為：根據幾何原本(Elements)對於偶數的定義如下：「偶數是能被分成兩個相等部份的數」，所以 $0=0+0$ ，學生表示這樣的解說比較能區分 0 是奇數還是偶數。

題目(六 Q4)：你知道金字塔高度是多少？請同學點選以下網址：<http://www.mathland.idv.tw/life/pyramids.htm>，看過網頁說明後回答下列問題：
從故事中可得知何種數學資訊？請同學把你的想法寫下來！

全部 31 位學生中，有 27 位學生表達自己對於故事的想法。其中有 20 位學生指出埃及人能巧妙利用太陽照射所產生的影子來測量建築物的高度，當中更有 14 位學生更明確指出埃及人是運用了三角形相似的原理算出金字塔高度。其餘有 7 位學生讚嘆埃及人實在是很厲害，在數學知識尚未很發達的時代，可以不用直尺，利用這麼神奇的數學關係來作測量。

原來用三角形的對應關係也可以算出高度喔！數學真是奇妙啊！(060432)

現實生活中並沒有那麼長的尺.....而我們卻可利用三角圖形來測量高度。(060435)

他們可以利用兩個人的影子來測量建築物的高度，並提議用金字塔所在地測量金字塔的高度，還發現此時夕陽剛好與他們的頭頂在一條直線上，想起可以用前幾天學過的相似三角形對應邊成比例來計算金字塔的高度。(060437)

題目(六 Q5)：承上，如果假設人影的長度恰巧與人的身高一樣長，這時候可以說金字塔的影子跟金字塔高度一樣長嗎？為什麼這樣說可以成立，請同學把你認為可以成立的理由寫下來！

全部 31 位學生中，有 22 位學生寫出自己的看法。其中 15 位學生認為這樣的論述可以成立，並簡述當人影的長度恰巧等同於身高時，同理可推論測量出金字塔的影長即可知道金字塔的高度，但沒有具體說出是因相似的原理。其餘 7 位學生則認為人影長會因太陽移動的位置而改變，因此認為這樣的論述不成立。

一樣，因為夕陽從人的頭上直射下來的影子和人一樣，金字塔也是相同的被夕陽直射，那金字塔得影子就等於金字塔的高。(060502)

不一定->因為要看他太陽在的位子.如果太陽在正上方影子就不會跟物體一樣高了
^^ (060507)

此題的目的是要考驗學生是否知道當人影之長與人身高相等時，可以進一步去推導金字塔的影長等於金字塔的高度，把一個較難測量的高度變成較易測量的長度。

從學生在作總結的寫作方面來看，總結寫作的問題設計是從課本教材延伸出來的，較偏向課外的教材，其目的是要讓學生去針對題目做出回應，可能學生尚未掌握該數學概念的意義，因此回應的內容較保守，仍有許多部分未說明。

三、過程的寫作 (process writing)

題目 (十 Q3)：假設 $A=0.999999\dots$ 跟 $B=1$ ，
從國小學數學到現在，你覺得「 $A=B$ 」成不成立？說說看你的想法。

全部 31 位學生中，有 28 位學生提出自己的想法。其中有 18 位學生認為此論述 ($A=B$) 成立，多數認為將 $0.999999\dots$ 進行四捨五入運算之後，就會得到 $A=B$ 的結果。學生之所以會使用四捨五入的方法，研究者推測可能是因前一星期才剛教授近似值的概念，因此多數學生會以近似值的概念做出此推論。

我覺得成立，因為 $0.999999999999\dots$ 如果用 0.1 作為單位四捨五入的話則與 1 相同。(100316)

有 8 位學生則認為此論述 ($A=B$) 不成立，學生直觀的認為 $0.999999\dots$ 雖然是跟 1 只差一點點，但就是因為這一點點的數量，所以 $A \neq B$ 。

不成立，就算少 $0.0000000000\dots 1$ 還是缺了那 $0.0000000000\dots 1$ <-->
如果成立的話，我 9 元跟你換 10 元要嗎？好？那我 0.9 億跟你換 1 億要嗎？ <-->"
(100302)

有 2 位學生則認為論述是有條件時才會成立，即四捨五入之後會相等，沒四捨五入則不會相等。這兩位學生的答案雖不正確，但其對題目分析的方法是值得鼓勵並推薦給其他同學知道。對於數學題目，除了可使用計算來解題外，尚有使用分析的方式來解題，這才是比較符合過程寫作(process writing) 的教學活動。

我覺得如果沒有從近似值的角度去看應該是不成立，因為它差了0.00000...1，要是從近似值的角度去看應該就有成立，因為0.99999...四捨五入就等於1。(100317)

研究者在課堂補充此題時，是利用下列簡單的算式來推導證明 $0.999999\dots = 1$ 的命題論述是正確的，而不是透過四捨五入的過程來獲得相等的推論：

$$1/3 = 0.33333\dots$$

根據等量乘法公理，兩邊同乘 3

$$1/3 \times 3 = 0.33333\dots \times 3$$

可得到

$$1 = 0.99999\dots$$

這樣等式即成立



不過當學生聽完如此的解說後仍覺得很奇怪，認為明明就差了一點點，怎麼可用這樣簡單的數學算式來推導出結論。這個問題含有「無限」之概念，故學生較難接受，也許應強調的是「四捨五入後的數，只是原數值的近似值」這個概念。

題目（十一 Q3）：體積是指：物體所占空間的大小，容積是指：容器內所能容納物體的體積，現在有個問題請你想想～
一個容器，究竟是它的體積大？還是它的容積大呢？請你儘可能朝各種可能去判斷、分析。

本題原意是要問學生一個容器的體積較大或容積較大，但根據學生寫作的內容來看，學生似乎誤認為題意是在比較實心物體的體積及空心物體的容積哪一個較大，因此有 15 位學生認為體積較大，因為容器有厚度；13 位學生則認為不一定，因為若不考慮容器厚度則兩者會一樣大。

嗯... 不一定耶!! 要看那個容器是怎樣, 如果它外圍沒有厚度的話, 應該是一樣, 但是如果有, 那就不一定了。(110332)

因該是體積. 因為他會加上外面那層板子, 因該會差 0.001 左右吧.= 大點就 0.1 <也許>。(110302)

研究者對於學生的補充說明是：若欲比較一個容器的體積跟容積哪一個比較大時，宜舉例列出容器的實際數據，例如給予容器的長 50 cm、寬 20 cm、高 30 cm 與其厚度 1 cm，學生表示這樣才易算出容器的體積與容積，並判別體積與容積大小。諸如（十一 Q3）這種較難理解題意的題目，若發現多數學生有誤答的情形，研究者認為在進行教學活動時，教師可先舉實例說明寫作題目之題意，再要求學生針對理解的概念來寫作。

綜合學生在過程的寫作方面的寫作內容，有下列學習的狀況：1. 學生會使用課本教材所學到的概念來解課外題目；2. 若學生瞭解寫作題目之題意，較能多寫出些自己的想法；3. 學生寫作的內容仍是屬於比較直觀的方式來判別命題論述是否成立，較少從問題的條件去分析。

此外，學生在課堂上反應課本的內容、題目都很簡易，但課外的考題較難，認為即使學會了課本的內容，但仍不足以應付課外問題的學習。對於此點，研究者認為學生會有這種狀況發生，應該是數學概念較沒理解所導致，從學生應用問題作答的每個步驟中，多少可以知道學生概念理解的情形。所以研究者跟學校同事討論之後，建議學生還是要多練習，不懂的部分就要請教同學或老師，從題目中釐清數學想法、建構數學概念。

四、開放性問題 (open-ended questions)

題目（二 Q3）：在課本裡面，我們學了兩種解一元一次方程式的方法：（1）圖像等量公理法（2）文字符號移項運算法。請回答下列問題：請你說說看這兩種解一元一次方程式的方法，兩者之間有沒有什麼關係存在？

全部 31 位學生中，有 26 位學生表達自己的想法，以下分成兩種情形說明之。

1. 兩種解法都可以求出方程式的解：18 位學生表示此兩種方法都可以求出方程式的解且其解相同，其中更有 2 位學生亦指出此兩種方法皆須運

用到相同的數學概念，但未說明是何種數學概念。另有 5 位學生表示文字法的算式可行伸出圖像法。

有關係~因為都可以用來解 $\geq \cdot \leq$ (020316)

有/因為都需要相同的概念(020302)

2. 從解題的方便性來看兩種解法的關係：8 位學生是從解題的方便性來看其關係。其中有 5 位學生表示圖像法解題較文字法簡易，另有 3 位學生表示一元一次方程式中含有負係數就不能使用圖像法來解題，例如： -2 。

研究者事後在課堂對學生的補充解說是：圖像等量公理法與文字移向運算法其實是一體兩面的概念，只是一種是使用文字符號解題，另一種是使用圖像解題，讓學生知道這兩種方式都可以用來解題，且都可以獲得相同的結果。此外，由於學生對於圖像法解題的概念較能理解，因此研究者利用圖像法解題的原理，來協助學生熟悉文字符號運算的規律，多數學生表示這樣較能瞭解解題的概念。

題目（二 Q4）：承上，在解一元一次方程式的時候，你會選用哪一種方法呢？請說明你選用此方法的原因。

全部 31 位學生中，有 28 位學生表達自己的想法。其中 17 位學生表示若要解一元一次方程式，會先選擇使用圖像法來解題，因為圖像法概念簡單且容易理解，用此方法來解題會較輕鬆解出答案。

我會用圖像法...因為比較簡單、比較好畫、比較容易懂！(020403)

11 位學生表示會使用文字符號移項法來解題，其中有 4 位學生是因自己已熟悉文字符號移項法運算的規律，因此使用移項會較簡易。另 7 位學生表示圖像法無法以畫圖的方式處理含有負係數的方程式，課本是使用兩個一克砝碼圖形來表示 $+2$ ，但 -2 就無法使用砝碼來表示，因此圖像法解題易受負係數限制；此外，學生表示若每題都使用圖像法解題，需花時間畫出一大堆圖形有點麻煩。

我會用文字移項法~~因為比較好理解，圖像法有些畫不出來。(020401)

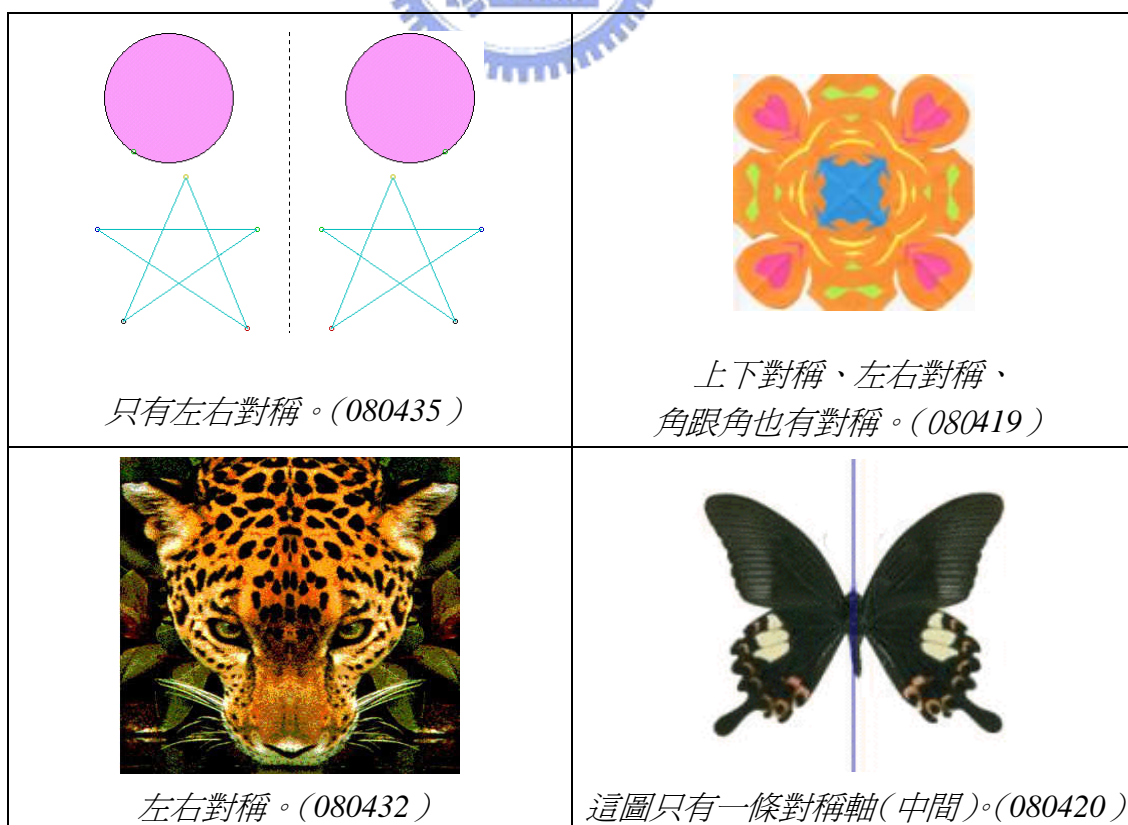
圖像法遇到負號就不能畫圖表示 $\geq \cdot \leq$ 。(020301)

文字移項法，因為加號移過等號變減號，減號移過等號變加號，所以像這種的算法比較不容易搞混。(020426)

在課堂上，研究者跟學生之補充說明：兩種解題方法都可以解方程式，因此同學可選擇自己較習慣的方法來解題。研究者進一步觀察，高程度的學生大多喜歡使用文字符號移項運算法來解題，而中、低程度的學生大多喜歡使用圖像等量公理法來解題。

題目(八 Q4)：請同學在網路上找到一~三種以上不同的圖形張貼在討論區上，並說明你選的這幾張圖形是有幾條線對稱？(Ps：討論區貼圖的語法是：[img]圖片的連結[/img])

全部 31 位學生中，有 29 位學生能將自己在網路上找到的對稱圖形資料貼在討論區上，且能寫出圖形的對稱軸及其對稱方式。此外，從學生張貼的圖形來看，28 位學生所呈現的對稱圖形，都是在同一個圖形內就有對稱關係，即對稱軸通過於該圖形，只有 1 位學生是呈現兩個圖形間的對稱關係（對稱軸沒通過圖形），例如下圖（080435）所示，這可能是因課本教材及習作大多呈現單一圖形的線對稱現象所導致，可見學生易受課本及習作圖形範例所影響。本題研究者在事後對學生的補充為：現今已是個科技發達的時代，網路上其實有很多資源可使用，因此學生可學習自己動手搜尋所需的資料，並依自己的興趣從中學習。



題目（十二 Q3）：我們知道有規則的立體圖可以求出其體積（例如：長方體的體積為：長 x 寬 x 高），但如果同學遇到一個屬於不規則物體，你有沒有辦法求出他的體積？請說說你的想法。

全部 31 位學生中，有 26 位學生表示可使用切割法，把不規則的物體切成有規則的物體（長方體、正方體、三角柱……），再分別計算這些有規則物體的體積，最後加總即是總體積。

*把不規則的立體圖切割成有規則的立體圖，然後各自算出來然後再加起來。
(120317)*

4 位學生則提及使用阿基米得原理，即物體的體積等於排出水的體積，來計算出不規則的物體體積，研究者詢問這四位學生為何知道用此方法，他們表示國小自然科的老師曾經說明過此方法。

如果是說沒規則的形狀就很麻煩了，但是可用一桶水把不規則的物體放入，在量出原本水量和溢出水量的相差就知了。(120316)

尚有 1 位學生表示要有具體的提示，即要有相關的數據資料，才能把體積算出來。

沒有辦法耶 = 因為我要有具體的指示才有辦法算出來 (120313)

綜合學生在開放性問題的寫作內容，有下列學習的狀況：1. 學生會選擇對自己較簡單的解題方式來進行解題；2. 對於概念的理解，學生會以圖形為首要；3. 大多數學生對於開放性問題寫作都有作答，且較多能表達自己的看法或意見，研究者推測原因可能是開放性的問題原本就沒有正確的答案，且不需繁雜的計算，不受限於唯一答案，因此學生較能發揮自己的想像力，呈現出多元的想法。

五、下定義 (defining)

題目（七 Q4）：長方形線對稱？長方形沿著其對角線對折，我們可以發現，兩邊圖形沒重疊！？
請根據你的瞭解說說看什麼是「線對稱」？請用用自己的話寫出來並舉個例子來說明。

全部 31 位學生中，有 26 位學生表示自己的看法，其中有 22 位學生傾向以操作型定義來解釋何謂線對稱，例如：「線對稱就是把圖形『對折』之後會一模一樣或完全重疊」，可見多數學生掌握線對稱概念的關鍵點是對折、重疊。此外，學生所提到的圖形大部分是長方形與正方形，研究者再次發現學生受到課本所呈現內容的影響，導致學生大部分以長方形、正方形的例子來說明線對稱的概念。

線對稱就是另一半圖跟原來的那一半圖一模一樣，對折後可以重疊 (070426)

對稱就是一條對稱軸的左邊和右邊的圖案相等。摺疊起來時是完全疊合的 (070423)

其餘 4 位學生未提及線對稱概念的關鍵點是對折、重疊，只說明線對稱是「我覺得是因為兩個角和邊長都一樣吧！」(070439)。

題目(七 Q5)：承上，那「長方形線對稱」這句話，我們應該怎樣來解讀會比較恰當？

全部 31 位學生中，有 26 位學生反應自己的想法，其中 16 位學生表示需再說明長方形是屬於哪一個方向的線對稱。例如：長方形是上下、左右線對稱，不是以對角線為對稱軸的線對稱圖形。

應該是說可以上下左右對稱，但是不能斜角對稱！。(070511)

長方形是對稱圖形，但它是上下對稱跟左右對稱，對角線沒有對稱，所以長方形只有 2 條對稱線。(070526)

其餘有 10 位學生誤解題意，當中有 5 為學生尚在討論長方形有幾條對稱軸、是否為線對稱圖形，另外 5 位則未明確表達其想法。例如：「因為它邊等長。」(070539)

研究者事後跟學生補充線對稱的概念是，只要在圖形中可找出對稱軸，即可以說圖形是屬於線對稱。這題目可用來澄清學生對於線對稱的迷思、幫助學生更瞭解圖形線對稱的意義。此外，研究者從本次學生寫作內容中發現學生對於無限多條對稱軸、沒有對稱軸的圖形會有學習上的困擾。

題目(十三 Q3)：用你的話說看看「外角」這名詞的意思？(可舉例說明)

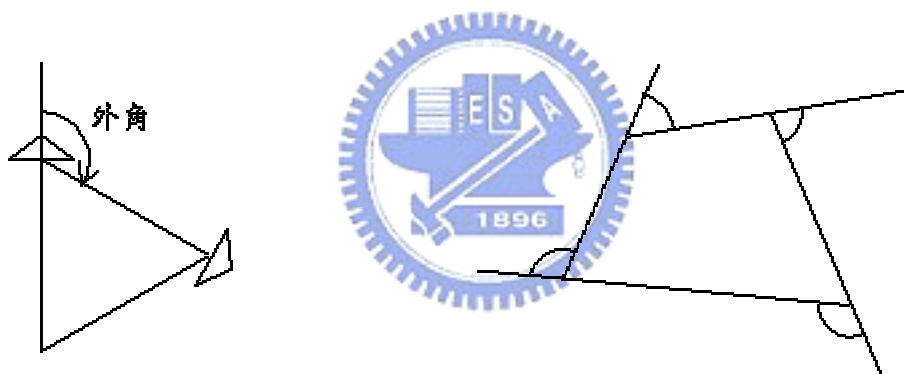
全部 31 位學生中，有 18 位學生反應自己的想法，其中 14 位學生以角的位置來說明，例如：「外角就是多邊形外面的角」。換句話說，多數學生對於外角的說明，是以文字的表面意義來解釋。

多邊形內的角叫內角..外面的就叫外角。(130335)

其餘 4 位學生則以類似課本或數學辭典的定義來解釋外角，例如外角就是「多邊形其中一邊，延伸出去的線和另一邊所圍成的角」。尚值得一提的是，當中有兩位學生以圖形來輔助文字說明。研究者發現，使用文字敘述且搭配圖形的方式，對學生而言比較能理解外角的概念，亦較能掌握外角的位置、大小。

外角就是內角其中一條線延伸出的線和另一條線形成的角。(130302)

內角就是圖形裡面的角...所以外角就是內角延伸出去的角,例如下圖所示。(130323)



綜合學生在下定義的寫作內容，有下列學習的狀況：1. 學生對於數學概念的理解，大部分是從「可操作」的概念中得知，因此多以操作性的方式來解釋數學定義；2. 對於不曾見過的數學名詞，多數學生會依文字表層意義來說明，因此未能明確界定數學名詞的定義。

六、問問題的寫作 (questioning)

題目 (十三Q4)：你可以找出多邊形的外角和有什麼規律嗎？寫出你怎樣找出這樣的規律 (同學可以從三角形、四邊形、五邊形...的外角和探索)。

<http://www.hgjh.hlc.edu.tw/~drop/math/polygon/polygon.html>

全部 31 位學生中，有 26 位學生藉由操作網路上所提供的輔助教材軟體，表示知道多邊形外角和的度數為何（如下圖所示）。

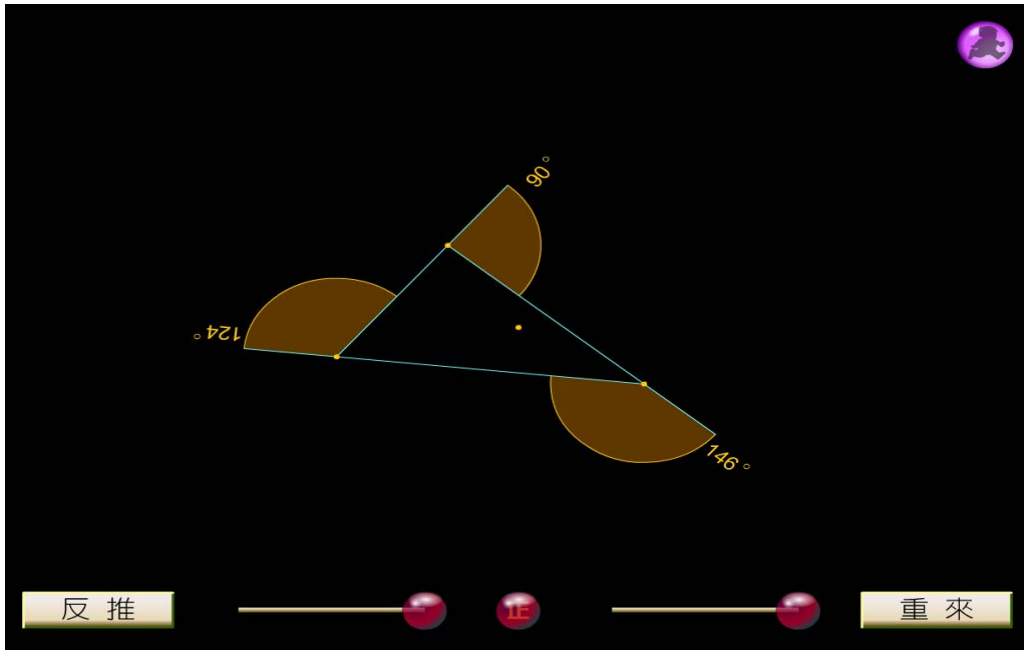


圖 26 Flash 操作畫面-1

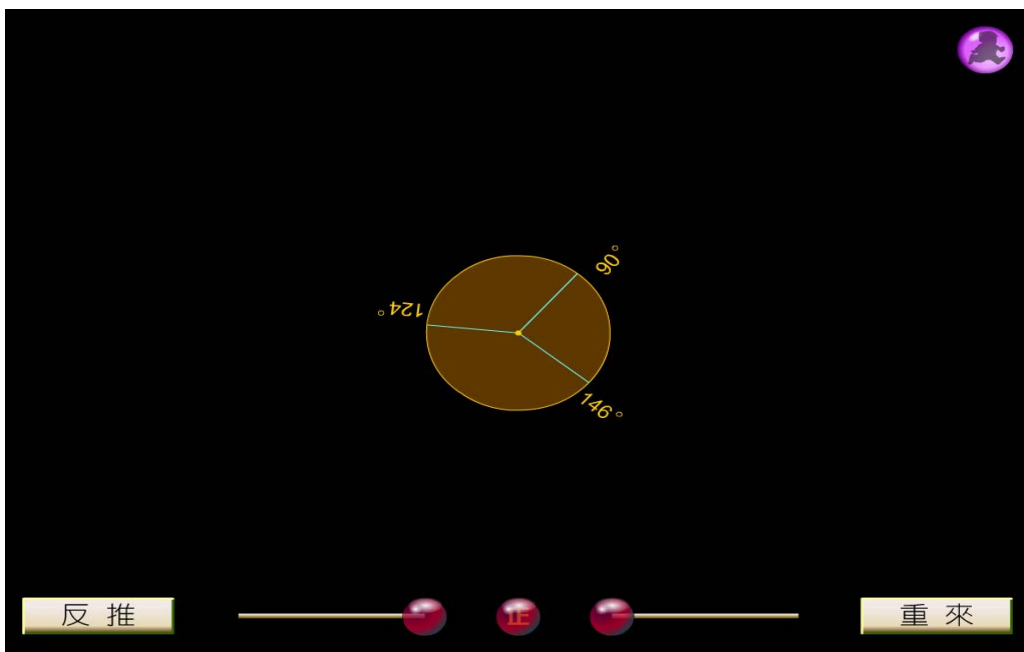


圖 27 Flash 操作畫面-2

學生實際操作數學 Flash 的教學軟體後，發現不論是三、四、五……多邊形的外角和加起來等於一個圓的角度，可能學生還不知道為什麼剛好是 360 度，但觀察學生操作的結果，學生大多是根據圖片中最後呈現是一個圓形，來推論多邊形的外角和是 360 度。由此可見，即使學生尚未學會使用數學式去證明多邊形的外角和是 360 度，但可以透過適當的電腦輔助軟體讓學生先建立此概念。

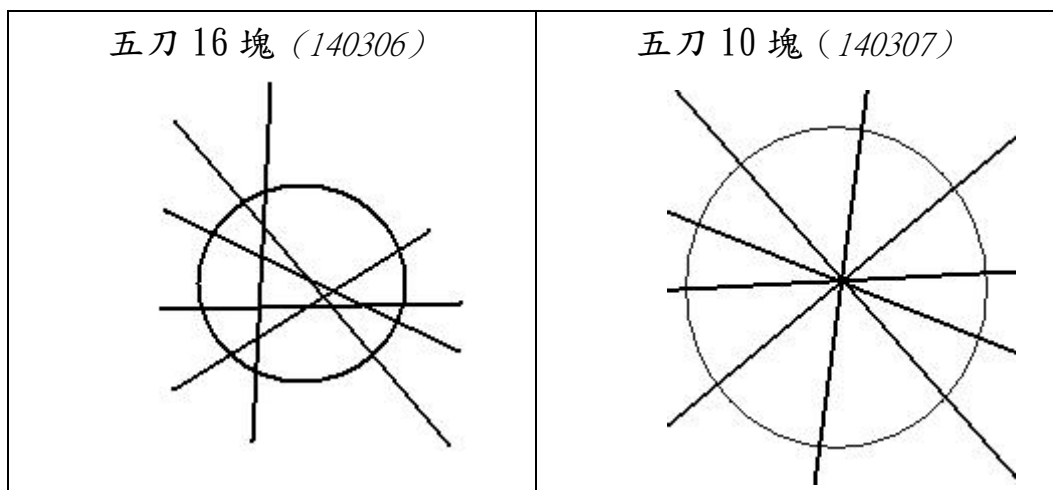
外角的和不管是多少個邊外角和都是 360 度，這是利用電腦的繪圖去找的規律。
(130416)

不管是三角形，四角形或多邊形外角和都是 360 度。(130402)

題目（十四Q3）：蘇蘇生日，爸爸買了一個蛋糕幫她慶生，在切蛋糕之時，爸爸也順便考了她一個問題～只准切五刀，要怎麼切才能切得最多塊？（每一刀都要是直線哦！）
聰明的你，為她想想法子吧？看看誰想出來的切法可以得到最多塊？請你說說你發現了什麼？（同學可以從一刀、兩刀、三刀...列表去想想）

全部 31 位學生中，只有 18 位學生反應自己的想法。其中 14 位學生利用小畫家軟體，使用滑鼠動手畫後，發現第一刀可切出 2 塊，第二刀可切出 4 塊，第三刀則開始出現不同的答案，有同學可切出 6 塊，但亦可切出 7 塊，第四刀可切出 8~11 塊，第五刀可切出 10~16 塊，學生可從操作中發現規律，即第 n 刀切下去，就可比 $n-1$ 刀多 n 塊。但未有學生提及切法需與每條線有最多交點時即可切出最多塊蛋糕，即兩直線的交點最多可有 1 ($0+1$) 點，三直線的交點，最多可有 3 ($1+2$) 點，四直線的交點最多可有 6 ($1+2+3$) 點，以交點的切法可切出最多的蛋糕數。左下圖為學生所畫正確答案，右下圖則是錯誤答案。

此外，從學生操作的過程來看，並不是全部的學生第一次操作就可以切出 16 塊，而是與其他同學比較結果後發現自己跟他人的結果不同，因此學生會再嘗試用不同的切法來證明自己的切法可以切出最多塊，以嘗試錯誤的方法為其主要的解題策略。值得一提的是，有位學生(140331)將其觀察到的蛋糕切割規律，用數學推理的算式寫出來。



嗯.....我和余余討論出來的結論：

$1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 4 > 2$
 $3 \rightarrow 7 > 3$
 $4 \rightarrow 11 > 4$
 $5 \rightarrow 16 > 5$
 \vdots
 \vdots

以此類推發現了什麼嗎@@? 我們是看到相差的數字, 切1條和切2條相差2個, 所以囉@@ 我們推測第4次切下去是11個, 第5次下去是第16個...我在想因該是把個數+上相差數就是答案囉@@...我這麼想啦=" (140331)

綜合學生在問問題的寫作內容, 有下列學習的狀況: 1. 學生的解題策略以嘗試錯誤法為主; 2. 藉由輔助教學軟體的操作, 學生較有深刻的印象, 因此教師可設計有趣、有意義的電腦輔助軟體, 以較生動的教學來傳達課本的數學概念、建構學生的數學知識, 如此學生數學幾何概念會較清楚且能增進學習樂趣。