

# 第三章、以靜力學討論兩軸機器手臂之路徑規劃問題

## 3.1 建立角度與力矩之關係曲面圖

在本章中，我們將先以靜力學討論兩軸機器手臂的路徑規劃問題，因為如此我們可以將力矩與兩個自由度的角度量的關係，以幾何圖形的方式呈現在三維座標系中，以利於我們觀察研究。如圖 3.1 所示的三軸機器手臂，為我們下兩個章節所討論的機器手臂，在此我們設定機器手臂的第三桿臂永遠朝向上，使其不產生力矩，藉此使其簡化為兩軸的機器手臂。

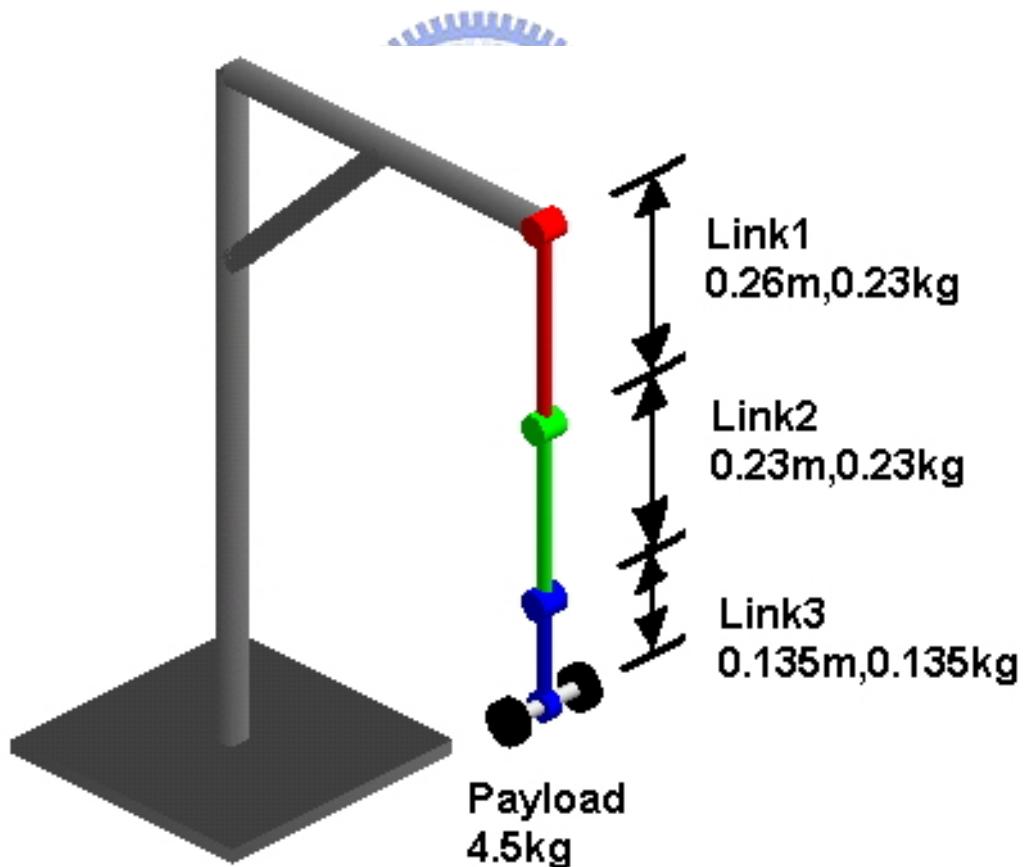


圖 3.1 本論文所討論之三軸串聯式機器手臂

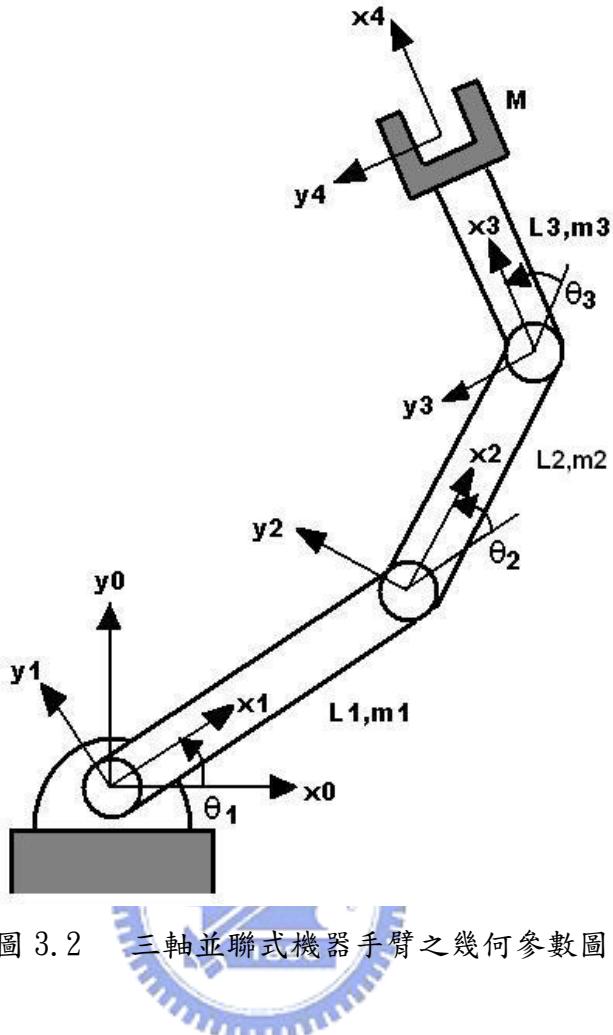


圖 3.2 三軸並聯式機器手臂之幾何參數圖

我們將第二章機器人動力學所推導的三軸之力矩計算式(2-34)、(2-36)、(2-37)中，具有  $\dot{\theta}_i$  與  $\ddot{\theta}_i$  的項去掉，如此可以得到靜力學的三軸力矩計算式，如下式(3-1)、(3-2)、(3-3)：

$$\tau_3 = (M + \frac{m_3}{2}) \times l_3 \times g \times \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (3-1)$$

$$\tau_2 = (M + m_3) \times l_3 \times g \times \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + (M + m_3 + \frac{m_2}{2}) \times l_2 \times g \times \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3-2)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (M + m_3) \times l_3 \times g \times \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ & + (M + m_3 + m_2) \times l_2 \times g \times \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ & + (M + m_3 + m_2 + \frac{m_1}{2}) \times l_1 \times g \times \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (3-3)$$

另外由於我們設定第三桿臂永遠朝向上，所以  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  的總和要等於九十度。其關係式如下：

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} \quad (3-4)$$

因為  $\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，所以  $\tau_3$  的值會永遠等於零。則我們可以  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\tau_1 + \tau_2$  為三維座標系的三軸，繪製出  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\tau_1 + \tau_2$  的關係曲面，如圖 3.3 所示。

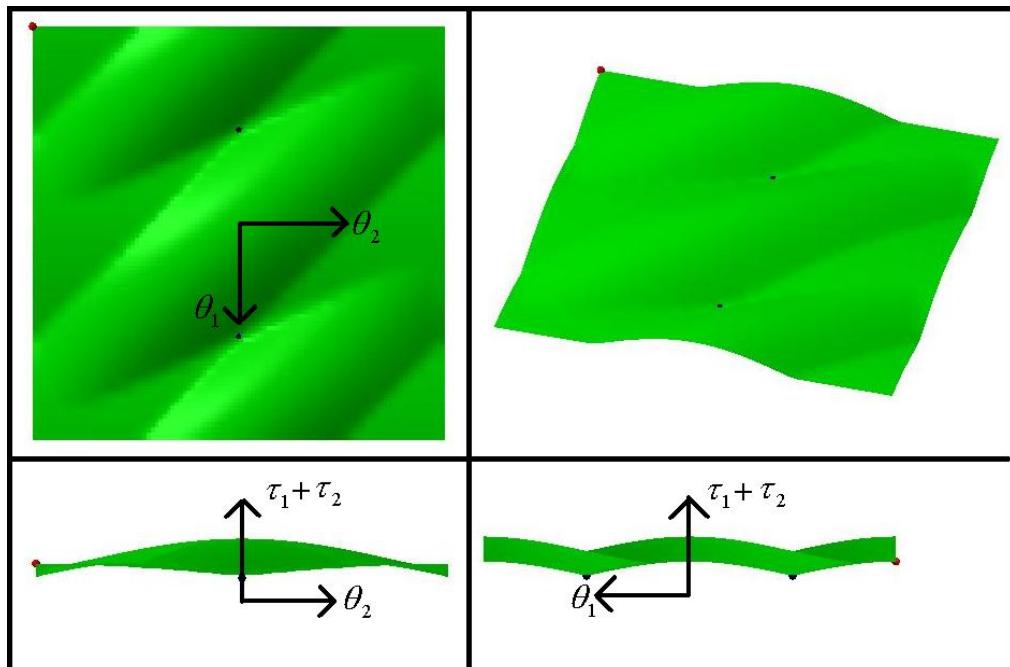


圖 3.3  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\tau_1 + \tau_2$  的關係曲面之三視圖與等視角圖

其中  $\theta_1$  與  $\theta_2$  的範圍各在 -180 度與 180 度之間，而  $\tau_1 + \tau_2$  的值由  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\theta_3$  代入式(3-3)與式(3-4)所求得。在本篇論文中，我們的目標是要將重物由最低處 ( $\theta_1 = -90^\circ$ 、 $\theta_2 = 0$ 、 $\theta_3 = 90^\circ$ ) 舉到最高處 ( $\theta_1 = 90^\circ$ 、 $\theta_2 = 0$ 、 $\theta_3 = 0$ )。則在  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\tau_1 + \tau_2$  的關係曲面中，其起點與終點的位置分別如圖 3.4 所示。

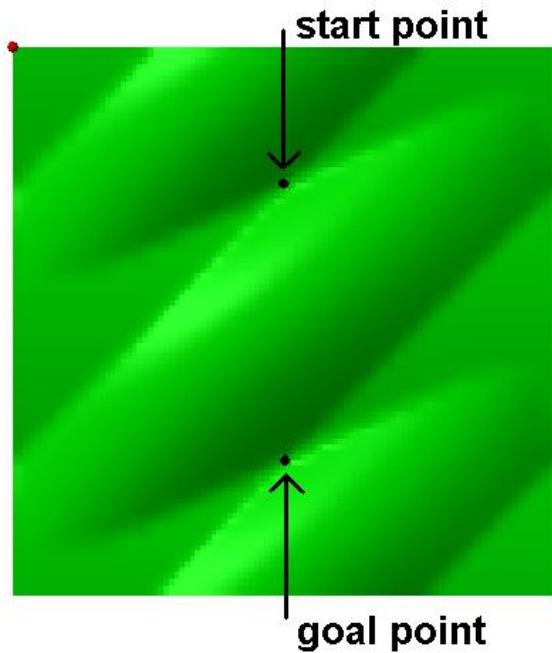


圖 3.4 起點與終點在曲面的位置表示圖

### 3.2 目標函數的設計與搜尋的結果

在第二章中，我們介紹過 Dijkstra 演算法，現在我們要根據它的理論來作舉重機器人的路徑規劃。首先我們要建立目標函數(Cost Function)，由於我們最佳化的目標是希望求得舉重過程中三軸所承受的總力矩最小，因此我們的目標函數訂定如下：

$$\text{Minimize } f = \sum_{i=1}^n (|\tau_1|^\omega + |\tau_2|^\omega) \quad (3-5)$$

其中  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  分別表示  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  所承受的力矩大小， $n$  表示結果路徑上的節點總數，而  $\omega$  為  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  的次方係數。當  $\omega$  等於 1 時，則我們所得的最佳化結果的意義為整個過程中，兩軸所承受的總力矩和為最小；這樣設定有一個缺點，就是可能在某一節點所求得的兩軸力矩總和為最小，但也許是某一軸的力

矩很大，而另一軸的力矩很小的緣故。為了避免這種情況以平均兩軸所承受的力矩，所以我們設立了次方係數  $\omega$ ，藉此增加力矩對目標函數的影響。我們將在後面幾節的例子中，看到次方係數對最終結果的影響。

### 3.2.1 次方係數為 1 的最佳化結果

首先我們將次方係數設定為 1，並以程式計算結果，其結果以下圖 3.5 中，角度與力矩關係曲面上的藍色路徑表示。

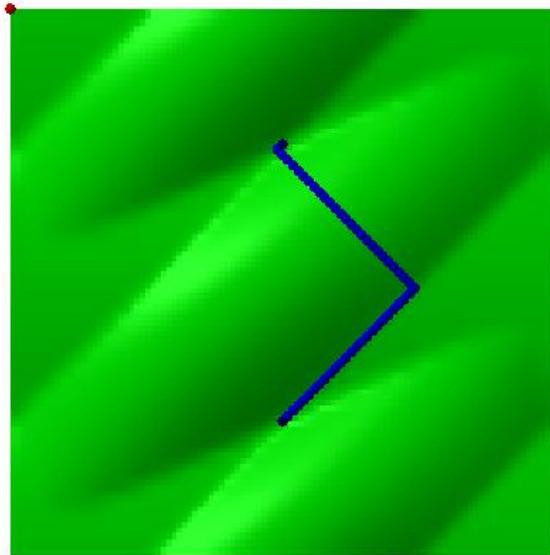


圖 3.5 次方係數為 1 的結果路徑

由圖 3.5 的結果中我們可以看出，雖然路徑避過了山峰(力矩總和極大處)，但未沿著山腳(力矩總和極小處)到達終點。這是因為雖然沿著山腳的單一時間點力矩總和比較小，但總路徑可能會太長，而使得整個過程的總力矩和反而不如圖 3.5 的結果。接著我們將圖 3.5 的路徑數據( $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ )輸入至動態模擬程式中，其動態模擬結果如圖 3.6 所示。

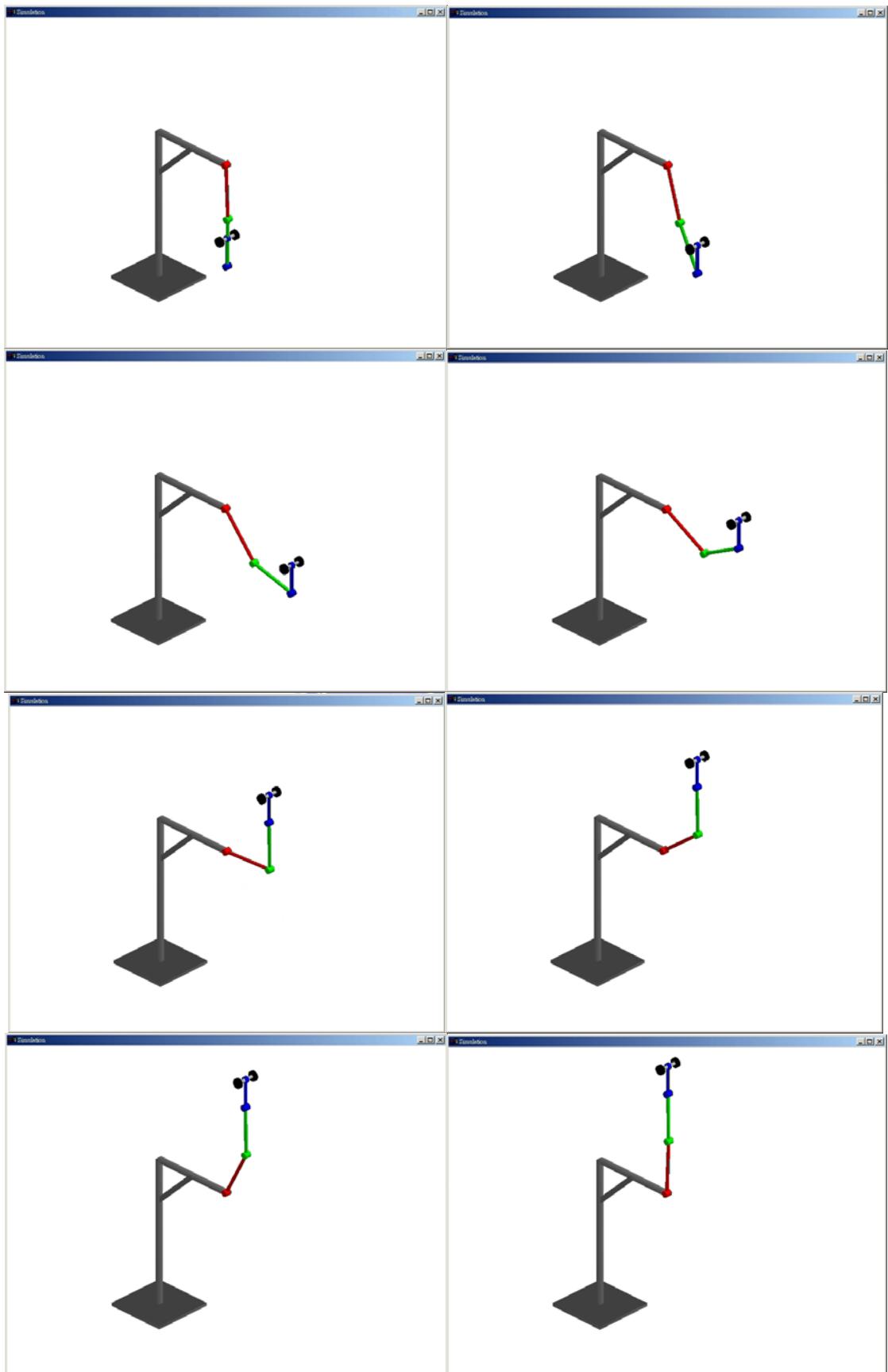


圖 3.6 次方係數為 1 的動態模擬結果

### 3-2-2 次方係數為 2 的最佳化結果

假如我們希望最佳化結果中，每一個時間點的兩軸力矩總和均為很小，則上一節所得到的結果路徑顯然不夠好。為了使每一時間點的力矩總和均最小，我們必須提高力矩對目標函數的次方。因此我們將次方係數設為 2；如此在某一時間點中，一軸所承受的力矩很大，而另一軸很小的情況就會被淘汰。取而代之的是兩軸所承受的力矩均極小的情形。所以我們將次方係數設定為 2，並以程式計算結果，其結果以圖 3.7 中，角度與力矩關係曲面上的藍色路徑表示。

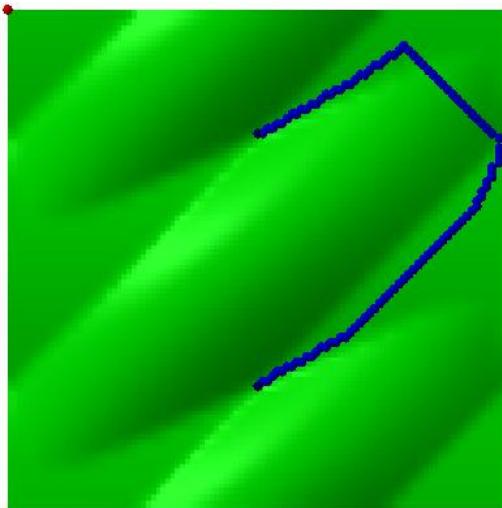


圖 3.7 次方係數為 2 的結果路徑

由圖 3.7 的結果中我們可以看出，路徑成功地沿著山腳(力矩極小處)繞了山脈半圈而到達終點。這是因為我們提高力矩的次方，使力矩值對目標函數呈指數型影響；因此搜尋出來的路徑會偏向於單一時間中，兩軸的力矩均極小的情況。然而這個結果會使得路徑變長。接著我們將圖 3.7 的路徑數據( $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ )輸入至模擬程式中，其動態模擬結果如圖 3.8 所示。

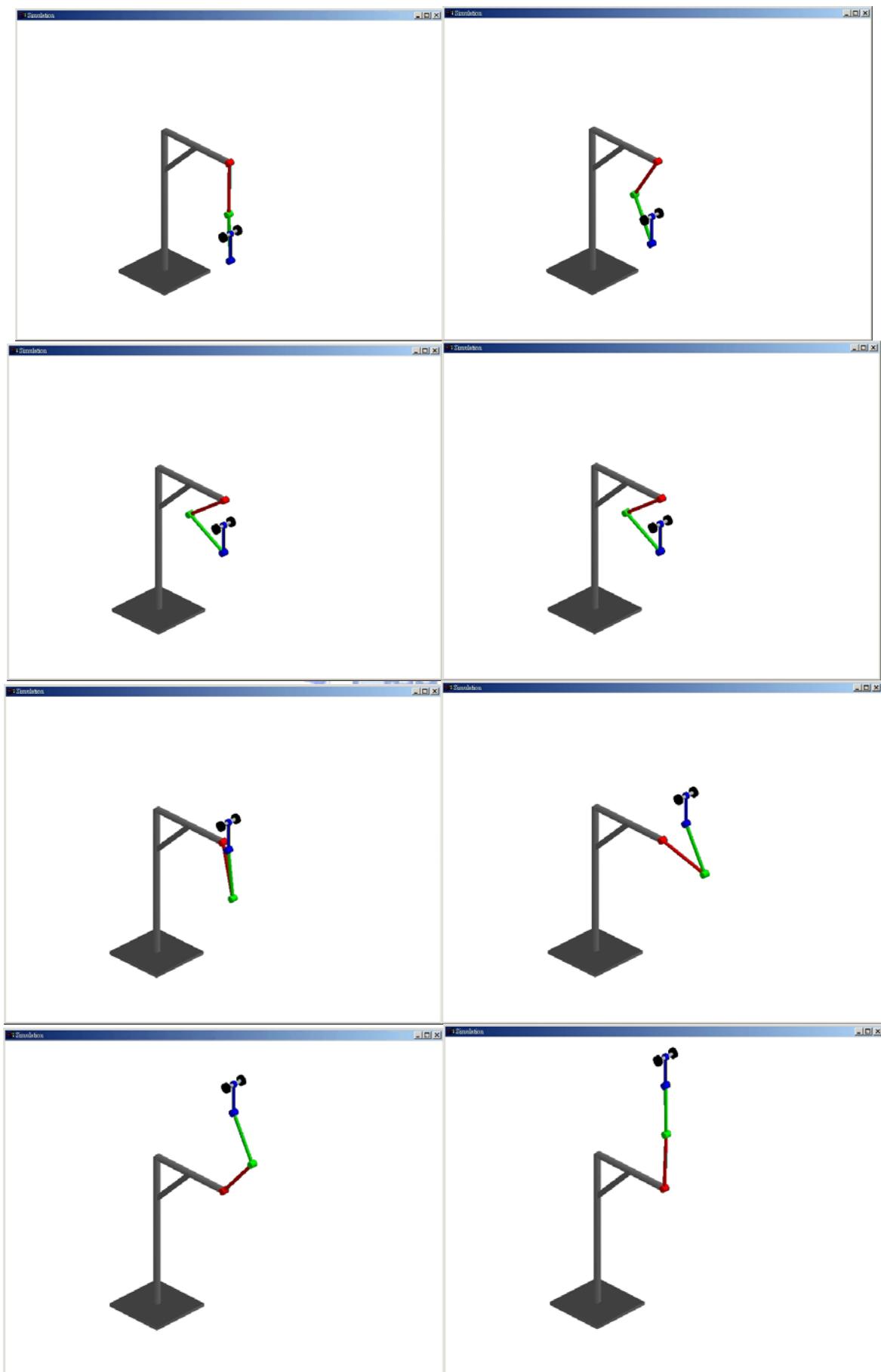


圖 3.8 次方係數為 2 的動態模擬結果

### 3.2.3 具有限制條件的最佳化結果

在真實的情況中，機器手臂的操作有其一定的限制條件，例如旋轉角度的限制、馬達所承受的力矩限制等等…為了符合真實情況，我們設定了  
一些限制條件：(1)  $\theta_1$  與  $\theta_2$  的範圍必須在正負 150 度之間 (2) 每一軸所能承  
受的力矩大小在正負 15 Nm 之間。根據上面兩個限制條件，我們將超過限  
制範圍的區域，角度與力矩關係曲面上的紅色區表示，而綠色區表示符合  
限制條件的區域。接著我們用同樣的目標函數作路徑規劃，並設定次方係  
數均為 1 與 2 兩種情況，分別求其搜尋路徑的結果。如下面圖 3.9 為結果  
路徑，下兩頁之圖 3.10 與圖 3.11 為動態模擬結果。

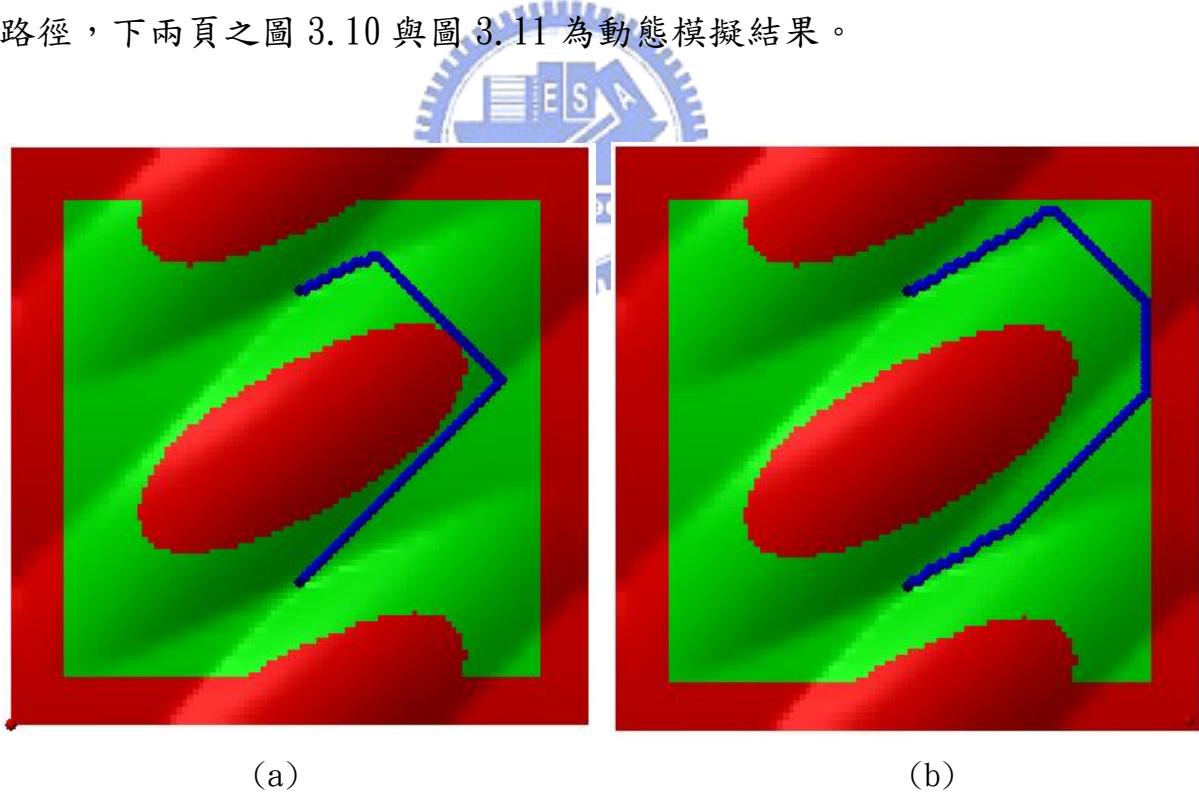


圖 3.9 (a)次方係數為 1 且具限制條件的結果路徑  
(b)次方係數為 2 且具限制條件的結果路徑

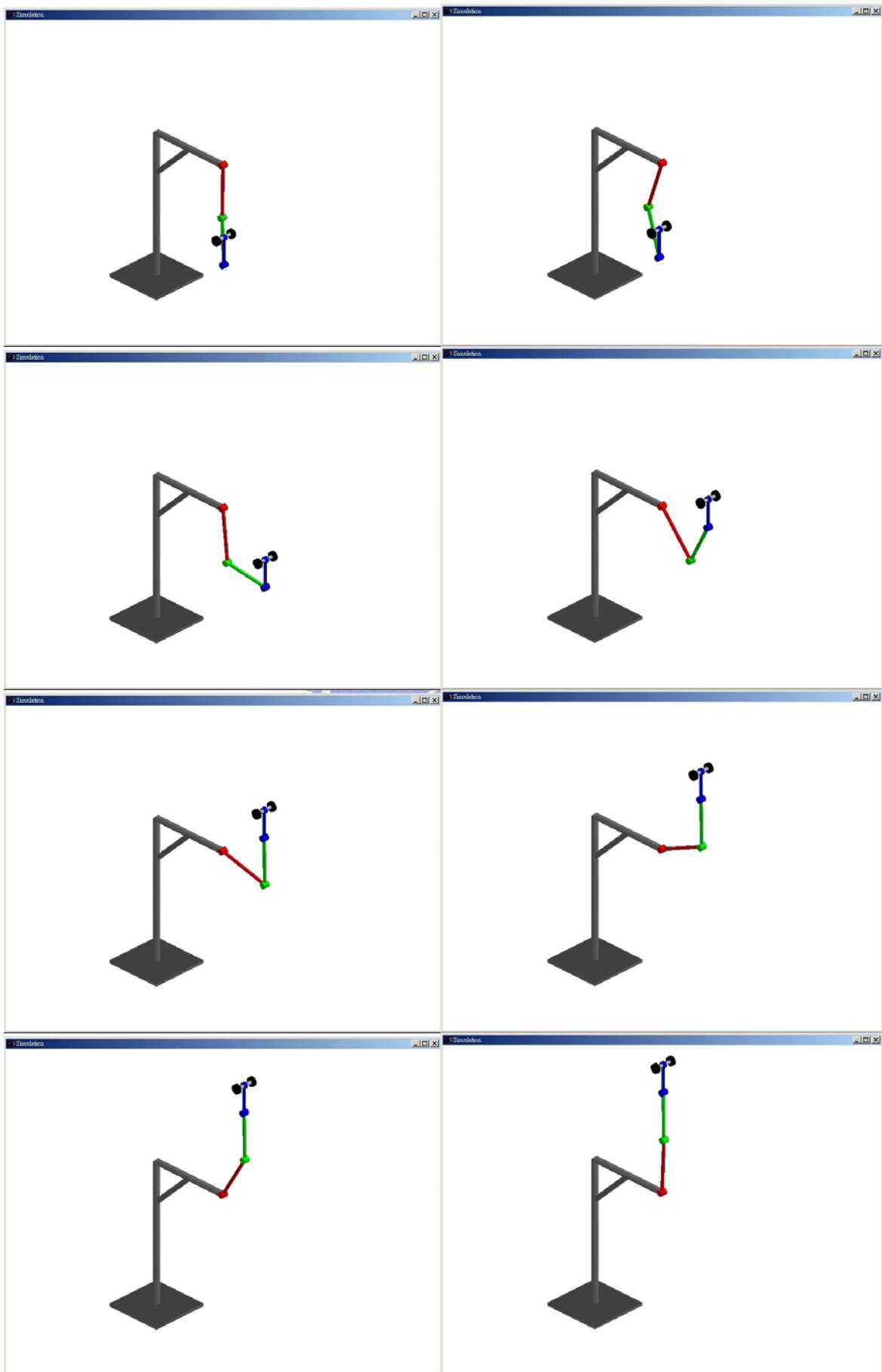


圖 3.10 具限制條件且次方係數為 1 的動態模擬結果

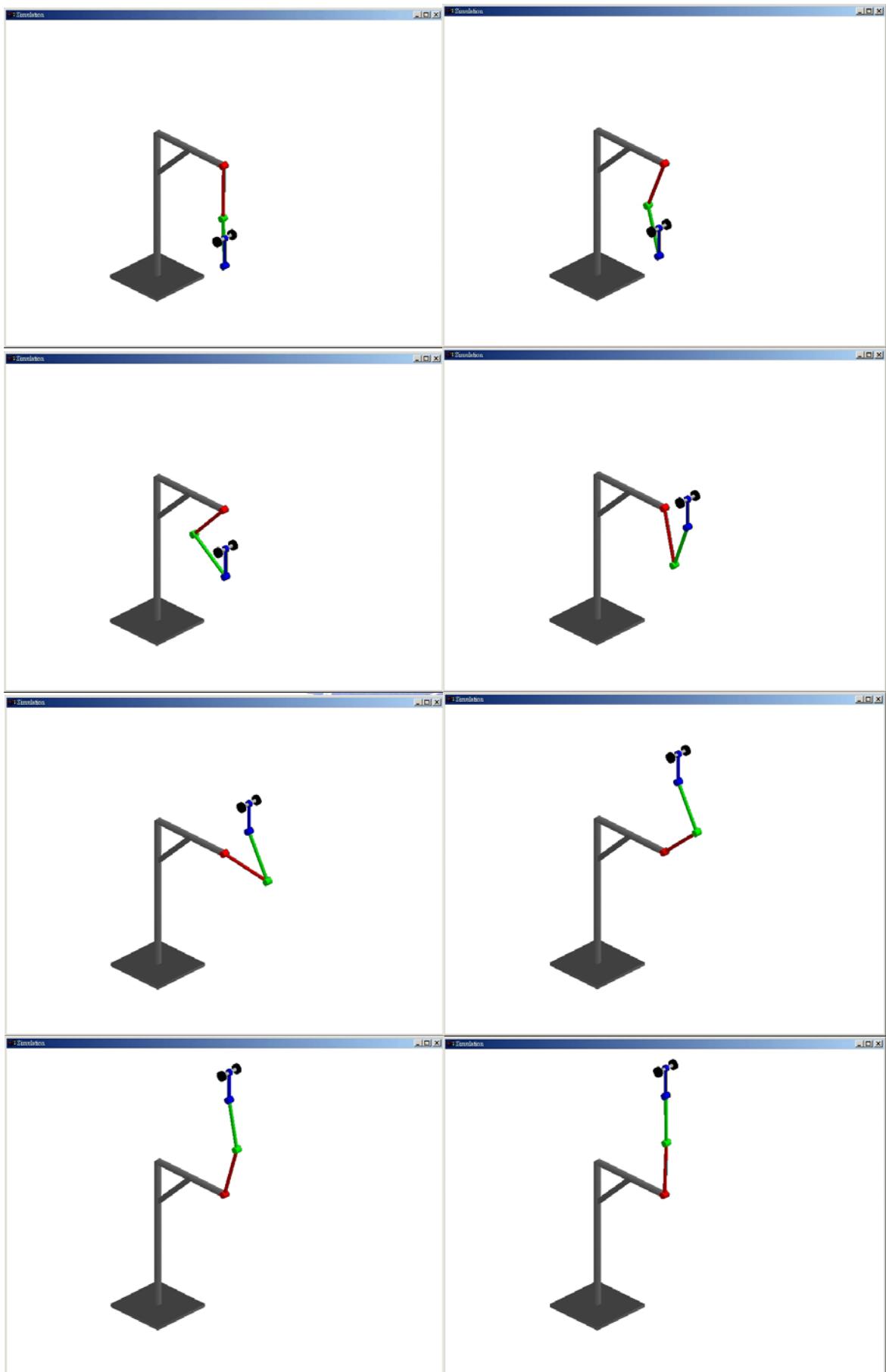


圖 3.11 具限制條件且次方係數為 2 的動態模擬結果

### 3.3 結果討論

根據 3.2 節的結果，我們了解到次方係數對目標函數的影響。當次方係數等於 2 時，我們所得到的最佳化結果為較省力但較為費時；反之，次方係數等於 1 時，我們所得到的最佳化結果為較為省時但較為費力。因此次方係數的大小決定於我們的目標為省力優先或是省時優先。

另外值得一提的，在本篇論文中的舉重例子，我們可以發現由於起點與終點的位置，在角度與力矩的關係曲面是成對稱關係的，所以理論上應該有兩種路徑可以選擇。在 3.2 節中，我們所得到的路徑搜尋結果都是”順時針”繞著山脈到達終點；不過我們也可以選擇以”逆時針”繞著山脈而到達終點。以次方係數為 2 且無限制條件的情況來作例子，其搜尋結果如下圖 3.12 所示。接著我們將圖 3.12 的路徑數據( $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ )輸入至動態模擬程式中，其動態模擬結果如圖 3.13 所示。

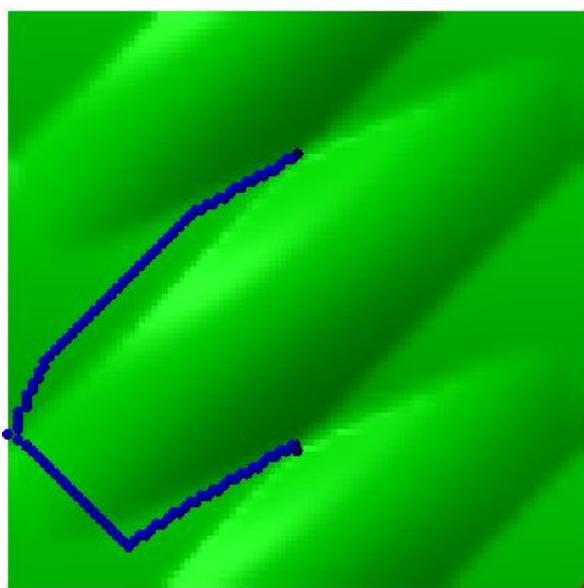


圖 3.12 以逆時針繞山脈的結果路徑(次方係數為 2 且無限制條件)

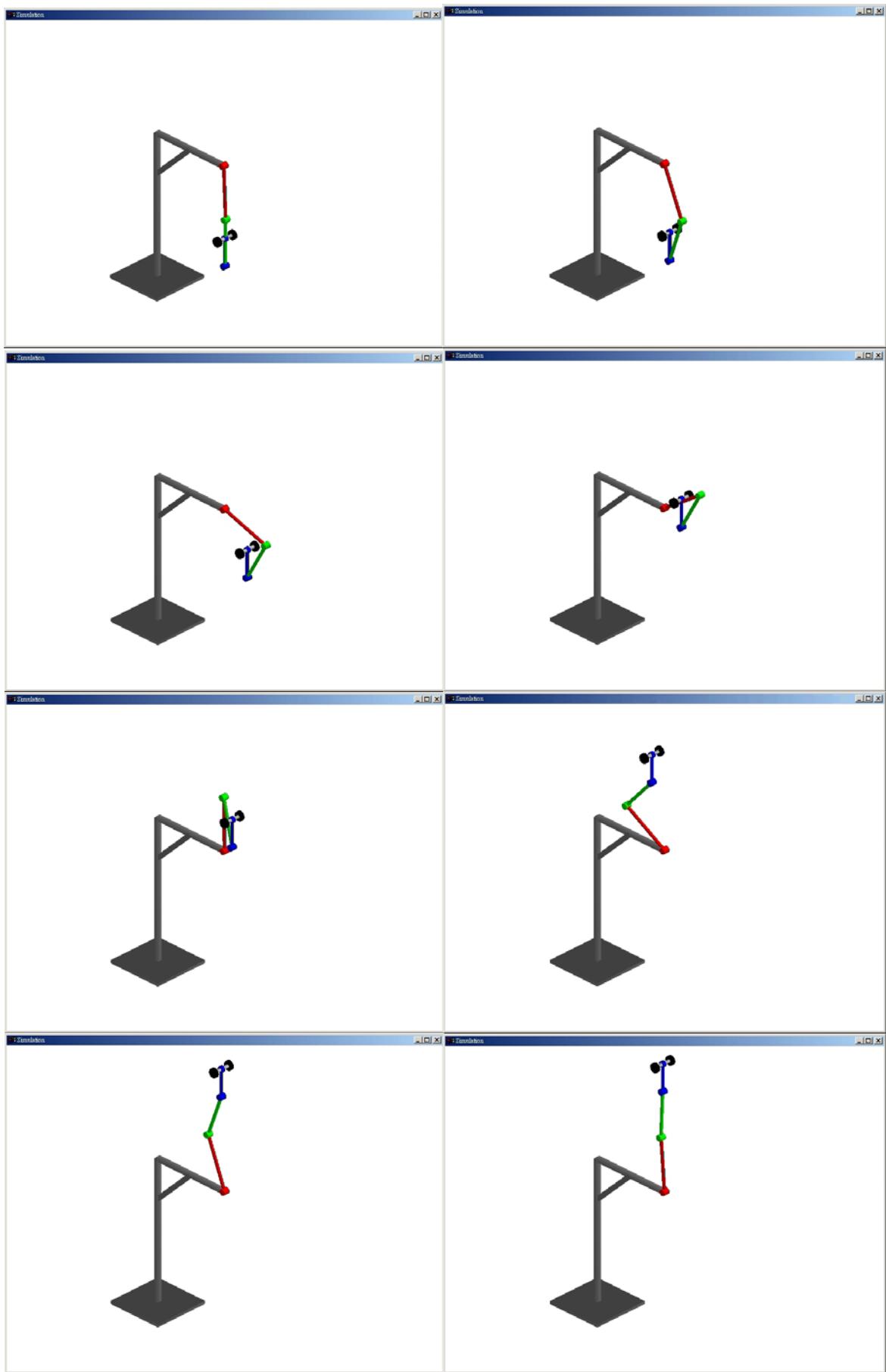


圖 3.13 次方係數為 2 的動態模擬結果(以逆時針繞山脈且無限制條件)