

# 國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩 士 論 文

圖文步驟化與同步呈現

對於國中圓與切線性質學習成效之比較研究

A Comparison Study between Stepwise and Simultaneous Presentation of  
Graph and Words on the Learning of Circle and Tangent Properties

研 究 生：楊蕙璐

指導教授：陳明璋 博士

中 華 民 國 一 百 零 二 年 六 月

圖文步驟化與同步呈現對於國中圓與切線性質學習成效之比較研究

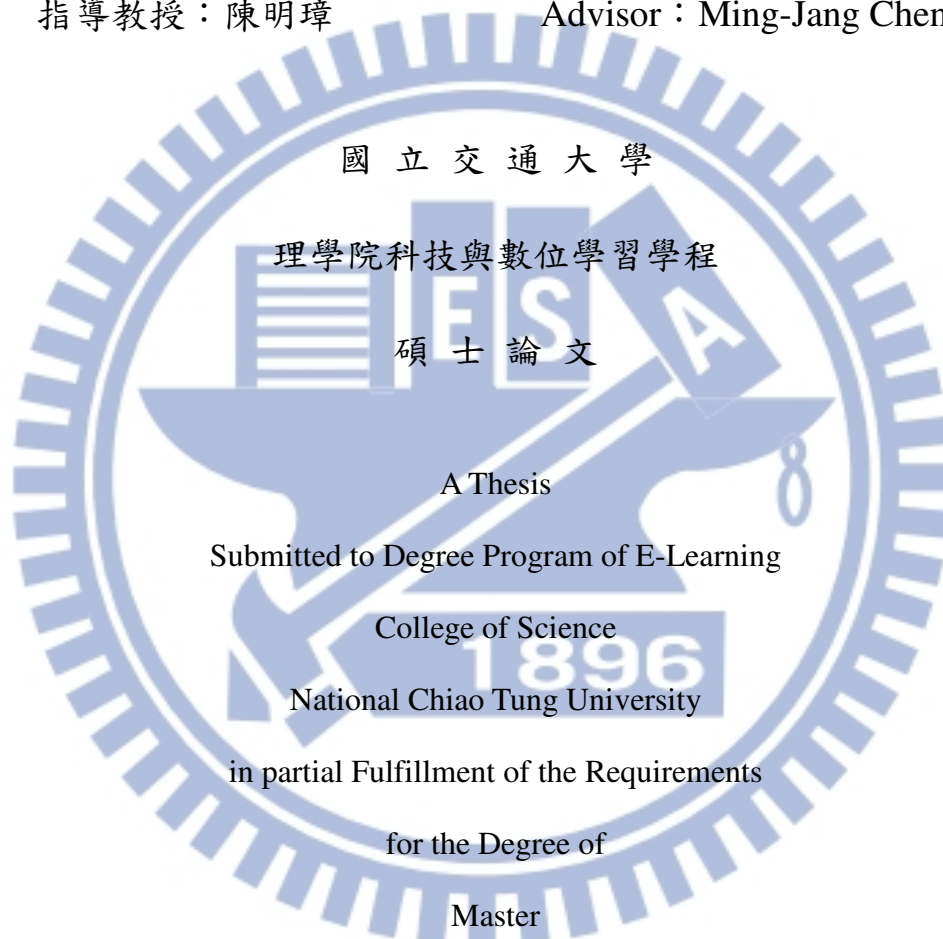
A Comparison Study between Stepwise and Simultaneous Presentation of  
Graph and Words on the Learning of Circle and Tangent Properties

研 究 生：楊蕙璐

Student：Hui-Lu Yang

指導教授：陳明璋

Advisor：Ming-Jang Chen



A Thesis  
Submitted to Degree Program of E-Learning  
College of Science  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2013

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零二年六月

# 圖文步驟化與同步呈現對於國中圓與切線性質學習成效之比較研究<sup>1</sup>

學生：楊蕙璐

指導教授：陳明璋 博士

國立交通大學理學院科技與數位學習學程

## 中文摘要

訊息傳遞之首要是訊息要被學習者「注意」到，教師如何正確利用視覺元素做好視覺引導，將訊息正確地傳達，讓學生容易看到，就仰賴教師在教材設計及操控上之配合。本研究採準實驗研究法，以「圓與切線間的性質關係」之幾何概念為教學內容，探討圖文步驟化呈現教學與圖文同步呈現教學對學生學習成效與認知負荷感受的影響。以二因子變異數進行實驗分析。研究結果顯示：(1)教學設計與學習成就水準兩變項在後測、延後測各部分之表現及認知負荷感受均沒有顯著的交互作用。(2)教學設計變項對於後測總成績、後測計算題、後測說明題之主要效果皆達到顯著差異；學習成就水準變項對於後測總成績、後測計算題、後測說明題之主要效果皆達到顯著差異。(3)教學設計變項對於延後測總成績、延後測計算題、延後測說明題之主要效果皆達到顯著差異；學習成就水準變項對於延後測總成績、延後測計算題、延後測說明題之主要效果皆達到顯著差異。(4)教學設計變項對於認知負荷感受之主要效果達到顯著差異；學習成就水準變項對於認知負荷感受之主要效果未達顯著差異。(5)綜合學習效率與學習投入分數判斷學習情形，實驗組為高效率高投入，對照組為低效率低投入，兩組教材對於高學習成就學生均未產生專業知識反轉效應。

關鍵字：注意力、視覺引導、多媒體學習、認知負荷、圖文步驟化、圖文同步呈現

---

<sup>1</sup> 本論文部分研究成果與國科會專題研究計畫 100-2511-S-009-006- 及 101-2511-S-009-006-MY2 相關。



# A Comparison Study between Stepwise and Simultaneous Presentation of Graph and Words on the Learning of Circle and Tangent Properties

Student : Hui-Lu Yang

Advisor : Ming-Jang Chen

Degree Program of E-Learning  
National Chiao Tung University

## Abstract

The most important thing of sending message is the message must be noticed. How do teachers properly make use of visual elements of visual guiding ,to convey the message properly and let students notice it? It depends on teaching design and manipulation. This study was based on a quasi-experimental deign method by using "circle and tangent properties " of geometric concepts for teaching content, and it explored stepwise teaching of graph and words and simultaneous presentation teaching of graph and words on students' learning performances and perceptions of cognitive load..The result of the experiment was analyzed through two-way ANOVA.The results of the study showed that :(1) In terms of the individual scores in post-test and delayed post-test as well as the perceptions of cognitive load, there was no significant interaction between the two independent variables, teaching design and learning achievement level. (2)The major effect the variable of teaching design had on scores in post test was found to be significant in posttest total score, posttest calculation problems, posttest description problems; the major effect the variable of learning achievement level had on scores in post test was found to be significant in posttest total score, posttest calculation problems, posttest description problems. (3) The major effect the variable of teaching design had on scores in

delayed post-test was found to be significant in delayed posttest total score, delayed posttest calculation problems, delayed posttest description problems; the major effect the variable of learning achievement level had on scores in delayed post-test was also found to be significant in delayed posttest total score, delayed posttest calculation problems, delayed posttest description problems. (4) The major effect the variable of teaching design had on scores in perceptions of cognitive load was found to be insignificant; however, the major effect the variable of learning achievement level had on scores in perceptions of cognitive load was discovered to be significant. (5) Judging from the synthesis of learning effectiveness and learning involvement, participants in the experimental group belonged to learners of high efficiency and high involvement learning style while in the control group participants were described as learners of low efficiency and low involvement learning style. Both teaching materials did not lead to the expertise reversal effect in high achievers.

Keywords : attention, visual guiding, multimedia learning, cognitive load, stepwise of graph and words , simultaneous presentation of graph and words



## 誌謝

回首這兩年，真的過的好充實，常覺得時間不夠用，無時無刻都在被時間追著跑，雖然辛苦，還好，我努力了，今日，我做到了！

這一路走來，要感謝好多人…

感謝論文指導教授陳明璋博士，在專業知識上的建議與指導，開闊了我的視野，讓我對教材與教學有了嶄新的認識。老師的辛勞與付出，點滴在心頭，無限感激！

感謝李源順教授、袁媛教授、李俊儀教授、莊榮宏教授播冗給予寶貴的意見，讓我的論文能更加完整。

感謝互相支援、互相打氣的 AMA 夥伴—士立、天行、昭吉、威鈞、雅婷、淑貞學姐及振順學長，因為你們，我才能順利完成這本論文，能和你們一同學習，是一件幸福的事。

感謝好友們，在我進修期間的鼓勵與支持，給了我不斷往前的動力。

感謝家人，做我精神上及生活上的強力後盾，讓我可以專心完成學業。終於能好好陪伴你們了！

走完這兩年，要感謝的人真的很多，謝謝所有曾經幫助過我的人，謝謝！





# 目次

中文摘要.....	i
Abstract .....	iii
誌謝.....	v
目次.....	vii
表次.....	xi
圖次.....	xiii
第一章 緒論.....	1
1-1 研究背景與動機.....	1
1-2 研究目的.....	3
1-3 研究問題.....	3
1-4 研究範圍與限制.....	3
1-5 名詞解釋.....	4
第二章 文獻探討.....	5
2-1 注意力與視覺搜尋.....	5
2-1-1 注意力 .....	5
2-1-2 視覺搜尋 .....	6
2-1-3 選擇性注意力 .....	8
2-1-4 特徵整合理論 .....	10
2-1-5 注意力與視覺搜尋對本研究之影響 .....	11
2-2 訊息處理理論.....	12
2-2-1 訊息處理理論 .....	12
2-2-2 訊息處理理論對本研究之影響 .....	13
2-3 多媒體學習理論.....	14

2-3-1	多媒體學習理論的基本假設 .....	14
2-3-2	多媒體學習理論的認知負荷 .....	16
2-3-3	多媒體學習理論的教學設計原則 .....	17
2-3-4	多媒體學習理論對本研究之影響 .....	19
2-4	認知負荷理論 .....	20
2-4-1	認知負荷基本假設 .....	20
2-4-2	認知負荷類型 .....	21
2-4-3	認知負荷效應 .....	22
2-4-4	認知負荷理論對本研究的影響 .....	30
2-5	幾何教學 .....	31
2-5-1	幾何思考的發展層次 .....	31
2-5-2	幾何圖形的認知理解 .....	32
2-5-3	數學符號表徵的轉化 .....	34
2-5-4	從表徵轉化看數學學習的困難 .....	35
2-5-5	幾何課程的學習 .....	36
第三章	研究方法 .....	41
3-1	研究流程 .....	41
3-1-1	準備階段 .....	42
3-1-2	實驗階段 .....	42
3-1-3	分析階段 .....	42
3-2	研究設計 .....	43
3-2-1	研究方法 .....	43
3-2-2	研究變項 .....	43
3-2-3	研究假設 .....	44
3-2-4	實驗流程 .....	45
3-3	研究對象 .....	46

3-4 研究工具.....	48
3-4-1 實驗教材 .....	48
3-4-2 前測測驗卷 .....	55
3-4-3 後測測驗卷 .....	55
3-4-4 延後測測驗卷 .....	57
3-4-5 認知負荷量表 .....	57
3-5 資料分析.....	58
第四章 研究結果與討論.....	59
4-1 後測及延後測表現分析.....	59
4-2 認知負荷分析.....	74
4-3 學習效率與學習投入分數暨專業知識反轉效應分析.....	77
4-3-1 整體學生之分析 .....	77
4-3-2 各學習成就學生之分析 .....	78
第五章 研究結論與建議.....	81
5-1 研究結論.....	81
5-2 建議.....	83
5-2-1 教學建議 .....	83
5-2-2 未來研究建議 .....	83
參考文獻.....	85
中文文獻.....	85
英文文獻 .....	87
附錄一 實驗組教材 .....	89
附錄二 前測測驗卷 .....	109
附錄三 後測測驗卷及延後測測驗卷.....	111



## 表次

表 1 「圓與切線間的性質關係」教學內容、教學目標及先備知識對照表.....	38
表 2 教學實驗流程表.....	45
表 3 研究對象班級人數及上學期定期評量成績表.....	46
表 4 研究對象之高、低學習成就人數分配表.....	46
表 5 研究對象八年級上學期定期評量平均獨立樣本 T 檢定摘要表 .....	47
表 6 研究對象前測成績獨立樣本 T 檢定摘要表 .....	47
表 7 實驗組教材 (教學示例第五題為例).....	50
表 8 對照組教材 (教學示例第五題為例).....	54
表 9 後測及延後測描述性統計摘要表.....	60
表 10 教學設計與學習成就水準在後測總成績之平均數摘要表.....	61
表 11 教學設計與學習成就水準在後測總成績之二因子變異數分析摘要表.....	61
表 12 教學設計與學習成就水準在延後測總成績之平均數摘要表.....	63
表 13 教學設計與學習成就水準在延後測總成績之二因子變異數分析摘要表.....	63
表 14 教學設計與學習成就水準在後測計算題之平均數摘要表.....	65
表 15 教學設計與學習成就水準在後測計算題之二因子變異數分析摘要表.....	65
表 16 教學設計與學習成就水準在延後測計算題之平均數摘要表.....	67
表 17 教學設計與學習成就水準在延後測計算題之二因子變異數分析摘要表.....	67
表 18 教學設計與學習成就水準在後測說明題之平均數摘要表.....	69
表 19 教學設計與學習成就水準在後測說明題之二因子變異數分析摘要表.....	69
表 20 教學設計與學習成就水準在延後測說明題之平均數摘要表.....	71
表 21 教學設計與學習成就水準在延後測說明題之二因子變異數分析摘要表.....	71
表 22 教學設計與學習成就水準在花費心力之平均數摘要表.....	74
表 23 教學設計與學習成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表.....	75

表 24 整體學生學習效率與學習投入分數.....	77
表 25 不同學習成就水準之學習效率與學習投入分數.....	79





## 圖次

圖 1 平行搜尋與序列搜尋 .....	6
圖 2 干擾物數量與搜尋時間的關係 .....	7
圖 3 特徵搜尋與結合搜尋 .....	7
圖 4 BROADBENT 早期過濾器模型 .....	8
圖 5 TREISMAN 減弱模型 .....	9
圖 6 DEUTSCH 與 DEUTSCH 晚期過濾模型 .....	9
圖 7 特徵整合理論 .....	11
圖 8 訊息處理歷程 .....	12
圖 9 雙通道假設模型 .....	14
圖 10 聽覺通道處理過程 .....	15
圖 11 視覺通道處理過程 .....	15
圖 12 學習效率圖 .....	25
圖 13 學習投入分數圖 .....	26
圖 14 綜合學習效率與學習投入分數圖 .....	27
圖 15 DUVAL 幾何學習認知處理歷程相互作用關係圖 .....	33
圖 16 幾何視覺轉化—重新配置原圖 .....	34
圖 17 表徵轉換—自然語言轉數學語言 .....	35
圖 18 表徵轉換—代數表徵轉圖形表徵 .....	35
圖 19 視覺處理的第一步—子圖需被辨別 .....	36
圖 20 研究流程圖 .....	41
圖 21 實驗組教材畫面(1) .....	49
圖 22 實驗組教材畫面(2) .....	49
圖 23 對照組教材畫面 .....	49

圖 24 後測及延後測計算題、說明題分數折線圖 .....	72
圖 25 整體學生學習效率與學習投入分數之視覺化圖像 .....	78
圖 26 不同學習成就水準之學習效率與學習投入分數視覺化圖像 .....	79



# 第一章 緒論

## 1-1 研究背景與動機

曾有學生向研究者說過：「老師，我看不懂圖形，也看不出它的性質，我當然就不會回答。」可見幾何學習對學生的困擾，以及幾何教學對教師的挑戰。「幾何」是重要的數學課程，多數學生在幾何的學習也主要來自於學校課堂，從國小的直觀操作到國中的幾何推理證明(教育部，2008)，由具體操作到演繹推理間存在著相當大的落差，學生要跨越並非如此順利，若教師在教材上沒有做好統整及安排，看不到圖形所呈現的訊息，就會造成學生的認知負荷，不利於學習，當在表徵處理或轉換出現障礙，就會導致學習上的困難，再面對到形式化的幾何證明時，學習意願自然低落。

許多教師在教學時，為了時間上的掌控，多直接進行講述教學，學生可能因缺少觀察和思考，而在沒有真正理解概念的情形下，只是強記公式、定理，在後續建構數學知識的過程就會產生問題，造成學習困擾。因此，數學教育不能只追求學生的基礎運算程序與解題技巧的能力，而忽略了概念性理解的邏輯思考培養。

在 Polya(1957)所著 *How to solve it* 一書中將「解題」這項心智活動分成了解問題、擬定計畫、執行計畫、驗算與回顧四種一般性步驟(Polya, 1957/蔡坤憲譯，2006)。教師如何善用教材，引導學生思考，啟發並幫助學生完成「解題」，讓學生能獨立、適切的應用它，提升學生幾何思維的能力，是重要課題。

數位化教學媒體的引進，讓教學產生不少變化，增加了更多提升學習成效的可能性，然而，多媒體的使用就像雙面刃，好的使用讓教學效果提升；相對的，不當的設計不僅對學習毫無助益，也干擾學習。研究者在國中教學現場發現，使用多媒體教學的教師，其使用的教材來源依賴教科書廠商所提供占多數比例，使用自製教材的教師極少。教科書廠商提供的多媒體教材通常只是課本內容的電子版，內容編排除了必要訊息外，經常充斥著無關教學主題的多餘訊息，容易分散學生的注意力。

使用多媒體教材教學，除了硬體設備不可缺少外，軟體的配合才是主要重點。訊息過多或缺乏醒目重點之設計將使學習者的注意力無所適從（陳一平，2011）。不少教師未經過專業的視覺設計訓練，雖有好的工具與內容，但教材編排上未考慮訊息傳遞的重點，讓設計不良的畫面以及不必要的訊息干擾，造成無法正確傳達訊息且模糊了學習者的學習重點，讓學習反而困難重重。

訊息傳遞之首要是訊息要能被學習者「注意」到，才能有機會進一步被處理和學習（張春興，1994），而視覺處理是最主要的訊息處理管道。由於工作記憶的限制，個體無法一次處理大量訊息，當面臨大量訊息的刺激時，會注意整體、忽略細節、僅找部份重點；若要在畫面上找到相關訊息，必須有足夠的時間思考及處理，才能透過選取與組織，真正整合訊息(Mayer, 2001)。

ChanLin & Okey (1994)指出連貫性的訊息適合在同一畫面出現，但如果螢幕中訊息份量過多時，應將複雜的訊息加以分解，採用分層呈現的方式提供重點(引自林麗娟，2000)；分層呈現的設計乃在於分割一份量繁重的訊息塊，藉螢幕逐步呈現訊息而引導學習的重點(林麗娟，2000)。而許晏斌(2009)的研究發現藉由逐步呈現的物件激發可吸引學習者的注意力，協助搜尋教材的訊息，以注意力引導學習，達到教材、教學者、學習者三者之間的互動。因此，如何正確利用視覺元素做好視覺引導，將訊息正確地傳達，讓學生容易看到，就仰賴教師在教材設計及操控上之配合。

本研究選取八年級常態班學生為實驗對象，以「圓與切線間的性質關係」之幾何概念為教學內容，嘗試以注意力與視覺搜尋、多媒體學習理論及認知負荷理論為基礎，並考量整體學生的認知歷程運作，由教學者主導教學，製作合適的教材內容進行教學，實驗教材運用圖文步驟化呈現教學，期能藉有效的注意力引導，適時地呈現訊息、解說訊息，協助學習者選取、組織和整合訊息，降低學習者的認知負荷，達到好的學習成效。

此外，在常態編班的模式下，學生程度可能有很大的差異，對低學習成就學生有效的訊息引導，可能會對高學習成就學生的學習成效與投入程度有負面影響，進而產生專業知識反轉效應，因此，本研究透過學習效率與學習投入分數，觀察高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。



## 1-2 研究目的

本研究嘗試以多媒體學習理論、認知負荷理論建議的教學設計原則，設計由教學者主導教學，適合於課堂授課的多媒體教材，藉有效的注意力引導，適時地呈現訊息、解說訊息，協助學習者選取、組織和整合訊息，降低學習者的外在認知負荷，達到更好的學習成效。

本研究以「圓與切線間的性質關係」之幾何概念為教學內容，期望透過以圖文步驟化呈現教學之教學設計，引導學習者進行有效學習，基於上述背景及動機，本研究欲探討不同教學設計(圖文步驟化呈現教學 VS 圖文同步呈現教學)與不同學習成就水準(高學習成就學生 VS 低學習成就學生)在學習表現與認知負荷方面的影響。另外，透過學習效率與學習投入分數，探討高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。

## 1-3 研究問題

1. 不同教學設計與不同學習成就水準在後測表現是否有交互作用存在?
2. 不同教學設計與不同學習成就水準在延後測表現是否有交互作用存在?
3. 不同教學設計與不同學習成就水準在認知負荷是否有交互作用存在?
4. 對於高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應?

## 1-4 研究範圍與限制

### 1. 研究範圍

本研究以國中數學科幾何教學為主題，受限於人力、時間、資源等因素，研究對象為新竹縣某國中常態編班之八年級四個班級，而後測及延後測測驗卷之試卷批閱，另敦請一位教學年資 10 年之國中數學教師協助重複審閱，提供分數採計上之建議。

### 2. 研究內容限制

本研究為避免課後補習影響，選擇九年級幾何教學課程為主題，所得之結果

僅能做為相關單元之教學參考。

### 3. 研究對象限制

本研究僅以新竹縣某國中常態編班之八年級學生作為母群體，以便利抽樣抽取有效樣本 116 位，所得之結果無法推論至其他班級或學校。

### 4. 受試人員限制

由於施測班級原授課教師皆非研究者本身，對於研究者授課方式、說話語氣等熟悉度不足，受試學生的不適應狀況可能會影響實驗結果。

## 1-5 名詞解釋

### 1. 圖文步驟化呈現

本研究所指的圖文步驟化呈現為藉由線條和顏色標記來突顯主要訊息或淡化次要訊息的圖形特徵，利用雙通道模式、空間接近原則、符號表徵處理幾何說明的訊息，以分段方式一步步呈現教學內容的訊息傳遞策略，協助學習者能在教學者講解及提問時，快速搜尋到所指物件，減輕學習者在學習時的認知負荷，引導學習者看出相關訊息、發現圖形間的元素關聯並做思考連結及回答的授課方式。

### 2. 圖文同步呈現

本研究所指的圖文同步呈現為利用雙通道模式、符號表徵處理幾何說明的訊息，會同步呈現教學內容的完整圖文訊息，在課堂授課中，教學者以口語提問及說明來進行突顯與補充內容，引導學習者看出相關訊息、發現圖形間的元素關聯並做思考連結及回答的授課方式。

### 3. 幾何教學

本研究幾何教學範圍僅限於「圓與切線間的性質關係」之幾何概念。



## 第二章 文獻探討

本章共分五節，分別說明注意力與視覺搜尋、訊息處理理論、多媒體學習理論、認知負荷理論、幾何教學等文獻。

### 2-1 注意力與視覺搜尋

學習過程必須先透過感官接收訊息，面對環境中的多種訊息時，要抓取主要訊息的關鍵就在注意力，而視覺刺激的輸入是面對訊息最主要的感官接收器。以下就注意力、視覺搜尋、選擇性注意力、特徵整合理論做討論。

#### 2-1-1 注意力

注意力是外界大量的訊息是否可以經由感官進入短期記憶中處理及儲存的一個重要選擇機制(葉素鈴，1999)。個人會不斷地接收到外界給予的訊息，不論是從感官、儲存的記憶或其他認知歷程所獲得，但人的心理資源有限，無法同時處理過多的訊息，因此注意力指的是我們主動處理有限的訊息刺激做快速地處理，進而產生反應。

在注意力運作的過程中，根據是否需要意識控制而區分成控制歷程與自動化歷程(李玉琇、蔣文祁譯，2010)：

##### 1. 控制歷程 (controlled processes)

需要有意識地獲得，並且有意識地處理，在這當中需要極大的注意力，因此也就需要花費較多的心力才能將訊息或任務完成。通常是指在學習新訊息時，由於沒有相關經驗，需要建立知識，也就需要較高層次的認知處理才能理解。例如，本研究單元內容為「圓與切線間的性質關係」，教學對象為尚未學過的八年級學生，對學生而言，必須經由控制歷程才能產生學習。

##### 2. 自動化歷程 (automatic processes)

大部分的自動化歷程不一定會有正在處理的意識感覺，僅需要很少或完全不

需要花費心力，就可以快速地將訊息處理完畢。例如，複習已經學過的教材，因為對於教材內容已經精熟，所以當碰到舊教材的內容時，會自動回憶起舊教材概念，甚至快速反應回答問題。

## 2-1-2 視覺搜尋

Treisman 與 Gelade (1980) 提出視覺搜尋的兩種模式：

### 1. 平行搜尋 (parallel search)

目標物與干擾物的特徵元素有明顯差異，即使干擾物的數量增加也不會加長搜尋時間，干擾物多寡對找到目標物的時間影響不大(陳一平，2011)，如圖 1。

### 2. 序列搜尋 (serial search)

目標物與干擾物的特徵元素相近或類似，隨著干擾物的數量增加也會加長搜尋時間，因無法立即看出目標物獨特之處，需要逐一比對尋找，所耗費的時間愈多(陳一平，2011)，如圖 1。

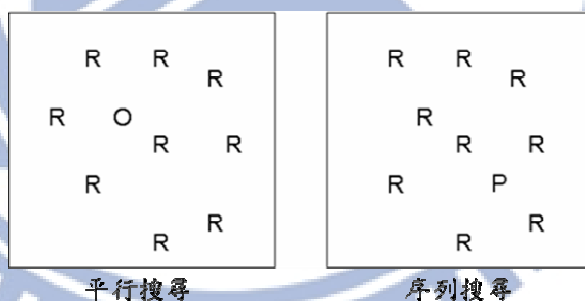


圖 1 平行搜尋與序列搜尋

資料來源：修改自陳一平 (2011)。視覺心理學 (頁 199)。台北市：雙葉書廊。

圖中平行搜尋之關係線的斜率較小，代表搜尋時間不受干擾物數量影響，也較不需要注意力輔助；而序列搜尋之關係線的斜率較大，代表搜尋時間會受干擾物數量影響，愈需要注意力輔助搜尋，如圖 2。

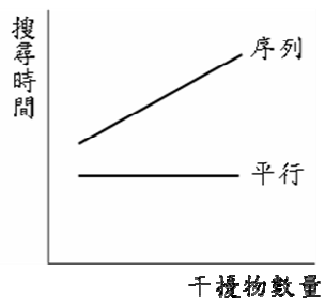


圖 2 干擾物數量與搜尋時間的關係

資料來源：修改自陳一平 (2011)。視覺心理學 (頁 199)。台北市：雙葉書廊。

經由實驗歸納出來的視覺基本特徵主要有四種：線段走向、顏色、運動(方向或速率)、大小(含長度、粗細、空間頻率等)，在搜尋實驗得到的斜率幾近 0，即平行搜尋(陳一平，2011)。

如果目標物與干擾物有明顯的不同，彼此間的差異為基本特徵，此種視覺搜尋屬於特徵搜尋(feature search)。例如，要在一群綠色的「X」中找到一個紅色的「O」，目標物與干擾物的特徵元素有明顯差異，是屬於不需花費注意力資源的平行搜尋，如圖 3。

如果目標物與干擾物間的差異包含多種基本特徵，需要結合較多的特徵才能進行搜尋，此種視覺搜尋屬於結合搜尋(conjunction search)。例如，要在一群綠色的「O」及「X」和紅色的「X」中找到一個紅色的「O」，由於目標物同時具備特徵「紅色」及形狀「O」，此兩種特徵差異在干擾物中都有出現，要辨認出目標，就必須結合這兩種特徵，是屬於需要花費注意力資源的序列搜尋，因此需花較長時間，如圖 3。

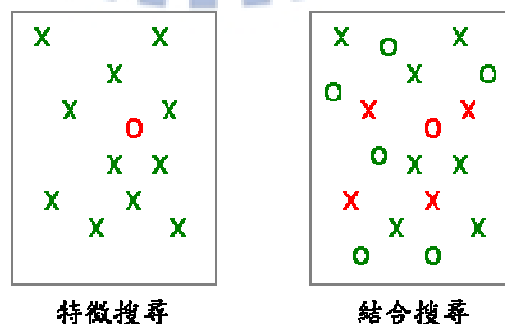


圖 3 特徵搜尋與結合搜尋

資料來源：修改自陳一平 (2011)。視覺心理學 (頁 202)。台北市：雙葉書廊。

### 2-1-3 選擇性注意力

注意力有時是在無意識下進行，選擇快速且較不費力，有時需要高層次的認知處理(李玉琇、蔣文祁譯，2010)。要如何對刺激做出選擇或者忽略？當面對大量訊息時，個體的內在處理資源有限，或能同時採取的反應有限，因此僅有少部份的訊息會接受更進一步的處理，而這個取捨機制即是選擇性注意力(selective attention)(李仁豪、葉素玲，2004)。

選擇性注意力的模式有幾種，這些模式的不同處在於：(1)對於進來的訊息是否有一個明顯的「過濾器」；(2)如果有過濾，過濾的產生是在訊息處理的哪一個階段(Pashler,1998)(李玉琇、蔣文祁譯，2010)。針對幾個不同的模式，說明如下：

#### 1. 早期選擇過濾模式

Broadbent(1958)提出多重的感覺刺激都會經由過濾器來篩選訊息，可以通過過濾器篩選的刺激，才能夠進入到知覺系統中作進一步的處理，未通過過濾器的刺激則完全被捨棄不處理(李玉琇、蔣文祁譯，2010)，如圖 4。

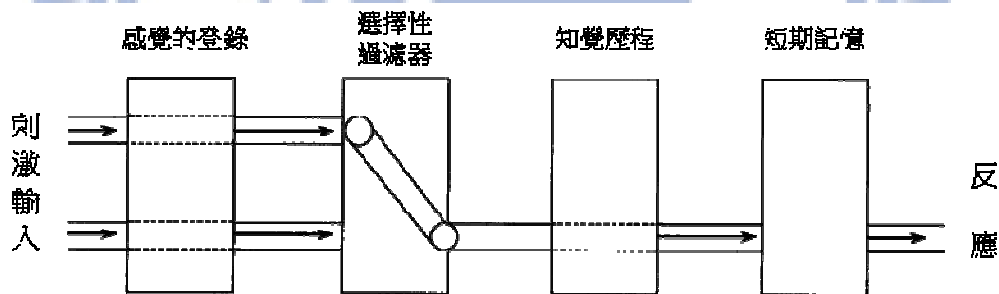


圖 4 Broadbent 早期過濾器模型

資料來源：李玉琇、蔣文祁 (譯) (2010)。認知心理學 Cognitive Psychology(5e) (原作者：Robert J. Sternberg)，(頁 173)。台北市：雙葉書廊。(原著出版年：2009)

#### 2. 過濾減弱模式

Treisman(1964)認為多重的感覺刺激都會平行的經由過濾器某種程度的分析來篩選訊息，具目標特性的刺激可以通過過濾器篩選，進入到知覺系統中作進一步的處理，未具目標特性的刺激並非完全被排除，而是一個逐漸減弱的歷程。同

時進入的每一刺激都有不同強度的分配，其對應的內在處理管道具有不同的敏感度。各管道的敏感度決定了閾限值(Threshold，能引起反應的最小物理能量)，刺激強度必需高於閾限值才能被偵測出來加以處理(李玉琇、蔣文祁譯，2010)，如圖 5。

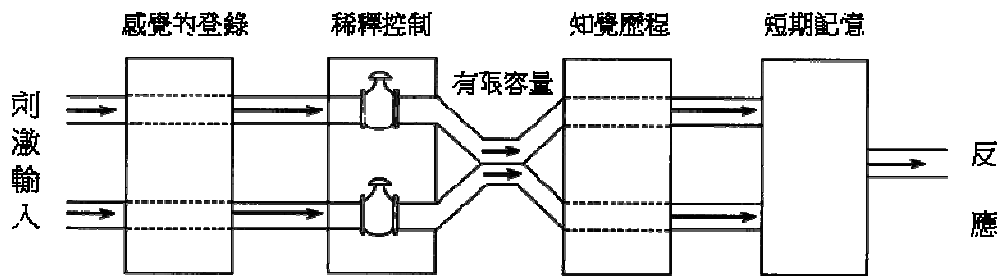


圖 5 Treisman 減弱模型

資料來源：李玉琇、蔣文祁 (譯) (2010)。《認知心理學 Cognitive Psychology(5e)》(原作者：Robert J. Sternberg)，(頁 173)。台北市：雙葉書廊。(原著出版年：2009)

### 3. 晚期選擇過濾模式

J. Anthony Deutsch 與 Diana Deutsch(1963)認為多重的感覺刺激都會進入物體辨識的知覺歷程分析，依據其重要性的不同，只有最重要的訊息可以經由過濾器的篩選，進入接下來的處理歷程(李玉琇、蔣文祁譯，2010)，如圖 6。

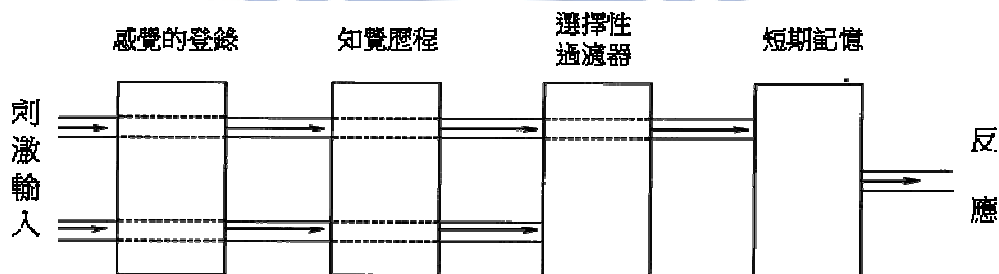


圖 6 Deutsch 與 Deutsch 晚期過濾模型

資料來源：李玉琇、蔣文祁 (譯) (2010)。《認知心理學 Cognitive Psychology(5e)》(原作者：Robert J. Sternberg)，(頁 175)。台北市：雙葉書廊。(原著出版年：2009)



#### 4. Neisser 的綜合模式

Ulric Neisser(1967)綜合早期過濾及晚期過濾模式，主張注意力的處理受兩個歷程支配：前注意力(preattentive)及注意力(attentional)歷程。前注意力歷程對於所有的輸入刺激是快速且平行處理的，只可用來察覺未注意訊息的物理感覺特性，無法辨識意義和關係；注意力歷程發生的較晚且是平行執行的，並消耗時間和注意力資源(如工作記憶)，可用來觀察特徵之間的關係並將片段訊息整合成一個物體的心理表徵(李玉琇、蔣文祁譯，2010)。

#### 2-1-4 特徵整合理論

Treisman(1986)的特徵整合理論(Feature Integration Theory)探討了視覺搜尋和選擇性注意力的關係。Treisman 認為在前注意歷程時，視覺刺激的各特徵是個別處理，自動化登錄在特徵圖(Feature map)上；在注意歷程時，當注意力投注在某空間位置上，就能將該位置圖(Master Map)上所有特徵如顏色、形狀、方向、運動、深度等整合在一起，形成完整的物體表徵(陳一平，2011)。例如，一開始是三個不同的目標物的刺激輸入，若要判斷哪一個目標物屬於「月亮」這種物體，就必須針對不同的特徵(黃色、曲線的)做聯結整合，如圖 7 中的虛線部份。

根據特徵整合理論就可以解釋為何特徵搜尋相對容易，而結合搜尋相對困難(李玉琇、蔣文祁譯，2010)。若將注意力放在單一目標的辨別，此目標又具有干擾物所沒有的獨特特徵，就可以輕鬆平行搜尋即可。相對的，若單一目標的特徵，在不同干擾物中會出現，則需將目標的各個特徵加以結合(bind)再序列搜尋找，就會耗費較多時間和心力。



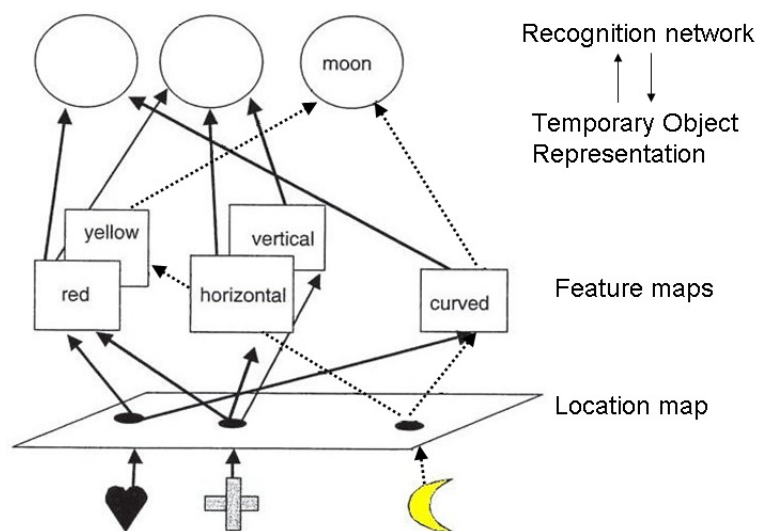


圖 7 特徵整合理論

資料來源：修改自“How the deployment of attention determines what we see.” by A. Treisman, 2006, *Visual Cognition*, 14(4-8), p.412.

## 2-1-5 注意力與視覺搜尋對本研究之影響

對於訊息的處理，是由兩種注意力系統不斷交互作用進行選擇，而自動化歷程所花費心力及處理時間較少。若希望能增加自動化歷程處理，減少控制歷程處理，在設計教材時，訊息呈現就必須著重在視覺上，才能將學習者的注意力引導在教學內容上。

訊息過多或缺乏醒目重點之設計將使觀看者的注意力無所適從(陳一平，2011)。面對大量外在刺激時，訊息無法同時被處理，某些訊息會被過濾，僅處理必要訊息，因此，設計教材時，要降低視覺搜尋的時間，避免重複搜尋、比對浪費有限的認知資源，應善用選擇性注意力，突顯主要訊息，減弱次要訊息，讓主要訊息的作用與畫面展演的一致，成為有意義的刺激，就能在教學過程中被學習者注意，很快的進入知覺歷程的運作。

幾何課程對學生的困難度有時在於學生無法從複雜的圖形中抽取所需訊息，透過視覺引導讓學生能即時辨識訊息，瞭解已知元素之間的關係，對於學習是相當重要的。本研究教材設計利用顏色、標記等信號來引導注意力，排除干擾物，將幾何圖形中的主要訊息突顯，次要訊息淡化，協助學生選取及組織訊息，並看到訊息之間的關聯，直接處理必要訊息，讓認知資源能有效應用在學習上。

## 2-2 訊息處理理論

訊息經由外在刺激的輸入到記憶處理跟內在心理運作歷程相關，了解訊息處理，規畫訊息呈現，讓透過感官收錄訊息時的學習過程能更快抓取到主要訊息。

### 2-2-1 訊息處理理論

訊息處理理論(Information-Processing Theory)發展自認知心理學的學習理論，其焦點著重在訊息如何經由感官覺察、注意、辨識、處理、轉換、記憶與儲存等內在心理活動的歷程(張春興，1994)，如圖 8。

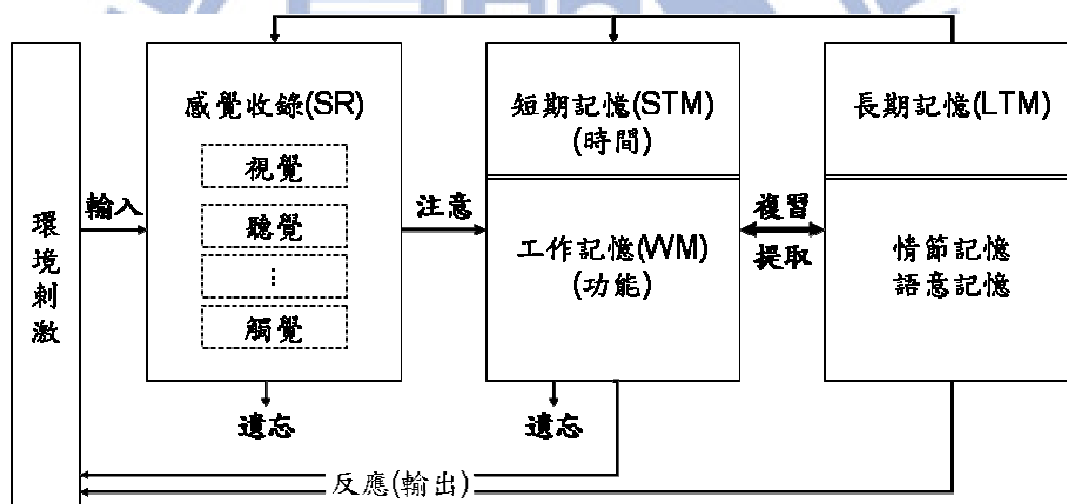


圖 8 訊息處理歷程

資料來源：修改自張春興 (1996)。教育心理學 (頁 225)。台北市：東華書局。

訊息處理是無法直接觀察的內在心理運作歷程，此一內在心理歷程有三項特徵(1)訊息處理是階段性的；(2)各階段的功能不一；(3)訊息處理是前後交互作用的(張春興，1994)。根據這三項特徵，訊息處理將記憶處理分為三個階段：

#### 1. 感覺收錄(sensory register，簡稱 SR)

個體憑視覺、聽覺、味覺、嗅覺及觸覺等感官接觸環境刺激所引起的短暫記憶，這一階段的感覺收錄，刺激會短暫保持原狀以供個體抉擇是否作為重要訊息

來處理，在此區域頂多停留 5 秒，於這瞬間決定收錄的訊息若要進一步處理，就加以注意及編碼後進入短期記憶，若無即予以放棄後遺忘(張春興，1994)。

## 2. 短期記憶(short-term memory，簡稱 STM)

訊息經由感覺收錄注意後進入短期記憶，在此停留的時間延續為 5~20 秒的記憶，其記憶容量大約是  $7 \pm 2$  個單元。訊息處理過程中，若處理的訊息是重要的，經特別複習(rehearsal)、記憶、理解，則訊息將進入長期記憶，因為此運作具有心智運作的功能，也稱為工作記憶(working memory，簡稱 WM)；若只是對刺激表現出適當反應，當目的已達，若無特別處理，則訊息就會流失、遺忘(張春興，1994)。

## 3. 長期記憶(long-term memory，簡稱 LTM)

儲存的訊息或知識是長期的、甚至是永久的即為長期記憶，且長期記憶的容量是無限的。在長期記憶中儲存的訊息或知識，可分為兩類：一類為情節記憶，另一類為語意記憶。情節記憶是指有關生活情節的實況記憶；語意記憶是指我們用自己理解的語文所表達的概念、原則與技能，也就是指個人學得的知識(張春興，1994)。儲存在長期記憶的知識，無法在長期記憶中直接處理，而是被提取至工作記憶運作、整合後，再進入長期記憶，如此不斷地交互作用。

## 2-2-2 訊息處理理論對本研究之影響

感官收錄是短暫且具選擇性，短期記憶容量是有限的，而長期記憶的知識提取，取決於訊息被收錄儲存的方式，因此本研究於教學實驗時的每一個訊息呈現，皆保留適當時間給予學習者注意，避免過多訊息分散注意力，使教學內容的重點能夠進入短期記憶進一步處理；在教材設計上，訊息呈現時應加強重點提示，利用標示、步驟化教學引導，幫助學習者選取、組織訊息，促進理解和記憶，讓學習者在面對問題時，較容易從長期記憶提取相關學習經驗，能在工作記憶區中聯結思考並主動組織，將訊息整合為新知識、新資訊，促進專業知識的提升。

## 2-3 多媒體學習理論

多媒體(Multimedia)是指用文字(印刷文字或口語文字)及圖像(包含使用靜態的圖表、照片、地圖或動態的動畫或影片...等)共同呈現的材料；多媒體學習(Multimedia learning)則是利用文字及圖像呈現的雙編碼(dual-code)或雙通道(dual-channel)學習(Mayer, 2009)。

### 2-3-1 多媒體學習理論的基本假設

Mayer(2001)提出多媒體學習理論(Multimedia learning theory)，針對學習者在多媒體學習時，認知系統如何處理訊息提出三個假設，分述如下：

#### 1. 雙通道假設 (Dual-channel assumption)

人類在處理視覺訊息和聽覺訊息時，是兩個獨立的通道，如圖 9。若呈現的訊息是透過聽覺感官被接收，則進入聽覺通道處理，如圖 10。若呈現的訊息是透過視覺感官被接收，則進入視覺通道處理，如圖 11。

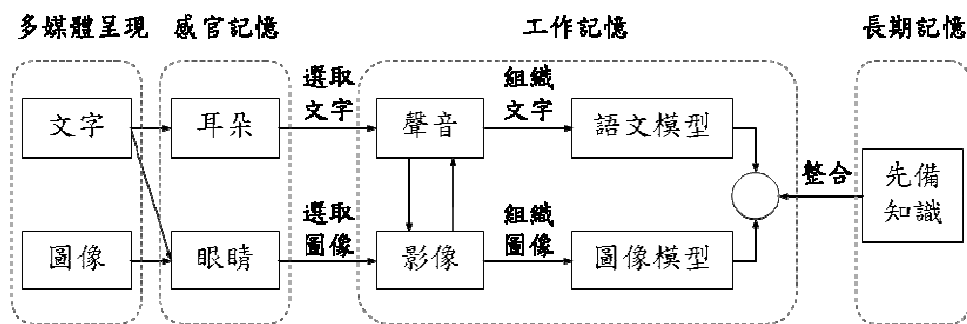


圖 9 雙通道假設模型

資料來源：修改自 R. E. Mayer (2009). *Multimedia Learning* (2nd ed.) (p.61). New York: Cambridge University Press.

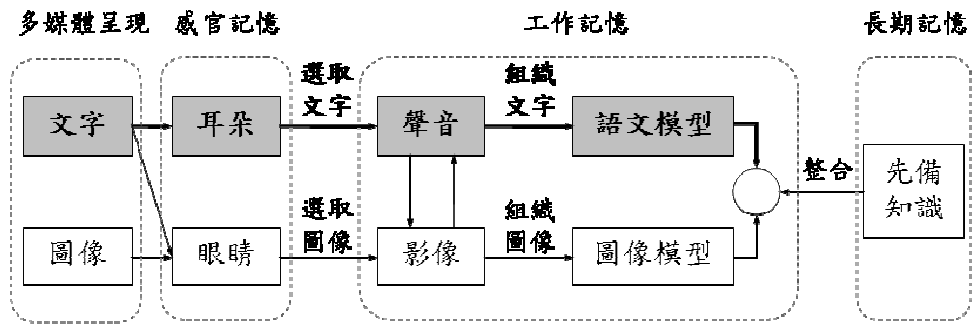


圖 10 聽覺通道處理過程

資料來源：修改自 R. E. Mayer (2009). *Multimedia Learning* (2nd ed.) (p.64). New York: Cambridge University Press.

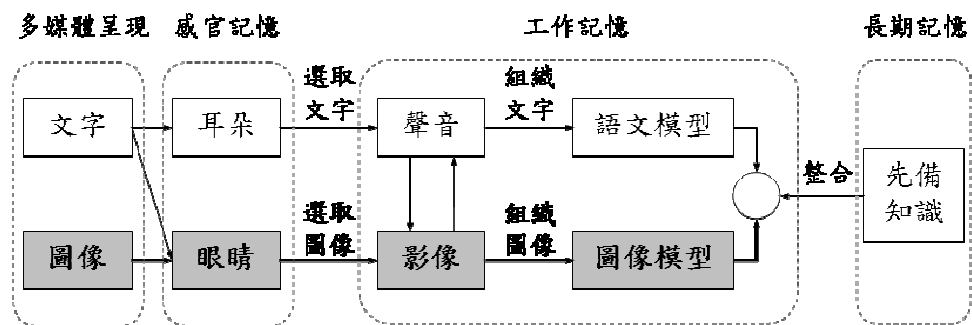


圖 11 視覺通道處理過程

資料來源：修改自 R. E. Mayer (2009). *Multimedia Learning* (2nd ed.) (p.64). New York: Cambridge University Press.

## 2. 有限容量假設 (Limited-capacity assumption)

人類在每個感官通道所能同時處理的訊息是有限的，這與 John Sweller 的認知負荷理論主張相同。因工作記憶容量有限，限制了處理訊息的能力，故對於進入的訊息，哪些該注意就必須有所抉擇(Mayer, 2009)。

## 3. 主動處理假設 (Active-processing assumption)

學習者會主動進行認知的處理，將接收到的訊息與既有經驗、知識整合成一致的心智表徵(Mayer, 2001)。

主動處理歷程在工作記憶區中的運作分為三個階段，分述如下：

(1) 選取：將感覺收錄所注意到的訊息經由篩選進入工作記憶中形成文字或



圖像表徵。

(2) 組織：將進入工作記憶中的文字或圖像表徵進一步處理，建立關連性連結。

(3) 整合：將組織好的文字或圖像模形所構成的新知識，與長期記憶中既有的相關知識進行整合，以使訊息產生意義。

## 2-3-2 多媒體學習理論的認知負荷

Mayer(2009)提出學習的過程中有三種認知處理會使用到學習者可用的認知容量，導致認知負荷的產生，分述如下：

### 1. 外在的認知處理 (extraneous cognitive processing)

指的是學習過程中與教學目標無關的教學設計所引起的認知處理，相當於認知負荷中的外在認知負荷。

若外在的認知處理大量耗費學習者可用的認知資源，則學習者就無法進行學習的認知處理，會反應出較差的記憶及轉移表現。

### 2. 本體的認知處理 (essential cognitive processing)

選取學習內容的訊息到工作記憶中所產生的認知處理過程，會受到學習內容本身的複雜度所影響，相當於認知負荷中的內在認知負荷。

若本體的認知處理佔據學習者大部分的認知資源，學習者可能進行的是死背學習，會反應出較好的記憶表現，但較差的轉移表現。

### 3. 衍生的認知處理 (generative cognitive processing)

學習者在學習過程中為了能更瞭解教材本身的意義所產生的認知處理過程，可歸因於學習者的動機，相當於認知負荷中的增生認知負荷。

若學習者能專注在本體及衍生的認知處理，有可能產生有意義的學習，就能反應出好的記憶及轉移表現。



### 2-3-3 多媒體學習理論的教學設計原則

由於認知容量有限，為了解決認知處理所導致的問題，Mayer(2009)提出了十二項多媒體教材設計原則，來降低外在處理、管理本體處理及增加衍生處理，分述如下：

#### 1. 五個降低外在處理的設計原則

##### (1) 連貫原則 (Coherence principle)

多餘的素材會分散注意力，對學習沒幫助，因此與教學主題無關的文字、圖像、聲音等素材要排除，使學習得以連貫，學習效果較好。

##### (2) 信號原則 (Signaling principle)

在教材中適度加入一些信號來強調內容組織與重點提示，以引導學習者的注意力在重要內容上。常用的信號方式包含大綱、標題、粗體、底線、放大、顏色、淡化、閃爍、箭頭...等。

##### (3) 重複原則 (Redundancy principle)

與時機、對象有關。「圖像＋旁白」同時展演的效果優於「圖像＋旁白＋字幕」同時展演的效果。圖像與字幕皆是經由視覺通道，同時使用會造成通道負荷過量，使學習者無法兼顧兩種訊息，因而影響學習。

但在某些情況下增加字幕可以促進學習，如：沒有圖像、有充足的時間、旁白為非母語或文字內容過於專業、艱深。

##### (4) 空間接近原則 (Spatial contiguity principle)

相對應的圖像與文字，位置應儘量接近，較容易建立訊息之間的關連；相關訊息要在同一畫面呈現；新進訊息不要遮蓋住原來訊息；若訊息分散在不同的區塊，要用連接線指示對應部份以建立關聯。

##### (5) 時間接近原則 (Temporal contiguity principle)

相關的圖像與文字，同時呈現的學習效果會優於接續呈現的學習效果。若圖片與講述是先後接續呈現，為維持前面內容和後續內容進行整合，工作記憶負擔加重，則可用於學習的認知資源可能會不足。

## 2. 三個管理本體處理的設計原則

### (1) 分割原則 (Segmenting principle)

將教材內容分割成數個循序展演的小單位，且允許學習者掌控展演的速度。以學習者的學習步調呈現分割訊息的學習效果會優於呈現連續訊息的學習效果。

### (2) 事先訓練原則 (Pre-training principle)

當教材內容的複雜度或難度較高時，若能讓學習者事先知道教材主要概念的名稱和特徵，學習效果較佳。

### (3) 形式原則 (Modality principle)

當教材內容同時包含圖像與文字時，文字訊息以「口語講解」呈現的學習方式會比「字幕」呈現的學習方式更好。視覺通道同時處理圖像及文字訊息會負荷過多，若能利用口語講解，則圖像通過視覺通道、文字通過聽覺通道，將有更多的認知資源可用於學習，因此雙通道形式呈現的學習效果會比單一通道形式呈現的學習效果好。

## 3. 四個增加衍生處理的設計原則

### (1) 多媒體原則 (Multimedia principle)

圖像與文字並用的學習效果優於只有文字的學習效果，較能幫助學習者在工作記憶同時建立兩個表徵之間的連結，對於新手學習者特別重要，而對於專家學習者幫助可能不大。

### (2) 個人化原則 (Personalization principle)

採用「口語」方式的用語會比「形式」方式的用語有更好的學習效果。對話自然溫和最好，多使用第一人稱、第二人稱，不要只用第三人稱；另外，教學者應多使用直接感受的句子，營造談話的感覺，較能提高學習者的學習意願。

### (3) 聲音原則 (Voice principle)

多媒體教材若有口語旁白播放，採用真人聲音呈現的學習效果優於

使用機器聲音呈現的學習效果。

#### (4) 圖像原則 (Image principle)

在教學內容中呈現教學者的圖像，學習者的學習效果未必會提高。

可能會增加學習者外在的認知處理，使學習者因注意教學者的圖像而忽略了教材內容。

### 2-3-4 多媒體學習理論對本研究之影響

一個有意義的學習，應該要讓學習者能在教學過程中，正確選取教學內容中的重點訊息，並能將所接收到的文字或圖像訊息連結組織，並與舊有知識、經驗整合成新概念；而運用多媒體教學時，教學設計必須留意是否符合學生的心智活動，才能有效傳遞訊息。

多媒體教學設計必須從學習者的角度考量訊息呈現的適切性，善用多媒體教材設計原則以降低外在的認知處理、管理本體的認知處理及增加衍生的認知處理，讓學習者能在工作記憶容量的限制下有效處理訊息，獲得好的學習成效。

本研究實驗教材設計上，力求簡潔扼要並去除與教學內容無關的素材，符合連貫原則；運用信號突顯主要訊息以引導學生看出圖形間的關係，符合信號原則；圖形上的相關訊息與對應的元素接近，以減少視覺搜尋，降低不必要的認知資源，符合空間接近原則；講解教材時，口語與訊息、圖像之呈現時間接近，使口語及圖像相互配合、容易連結，符合時間接近原則；教材展演採分割原則、事先訓練原則；以口語呈現敘述性文字，符合形式原則與聲音原則；課堂引導、提問採用自然的口語對話，符合個人化原則。

## 2-4 認知負荷理論

Sweller、van Merriënboer 與 Paas(1998)將「認知負荷」定義為將一特定工作任務加諸於學習的認知系統時所產生的負荷，也就是工作記憶的負荷。Sweller(1998)認為學習困難是因學習者必須使用大量的工作記憶去處理問題，導致沒有多餘的能力從事學習與獲得基模。

### 2-4-1 認知負荷基本假設

認知負荷對個體的認知結構有四個基本假設：

#### 1. 工作記憶容量有限

人的工作記憶容量有限，而且在同一個時間只能處理有限的元素。雖然元素的數量有限制，但元素的大小、複雜性、精密度是沒有限制的(Sweller et al., 1998)。此外，訊息在工作記憶區所停留的時間極為短暫，大約 20 秒就會遺忘。而工作記憶的容量和時間限制只適用於新訊息的獲得，長期記憶中提取的訊息不受此限制。

#### 2. 長期記憶容量無限

工作記憶中的訊息經過處理後會進入長期記憶(Sweller et al., 1998)。長期記憶區的儲存量是無限且永久的；長期記憶區不只能儲存，還有溝通與其他功能。

面對問題時，專家與新手之差別，就在於專家在長期記憶中存有大量的問題狀態知識與對應解決策略可以從中提取，而新手需在工作記憶中處理問題並尋找解答，耗費較多的工作記憶容量。

#### 3. 知識與技能以基模(schema)型態儲存於長期記憶

學習到的知識與技能會在工作記憶中處理，以基模的型態儲存在長期記憶中(Sweller et al., 1998)。基模在長期記憶中具有組織與儲存訊息的功能，藉由工作記憶的運作，能將訊息整合成一個單一的高階基模處理單位，使工作記憶釋放出更多空間，進而降低工作記憶的負荷。



#### 4. 基模運作自動化(schema automation)是基模建構的重要過程

人類處理訊息的方式有控制和自動化兩種。控制處理受意識掌管，在工作記憶中進行，佔據較多工作記憶容量；而自動化處理不太需要意識監控，耗費較少工作記憶容量。許多知識與技能開始時都是經由意識控制處理，透過反覆練習之後才轉換成自動化處理。基模運作自動化不但能儲存訊息到長期記憶還能降低工作記憶的負荷(Sweller et al. , 1998)。

### 2-4-2 認知負荷類型

Sweller、Ayres 與 Kalyuga(2011)依據教學訊息在工作記憶中的處理，將認知負荷分為：

#### 1. 內在認知負荷 (Intrinsic cognitive load)

內在認知負荷和教材困難度、學習者的先備知識及專業程度有關(Sweller et al. , 2011)。具高度元素交互作用的教材，對先備知識不足或新手而言，需在工作記憶中處理大量元素，產生的內在認知負荷較高；而先備知識或專業程度較高者因擁有自動化的高階基模，在工作記憶中可能只是單一元素的處理，耗費較少的工作記憶容量，產生的內在認知負荷較低(van Merriënboer & Sweller, 2005)。

Kalyuga(2009)認為若內在認知負荷超出工作記憶容量，就必須適當的管理，例如：在工作記憶的限度下，將教學目標切割成數個必要的教學子目標，也就是將教材分割成較小的區塊，讓學習者逐步的處理。而用於處理對學習有意義或適當的內在認知負荷的認知資源稱為增生資源(germane resources)。

#### 2. 外在認知負荷 (Extraneous cognitive load)

外在認知負荷與教材呈現的方式有關(Sweller et al. , 2011)。呈現教材訊息時，會增加學習者的認知負荷，許多時候，教材設計與學習目標無關且增加了外在認知負荷。

藉由較佳的訊息呈現和教材設計，可以降低外在認知負荷。而用於處理對學習無意義或無關的外在認知負荷的認知資源稱為外在資源(extraneous resources)。



工作記憶資源可以分為處理內在認知負荷的增生資源和處理外在認知負荷的外在資源，這樣的劃分已經成為認知負荷理論發展的基礎。

教學訊息的認知負荷總量由內在認知負荷與外在認知負荷加總。若內在認知負荷高，則外在認知負荷必須降低，學習者可以投入大部份的工作記憶資源去處理教材內容，則增生資源就高，增加有效學習；若外在認知負荷增加，學習者耗費工作記憶資源去處理教學設計所增加的外在元素，則外在資源增加而增生資源減少，會降低有效學習，甚至是沒有學習。當內在認知負荷低，而外在認知負荷高是因設計不佳的教材衍生的外在資源耗費工作記憶資源，若認知負荷總量仍在工作記憶容量的限制內，也許不會干擾學習。

認知負荷理論的主要目標是教學設計應減少工作記憶資源耗費在與學習無關的外在認知負荷，盡量把工作記憶資源用在處理與學習有關的內在認知負荷。對於外在認知負荷可以透過教學程序的改變而降低，對於內在認知負荷則是要適當管理，並非總是降低，但認知負荷總量不能超過工作記憶的限制。

### 2-4-3 認知負荷效應

基於認知負荷理論所提出的教學設計，多數是為了降低外在認知負荷，僅少數是改變內在認知負荷，以促進學習或解決問題，藉隨機對照實驗所產生的認知負荷效應 (Sweller et al., 2011)，分述如下：

#### 1. 開放目標效應 (goal-free effect)

當有明確目標的問題轉換成沒有明確目標的問題引導，引發較好的學習表現時，即產生開放目標效應。例如，常見的數學問題中，有明確目標的問題陳述是「算出 $\angle ABC$ 的角度」，而沒有明確目標的問題陳述則是改成「算出所有能計算的角度」，這種開放目標的問題敘述仍可以讓學生算出目標角度「 $\angle ABC$ 」。

明確目標導向的解題方式有時會侷限想法，讓學習者容易忽略掉已知或未知條件的關聯性，因而無法獲得問題解決時的整體知識。使用開放目標的問題解決能降低外在認知負荷，不受目標限制的思考，促進規則歸納與基模建構，對於步驟有限的題目是有效的。

## 2. 工作示例效應 (worked example effect)

對於新手學習者，提供工作示例協助理解問題與解題，引發較好的學習表現時，即產生工作示例效應。

工作示例提供問題的逐步解題示範，將工作示例設計者長期記憶中的問題解決基模有效地提供給學習者，協助理解問題並加速基模自動化建構，降低外在認知負荷。

研究工作示例效應時也發現了以下效應：完成問題效應、分散注意力效應、形式效應、冗餘效應、專業知識反轉效應、引導漸減效應、變化效應。

## 3. 完成問題效應 (problem completion effect)

確認學習者在工作示例的思考及關鍵訊息的投注，就是完成問題效應。完成問題是部份的工作示例，保留其中某些關鍵的解題步驟讓學習者完成。完成問題效應能降低外在認知負荷，促進基模建構並引發較好的學習轉化。

## 4. 分散注意力效應 (split-attention effect)

當不同來源的訊息呈現是分散在不同位置或時間，學習者需要耗費額外的工作記憶資源在來回搜尋、比對以整合訊息，以致於增加了外在認知負荷，即產生分散注意力效應。

將訊息以整合的方式呈現，減少不必要的搜尋與比對，可以減低工作記憶的耗費，降低外在認知負荷，去除分散注意力效應。

## 5. 形式效應 (modality effect)

當訊息以圖像搭配口語解說之形式呈現引發的學習成效優於以圖像搭配文字解說之形式呈現時，即產生形式效應。

圖像與文字解說皆屬於視覺通道，而圖像與口語解說分別依靠視覺與聽覺通道，不會有通道阻塞和資源不足的問題。採用雙通道處理訊息，可以擴展工作記憶資源，分擔訊息處理的負荷量，而訊息呈現採用雙通道形式會比單通道形式更有效率。此效應也是 Mayer(2009)多媒體學習理論中的形式原則(Modality principle)。

## 6. 冗餘效應 (redundancy effect)

若用圖像、文字和口語解說傳達相同訊息，相較於僅用一種形式解說訊息，反而引發較差的學習成效時，則產生冗餘效應。

訊息若以單一形式呈現即可理解，不需要心智整合，則其他形式的呈現就應該要移除，以免學習者將注意力集中在多餘訊息上，增加外在認知負荷。例如，當圖像與文字分別都能解釋訊息時，二者若同時呈現，反而使學習者耗費心力去建立關聯，非但沒有加強學習成效，反而造成認知負荷。

## 7. 專業知識反轉效應 (expertise reversal effect)

當訊息設計的呈現方式對新手學習者有效，卻對專家學習者失去效力甚至有負面的效果時，則產生專業知識反轉效應。

專業知識反轉效應與學習者的知識程度有關。由於新手學習者缺乏相關的知識，有益於新手學習者的訊息呈現可能對專家學習者是多餘的，反而耗費不必要的認知資源去處理訊息且無益於學習。每個人的學習情況不同，教材必須適性化設計，以符合學習者不斷改變的專業知識程度。

此外，要特別注意的是，元素交互性高的學習材料才會產生形式效應，但元素交互性如果過高則雙通道優勢就不會產生；聽覺訊息必須有所限制，太冗長的聽覺訊息會因工作記憶的限制而無法維持與處理，此時以視覺形式呈現複雜的文字訊息可能更適當；若圖像很複雜，需要配合提示或信號以加速與聽覺訊息相關之視覺訊息的搜尋；若聽覺訊息只是重述圖像內容，則產生冗餘效應；對於專家學習者，形式效應可能被抵消或反轉，造成專業知識反轉效應。

是否產生專業知識反轉效應，可以透過學習效率(Instructional efficiency)與學習投入分數(Instructional involvement score)來觀察。Paas 與 van Merriënboer (1993)認為考量學習過程的認知負荷是重要的，因此提出視覺化的學習效率公式及效率圖(Efficiency graph)，作為評估學習效率的方法。學習效率( $E$ )之計算公式(1)如下：

$$E = \frac{Z_p - Z_c}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\left( Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} \right) ; Z_p = \text{學習成就表現 } Z \text{ 分數} ; Z_c = \text{認知負荷 } Z \text{ 分數}$$

以  $Z_c$  為橫軸坐標， $Z_p$  為縱軸坐標，將點標示於坐標平面上，學習效率視覺化圖像如圖 12 所示。

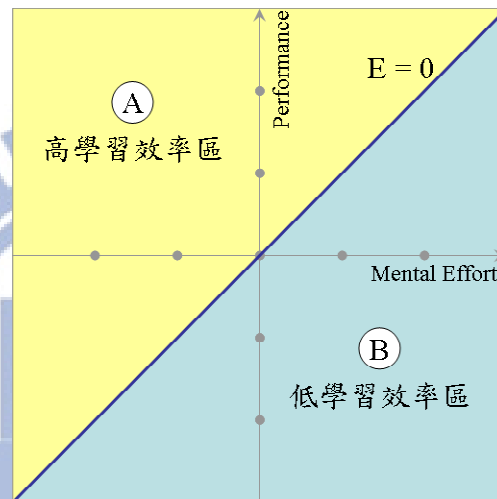


圖 12 學習效率圖

資料來源：修改自 Paas, F. G., Tuovinen, J. E., Tabbers, H., & Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational psychologist*, 38(1), p.68.

圖像所代表的意義為：A 區域，代表學習者的學習成就表現高而認知負荷量低，坐標點落在左上 A 區域，即  $Z_p > Z_c$ ，為高學習效率(high-instructional efficiency)。直線上：代表學習者的學習成就表現與認知負荷量平衡一致，坐標點落在直線方程式  $E = 0$  上，即  $Z_p = Z_c$ 。B 區域：代表學習者的學習成就表現低而認知負荷量高，坐標點落在右下 B 區域，即  $Z_p < Z_c$ ，為低學習效率(low-instructional efficiency)。

對於高學習成就學生而言，若發生專業知識反轉效應，則會因外在認知負荷增加而降低其學習效率。因此學習效率可用來觀察是否產生專業知識反轉效應。

Paas、Tuovinen、van Merriënboer 與 Darabi (2005)指出「動機」能被視為學習



是否成功的一個特點。學習者動機強、願意投入學習時，相對的付出的心力也較多，表現也較好。為了成功處理學習的任務，從舊有經驗中取出的基模決定所要付出的心力。

Paas(2005)提出學習投入分數的計算，這是基於動機、心智努力和表現是正相關的假設，也就是當學習者投入越多、心智努力付出越多，表現自然越好。學習投入分數(I)之計算公式(2)如下：

$$I = \frac{Z_p + Z_c}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

( $Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$  ;  $Z_p$  = 學習成就表現 Z 分數 ;  $Z_c$  = 認知負荷 Z 分數)

圖形之繪製方式同學習效率，以直線  $I=0$  做分界，以此瞭解學生學習時之投入情形，學習投入分數之視覺化圖像如圖 13 所示。

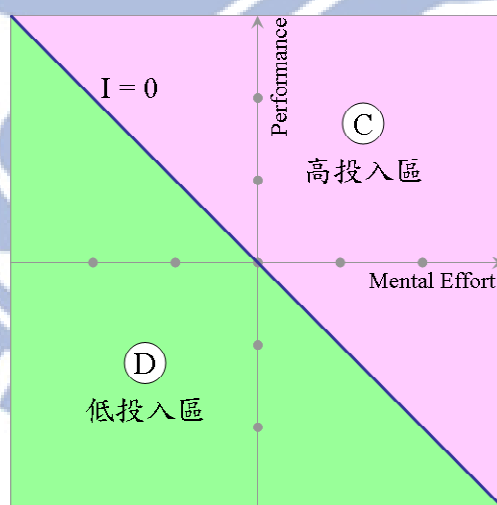


圖 13 學習投入分數圖

**資料來源：**修改自 Paas, F. G., Tuovinen, J. E., van Merriënboer, J. J. G., & Aubteen Darabi, A. (2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research and Development*, 53(3), p.29.

圖像所代表的意義：C 區域，代表學習者的學習成就表現與認知負荷量的和



偏高，坐標點落在右上 C 區域，即  $Z_p + Z_c > 0$ ，為高學習投入(high-instructional involvement)。直線上，代表學習者的學習成就表現與認知負荷量的和為零，坐標點落在直線方程式  $I = 0$  上，即  $Z_p + Z_c = 0$ 。D 區域，代表學習者的學習成就表現與認知負荷量的和偏低，坐標點落在左下 D 區域，即  $Z_p + Z_c < 0$ ，為低學習投入(low-instructional involvement)。

對於高學習成就學生而言，若發生專業知識反轉效應，則會因外在認知負荷增加而降低其學習投入情形。因此學習投入分數也可用來觀察是否產生專業知識反轉效應。

由於學習效率與學習投入分數之圖形繪製方式相同，若將兩個圖形重疊，以直線  $E = 0$  為橫軸，直線  $I = 0$  為縱軸，可見兩直線將平面分隔成四個區域，如圖 14 所示，即可同時觀察研究對象之學習效率與學習投入分數，藉此了解研究對象於教學單元的學習狀況，以及觀察高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。

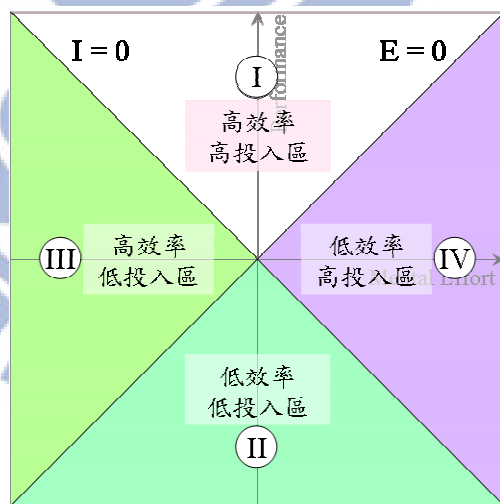


圖 14 綜合學習效率與學習投入分數圖

圖像所代表的意義：區塊 I 為高效率高投入，為學習時最理想的狀況；下方區塊 II 為低效率低投入，為學習時最不理想的狀況；左側區塊 III 為高效率低投入；右側區塊 IV 為低效率高投入(Kalyuga, 2009)。

## 8. 引導漸減效應 (guidance fading effect)

隨著學習者專業知識的提昇，對新手學習者有用的訊息設計可能會失效，甚至產生多餘的外在認知負荷，因而需逐步減少問題解決的引導，使學習者自行處理問題要求，則產生引導漸減效應。

給予學習者的教材呈現應是工作示例(worked example)、完成問題(completion problems)、完整的問題(full problems)，當學習者已學會，就不需慢慢的引導。

## 9. 想像效應 (imagination effect)

當學習者被要求想像一個程序或概念的學習成效優於直接學習程序或概念的學習成效時，即產生想像效應。

「想像」被定義為對一個程序或概念的心智複製。學習者在想像時，相關知識的基模會提取至工作記憶中處理與學習有關的交互元素，而不是處理與學習無關的外在元素，這會促使基模自動化，提升增生資源，加強學習效果。

想像效應是學習者必須具備相關知識的基模，方能處理程序或概念的交互作用元素，若學習者不具備相關知識的基模，就沒有足夠的認知資源從事想像，則想像效應就無法產生。

## 10. 自我解釋效應 (self-explanation effect)

要求學習者去解釋一個新的程序或概念，這種引導使學習者運用認知資源去處理相關的交互作用元素，與相關知識的基模建立關連，而引發較好的學習成效時，則產生自我解釋效應。

「自我解釋」被定義為在學習工作示例時，可幫助學習者理解示例並從中建立基模的心智對話(Clark, Nguyen & Sweller, 2006)。自我解釋效應與想像效應非常有關且能有效協助心智處理，兩者皆不是因教材設計的改變，而是鼓勵學習者運用認知資源去進行適當的心智處理，取代直接引導，因此學習者必須具備相關知識的基模，對於先備知識較高的學習者可能較有助益，而先備知識不足的學習者可能無法進行自我解釋。

#### 11. 元素交互作用效應 (element interactivity effect)

多數的認知負荷效應只能在高內在認知負荷時才能獲得，稱為元素交互作用效應。

認知負荷由內在認知負荷與外在認知負荷共同決定，而內在認知負荷是由元素交互作用的程度決定。若導致內在認知負荷的元素交互作用低，則因外在認知負荷產生的額外元素交互作用也不會妨礙學習；若導致內在認知負荷的元素交互作用高，而因外在認知負荷產生的額外元素交互作用又增加，則會造成認知負荷總量超過工作記憶容量，對於學習就會產生干擾。

#### 12. 獨立元素效應 (isolated elements effect)

當學習一份高元素交互作用的教材時，工作記憶因同時處理眾多訊息而使內在認知負荷高，藉由預先訓練、模組等策略，將部分交互作用的元素獨立處理，使其建構為長期記憶中的基模，待分別學習完獨立元素後，再學習整體教材，可將高元素交互作用轉變為低元素交互作用，使基模自動化，以降低內在認知負荷，促進學習成效，即為獨立元素效應。

#### 13. 變化效應 (variability effect)

藉由不同類型的問題變化練習，導致更好的學習遷移與較少的心智努力，即產生變化效應。

若學習者能在不同類型的問題中應用所學的知識，表示學習者可能已經具備較高階的知識基模，也就是學習遷移。變化會增加內在認知負荷，當內在認知負荷所需的認知資源在工作記憶容量的限制內，適度增加與學習任務有關的交互作用元素，讓學習者投入認知資源，連結基模以解決問題，會增強學習成效。

#### 14. 瞬間訊息效應 (transient information effect)

當訊息在學習者能充分處理或與新訊息建立連結之前就消失了，即產生瞬間訊息效應。

瞬間訊息效應被定義為學習的遺失，其訊息特徵必須是短暫的，且具高元素交互作用。若瞬間訊息能輕易地保留及在工作記憶中處理，則不會發生瞬間訊息

效應。例如，當高元素交互作用的訊息以口語形式短暫呈現，所產生的外在認知負荷耗費工作記憶資源，此時以書面形式持久呈現就不會遺失重要訊息元素，類似反形式效應。教學時應避免複雜冗長的短暫訊息，適當分割訊息或確保學習者有足夠的專業知識，可以降低瞬間訊息效應的負面影響。

#### 15. 集體工作記憶效應 (collective working memory effect)

當個人透過團體合作所獲得的學習成效高於單獨學習時的學習成效，就產生集體工作記憶效應。

認知負荷理論中，從教學者或其它知識豐富的專家獲得全部或大部分訊息的借用與重組原則，在使用合作學習時轉移為允許從其他學習者得到大部分訊息。集體工作記憶效應是新的認知負荷效應，在學習高元素交互作用的學習任務上，合作學習使小組成員可以分擔工作記憶負荷，有助於提升學習成效。小組成員間必須協調訊息才能進行合作，可能會耗費額外的工作記憶資源，稱為處理成本 (Kirschner, Paas, & Kirschner, 2009)。處理成本對於解釋合作學習的效果是重要的，對於複雜的學習任務，若處理成本低於合作學習所降低的認知負荷，則合作學習是有益的；對於簡單的學習任務，處理成本可能高於合作學習所降低的認知負荷，則單獨學習可能較好。

### 2-4-4 認知負荷理論對本研究的影响

由教材施加的認知負荷可以分為內在認知負荷和外在認知負荷，而認知負荷理論的主要目標是降低外在認知負荷及管理內在認知負荷，因此減少工作記憶資源用在與學習無關的訊息處理，而將工作記憶資源用在與學習有關的訊息處理，可以促成有效的學習。

本研究之實驗教材設計，根據分散注意力效應，去除與教學內容無關的素材，運用信號突顯主要訊息以引導學生看出相關訊息與圖形關聯，避免不必要或與學習無關的訊息出現；根據形式效應，以口語呈現敘述性文字；根據冗餘效應，畫面上去除與口語重複的敘述性文字；根據獨立元素效應，先將所需的基本元素獨立複習及介紹後，再進行整合的推理示例。



## 2-5 幾何教學

探討幾何思考的發展及幾何圖形的認知理解，再由數學符號表徵的轉化了解學生數學學習的困難，以協助與本研究教材相關的幾何課程學習內容編撰及教學。

### 2-5-1 幾何思考的發展層次

van Hiele 於 1957 年提出一套幾何思考的發展模式，將學生幾何思考發展分為五個層次(van Hiele, 1986)，分述如下：

#### 1. 視覺層次 (Visualization)

這是最低的層次，學生依賴視覺直觀，依照圖形外觀及外形特徵來稱呼、分辨，但卻不知道圖形性質及組成要素。

#### 2. 分析層次 (Analysis)

在第二個層次，學生能分辨圖形特徵、圖形性質及組成要素，藉由觀察比對能發現不同圖形之間의 共同性質或規則，但還無法發現圖形之間的包含關係。

#### 3. 非形式演繹層次 (Informal deduction)

在第三個層次，學生能了解圖形內的屬性關係及圖形之間的包含關係、相異關係，能使用非正式的論證去推論、建立及解釋圖形性質，但還無法做形式化的證明。

#### 4. 形式演繹層次 (Formal deduction)

在第四個層次，學生能了解圖形幾何性質的充分及必要條件，能使用符號表徵及數學式子，透過抽象的邏輯推理方式解釋幾何的敘述，寫出符合邏輯的幾何證明。

#### 5. 嚴密層次 (Rigor)

在最後一個層次，學生跨越單一的系統，進入完全抽象階段，可以分析及比較不同系統（例如：歐式幾何、非歐幾何），並從中建立定理。



## 2-5-2 幾何圖形的認知理解

Duval (1995) 認為每個人理解幾何的認知方式不一定相同，因此提出四種幾何圖形的認知理解類型，分述如下：

### 1. 知覺的理解 (Perceptual apprehension)

個體初見幾何圖形時所產生的各種認知與感覺，包含圖形的樣式、組成圖形的元件、形狀、大小、方向...等，並將其整合成個人的心像。個人的心像有些可能與所見圖形相異或是更為精進的理解，原因在於知覺的理解除視覺所見外，還包含與既有基模、知識的交互作用，所以設計不當的訊息容易造成誤解(黃建欽，2009)。

### 2. 循序的理解 (Sequential apprehension)

個體對圖形的認知並非憑藉知覺的理解，而是了解圖形的組成有其結構性及特定順序，能在限制數學繪圖工具及方法使用的條件下依序完整描繪出圖形結構，就屬於循序的理解。

### 3. 推論的理解 (Discursive apprehension)

個體能使用文字表徵來描述圖形性質。對圖形的認知心像因人而異，當個體能以文字表徵呈現對圖形的想法，推論的能力愈好，表示其理解程度愈完整。

### 4. 操作的理解 (Operative apprehension)

個體將實體圖像及個人心像進行互相轉換的認知歷程，即可以在腦中想像亦或繪出圖形，就屬於操作的理解，這種理解過程在啟發中相當重要。操作轉換後的圖像，其知覺辨識與原來的圖像不同，而圖像的轉換可以是分解、重組、放大、縮小、鏡射、平移、旋轉等。

Duval (1998) 進一步提出在進行幾何學習時，所須經歷的三種認知處理歷程，分述如下：

### 1. 視覺化 (Visualization)

對於各種圖形空間表徵的認知歷程。

### 2. 建構 (Construction)

根據觀察結果操作繪圖工具進行圖形建構、再製、重組的歷程。

### 3. 推理 (Reasoning)

關於推論過程、演繹證明、解釋的歷程。

這三種歷程不一定同時存在，可以獨立執行，也有可能互相配合才能處理幾何題目。對於幾何學習的精通，這三種歷程的發展都必須完整，其相互作用的關係，如圖 15。實線箭頭代表此認知處理歷程能支持另一認知處理歷程，例如，實線的 1 號箭頭表示推理歷程能輔助視覺化歷程的產生或運作，其他實線箭頭都代表相似意義；虛線的 2 號箭頭表示視覺化歷程或許能輔助推理歷程，但非必定，有時可能會造成誤導；5 號箭頭代表推理歷程有兩種形式，這兩種形式可獨立執行，5(A)表示使用自然語言以進行命名、描述或討論，5(B)表示使用數學語言以陳述定義、原理的推論。

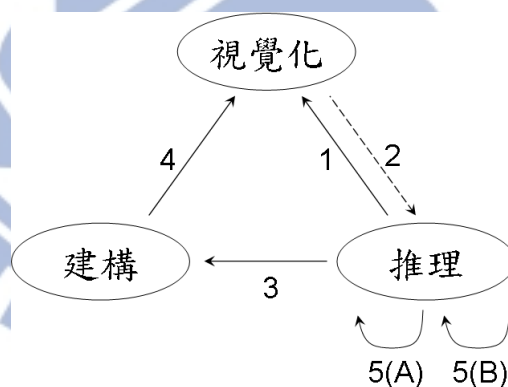


圖 15 Duval 幾何學習認知處理歷程相互作用關係圖

**資料來源：**修改自 Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*.(p.38) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

綜合三種幾何學習歷程，可知推理及建構歷程皆能輔助視覺化的形成，推理歷程能輔助建構歷程，而視覺化歷程不一定能輔助推理歷程，因此，在設計教材時要特別小心，

避免設計不良的視覺物件造成錯誤的知識建立。

### 2-5-3 數學符號表徵的轉化

表徵即訊息被表達的形式(陳一平, 2011)。Piaget 認為表徵可以是個人的看法、概念或迷思, 透過個人言語或圖像產出而獲得, 表徵也是深層心智結構運作的表面結果(引自 Duval, 2006, p.104)。表徵也是標誌和其複雜的關聯, 根據規則所產生, 並允許描述一個系統、一個過程、或一組現象 (Duval, 2006)。符號和符號表徵的轉化是數學活動的中心, 從一個表徵系統改變到另一個表徵系統的能力, 往往是學習進步和問題解決的關鍵。

Duval 提出在數學活動的範圍內, 符號表徵的轉化有兩種完全不同的類型:

#### 1. 處理 (Treatment)

主要取決於符號的轉化。在進行數字運算時, 同一個數字用小數標記及分數標記的演算法是不同的, 例如,  $0.20 + 0.25$  及  $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ , 基於方便或顯著的原因, 在計算時可能會改變標記系統以執行「處理」。

在幾何中, 「處理」常是純粹的視覺形狀轉化, 透過重新配置原圖的操作, 猶如益智遊戲的拼圖, 如圖 16 所示的翻轉、切割位移、複製翻轉等, 不需依賴任何數學屬性, 可以直觀地進行視覺操作, 並且解釋某些數學結果。

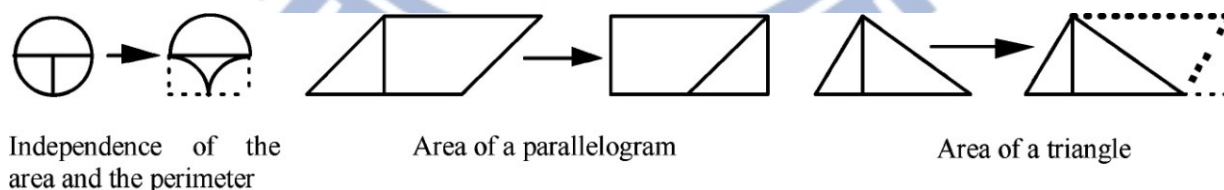


圖 16 幾何視覺轉化－重新配置原圖

**資料來源：**Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.112. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

#### 2. 轉換 (Conversion)

是一種比「處理」更為複雜的表徵轉化, 因為首先需要在兩個內容相異的表

徵之間識別相同的代表物件。例如，將自然語言陳述的關係轉換到符號標記的使用，如圖 17；或是將一個方程式的代數表徵轉換到圖形表徵，如圖 18。

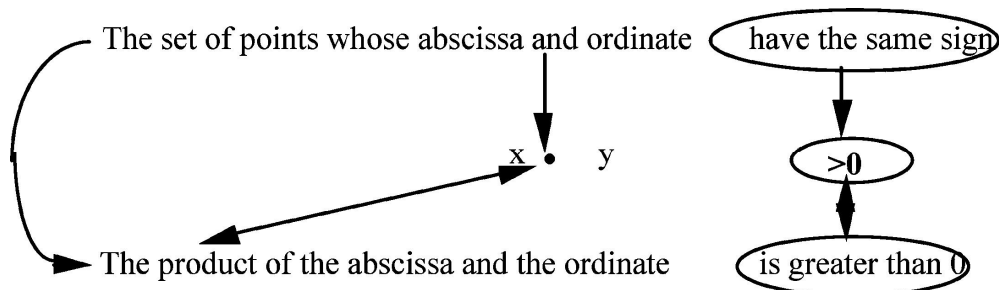


圖 17 表徵轉換—自然語言轉數學語言

資料來源：Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.113. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

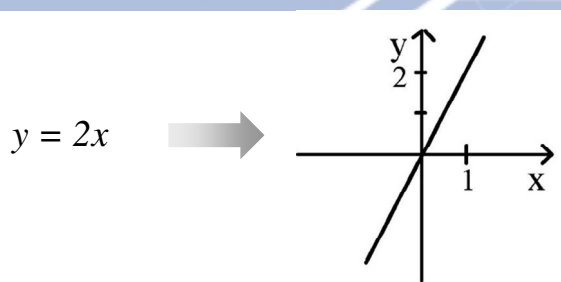


圖 18 表徵轉換—代數表徵轉圖形表徵

資料來源：Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.113. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

## 2-5-4 從表徵轉化看數學學習的困難

「幾何圖形」常常讓人聯想到推論的表徵和視覺的表徵，即使是根據必要的數學活動，也只有其中一種表徵可以被明確地強調(Duval, 2006)。

在數學學習時，若一再發生符號表徵轉化的困難，會因此無法理解所學的課程內容。

以下分述兩種表徵轉化的迷思：



## 1. 複雜性及特殊性的處理 (Treatment)

如果想要理解幾何圖像的認知複雜性，我們必須個別地去分析方法，分別用推論的方式「處理」和視覺的方式「處理」，即使他們合併到同一個數學過程中 (Duval, 2006)。當專注在視覺時，視覺處理的第一步是子圖需要被辨別，學習者是否有能力比較藉由重新配置而得的某些子圖，及在原圖快速辨別子圖，如圖 19，試比較圖中上層梯形裡兩個灰色的三角形面積，解題之關鍵在於是否能在梯形中看到如圖中下層的兩個大灰色三角形，或看到其他的子圖。

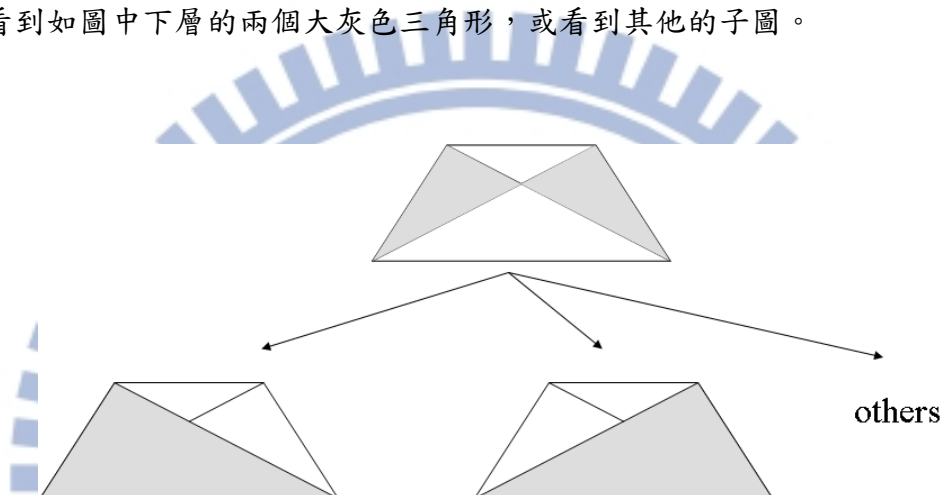


圖 19 視覺處理的第一步—子圖需被辨別

資料來源：Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), p.117. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

## 2. 表徵的轉換 (Conversion)

表徵的轉換大大限制學生運用已習得知識的能力及數學上獲取新知識的能力，而這也阻礙了理解和學習的進步 (Duval, 2006)。例如，甲的錢是乙的三倍多 10 元、8 是  $5x + 2$  的正平方根，當學生在做這類型的題目時，由簡單的文字問題「轉換」成符號表徵，所遇到的障礙往往是無法成功克服的差距，無論數學內容為何。

### 2-5-5 幾何課程的學習

幾何學為探討邏輯推理的推理與空間的關係，其中幾何概念和表徵是數學與現實世



界互動的重要方式，並與其他數學領域緊密結合在一起(左台益、梁勇能，2010)。在設計「圓與切線間的性質關係」的實驗教材之前，要先了解現階段能力指標對於此單元的教學目標為何。研究者根據教育部現行的國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要(教育部，2008)的能力指標及分年細目中與本研究的教學課程相關的內涵說明。

在教育部現行的國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要中(教育部，2008)，將學生的學習分成四個階段，各階段的幾何教學目標為：

第一階段(國小一至二年級)：簡單圖形之認識。

第二階段(國小三至四年級)：發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。

第三階段(國小五至六年級)：能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算。

第四階段(國中七至九年級)：學習三角形及圓的基本幾何性質，認識線對稱與圖形縮放的概念，並能學習簡單的幾何推理。

教育部的課程目標希望能達成培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力。上列的四個階段皆有訂定能力指標，而與本研究主題相關之國中幾何能力指標為：S-4-04 能利用形體的性質解決幾何問題、S-4-17 能理解圓的幾何性質、S-4-19 能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。

以下針對與本研究主題幾何推理相關之分年細目進行說明：

#### 1. 8-s-17 能針對幾何推理中的步驟，寫出所依據的幾何性質

此細目在八年級實施，無特定章節的介紹，只作為檢查項目，不要求學生能對幾何問題的證明寫出完整的推理說明，此細目的教學僅要求學生在幾何推理的過程中能分辨有些推理步驟所依據的幾何性質，或用填空的方式完成幾何推理。

#### 2. 9-s-12 能認識證明的意義

此細目在九年級實施，有特定章節的介紹，說明數學證明是由已知條件或已確定為正確的性質來推導出某些結論，且數學證明並不侷限於幾何推理，也包括

代數、數與量的推理。此細目的教學僅是讓學生初步認識證明的意義，因此推理題以二、三個步驟為限。

再依「教學主題」訂出「教學內容」、「教學目標」和所對應的「先備知識」，以作為本研究教材設計及教學活動的依據，如表 1。

表 1

「圓與切線間的性質關係」教學內容、教學目標及先備知識對照表

教學主題	教學內容	教學目標	先備知識
圓與切線間的性質關係	1. 點與線	1-1 了解點到直線的最短距離為垂直距離	勾股定理
	2. 點與圓	2-1 了解點與圓的位置關係，並以點到圓心的距離與半徑的大小關係判別點與圓的位置關係	圓心到圓周上任一點的距離等於半徑
	3. 切線與圓	3-1 了解切線、切點的意義 3-2 了解圓與切線間有兩個性質 (1) 一圓的切線必垂直於圓心與切點的連線。 (2) 圓心到切線的距離等於圓的半徑。 3-3 了解由圓外一點對此圓所作的兩切線長相等	圓的基本性質

教師的教學層次與學生的學習層次必須相同，才能進行有意義的教學，本研究之研究對象為八年級學生，自國小畢業應到達分析層次，發展非形式演繹層次，而非形式演繹層次即是教育部所訂定國中幾何課程的能力指標(教育部，2008)，因此，本研究之實驗教材設計屬非形式演繹層次，並於教材中導入曾學過的舊有知識，以利新課程的銜接。

學生對數學特性的理解，會引導他們對圖形的解釋與探索以找出問題的解決方式。良好的概念理解應導向檢查圖片中必須觀察以便找到解決問題的要素(Duval, 2006)。本研

究教材主題為幾何教學，會將圖像的表徵轉成代數的表徵，圖像與文字之間有密切的相關性，整個過程是以圖像引導文字來產生幾何意義，避免淪於只是代數的運算，而最後再將推理的結果透過代數來進行引導。

在幾何教學上，形式化的推理證明並不是八年級學生所必須具備的能力，在實驗課堂教學中不強調嚴謹的證明，希望學生能學習利用數學符號表徵，將幾何推理過程以形式或非形式的方式表達呈現。因此在課堂教學及測驗卷上請學生「說明」，只要求學生能寫出重要的圖形關係、簡易的推理說明，旨在讓學生了解脈絡、具有說明能力即可。

實驗教材為自製教材，是以 PowerPoint2003 簡報軟體及 AMA 外掛增益集進行設計及修改，教材製作時事先考量學生之幾何迷思概念及可能的回應，據此將這些內容設計於教材之中，並於課堂中視學生上課反應及回答予以機動性說明。

由於工作記憶的限制，個體無法一次處理大量訊息，當面臨大量訊息的刺激時，會注意整體、忽略細節、僅找部份重點；若要在畫面上找到相關訊息，必須有足夠的時間思考及處理，才能透過選取與組織，真正整合訊息(Mayer, 2001)。

ChanLin & Okey (1994)指出連貫性的訊息適合在同一畫面出現，但如果螢幕中訊息份量過多時，應將複雜的訊息加以分解，採用分層呈現的方式提供重點(引自林麗娟，2000)；分層呈現的設計乃在於分割一份量繁重的訊息塊，藉螢幕逐步呈現訊息而引導學習的重點(林麗娟，2000)。

蘇柏奇(2006)數學教材設計之研究指出，以幾何推理教學而言，內容繁雜但結構明確，往往必須步驟化分層講解，稱為步驟化呈現模式；將教材分割為一個個小區塊來逐步講解，由老師彈性控制各步驟呈現的時間，可更符合適性化的要求。

許晏斌(2009)的研究發現藉由逐步呈現的物件激發可吸引學習者的注意力，協助搜尋教材的訊息，以注意力引導學習，達到教材、教學者、學習者三者之間的互動。

因此，本研究之實驗組教材期望透過圖文步驟化呈現教學，做好注意力及視覺引導，讓學生容易看到圖形間的相關訊息，降低外在認知負荷，產生較佳的學習成效。



## 第三章 研究方法

本章共分為五節，包含：研究流程、研究設計、研究對象、研究工具、資料分析。

### 3-1 研究流程

本研究流程分為準備階段、實驗階段、分析階段三個部份，研究流程如圖 20。

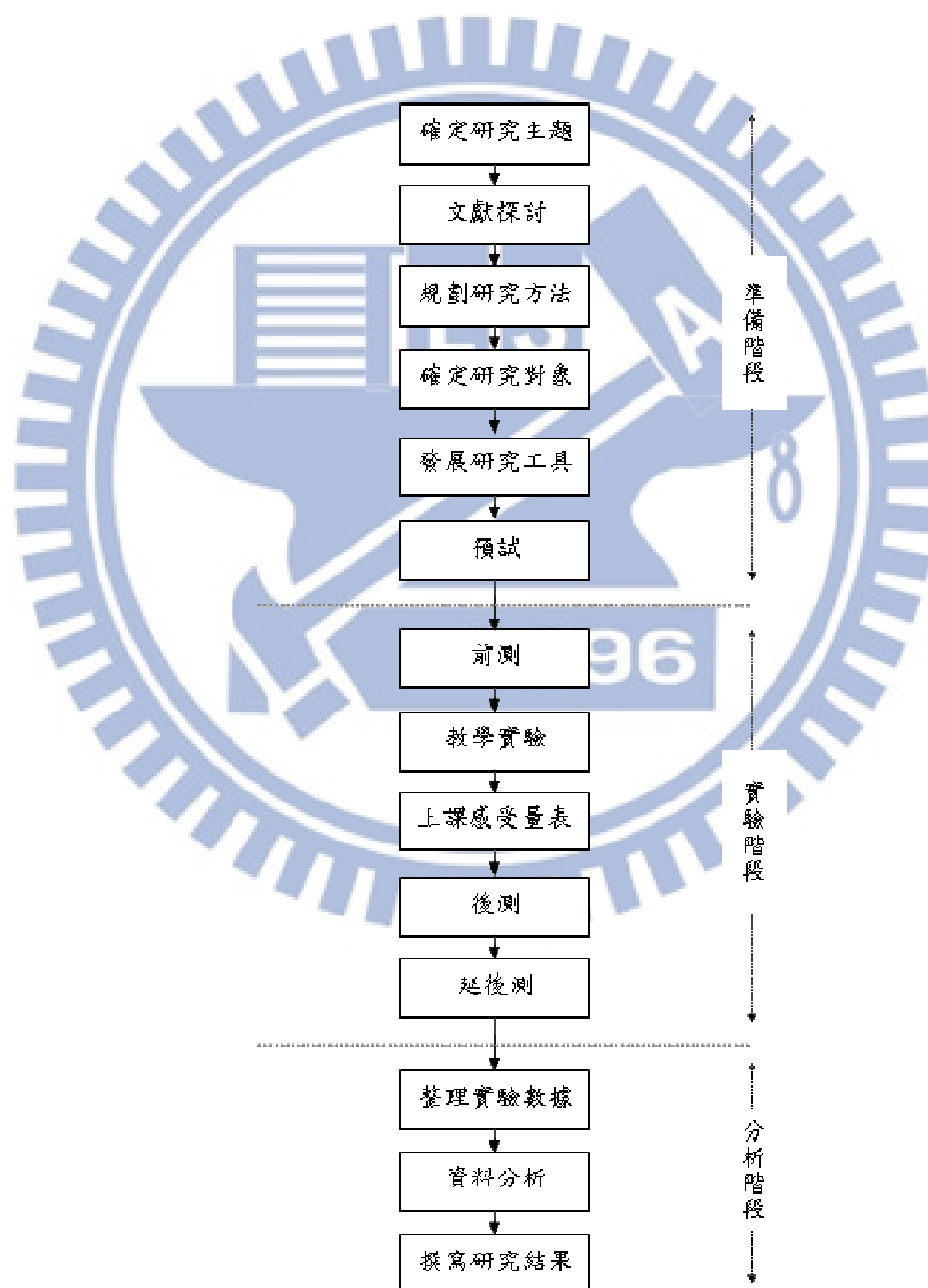


圖 20 研究流程圖



### 3-1-1 準備階段

以新竹縣某國中八年級四個常態班級為研究對象，分成實驗組及對照組。將八年級上學期三次數學科定期評量測驗之平均分數及前測分數，利用獨立樣本  $t$  檢定，確定兩組成績無顯著差異。

實驗教材之編製依據注意力與視覺搜尋、訊息處理理論、多媒體學習理論及認知負荷理論為基礎設計實驗教材。另以同校之九年級兩個常態班級的學生進行試題預試，以瞭解題目之信度、效度、難度、鑑別度，並根據預試結果修正測驗內容。

### 3-1-2 實驗階段

於教學實驗前對實驗組與對照組進行前測，以了解研究對象之起點程度。接著以研究者所製作之實驗教材進行教學實驗。在教學實驗後，請研究對象依據自身的上課感受填寫感受量表，以了解研究對象的認知負荷感受。教學實驗後之隔日進行後測，以了解研究對象之學習成效，並於教學實驗結束四周後實施延後測，延後測測驗卷內容與後測測驗卷相同，以了解研究對象之學習延續情形。

### 3-1-3 分析階段

整理及分析實驗所得之資料數據，以驗證假設及撰寫研究結果。

## 3-2 研究設計

### 3-2-1 研究方法

本研究實驗教材之編製依據注意力與視覺搜尋、訊息處理理論、多媒體學習理論及認知負荷理論設計。旨在探討在圖文步驟化呈現教學或圖文同步呈現教學下，對於學生在幾何學習之後測、延後測及認知負荷感受是否有所影響。

本研究採準實驗研究法進行，以課堂授課為主，採原班級、原教室上課，盡可能將干擾因素減至最低。

### 3-2-2 研究變項

#### 1. 自變項

##### (1) 教學設計

實驗組與對照組之主要教學內容主題皆為圓與切線間的性質，但教學設計不同，實驗組以圖文步驟化呈現教學，對照組以圖文同步呈現教學。

##### (2) 學習成就水準

實驗組與對照組分別以八年級上學期三次數學定期評量測驗之平均分數為依據，分為高學習成就(前 50%)與低學習成就(後 50%)。

#### 2. 依變項

##### (1) 後測

經過不同教學設計的教學實驗後，使用後測來檢視兩組研究對象之成績表現，以評估其學習成效。

##### (2) 延後測

於教學實驗結束四周後實施延後測，以觀察兩組研究對象之學習延續情形。

### (3) 認知負荷感受

於教學實驗結束後，填寫認知負荷量表，藉由量表中的花費心力面向，以了解兩組研究對象的認知負荷感受。

## 3. 控制變項

### (1) 授課教師

皆為研究者本人，研究班級皆非研究者原任課班級，立足點一致。

### (2) 授課環境

實驗組及對照組均在原班級教室上課，授課時皆使用投影機、大螢幕投影設備。

### (3) 教材內容

實驗組及對照組之教材主題與授課時間均相同，因圓與切線間的性質不屬於國中八年級的正式課程，不受學生校外補習之影響，可排除此部分的干擾。

### (4) 測驗問卷

實驗組及對照組之前測測驗卷、上課感受量表、後測測驗卷及延後測測驗卷，其題目內容、施測時間與計分標準皆相同。

## 3-2-3 研究假設

假設 1：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測表現有顯著交互作用。

假設 2：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測表現有顯著交互作用。

假設 3：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的認知負荷有顯著交互作用。

除了以上假設外，本研究另探討不同教學設計對於高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。

### 3-2-4 實驗流程

本研究之實驗步驟、內容、時間分配如表 2：

表 2

教學實驗流程表

步驟	內容	時間
一	前測	10 分鐘
二	教學實驗	40 分鐘
三	上課感受量表問卷	5 分鐘
四	後測	25 分鐘
五	延後測	25 分鐘



### 3-3 研究對象

本研究採準實驗研究法，從新竹縣某國中八年級學生中依便利抽樣方式取樣四個常態班級為研究對象，為求立足點一致，將美術班(815)及體育班(805)排除在外；此外，因資源班採學科抽離方式上課(未在原班級上課)，故將資源生也排除。

八年級上學期三次數學定期評量之題目採任課教師輪流出題，未有重複，故以三次定期評量成績代表學生數學能力。依據八年級上學期三次數學定期評量成績，隨機選定 804、812 兩班為實驗組，810、814 兩班為對照組，並將實驗組及對照組的成績分別由高至低排列，取前 50% 為高學習成就學生、後 50% 為低學習成就學生。八年級上學期三次定期評量成績如表 3，人數分配如表 4。

表 3

研究對象班級人數及上學期定期評量成績表

班級	人數	定期評量			平均	組別
		一	二	三		
804	31	35.56	30.94	42.63	36.38	實驗組
810	28	38.32	35.64	50.75	41.57	對照組
812	27	38.88	28.74	48.07	38.56	實驗組
814	30	34.77	31.97	38.37	35.03	對照組

表 4

研究對象之高、低學習成就人數分配表

組別	班級	高學習成就	低學習成就	總計
實驗組	804、812	29	29	58
對照組	810、814	29	29	58
總計		58	58	116

利用獨立樣本  $t$  檢定，檢驗實驗組與對照組之八年級上學期三次數學定期評量成績，兩組定期評量之平均分數分別為 37.47 和 38.19，變異數相等的 Levene 檢定未達顯著 ( $F =$



0.136,  $p = .713$ ), 即表示兩組成績的離散情形無顯著差異。假設變異數相等, 其  $t$  值 = -0.207、 $df = 114$ 、 $p = .836 > .05$ , 檢驗結果未達顯著, 因此兩組學生程度可視為相當, 檢定資料摘要如表 5。

表 5

研究對象八年級上學期定期評量平均獨立樣本  $t$  檢定摘要表

變項	實驗組 ( $n = 58$ )		對照組 ( $n = 58$ )		$t(114)$	$p$
	$M$	$SD$	$M$	$SD$		
定期評量	37.47	18.31	38.19	19.04	-0.207	.836

同樣利用獨立樣本  $t$  檢定, 檢驗兩組前測成績, 前測總分為 40, 兩組前測之平均分數分別為 20.69 和 21.21, 變異數相等的 Levene 檢定未達顯著 ( $F = 0.588$ ,  $p = .445$ ), 即表示兩組成績的離散情形無顯著差異。假設變異數相等, 其  $t$  值 = -0.210、 $df = 114$ 、 $p = .834 > .05$ , 檢驗結果亦未達顯著, 因此兩組學生程度可視為相當, 檢定資料摘要如表 6。

表 6

研究對象前測成績獨立樣本  $t$  檢定摘要表

變項	實驗組 ( $n = 58$ )		對照組 ( $n = 58$ )		$t(114)$	$p$
	$M$	$SD$	$M$	$SD$		
前測	20.69	12.99	21.21	13.49	-0.210	.834

綜合以上所述, 利用獨立樣本  $t$  檢定, 檢驗兩組學生八年級上學期三次數學定期評量成績及前測成績, 檢驗結果均未達顯著, 可視為兩組學生數學先備知識相當。

### 3-4 研究工具

本研究所使用的研究工具有實驗教材、前測測驗卷、後測測驗卷、延後測測驗卷、上課感受量表，分述如下：

#### 3-4-1 實驗教材

本研究所使用之教材均為自製教材，教材主要內容為「圓與切線間之性質」，符合九年一貫數學科能力指標「9-s-6 能理解直線與圓之性質」；對應的課本章節為九年級第一學期第二章。教材製作平台為 PowerPoint 2003 簡報軟體搭配 AMA 外掛增益集，實驗教材設計與課堂展演運用注意力與視覺搜尋、訊息處理理論、認知負荷教學設計原則及多媒體學習設計原則安排各教學元素。在教材製作過程中，不斷與五位教學年資 8~20 年之國中數學教師及指導教授共同討論編修而成。

本研究教學實驗分為「實驗組」與「對照組」，教材設計的主要差異在於訊息傳遞策略的不同，「實驗組」使用圖文步驟化呈現教學，「對照組」使用圖文同步呈現教學；相同之處在於均使用雙通道模式呈現，敘述性文字儘量以口語方式呈現，只保留重要文字訊息，避免畫面上過多的文字訊息造成冗餘。

「實驗組」教材的教學畫面中，當下要學生注意的主要訊息會突顯，同時將其它次要訊息淡化，有效引導學生的注意力，在必要時仍可以看見整體訊息，如圖 21；各種訊息、符號或輔助標示依循「空間接近原則」(Mayer,2009)，盡量貼近圖形表徵的相對應元素，以減少視覺搜尋的負荷及避免分散注意力，如圖 22。

「對照組」教材的教學畫面中，會同步呈現所有完整訊息，在課堂授課中，研究者以口語提問及說明來進行突顯與補充內容，如圖 23。

本研究之實驗教材特別注意訊息之連結，期盼透過視覺編排，引導學生的注意力進入自動化的認知處理歷程，使學生不用在表徵連結與轉換上耗費過多心力，藉以降低認知負荷，促成較好的學習成效。

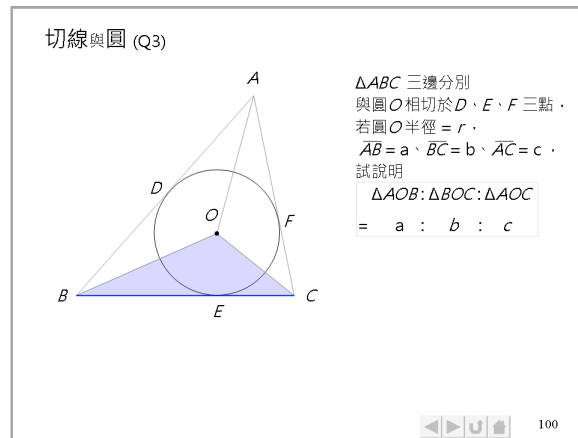


圖 21 實驗組教材畫面(1)

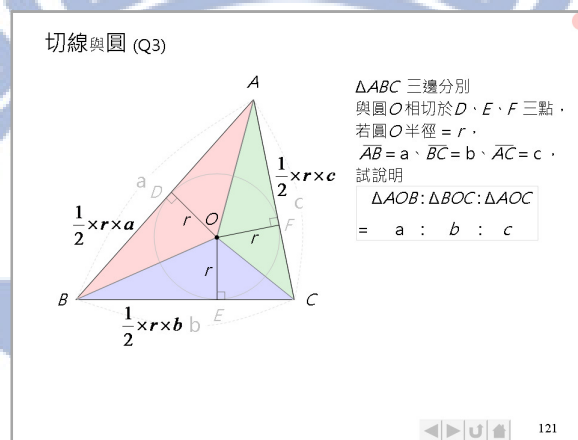


圖 22 實驗組教材畫面(2)

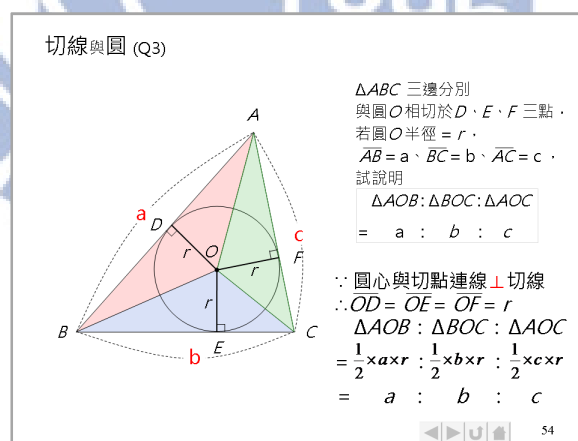
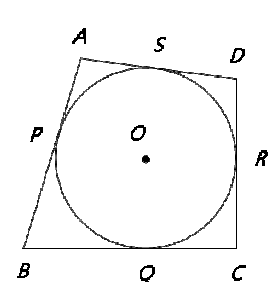
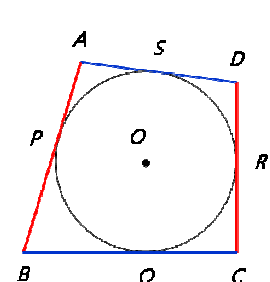
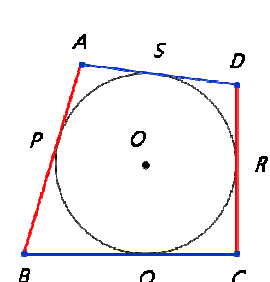
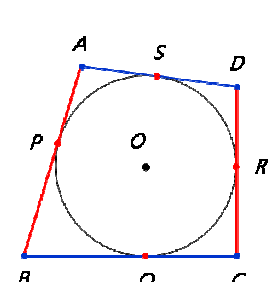


圖 23 對照組教材畫面

以下僅以教學示例第五題為例，說明實驗組與對照組教材之差異，如表 7 與表 8，  
實驗組完整教材請見附錄一。

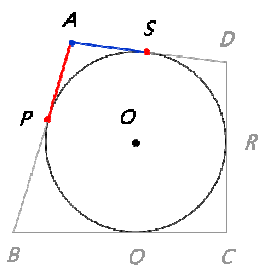
表 7

實驗組教材（教學示例第五題為例）

畫面	說明
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}</math></p>	<p>引導學生觀察圖形中圓形和四邊形邊長的關係，而察覺出直線為切線的關鍵。</p>
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}</math></p>	<p>藉由步驟化呈現畫面搭配教師口語提問及引導，引導學生觀察到四個圓外點及四個切點，而能察覺到圓外一點對圓所做兩切線長相等的性質。</p>
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}</math></p>	
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}</math></p>	

(續下頁)

切線與圓 (Q5)

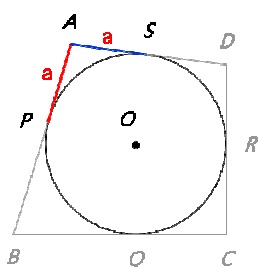


四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

藉由步驟化呈現畫面  
搭配教師口語提問及  
引導，讓學生表達出  
圓外一點對圓所做兩  
切線長相等的性質。

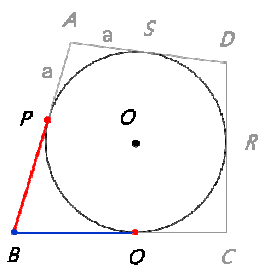
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

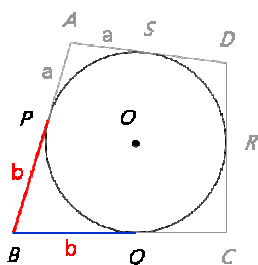
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

切線與圓 (Q5)



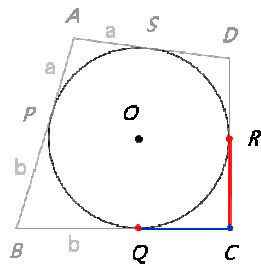
四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

(續下頁)



切線與圓 (Q5)

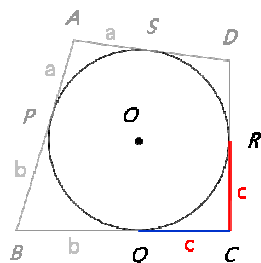


四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

藉由步驟化呈現畫面  
搭配教師口語提問及  
引導，讓學生表達出  
圓外一點對圓所做兩  
切線長相等的性質。

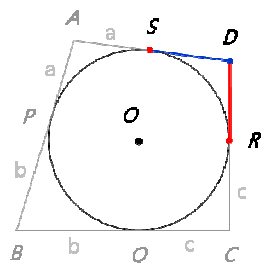
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

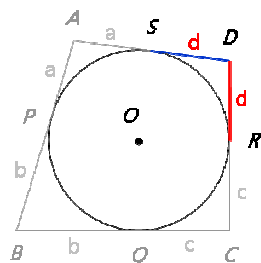
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

切線與圓 (Q5)

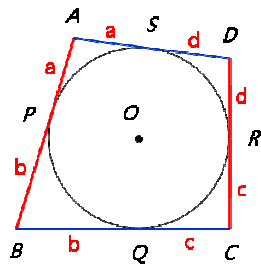


四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$AB + CD = AD + BC$$

(續下頁)

切線與圓 (Q5)

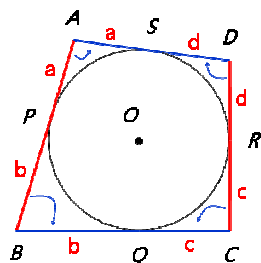


四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

藉由步驟化呈現畫面  
搭配教師口語提問及  
引導，利用線條及符  
號表達出圓外一點對  
圓所做兩切線長相等  
的性質，並用符號表  
徵完成列式說明。

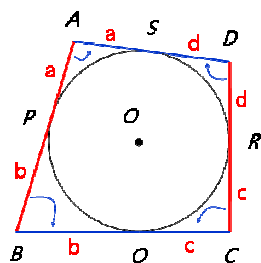
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明

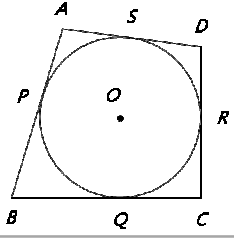
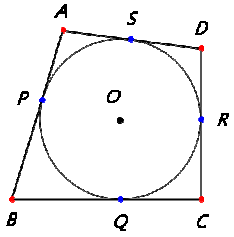
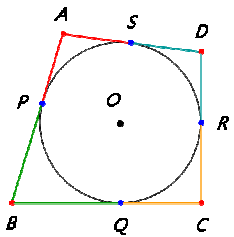
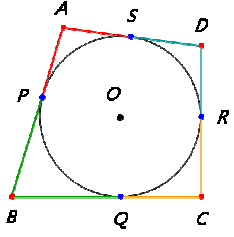
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

∴ 圓外一點到此圓的兩切線長相等

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} &= a + b + c + d \\ &= a + d + b + c \\ &= \overline{AD} + \overline{BC}\end{aligned}$$

表 8

對照組教材 (教學示例第五題為例)

畫面	說明
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>AB + CD = AD + BC</math></p>	<p>引導學生觀察圖形中圓形和四邊形邊長的關係，而察覺出直線為切線的關鍵。</p>
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>AB + CD = AD + BC</math></p>	<p>藉由圖文同步呈現畫面搭配教師的口語提問及引導，讓學生自行搜尋到四個圓外點及四個切點，而能察覺到圓外一點對圓所做兩切線長相等的性質。</p>
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>AB + CD = AD + BC</math></p>	<p>藉由圖文同步呈現畫面搭配教師口語提問及引導，讓學生表達出圓外一點對圓所做兩切線長相等的性質。</p>
<p>切線與圓 (Q5)</p>  <p>四邊形 <math>ABCD</math> 的四邊分別與圓 <math>O</math> 切於 <math>P, Q, R, S</math> 四點。 試說明 <math>AB + CD = AD + BC</math></p> <p> <math>\because</math> 圓外一點到此圓的兩切線長相等  <math>\therefore AP = AS, BP = BQ, CR = CQ, DR = DS</math>  <math>AB + CD = AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS = AS + DS + BQ + CQ = AD + BC</math>          即 <math>AB + CD = AD + BC</math> </p>	<p>藉由圖文同步呈現畫面搭配教師口語提問及引導，利用線條表達出圓外一點對圓所做兩切線長相等的性質，並完成列式說明。</p>

### 3-4-2 前測測驗卷

在教學實驗之前進行前測，目的為了解實驗組與對照組的起點程度是否一致。前測測驗卷詳見附錄二。

測驗卷題數共八題，每題五分，總分四十分。研究者以與實驗對象同校之九年級兩個常態班級共 63 名學生進行預試，並進行統計分析處理，以瞭解試卷之信度、效度、難度、鑑別度，說明如下：

#### 1. 信度

內部一致係數(Cronbach's  $\alpha$ )為 .960，表示前測測驗卷之內部一致信度良好。

#### 2. 效度

前測測驗卷效度採專家效度。敦請五位教學年資 8~20 年之國中數學教師(台北市 1 位、新北市 1 位、新竹縣 1 位、新竹市 1 位、台中市 1 位)及指導教授審閱後，提供編修上之建議，具專家效度。

#### 3. 難度

前測測驗卷難度介於 0.53 與 0.65 之間，表示各題之難度適中。

#### 4. 鑑別度

前測測驗卷鑑別度介於 0.59 與 0.88 之間，表示各題之鑑別度適中。

### 3-4-3 後測測驗卷

在教學實驗之後進行後測，目的為了解實驗組與對照組的學習成效。後測測驗卷詳見附錄三。

後測測驗卷分兩大部份：計算題四題、說明題四題。測驗卷題數共八題，每題十分，總分八十分，皆採分段式給分，依每題之計算及說明步驟複雜度訂定統一之給分標準，計分標準方式如下：

#### 1. 未填寫或其他（0 分）

空白未作答、圖上標示完全與解題無關或寫出與題目不相關的答案。

2. 有一點點想法（2 分）

能嘗試描述或圖上標示出部份性質，且此圖形性質對於解題有所幫助。

3. 能寫出部份關鍵要素（4 分）

能看出圖形的部份關聯，以數學語言表達、描述或圖上標示出性質，且此關聯為解題之部份關鍵要素。

4. 能寫出主要關鍵要素（6 分）

能看出圖形的重要關聯，以數學語言表達、描述或圖上標示出性質，且此關聯為解題之主要關鍵要素。

5. 過程有誤或步驟不足（8 分）

能看出圖形的重要關聯，以數學語言表達、描述或圖上標示出性質，但在利用關聯做說明時，過程有誤或步驟不足。

6. 能完整且正確地說明（10 分）

能看出圖形裡的重要關聯，完整且正確地利用關聯做說明，來得到題目所要求的結果。

測驗卷係研究者根據實驗單元編製而成，計算題題目乃根據上課之內容所設計，以了解學生能否利用所學進行計算，第 1 題題目與教學示例相近，第 2 題、第 3 題、第 4 題非教學示例題，測驗學生是否能應用所學的性質及知識；說明題題目與上課內容之同質性高，第 5 題、第 6 題、第 7 題及第 8 題題目與教學示例相近。

研究者以與實驗對象同校之九年級兩個常態班級共 63 名學生進行預試，旨在蒐集學生對各個試題的可能答題狀況反應、試題語意是否清晰，並進行統計分析處理，以瞭解試卷之信度、效度、難度、鑑別度，說明如下：

1. 信度

內部一致係數(Cronbach's  $\alpha$ )為 .931，表示後測測驗卷之內部一致信度良好。

2. 效度

後測測驗卷效度採專家效度。敦請五位教學年資 8~20 年之國中數學教師(台



北市 1 位、新北市 1 位、新竹縣 1 位、新竹市 1 位、台中市 1 位)及指導教授審閱後，提供編修上之建議，具專家效度。

### 3. 難度

後測測驗卷難度介於 0.47 與 0.62 之間，表示各題之難度適中。

### 4. 鑑別度

後測測驗卷鑑別度介於 0.76 與 1.00 之間，表示各題之鑑別度適中。

## 3-4-4 延後測測驗卷

於教學實驗結束四周後進行延後測測驗，目的為了解研究對象之學習延續情形，延後測測驗卷及計分標準均與後測相同。

## 3-4-5 認知負荷量表

有關認知負荷的測量，不易藉由標準化的測量方式獲得。Paas(1992)提出一種認知負荷的主觀測量，使用九點制的李克特量表，要求學習者進行自我評價。主觀評價量表，被證實是最敏感的測量工具，可用來區分不同教學程序所產生的認知負荷，且已被廣泛使用(Sweller et al., 2011)。

本研究藉由題目「你覺得要理解這單元的內容，在精神上有多費力？」代表花費心力面向以用來檢測認知負荷感受，為七點量表，數字越小代表感受到之認知負荷越低。

### 3-5 資料分析

本研究採量化分析，使用 PASW 18.0 (SPSS)為基本統計分析工具，所分析之資料分述如下：

#### 1. 獨立樣本 $t$ 檢定

(1) 檢驗研究對象八年級上學期數學科定期評量成績及前測成績，以判斷實驗組與對照組程度是否有差異。

(2) 虛無假設的顯著水準  $\alpha$  值設為 .05。

#### 2. 內在信度

以預試成績計算前測測驗卷及後測測驗卷的內在信度 Cronbach  $\alpha$  係數值，分析其信度。

#### 3. 二因子變異數分析

(1) 檢驗不同教學設計與不同學習成就水準對於學生在後測成績的影響，以及交互作用是否顯著。

(2) 檢驗不同教學設計與不同學習成就水準對於學生在延後測成績的影響，以及交互作用是否顯著。

(3) 檢驗不同教學設計與不同學習成就水準對於學生在認知負荷感受的影響，以及交互作用是否顯著。

## 第四章 研究結果與討論

本章內容乃於教學實驗完成後，對研究對象之後測、延後測、上課感受量表等資料，進行分析及討論，並檢驗本研究之假設。

本章共分為三節，第一節為後測及延後測表現分析，第二節為認知負荷感受分析，第三節為學習效率與學習投入分數暨專業知識反轉效應分析。

### 4-1 後測及延後測表現分析

本節探討後測及延後測表現，測驗卷共有兩大部份：第 1 題到第 4 題為計算題，第 5 題到第 8 題為說明題，每題皆為十分，除了分析總成績外，亦針對計算題及說明題成績進行討論。實驗教學結束四周後另進行延後測，由於未事先告知學生，且本研究主題單元非學校教學進度故未進行任何複習，故可將延後測成績視為實驗教學之延續，以瞭解兩組研究對象之學習效益是否有延續，而非教學時的短暫記憶。

檢驗之假設如下：

假設 1：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測表現有顯著交互作用。

假設 2：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測表現有顯著交互作用。

將研究對象分為實驗組、對照組來分析後測及延後測表現之總成績、計算題成績、說明題成績，描述性統計摘要如表 9。

表 9

後測及延後測描述性統計摘要表

	組別	人數	平均數	標準差
後 測總成績(80)	實驗組	58	40.36	26.12
	對照組	58	25.00	20.13
延後測總成績(80)	實驗組	58	34.48	25.81
	對照組	58	18.76	16.61
後 測計算題(40)	實驗組	58	20.57	13.01
	對照組	58	13.28	10.87
延後測計算題(40)	實驗組	58	18.10	13.33
	對照組	58	11.00	9.93
後 測說明題(40)	實驗組	58	19.79	14.00
	對照組	58	11.72	10.87
延後測說明題(40)	實驗組	58	16.38	13.31
	對照組	58	7.76	8.26

註：括號( )內數字為該項目之總分

### 1. 後測總成績

假設 1-1：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測總成績有顯著交互作用。

考驗假設 1-1 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ ：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測總成績沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項，「後測總成績」為依變項進行二因子變異數分析，兩組學生「後測總成績」的平均數摘要表，如表 10，二因子變異數分析摘要表，如表 11。

表 10

教學設計與學習成就水準在後測總成績之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	57.45	23.28	40.36
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	38.00	12.00	25.00
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		47.72	17.64	32.68
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，後測總成績為 80 分

表 11

教學設計與學習成就水準在後測總成績之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	6843.802	1	6843.802	21.738	0.000***	0.163
學習成就水準	26250.216	1	26250.216	83.379	0.000***	0.427
教學設計 * 學習成就水準	484.216	1	484.216	1.538	0.218	0.014
誤差	35260.966	112	314.830			
總數	68839.198	115				

註：\*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 10 及表 11 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在後測總成績無顯著交互作用( $F = 1.538, p = .218 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於後測總成績影響的主要效果達顯著( $F = 21.738, p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測總成績的影響，教學設計變項可以解釋後測總成績的 16.3% 的變異量(淨  $\eta^2 = .163$ )，為高



度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組後測總成績( $M = 40.36$ )顯著優於對照組後測總成績( $M = 25.00$ )。

- (3) 「學習成就水準」對於後測總成績影響的主要效果達顯著( $F = 83.379$ ,  $p = .000 < .05$ )，在排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測總成績的影響，學習成就水準變項可以解釋後測總成績的42.7%的變異量(淨  $\eta^2 = .427$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高學習成就學生後測總成績( $M = 47.72$ )顯著優於低學習成就學生後測總成績( $M = 17.64$ )。學習成就水準代表數學能力，學習成就較高的學生在學習成效上自然會優於學習成就較低的學生，即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述，假設考驗的結果如下：

假設 1-1：接受  $H_0$ ，假設 1-1 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測總成績沒有顯著交互作用。

## 2. 延後測總成績

假設 2-1：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測總成績有顯著交互作用。

考驗假設 2-1 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ ：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測總成績沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項，「延後測總成績」為依變項進行二因子變異數分析，兩組學生「延後測總成績」的平均數摘要表，如表 12，二因子變異數分析摘要表，如表 13。

表 12

教學設計與學習成就水準在延後測總成績之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	51.59	17.38	34.48
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	30.62	6.90	18.76
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		41.10	12.14	26.62
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，延後測總成績為 80 分

表 13

教學設計與學習成就水準在延後測總成績之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	7170.207	1	7170.207	28.109	0.000***	0.201
學習成就水準	24331.034	1	24331.034	95.384	0.000***	0.460
教學設計 * 學習成就水準	796.690	1	796.690	3.123	0.080	0.027
誤差	28569.379	112	255.084			
總數	60867.310	115				

註：\*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 12 及表 13 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在延後測總成績無顯著交互作用( $F = 3.123$ ， $p = .080 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於延後測總成績影響的主要效果達顯著( $F = 28.109$ ， $p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測總成績的影響，教學設計變項可以解釋延後測總成績的 20.1%的變異量(淨  $\eta^2$

= .201)，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組延後測總成績( $M = 34.48$ )顯著優於對照組延後測總成績( $M = 18.76$ )。

- (3) 「學習成就水準」對於延後測總成績影響的主要效果達顯著( $F = 95.384$ ,  $p = .000 < .05$ )，排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測總成績的影響，學習成就水準變項可以解釋延後測總成績的 46.0% 的變異量(淨  $\eta^2 = .460$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高學習成就學生延後測總成績( $M = 41.10$ )顯著優於低學習成就學生延後測總成績( $M = 12.14$ )。學習成就水準代表數學能力，學習成就較高的學生在學習的延續情形自然會優於學習成就較低的學生，即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-1：接受  $H_0$ ，假設 2-1 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測總成績沒有顯著交互作用。

### 3. 後測計算題

假設 1-2：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測計算題有顯著交互作用。

考驗假設 1-2 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ ：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測計算題沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項，「後測計算題」為依變項進行二因子變異數分析，兩組學生「後測計算題」的平均數摘要表，如表 14，二因子變異數分析摘要表，如表 15。

表 14

教學設計與學習成就水準在後測計算題之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	29.24	11.90	20.57
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	20.48	6.07	13.28
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		24.86	8.98	16.92
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，後測計算題為 40 分

表 15

教學設計與學習成就水準在後測計算題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	1542.491	1	1542.491	19.185	0.000***	0.146
學習成就水準	7312.422	1	7312.422	90.947	0.000***	0.448
教學設計 * 學習成就水準	62.284	1	62.284	0.775	0.381	0.007
誤差	9005.103	112	80.403			
總數	17922.302	115				

註：\*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 14 及表 15 中可得知：

- (1)「教學設計」與「學習成就水準」在後測計算題成績無顯著交互作用( $F = 0.775$ ， $p = .381 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2)「教學設計」對於後測計算題成績影響的主要效果達顯著( $F = 19.185$ ， $p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測計算題成績的影響，教學設計變項可以解釋後測計算題成績的 14.6%的變異量(淨



$\eta^2 = .146$ ), 為高度關連強度。從邊緣平均數發現, 實驗組後測計算題成績( $M = 20.57$ )顯著優於對照組後測計算題成績( $M = 13.28$ )。

- (3)「學習成就水準」對於後測計算題成績影響的主要效果達顯著( $F = 90.947, p = .000 < .05$ ), 在排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測計算題成績的影響, 學習成就水準變項可以解釋後測計算題成績的 44.8%的變異量(淨  $\eta^2 = .448$ ), 為高度關連強度。從邊緣平均數發現, 高學習成就學生後測計算題成績( $M = 24.86$ )顯著優於低學習成就學生後測計算題成績( $M = 8.98$ )。學習成就水準代表數學能力, 學習成就較高的學生在學習成效上自然會優於學習成就較低的學生, 即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述, 假設考驗的結果如下:

假設 1-2: 接受  $H_0$ , 假設 1-2 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測計算題沒有顯著交互作用。

#### 4. 延後測計算題

假設 2-2: 不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測計算題有顯著交互作用。

考驗假設 2-2 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ : 不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測計算題沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項, 「延後測計算題」為依變項進行二因子變異數分析, 兩組學生「延後測計算題」的平均數摘要表, 如表 16, 二因子變異數分析摘要表, 如表 17。



表 16

教學設計與學習成就水準在延後測計算題之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	27.17	9.03	18.10
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	18.00	4.00	11.00
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		22.59	6.52	14.55
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，延後測計算題為 40 分

表 17

教學設計與學習成就水準在延後測計算題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	1463.310	1	1463.310	20.141	0.000***	0.152
學習成就水準	7488.138	1	7488.138	103.068	0.000***	0.479
教學設計 * 學習成就水準	124.138	1	124.138	1.709	0.194	0.015
誤差	8137.103	112	72.653			
總數	17212.690	115				

註：\*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 16 及表 17 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在延後測計算題成績無顯著交互作用( $F = 1.709$ ， $p = .194 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於延後測計算題成績影響的主要效果達顯著( $F = 20.141$ ， $p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測計算題成績的影響，教學設計變項可以解釋延後測計算題成績的 15.2%的變異量

(淨  $\eta^2 = .152$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組延後測計算題成績 ( $M = 18.10$ ) 顯著優於對照組延後測計算題成績 ( $M = 11.00$ )。

- (3) 「學習成就水準」對於延後測計算題成績影響的主要效果達顯著 ( $F = 103.068$ ,  $p = .000 < .05$ )，排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測計算題成績的影響，學習成就水準變項可以解釋延後測計算題成績的 47.9% 的變異量 (淨  $\eta^2 = .479$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高學習成就學生延後測計算題成績 ( $M = 22.59$ ) 顯著優於低學習成就學生延後測計算題成績 ( $M = 6.52$ )。學習成就水準代表數學能力，學習成就較高的學生在學習的延續情形自然會優於學習成就較低的學生，即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-2：接受  $H_0$ ，假設 2-2 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測計算題沒有顯著交互作用。

## 5. 後測說明題

假設 1-3：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測說明題有顯著交互作用。

考驗假設 1-3 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ ：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測說明題沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項，「後測說明題」為依變項進行二因子變異數分析，兩組學生「後測說明題」的平均數摘要表，如表 18，二因子變異數分析摘要表，如表 19。

表 18

教學設計與學習成就水準在後測說明題之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	28.21	11.38	19.79
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	17.52	5.93	11.72
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		22.86	8.66	15.76
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，後測說明題為 40 分

表 19

教學設計與學習成就水準在後測說明題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	1888.138	1	1888.138	17.842	0.000***	0.137
學習成就水準	5853.241	1	5853.241	55.309	0.000***	0.331
教學設計 * 學習成就水準	199.172	1	199.172	1.882	0.173	0.017
誤差	11852.690	112	105.828			
總數	19793.241	115				

註：\*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 18 及表 19 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在後測說明題成績無顯著交互作用( $F = 1.882$ ， $p = .173 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於後測說明題成績影響的主要效果達顯著( $F = 17.842$ ， $p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測說明題成績的影響，教學設計變項可以解釋後測說明題成績的 13.7%的變異量(淨

$\eta^2 = .137$ ), 為中度關連強度。從邊緣平均數發現, 實驗組後測說明題成績( $M = 19.79$ )顯著優於對照組後測說明題成績( $M = 11.72$ )。

- (3) 「學習成就水準」對於後測說明題成績影響的主要效果達顯著( $F = 55.309, p = .000 < .05$ ), 在排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對後測說明題成績的影響, 學習成就水準變項可以解釋後測說明題成績的 33.1% 的變異量(淨  $\eta^2 = .331$ ), 為高度關連強度。從邊緣平均數發現, 高學習成就學生後測說明題成績( $M = 22.86$ ) 顯著優於低學習成就學生後測說明題成績( $M = 8.66$ )。學習成就水準代表數學能力, 學習成就較高的學生在學習成效上自然會優於學習成就較低的學生, 即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述, 假設考驗的結果如下:

假設 1-3: 接受  $H_0$ , 假設 1-3 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測說明題沒有顯著交互作用。

## 6. 延後測說明題

假設 2-3: 不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測說明題有顯著交互作用。

考驗假設 2-3 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ : 不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測說明題沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項, 「延後測說明題」為依變項進行二因子變異數分析, 兩組學生「延後測說明題」的平均數摘要表, 如表 20, 二因子變異數分析摘要表, 如表 21。



表 20

教學設計與學習成就水準在延後測說明題之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就	低成就	
		(58)	(58)	
教學設計	實驗組	24.41	8.34	16.38
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	12.62	2.90	7.76
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		18.52	5.62	12.07
		(58)	(58)	(116)

註：括號( )內數字為人數，延後測說明題為 40 分

表 21

教學設計與學習成就水準在延後測說明題之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	2155.172	1	2155.172	27.203	0.000***	0.195
學習成就水準	4823.310	1	4823.310	60.882	0.000***	0.352
教學設計 * 學習成就水準	291.862	1	291.862	3.684	0.057	0.032
誤差	8873.103	112	79.224			
總數	16143.448	115				

註：\* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$

經二因子變異數分析後，由表 20 及表 21 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在延後測說明題成績無顯著交互作用( $F = 3.684$ ， $p = .057 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於延後測說明題成績影響的主要效果達顯著( $F = 27.203$ ， $p = .000 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測說明題成績的影響，教學設計變項可以解釋延後測說明題成績的 19.5%的變異量



(淨  $\eta^2 = .195$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組延後測說明題成績 ( $M = 16.38$ ) 顯著優於對照組延後測說明題成績 ( $M = 7.76$ )。

- (3) 「學習成就水準」對於延後測說明題成績影響的主要效果達顯著 ( $F = 60.882$ ,  $p = .000 < .05$ )，排除教學設計變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對延後測說明題成績的影響，學習成就水準變項可以解釋延後測說明題成績的 35.2% 的變異量 (淨  $\eta^2 = .352$ )，為高度關連強度。從邊緣平均數發現，高學習成就學生延後測說明題成績 ( $M = 18.52$ ) 顯著優於低學習成就學生延後測說明題成績 ( $M = 5.62$ )。學習成就水準代表數學能力，學習成就較高的學生在學習的延續情形自然會優於學習成就較低的學生，即使達到顯著水準也可視為正常現象。

綜合以上所述，假設考驗的結果如下：

假設 2-3：接受  $H_0$ ，假設 2-3 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測說明題沒有顯著交互作用。

由於後測與延後測之試卷為同一份，以下將實驗組及對照組的後測及延後測之計算題、說明題分數繪製成折線圖，如圖 24，以了解學生之前後答題比較差異。從圖上資料可以發現，在計算題及說明題部分均有衰退，顯示在這一個月當中，由於未提供學生任何複習，因此延後測成績不如教學一結束時所進行的後測。



圖 24 後測及延後測計算題、說明題分數折線圖

綜合以上所述，對兩組學生而言：

1. 假設 1 不成立，即「不同教學設計與不同學習成就水準對學生的後測表現沒有顯著交互作用。」
2. 假設 2 不成立，即「不同教學設計與不同學習成就水準對學生的延後測表現沒有顯著交互作用。」

本研究結果顯示，兩組學生在後測及延後測各部份表現均有顯著差異，實驗組成績顯著優於對照組成績。分析其原因，研究者推測運用圖文同步呈現教學之教學設計，學習者需自行搜尋、觀察出圖形中的切線性質，方能進行解題，所產生的外在認知負荷相對較大，因而降低了學習成效，且對於部分學習成就較低的學生，甚至可能因外在認知負荷過大而超出認知負荷總量以致於無法進行學習；而運用圖文步驟化呈現教學之教學設計，學習者較能觀察出圖形中的切線性質，順利進行解題，推測運用圖文步驟化呈現教學之訊息傳遞策略為較有效的注意力引導及視覺搜尋的輔助，能適時地呈現訊息、解說訊息，協助學習者選取、組織和整合訊息，降低學習者的外在認知負荷，產生之認知負荷總量相對較低，對於多數學生而言較能負荷。由此可推論以圖文步驟化呈現教學之教學設計應有助於幾何學習。

## 4-2 認知負荷分析

本研究以認知負荷量表之「花費心力」來檢測研究對象的認知負荷感受，數據越小代表認知負荷越低。

檢驗之假設如下：

假設 3：不同教學設計與不同學習成就水準對學生的認知負荷感受有顯著交互作用。

考驗假設 3 的虛無假設  $H_0$

$H_0$ ：不同教學設計與不同學習成就水準在學生的認知負荷感受沒有顯著交互作用。

以「教學設計」與「學習成就水準」為自變項，「花費心力」為依變項進行二因子變異數分析，兩組學生「花費心力」的平均數摘要表，如表 22，二因子變異數分析摘要表，如表 23。

表 22

教學設計與學習成就水準在花費心力之平均數摘要表

		學習成就水準		邊緣平均數
		高成就 (58)	低成就 (58)	
教學設計	實驗組	3.38	4.21	3.79
	(58)	(29)	(29)	(58)
	對照組	4.41	4.45	4.43
	(58)	(29)	(29)	(58)
邊緣平均數		3.90 (58)	4.33 (58)	4.11 (116)

註：括號( )內數字為人數

表 23

教學設計與學習成就水準在花費心力之二因子變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F	p	淨 $\eta^2$
教學設計	11.802	1	11.802	6.683	0.011*	0.056
學習成就水準	5.388	1	5.388	3.051	0.083	0.027
教學設計 * 學習成就水準	4.560	1	4.560	2.582	0.111	0.023
誤差	197.793	112	1.766			
總數	219.543	115				

註：\* $p < .05$

經二因子變異數分析後，由表 22 及表 23 中可得知：

- (1) 「教學設計」與「學習成就水準」在花費心力無顯著交互作用( $F = 2.582$ ,  $p = .111 > .05$ )，未達顯著水準。
- (2) 「教學設計」對於花費心力影響的主要效果達顯著( $F = 6.683$ ,  $p = .011 < .05$ )，在排除學習成就水準變項之主要效果項與兩變項之交互作用項對花費心力的影響，教學設計變項可以解釋花費心力的 5.6% 的變異量(淨  $\eta^2 = .056$ )，為低度關連強度。從邊緣平均數發現，實驗組花費心力( $M = 3.79$ )顯著低於對照組花費心力( $M = 4.43$ )。
- (3) 「學習成就水準」對於花費心力影響的主要效果未達顯著( $F = 3.051$ ,  $p = .083 > .05$ )。

綜合以上所述，假設考驗的結果如下：

假設 3：接受  $H_0$ ，假設 3 不成立。不同教學設計與不同學習成就水準對學生的認知負荷感受沒有顯著交互作用。

本研究結果顯示，兩組學生的認知負荷感受在「花費心力」有顯著差異，實驗組學

生之花費心力顯著低於對照組，亦即實驗組所感受到的認知負荷較輕，而對照組的認知負荷較重，且後測及延後測成績表現都低於實驗組。分析其原因，研究者推測在教學過程中，實驗組根據步驟化的引導，能較快搜尋並組織圖形間的連結關係，不需要一直瀏覽或探索訊息，能有效降低外在認知負荷，因此認知負荷感受較輕。





### 4-3 學習效率與學習投入分數暨專業知識反轉效應分析

本節以第二章認知負荷理論中用於觀察專業知識反轉效應的學習效率( $E$ )與學習投入分數( $I$ )做為輔助，並綜合以判斷本研究所使用之教材對於高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。以下分析將後測總成績轉為  $Z$  分數(即  $Z_p$ )，認知負荷量表中的「花費心力」轉為  $Z$  分數(即  $Z_c$ )，分別就整體學生、高學習成就學生與低學習成就學生進行學習效率、學習投入分數與專業知識反轉效應之分析。

#### 4-3-1 整體學生之分析

就整體學生而言，實驗組的學習效率高於對照組，實驗組的學習投入分數也高於對照組，數據整理如表 24。綜合學習效率及學習投入分數，可得知實驗組為高效率高投入，對照組為低效率低投入，視覺化圖像如圖 25。

表 24

整體學生學習效率與學習投入分數

	$Z_p(Y)$	$Z_c(X)$	$E$	$I$
實驗組	0.31	-0.23	0.39	0.06
對照組	-0.31	0.23	-0.39	-0.06

註： $Z_p$ ＝後測  $Z$  分數， $Z_c$ ＝花費心力  $Z$  分數， $E$ ＝學習效率， $I$ ＝投入分數

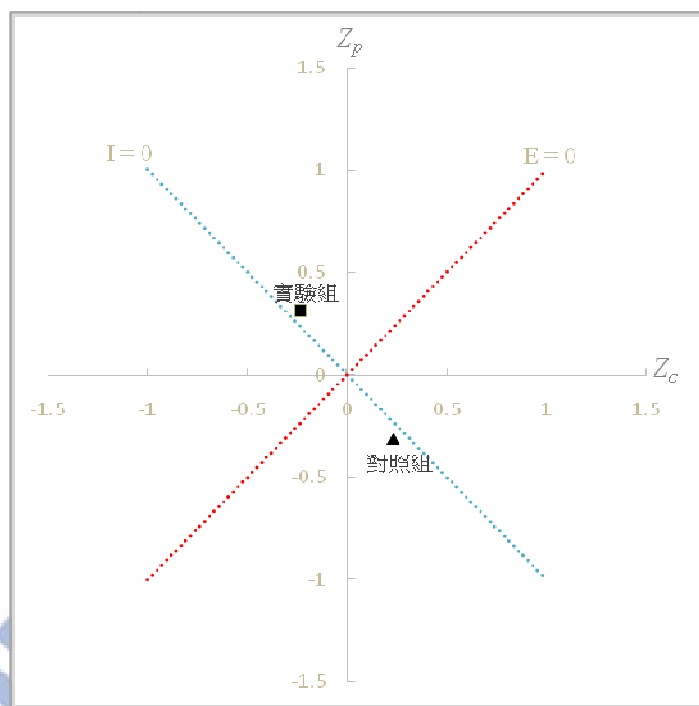


圖 25 整體學生學習效率與學習投入分數之視覺化圖像

#### 4-3-2 各學習成就學生之分析

兩組以學習成就水準區分之學生，數據整理如表 25，視覺化圖像如圖 26。

##### 1. 在學習效率方面

在高學習成就學生部份，實驗組的學習效率比對照組好；在低學習成就學生部份，實驗組的學習效率比對照組好。

學習效率由大到小依序為：實驗組高學習成就、對照組高學習成就、實驗組低學習成就、對照組低學習成就，顯示高學習成就者學習效率較佳，低學習成就者學習效率較差。因此，就學習效率而言，判斷無專業知識反轉效應發生。

##### 2. 在學習投入分數方面

在高學習成就學生部份，實驗組的投入分數比對照組好；在低學習成就學生部份，實驗組的學習投入分數比對照組好。

學習投入分數由大到小依序為：實驗組高學習成就、對照組高學習成就、實驗組低學習成就、對照組低學習成就，顯示高學習成就者學習投入分數較佳，低

學習成就者學習投入分數較差。因此，就學習投入分數而言，判斷無專業知識反轉效應發生。

表 25

不同學習成就水準之學習效率與學習投入分數

	$Z_p(Y)$	$Z_c(X)$	$E$	$I$
實驗組高成就	1.01	-0.53	1.09	0.34
對照組高成就	0.22	0.22	0.00	0.31
實驗組低成就	-0.38	0.07	-0.32	-0.22
對照組低成就	-0.85	0.24	-0.77	-0.43

註： $Z_p$ =後測 Z 分數， $Z_c$ =花費心力 Z 分數， $E$ =學習效率， $I$ =投入分數

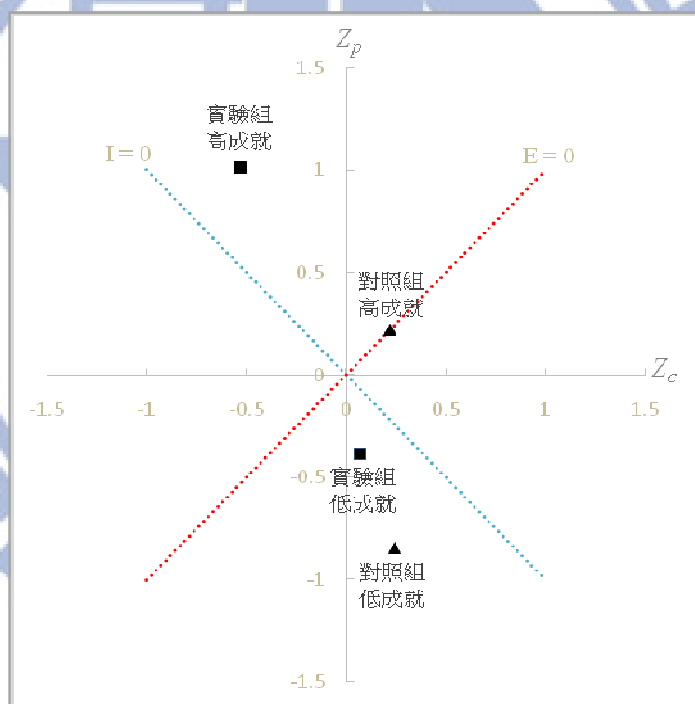


圖 26 不同學習成就水準之學習效率與學習投入分數視覺化圖像

綜合學習效率及學習投入分數，可得知實驗組高學習成就為高效率高投入，對照組高學習成就為中效率高投入，實驗組低學習成就、對照組低學習成就皆為低效率低投入。不論是實驗組或對照組，本研究之教材對於高學習成就學生未產生專業知識反轉效應。



## 第五章 研究結論與建議

本研究是以九年級的幾何推理單元為主題，採用準實驗研究法，於八年級四個常態班進行教學實驗，探討兩種不同的教學設計對後測、延後測、認知負荷感受所造成的影響。以下根據研究結果，歸納出研究結論與建議以作為後續教學、未來研究之參考。

### 5-1 研究結論

本研究之實驗組為圖文步驟化呈現教學，對照組為圖文同步呈現教學。分析後測、延後測表現及認知負荷感受的結果，其中後測及延後測皆區分為總成績、計算題、說明題等部分進行分析；認知負荷感受以認知負荷量表之花費心力進行分析。再以後測總成績及認知負荷量表之花費心力計算學習效率與學習投入分數，綜合判斷學生的學習情形，以及對於高學習成就學生是否產生專業知識反轉效應。

分析結果如下：

#### 1. 後測表現

教學設計與學習成就水準兩變項間無顯著交互作用；教學設計對於後測總成績、後測計算題、後測說明題之主要效果皆達到顯著差異；學習成就水準對於後測總成績、後測計算題、後測說明題之主要效果皆達到顯著差異。

#### 2. 延後測表現

教學設計與學習成就水準兩變項間無顯著交互作用；教學設計對於延後測總成績、延後測計算題、延後測說明題之主要效果皆達到顯著差異；學習成就水準對於延後測總成績、延後測計算題、延後測說明題之主要效果皆達到顯著差異。

#### 3. 認知負荷感受

教學設計與學習成就水準兩變項間無顯著交互作用；教學設計對於認知負荷感受之主要效果達到顯著差異；學習成就水準對於認知負荷感受之主要效果未達顯著差異。



#### 4. 學習效率與學習投入分數暨專業知識反轉效應

根據後測總成績與認知負荷量表之花費心力得到的學習效率與學習投入分數綜合判斷，在學習情形部分，實驗組為高效率高投入，對照組為低效率低投入；不論實驗組或對照組之教材，對於高學習成就學生而言，皆未產生專業知識反轉效應。

研究結果發現以圖文步驟化呈現教學之教學設計，相較於以圖文同步呈現教學之教學設計，有助於「圓與切線間的性質關係」之幾何學習，能降低學習時的外在認知負荷。



## 5-2 建議

本節根據研究結論及研究過程的回顧，提出以下建議。

### 5-2-1 教學建議

#### 1. 運用圖文步驟化呈現教學

由教學實驗的經驗可預測藉由圖文步驟化呈現教學的注意力引導及視覺搜尋的輔助，應該會有較佳的學習成效。建議教師可於幾何課程單元運用，應可產生相近的訊息傳遞效果。

#### 2. 口語引導的搭配輔助

影響學習的因素很多，要有延續性的學習成效可能需搭配許多條件，如：課堂討論、活動探索、基本能力等等。不論使用何種方式呈現教學，課堂教學的進行皆需教師口語引導的搭配輔助。建議教師應先掌握課程內容呈現的重點，事先考量所要搭配的口語引導，在教學中給予學生清楚詳細的引導語句，才能真正發揮圖文步驟化呈現教學的優勢，協助學生有效學習。

#### 3. 教學前確認課程教材

在個人電腦進行多媒體教材製作時，採用的顏色、突顯、淡化、線條粗細...等設計皆是以該台電腦螢幕為依據，在班級教室透過投影機投射出來的效果可能有差異。建議教師應於教學前先進行測試及修正，使教學流程順暢。

### 5-2-2 未來研究建議

#### 1. 擴大研究範圍

本研究僅侷限於新竹縣某國中的 116 位學生為研究對象，有代表性不足之疑慮，建議可擴大研究區域、增加樣本數或增長教學實驗時間，較能完整觀察學生之學習變化。

## 2. 不同課程驗證

圖文步驟化呈現教學在幾何教學之應用，除圖像與文字表徵間的轉換，更著重在畫面的搜尋，若於其他數學單元善用應可產生相近的訊息傳遞效果，提升學生思考及理解的成效。但不同的單元有不同的呈現重點，仍需經由課程實驗才能驗證，因此，可以朝數學的其他單元或其他領域進行教學實驗，分析其成效的差異。

## 3. 增加質性分析

在實驗研究中，雖以上課感受量表去了解研究對象認知負荷感受上的差異，但無法知道其本身的學習意願、作答意願、當下的心理狀態…等其他層面的感受，加上本研究單元並非學校教學進度，學生是否重視也可能影響表現，因此可以增加質性訪談，以瞭解學生其他面向的想法，相信對研究會有更大的助益。

## 4. 進行交叉實驗

在延後測結束之後，不影響教學進度的前提之下，以實驗組教材再跟對照組答題率較差的學生進行教學並再次進行測驗，藉以觀察對照組學生的學習成效變化及對兩組教材感受的訪談，或許可蒐集到更客觀的資料，以供教學之參考。

## 5. 部份填充的說明填寫

部份學生在說明題的列式狀況不佳，若在說明題測驗中使用部分填充的說明填寫，可能有助於瞭解學生答題狀況不佳的原因是來自不理解數學性質亦或是列式能力較差所影響。

## 6. 對教師教學的影響

本研究僅探討不同教學設計對於學生學習成效的差異，建議未來可增加對教師教學的影響研究，以了解使用圖文步驟化呈現教學的教學設計，對於教師課堂教學時的訊息呈現是否能更有效掌握或能協助教師降低教學負荷。

# 參考文獻

## 中文文獻

左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君 (2011)。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報**，43 卷，頁 291-314。

左台益、梁勇能 (2001)。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報**，46 (1,2)，頁 1-20。

李仁豪、葉素玲 (2004)。選擇注意力-選空間或選物體。**應用心理研究**，21 期，頁 165-194。

李玉琇、蔣文祁(譯) (2010)。**認知心理學 Cognitive Psychology(5e)** (原作者:Robert J. Sternberg)。台北市：雙葉書廊。(原著出版年：2009)

邱皓政 (2010)。**量化研究與統計分析 (第五版)**。台北市：五南。

林麗娟 (2000)。**電腦視覺設計：動態性因素與學生特質探討**。台北：輔仁大學出版社。

教育部 (2008)。**97 年國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要**。台北市：教育部。

張春興 (1996)。**教育心理學：三化取向的理論與實踐**。台北市：東華書局。

許晏斌 (2009)。**激發式動態呈現教學設計之研究—逐步呈現與同時呈現之比較**。國立交通大學，新竹市。

陳一平 (2011)。**視覺心理學**。台北市：雙葉書廊。

黃建欽 (2009)。**激發式動態教學對三角形外心的學習成效之研究**。國立交通大學，新竹市。

葉素玲 (1999)。視覺空間注意力。載於李江山(主編)，**視覺與認知:視覺知覺與視覺運動系統** (頁 291-323)。台北市：遠流。

蔡坤憲 (譯) (2006)。**怎樣解題** (原作者:Polya, G.)。台北市：天下遠見 (原著出版年：1957)。

蘇柏奇（2006）。**數學教材設計之研究—以知覺理論為基礎**。國立交通大學，新竹市。





## 英文文獻

- Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2008). *E-learning and the science of instruction: Proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning* (2nd ed.). San Francisco, CA: Pfeiffer.
- Clark, R. C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2006). *Efficiency in Learning: Evidence-based guidelines to manage cognitive load*. San Francisco, CA: Pfeiffer.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). New York, NY: Springer-Verlag.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Kalyuga, S. (2009). *Managing cognitive load in adaptive multimedia learning*. New York: Information Science Reference.
- Kirschner, F., Paas, F., & Kirschner, P. A. (2009). Individual and group-based learning from complex cognitive tasks: Effects on retention and transfer efficiency. *Computers in Human Behavior*, 25(2), 306-314. doi: 10.1016/j.chb.2008.12.008
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2nd ed. ). New York: Cambridge University Press.
- Paas, F. G. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 429-434. doi: 10.1037/0022-0663.84.4.429
- Paas, F. G., Tuovinen, J. E., van Merriënboer, J. J. G., & Aubteen Darabi, A. (2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance: Optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research and Development*, 53(3), 25-34. doi: 10.1007/BF02504795

Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. J. G. (1993). The efficiency of instructional conditions : An approach to combine mental effort and performance measures. *Human Factors : The Journal of the Human Factors and Ergonomics Society*, 35 (4), 737-743.

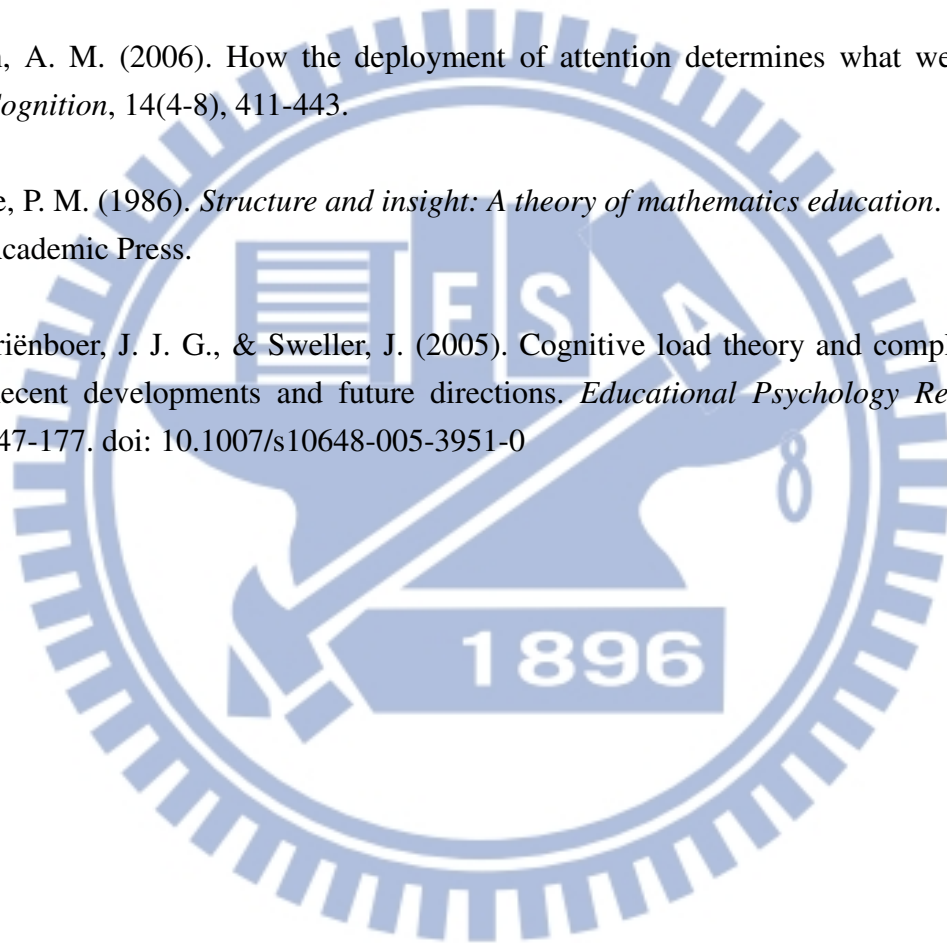
Sweller, J., Ayres P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer.

Sweller, J., van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296.  
doi: 10.1023/A:1022193728205



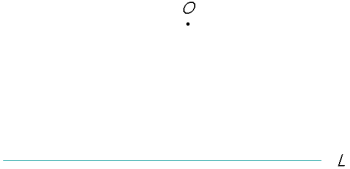
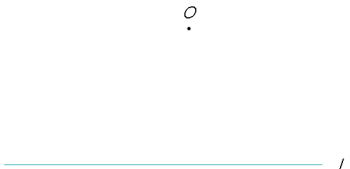
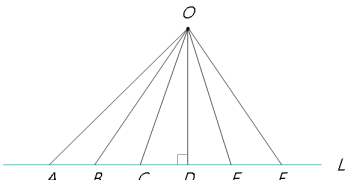
Treisman, A. M. (2006). How the deployment of attention determines what we see. *Visual Cognition*, 14(4-8), 411-443.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

van Merriënboer, J. J. G., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational Psychology Review*, 17(2), 147-177. doi: 10.1007/s10648-005-3951-0

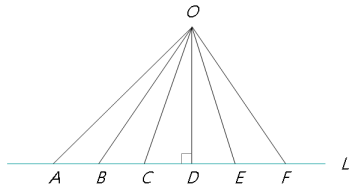


# 附錄一 實驗組教材

<p>數學教材</p> <p>切線性質的應用</p> <p>楊蕙瑤</p>	<p>直線</p>  <p>2</p>
<p>直線</p> <p>無限多個點所構成</p>  <p>3</p>	<p>點與直線</p>  <p>4</p>
<p>點到直線的距離</p> <p>怎麼畫?</p>  <p>5</p>	<p>點到直線的距離</p>  <p>6</p>

點到直線的距離

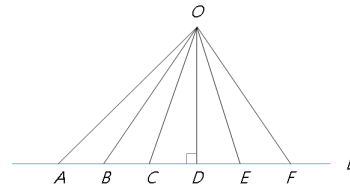
最短距離？



7

點到直線的距離

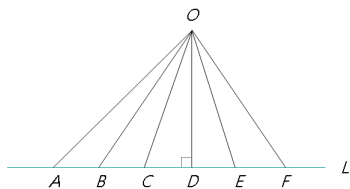
怎麼判斷？



8

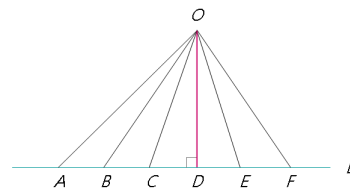
點到直線的距離

用看的



9

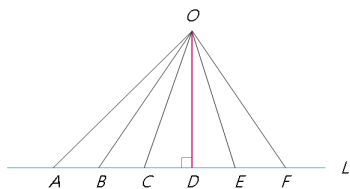
點到直線的距離



10

點到直線的距離

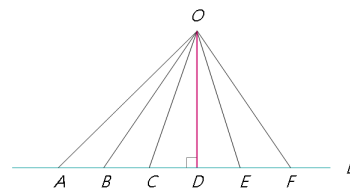
用學過的性質說說看



11

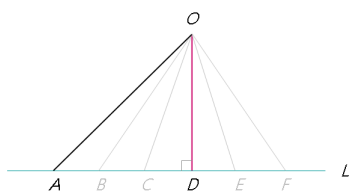
點到直線的距離

跟OD比較



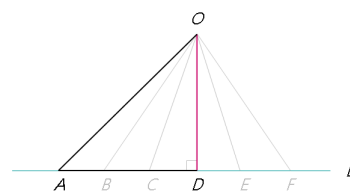
12

點到直線的距離



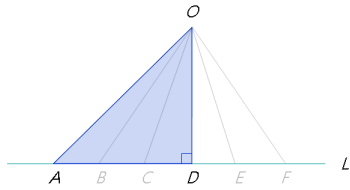
13

點到直線的距離



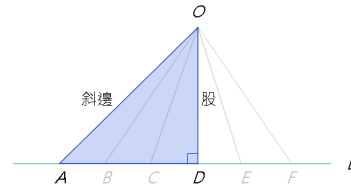
14

點到直線的距離



15

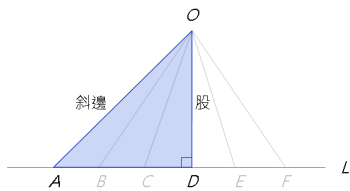
點到直線的距離



16

點到直線的距離

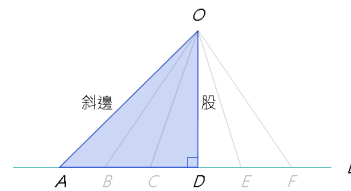
直角三角形  
斜邊長 > 股長



17

點到直線的距離

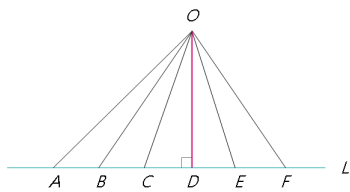
直角三角形  
斜邊長 > 股長  
 $OA > OD$



18

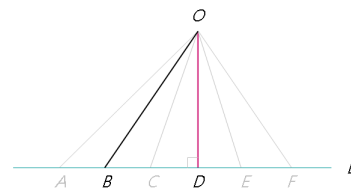
點到直線的距離

跟  $OD$  比較



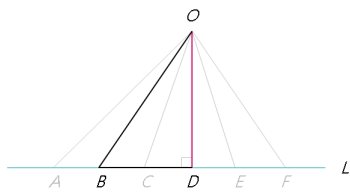
19

點到直線的距離



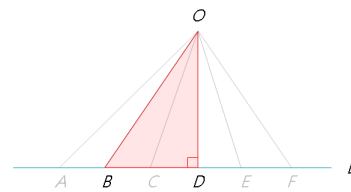
20

點到直線的距離



21

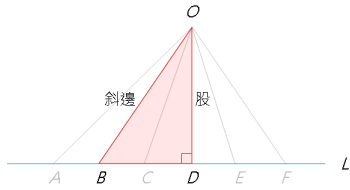
點到直線的距離



22



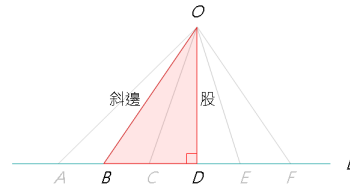
點到直線的距離



23

點到直線的距離

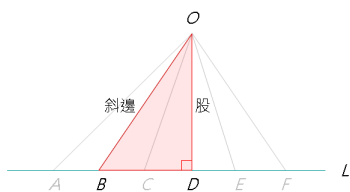
直角三角形  
斜邊長 > 股長



24

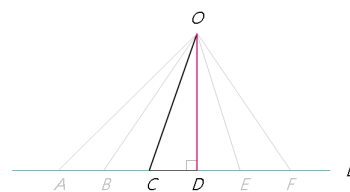
點到直線的距離

直角三角形  
斜邊長 > 股長  
 $OB > OD$



25

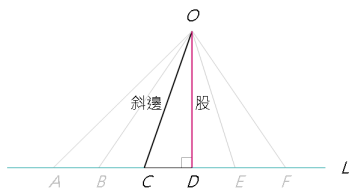
點到直線的距離



26

點到直線的距離

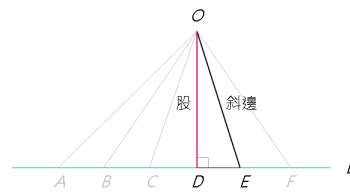
直角三角形  
斜邊長 > 股長  
 $OC > OD$



27

點到直線的距離

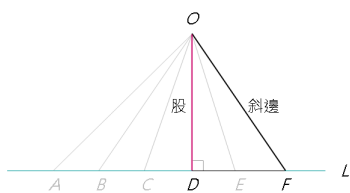
直角三角形  
斜邊長 > 股長  
 $OE > OD$



28

點到直線的距離

直角三角形  
斜邊長 > 股長  
 $OF > OD$

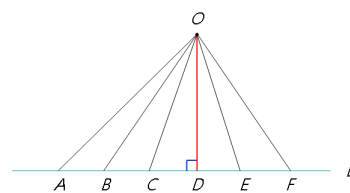


29

點到直線的距離

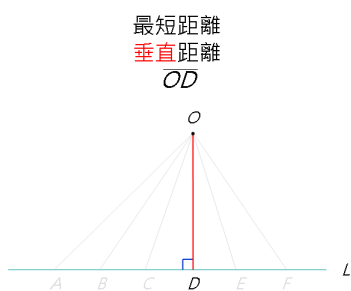
最短距離

$OD$



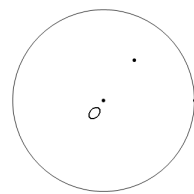
30

### 點到直線的距離



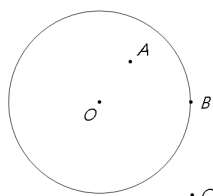
31

### 點與圓



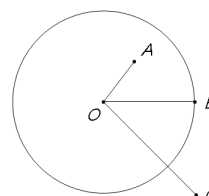
32

### 點與圓的位置關係



33

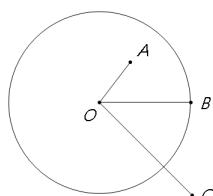
### 點與圓的位置關係



34

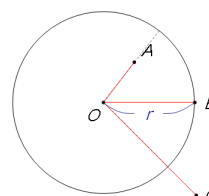
### 點與圓的位置關係

和半徑相比



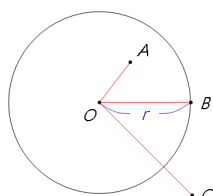
35

### 點與圓的位置關係



36

### 點與圓的位置關係



$$\overline{OA} < r$$

$$\overline{OB} = r$$

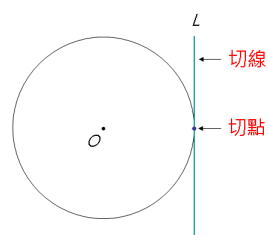
$$\overline{OC} > r$$



37

### 線與圓

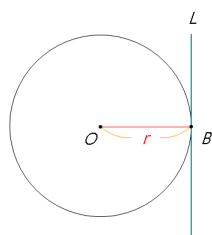
交於一點



38

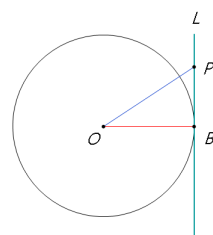
切線與圓

圓心到切點的距離 = 半徑



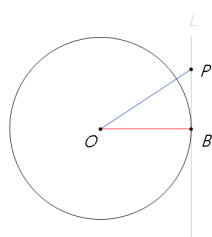
39

切線與圓



40

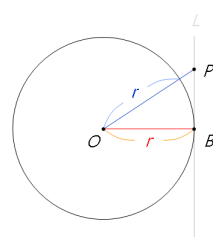
切線與圓



41

切線與圓

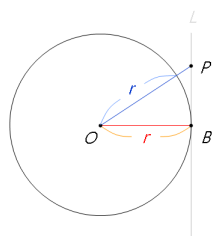
$\overline{OP} > r$



42

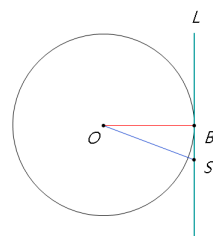
切線與圓

$\overline{OP} > \overline{OB}$



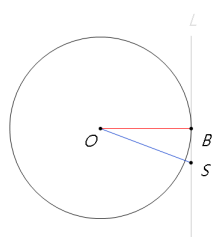
43

切線與圓



44

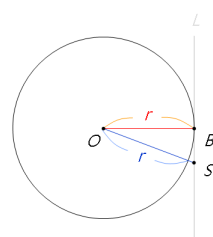
切線與圓



45

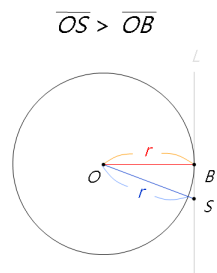
切線與圓

$\overline{OS} > r$



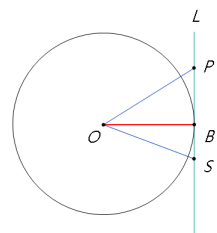
46

切線與圓



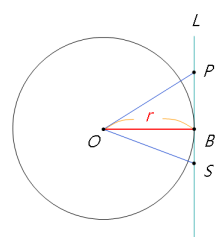
47

切線與圓



48

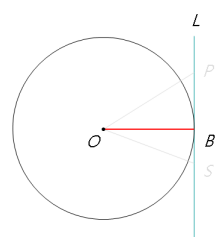
切線與圓



49

切線與圓

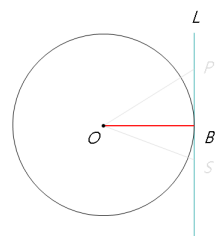
$\overline{OB}$  代表 最短距離



50

切線與圓

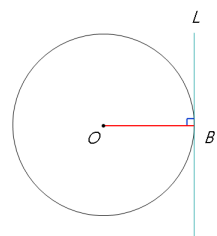
$\overline{OB}$  代表 垂直距離



51

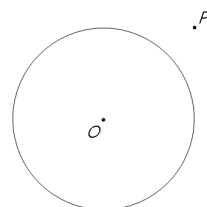
切線與圓

$\overline{OB} \perp L$



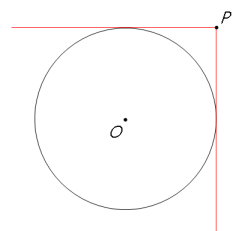
52

切線與圓



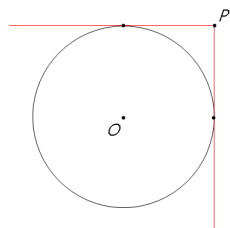
53

切線與圓



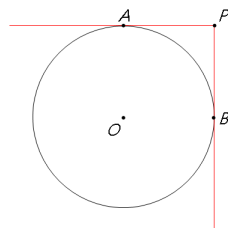
54

切線與圓



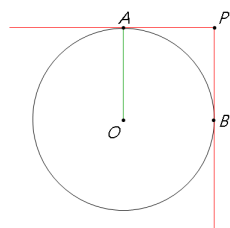
55

切線與圓



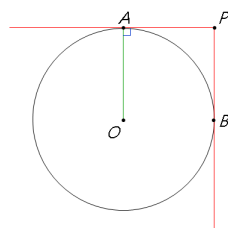
56

切線與圓



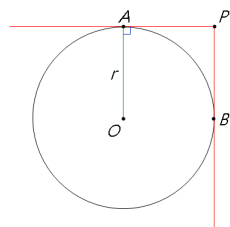
57

切線與圓



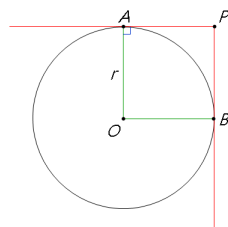
58

切線與圓



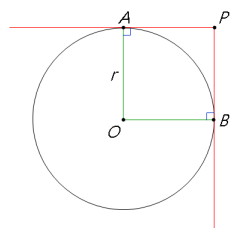
59

切線與圓



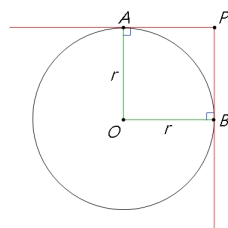
60

切線與圓



61

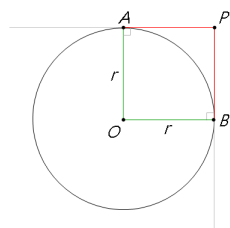
切線與圓



62

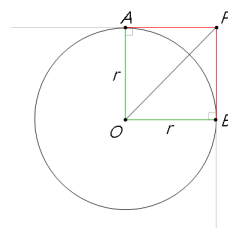


切線與圓



63

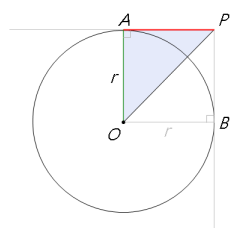
切線與圓



64

切線與圓

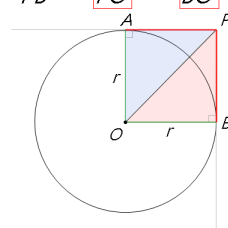
$$\overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{AO}^2$$



65

切線與圓

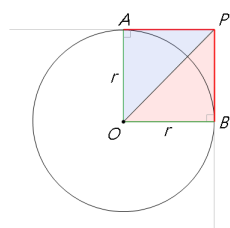
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= \overline{PO}^2 - \overline{AO}^2 \\ \overline{PB}^2 &= \overline{PO}^2 - \overline{BO}^2\end{aligned}$$



66

切線與圓

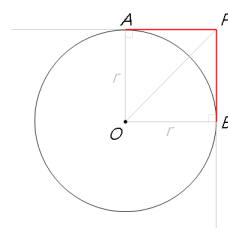
$$\overline{PA} = \overline{PB}$$



67

切線與圓

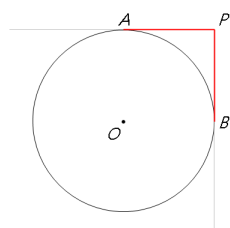
$$\overline{PA} = \overline{PB}$$



68

切線與圓

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$



69

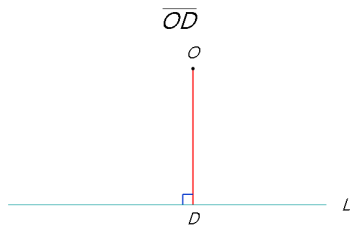
整理一下



70

### 點到直線的距離

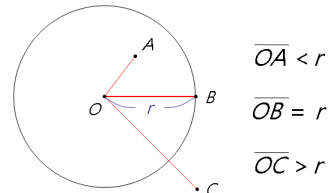
最短距離  
垂直距離



71

### 點與圓的位置關係

與半徑相比



$$\overline{OA} < r$$

$$\overline{OB} = r$$

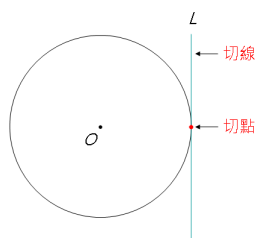
$$\overline{OC} > r$$



72

### 切線與圓

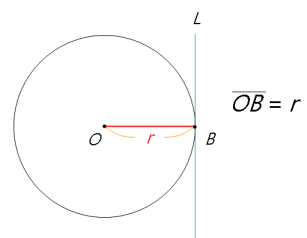
圓與切線 只有一個交點



73

### 切線與圓

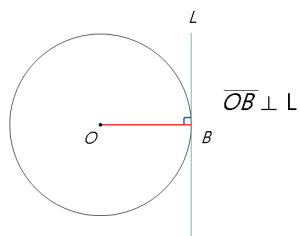
圓心到切點的距離 = 半徑



74

### 切線與圓

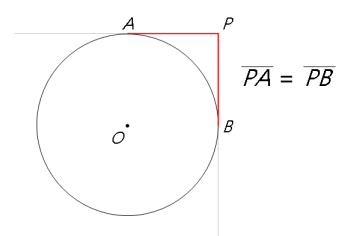
圓心與切點的連線  $\perp$  切線



75

### 切線與圓

圓外一點到此圓的兩切線長相等



76

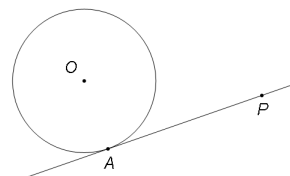
### 挑戰看看



77

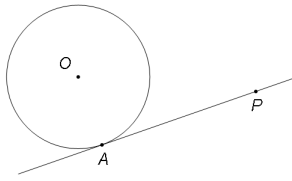
### 切線與圓 (Q1)

$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



78

切線與圓 (Q1)

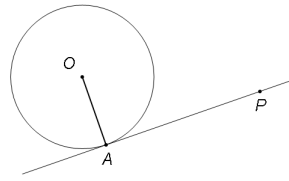


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



79

切線與圓 (Q1)

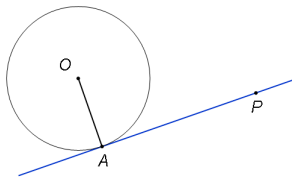


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



80

切線與圓 (Q1)

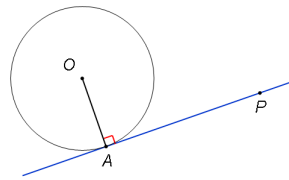


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



81

切線與圓 (Q1)

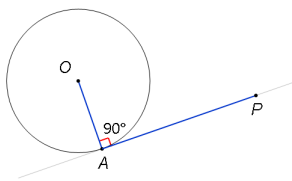


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



82

切線與圓 (Q1)

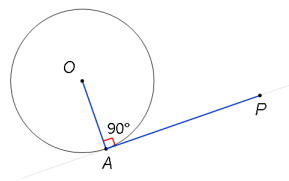


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$



83

切線與圓 (Q1)



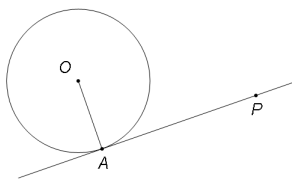
$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
試求  $\angle OAP = ?$

$\therefore$  圓心與切點連線  $\perp$  切線  
 $\therefore \angle OAP = 90^\circ$



84

切線與圓 (Q2)

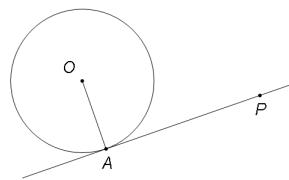


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5,  $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



85

切線與圓 (Q2)

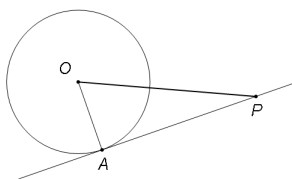


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5,  $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



86

切線與圓 (Q2)

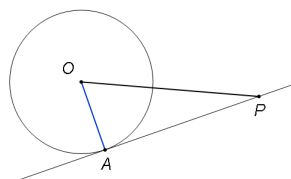


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



87

切線與圓 (Q2)

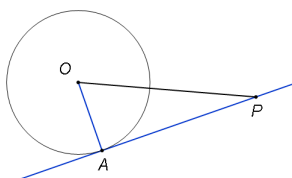


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



88

切線與圓 (Q2)

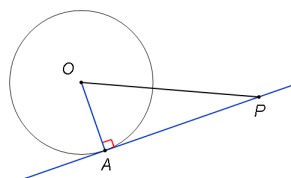


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



89

切線與圓 (Q2)

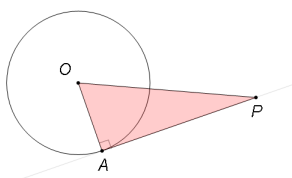


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



90

切線與圓 (Q2)

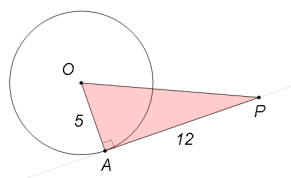


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



91

切線與圓 (Q2)

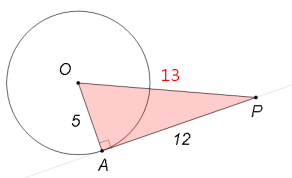


$\overline{PA}$  與圓  $O$  切於  $A$  點。  
圓  $O$  的半徑為 5， $\overline{AP} = 12$   
試求  $\overline{OP} = ?$



92

切線與圓 (Q2)

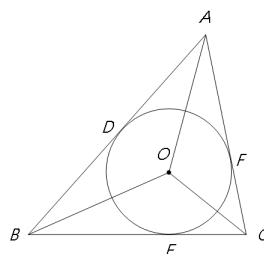


$\therefore$  圓心與切點連線  $\perp$  切線  
 $\therefore \triangle OAP$  為直角三角形  
 $\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 12^2}$   
 $\overline{OP} = 13$



93

切線與圓 (Q3)

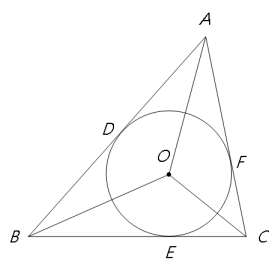


$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$



94

切線與圓 (Q3)



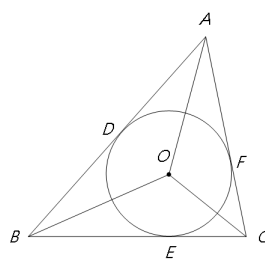
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



95

切線與圓 (Q3)



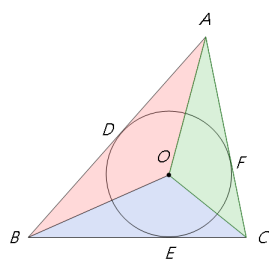
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



96

切線與圓 (Q3)



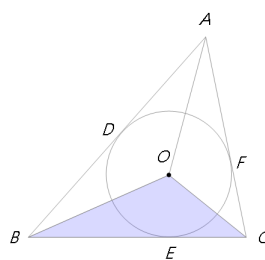
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



97

切線與圓 (Q3)



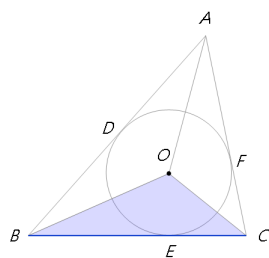
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



98

切線與圓 (Q3)



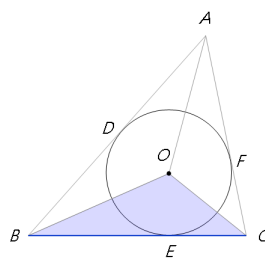
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



99

切線與圓 (Q3)



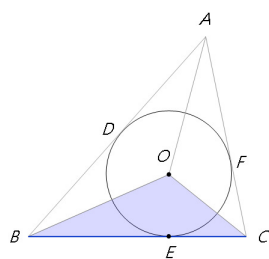
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



100

切線與圓 (Q3)



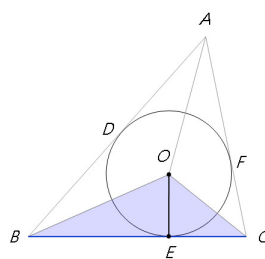
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



101

切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ ，  
試說明

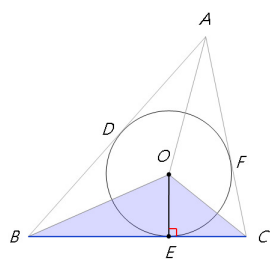
$$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = a : b : c$$



102



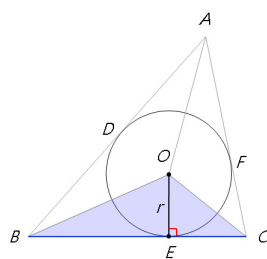
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

103

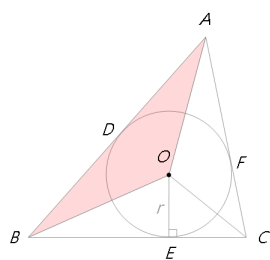
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

104

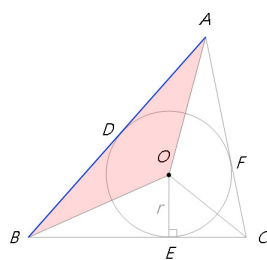
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

105

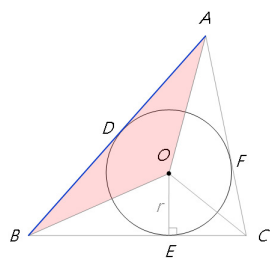
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

106

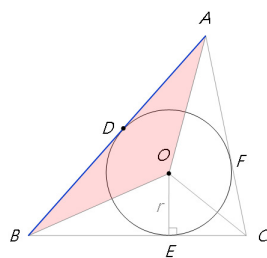
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

107

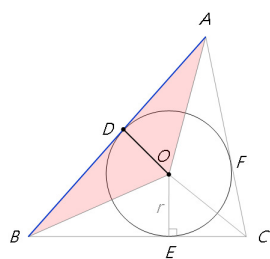
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

108

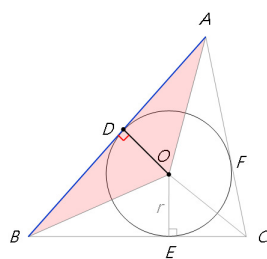
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

109

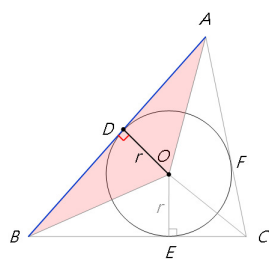
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

110

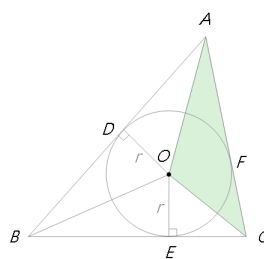
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

111

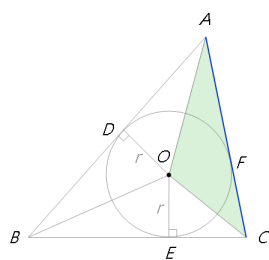
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

112

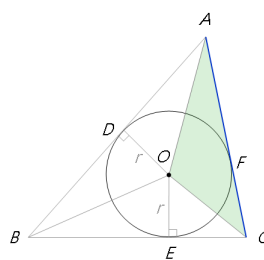
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

113

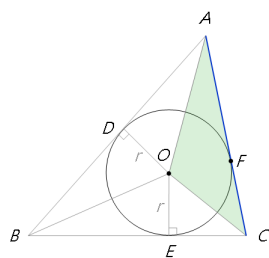
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

114

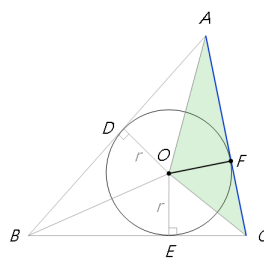
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

115

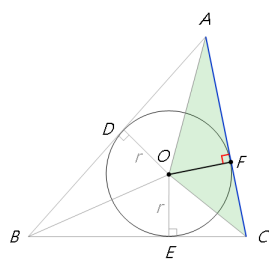
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

116

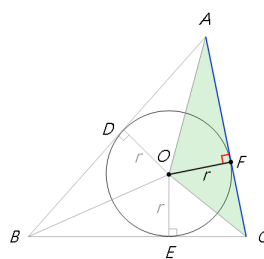
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

117

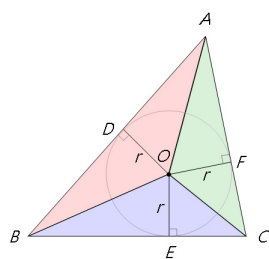
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點，  
若圓  $O$  半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

118

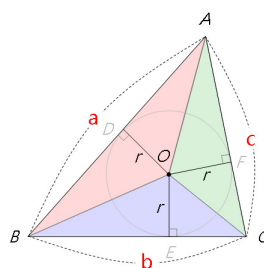
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

119

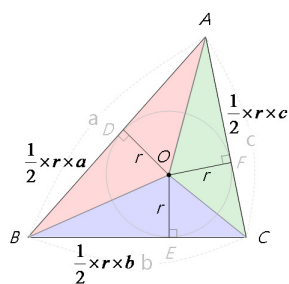
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

120

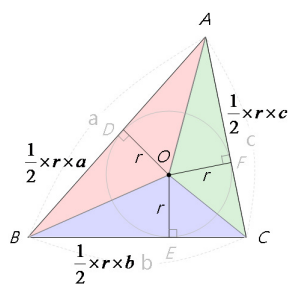
切線與圓 (Q3)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

121

切線與圓 (Q3)

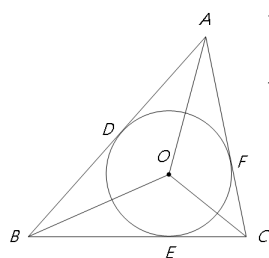


$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  
 $\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC$   
 $= a : b : c$

$$\begin{aligned} \triangle AOB : \triangle BOC : \triangle AOC \\ = \frac{1}{2} \times r \times a : \frac{1}{2} \times r \times b : \frac{1}{2} \times r \times c \\ = a : b : c \end{aligned}$$

122

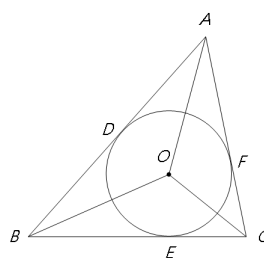
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

123

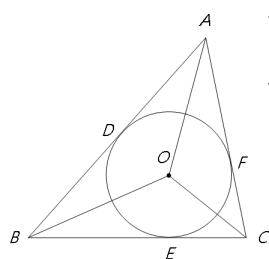
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

124

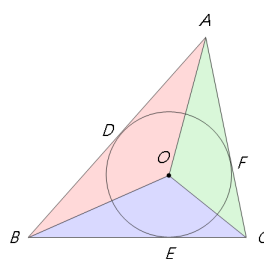
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

125

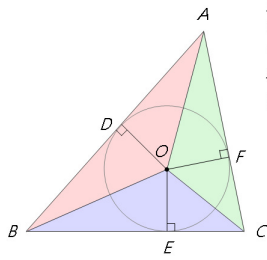
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

126

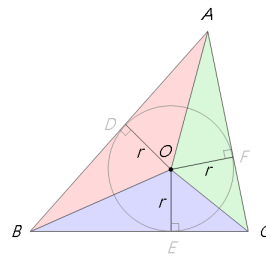
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

127

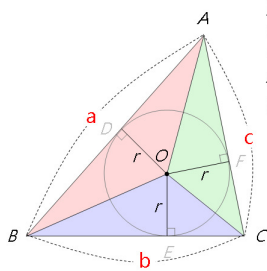
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

128

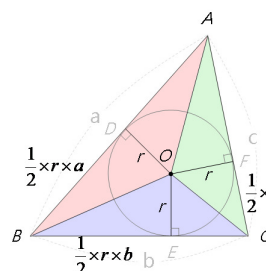
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

129

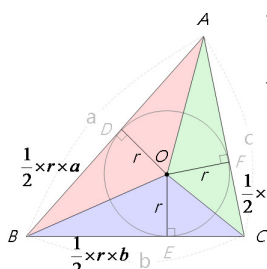
切線與圓 (Q4)



$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

130

切線與圓 (Q4)



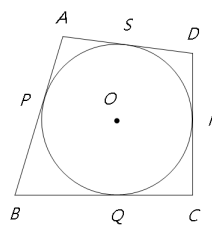
$\triangle ABC$  三邊分別  
與圓  $O$  相切於  $D, E, F$  三點。  
若圓  $O$  半徑  $= r$ 。  
 $AB = a, BC = b, AC = c$ 。  
試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times r \times a + \frac{1}{2} \times r \times b + \frac{1}{2} \times r \times c$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$$

131

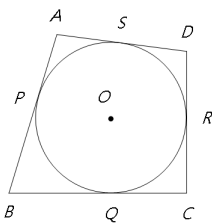
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明  
 $AB + CD = AD + BC$

132

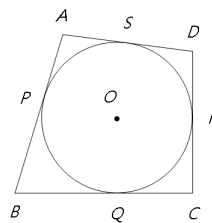
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明  
 $AB + CD = AD + BC$

133

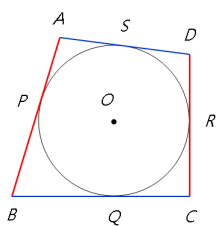
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點。  
試說明  
 $AB + CD = AD + BC$

134

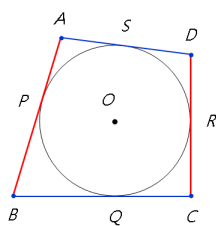
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

135

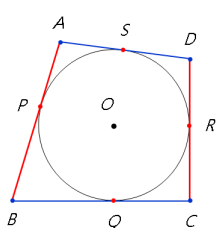
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

136

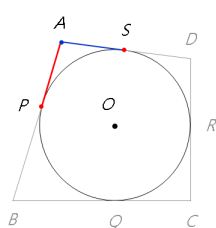
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

137

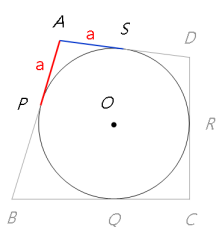
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

138

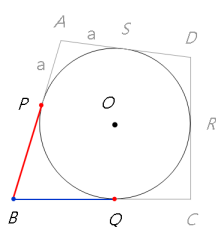
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

139

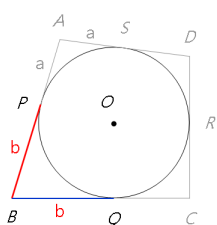
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

140

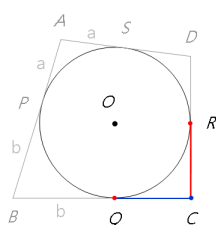
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

141

切線與圓 (Q5)

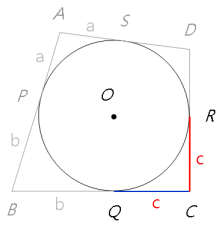


四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  切於  $P, Q, R, S$  四點，試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

142



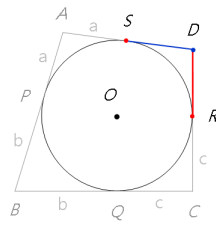
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

143

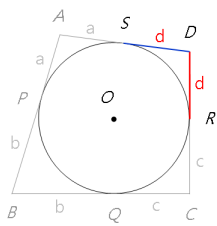
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

144

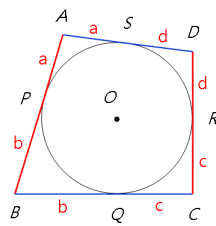
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

145

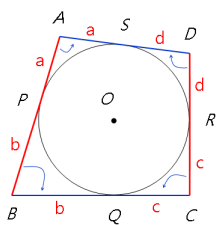
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

146

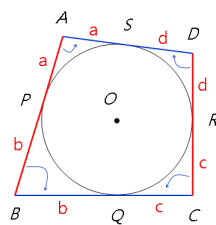
切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

147

切線與圓 (Q5)



四邊形  $ABCD$  的四邊  
分別與圓  $O$  切於  
 $P, Q, R, S$  四點，  
試說明  
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

∵ 圓外一點到此圓的兩切線長相等

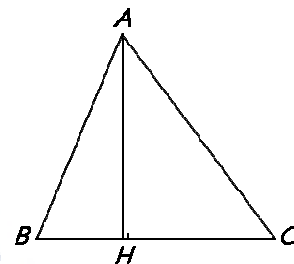
$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} &= a + b + c + d \\ &= a + d + b + c \\ &= \overline{AD} + \overline{BC}\end{aligned}$$

148



## 附錄二 前測測驗卷

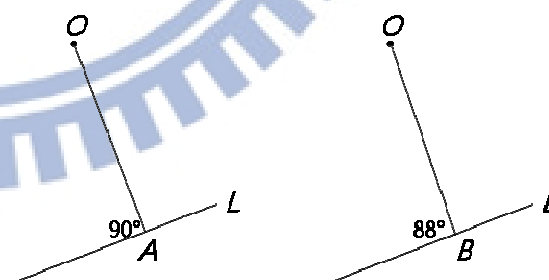
1. 如右圖， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AH} = 12$ ， $\overline{AB} = 13$ ， $\overline{BC} = 14$ ， $\overline{AC} = 15$ ，試計算  $\triangle ABC$  面積 = ？



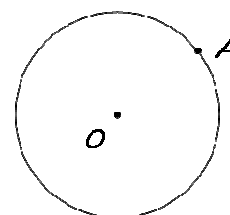
2. 如右圖， $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ，試計算  $\overline{AC} = ?$



3. 如右圖， $O$  點為直線  $L$  外一點。  
請問， $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ ，哪一條為  $O$  點到直線  $L$  的最短距離。\_\_\_\_\_

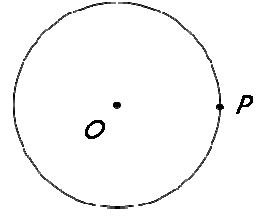


4. 如右圖， $O$  點為圓心，圓的半徑為 5 單位， $A$  點在圓周上，則  $A$  點到  $O$  點的距離為 \_\_\_\_\_ 單位。

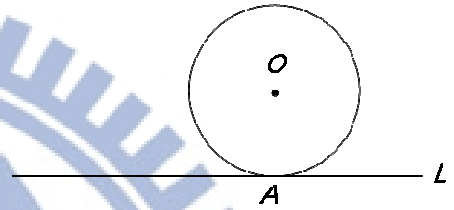


5. 如右圖， $P$  點為圓  $O$  上一點。

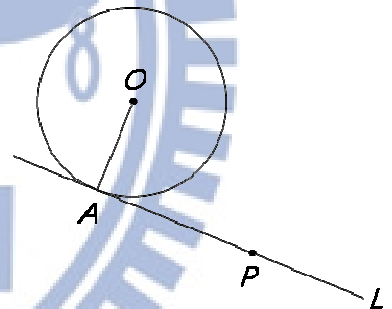
請問，與圓  $O$  只交於一點( $P$  點)的直線有\_\_\_\_\_條。



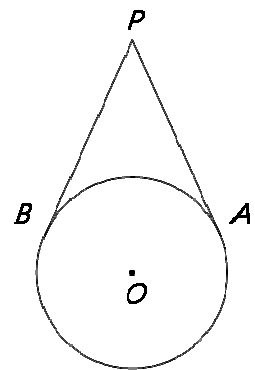
6. 如右圖，直線  $L$  與圓  $O$  相切於  $A$  點，圓  $O$  的半徑 = 8，試計算  $\overline{OA} = ?$



7. 如右圖，直線  $L$  與圓  $O$  相切於  $A$  點，試計算  $\angle OAP =$  \_\_\_\_\_ 度。

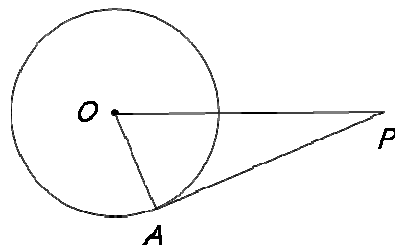


8. 如右圖， $\overline{PA}$  與  $\overline{PB}$  與圓  $O$  相切於  $A$ 、 $B$  兩點，若  $\overline{PA} = 16$ ，試計算  $\overline{PB} = ?$

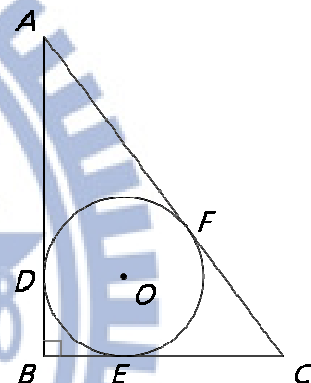


### 附錄三 後測測驗卷及延後測測驗卷

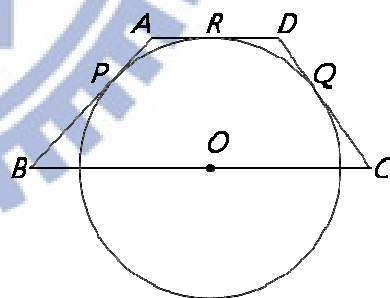
1. 如右圖， $\overline{PA}$  與圓  $O$  相切於  $A$  點， $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{PA} = 12$ ，試計算  $\overline{OP} = ?$



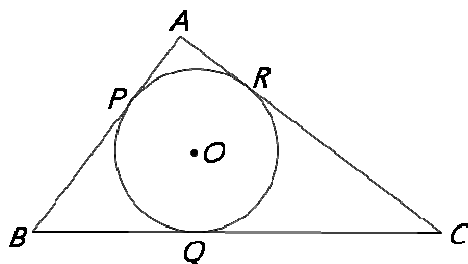
2. 如右圖，圓  $O$  與直角  $\triangle ABC$  三邊分別相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，若圓  $O$  半徑  $= 3$ ，直角  $\triangle ABC$  面積  $= 54$ ， $\overline{AC} = 15$ ，試計算  $\overline{AB} + \overline{BC} = ?$



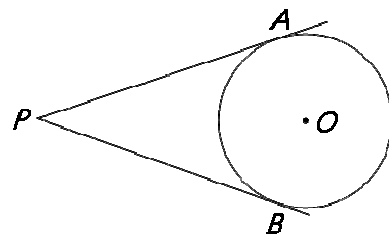
3. 如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  分別與圓  $O$  相切於  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點，已知圓  $O$  的半徑  $= 5$ ， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{AD} = 5$ ，試計算 四邊形  $ABCD$  面積  $= ?$



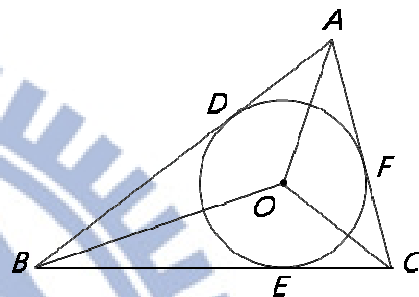
4. 如右圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  分別與圓  $O$  相切於  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點，已知  $\overline{AP} = 2$ ， $\overline{BQ} = 4$ ， $\overline{CR} = 6$ ，試計算  $\triangle ABC$  周長  $= ?$



5. 如右圖， $\overline{PA}$  與  $\overline{PB}$  與圓  $O$  相切於  $A$ 、 $B$  兩點，試說明  $\overline{PA} = \overline{PB}$ ？

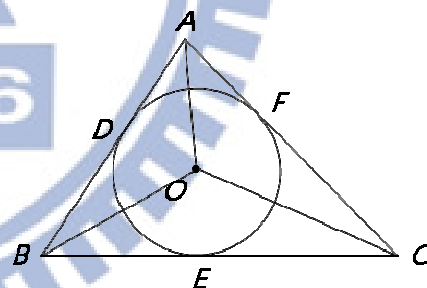


6. 如右圖，圓  $O$  與  $\triangle ABC$  的三邊分別相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，已知圓  $O$  的半徑  $= r$ ， $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\overline{AC} = c$ ，  
試說明  $\triangle AOB$  面積： $\triangle BOC$  面積： $\triangle AOC$  面積  $= a : b : c$ 。



7. 如右圖，圓  $O$  與  $\triangle ABC$  的三邊分別相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點，已知圓  $O$  的半徑  $= r$ ，  
 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\overline{AC} = c$ ，

試說明  $\triangle ABC$  面積  $= \frac{1}{2} \times r \times (a + b + c)$ 。



8. 如右圖，四邊形  $ABCD$  的四邊分別與圓  $O$  相切於  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  四點，

試說明  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 。

