

國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

Pseudo-Section 概念於表面波震測應用

之數值模擬探討

**A Study of Pseudo-Section Concept
in Surface-Wave Testing, by Numerical Simulation**

研究生：林俊宏

指導教授：林志平 博士

中華民國九十四年七月

**Pseudo-section 概念於
表面波震測應用之數值模擬探討**

**Study of Pseudo-section Concept in
Surface-Wave Testing, by Numerical Simulation**

研 究 生：林俊宏

Student : Chun-Hung Lin

指 導 教 授：林志平 博士

Advisor : Dr. Chih Ping Lin

國 立 交 通 大 學

土 木 工 程 系 碩 士 班



Submitted to Department of Civil Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Civil Engineering

July 2005

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 四 年 七 月

國立交通大學

博碩士論文全文電子檔著作權授權書

本授權書所授權之學位論文，為本人於國立交通大學土木工程所大地工程組，93 學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文題目：Pseudo-section 概念於表面波震測應用之數值模擬探討

指導教授：林志平 博士

同意 不同意

本人茲將本著作，以非專屬、無償授權國立交通大學與台灣聯合大學系統圖書館：基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，與回饋社會與學術研究之目的，國立交通大學及台灣聯合大學系統圖書館得不限地域、時間與次數，以紙本、光碟或數位化等各種方法收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行線上檢索、閱覽、下載或列印。

論文全文上載網路公開之範圍及時間：

本校及台灣聯合大學 系統區域網路	<input checked="" type="checkbox"/> 中華民國 94 年 8 月 29 日公開
校外網際網路	<input checked="" type="checkbox"/> 中華民國 94 年 8 月 29 日公開

授權人：林俊宏

親筆簽名：_____

中華民國 九十四 年 八 月 二十九 日

Pseudo-section 概念於表面波震測應用之 數值模擬探討

研究生：林俊宏

指導教授：林志平 博士

國立交通大學土木工程學系

中文摘要

目前表面波震測法藉由對施測參數(近站支距、展距以及接收器間距)的適度配合，已可在施測參數與施測目標的互制情況下獲得較佳結果，然而對於互制的行為卻依舊沒有得到解決。本研究將針對最近所提出的 Pseudo-section 概念解決方案以數值模擬方式評估此概念應用於表面波震測的可行性。

本研究採用四級速度-應力有限差分法作為數值模擬工具，以不同的側向變化地層為例，對表面波在側向變化地層的行為，以及 pseudo-section 概念在側向變化地層中的表現進行模擬及討論。根據研究結果顯示，表面波的頻散曲線在遭遇側向變化地層時會有假頻散以及調整帶的現象產生，此現象間接的造成以水平層狀地層為假設的反算結果錯誤。此外，以 pseudo-section 概念應用於表面波震測中施測，數值模擬結果顯示在無反向行進的反射波訊號存在或此反向行進的反射波與前行的表面波訊號有足夠的距離而無干擾的情況下，可得到與傳統測線所得頻散曲線差不多或更為良好的結果。對於有反向行進的反射波的情形，應加以發展訊號分析方法將其分離出，以使 pseudo-section 概念於表面波的應用能有更加的表现，即使無法將其分離出，也可採用 pseudo-section 測線作為側向變化地層存在的檢驗手段。

關鍵字：表面波、表面波震測、有限差分法、側向變化地層

A Study of Pseudo-Section Concept in Surface-Wave Testing, by Numerical Simulation

Student : Chun-Hung Lin

Advisor : Dr. Chih-Ping Lin

Institute of Civil Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Presently, by adjusting the survey line parameters, such as near offset, receiver spacing, and offset range, surface wave testing can provide reasonable results even though tradeoffs are involved when determining the field configuration parameters. However, we still have problems with the tradeoffs. We use numerical simulation to study the application of pseudo-section concept, which is introduced to provide a solution of the tradeoffs, in surface wave testing.

Forth-order velocity-stress finite difference method is used to simulate the surface wave testing data based on conventional and pseudo-section survey line in earth models with different lateral heterogeneity. According to the results, false dispersion and interference zone exist when surface wave propagating in the earth with lateral heterogeneity. Furthermore, comparing the results based on conventional survey line and pseudo-section concept with no backward reflecting waves or well separation of the backward reflecting and forward propagating waves, the performance of pseudo-section survey line is the same or even better. When pseudo-section survey is interfered by backward reflecting

wave, it is necessary to develop a new signal processing to filter out the backward reflecting wave to achieve better performance. In its current form, pseudo-section survey is still a good way to detect the existence of lateral heterogeneity.

Key words : surface wave, surface wave testing, finite difference, lateral heterogeneity



致 謝

首先須感謝林志平老師於論文撰稿期間在架構以及研究辨証上的協助，由於老師的用心指導得以補足我個人在思考上的不足以及缺失，使得無經驗的我亦可有此成果，並獲得評審的肯定。此外，感謝美國聖路易斯大學地球與大氣科學系 Herrmann 教授以及中央大學地球科學系王乾盈教授在地震波波傳原理上所提供的協助，使得不曾接觸地震波波傳的我得以解決相關問題；同時亦要感謝中央大學地球科學系陳浩維教授在最後於數值模擬上的經驗分享以及程式勘誤，而使本研究得以順利完成。最後感謝在我身圍週遭的家人以及朋友，因為有你們時時的鼓勵與打氣才讓我有不斷前進的動力。

再次感謝在我撰文期間所有給予我協助的人，因為你們熱心的支援，而造就了本論文，感謝化與再多也不嫌，向各位致上最敬意。

目錄

中文摘要.....	I
Abstract.....	II
致 謝.....	IV
目 錄.....	V
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	IX
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究目的.....	3
1.3 研究內容.....	4
第二章 文獻回顧.....	5
2.1 震波種類與其基本理論.....	5
2.1.1 壓縮波與剪力波.....	7
2.1.2 表面波及其頻散曲線.....	12
2.2 表面波量測方法及其施測問題.....	30
2.2.1 表面波量測方法.....	30
2.2.1.1 SASW.....	30
2.2.1.2 MASW.....	33
2.2.2 多頻道表面波震測之施測問題詳析.....	36
2.3 Pseudo-Section 概念.....	38
2.4 P-SV 震波模擬方法.....	40
2.4.1 解析方法.....	40

2.4.1.1 射線理論.....	42
2.4.1.2 空間頻率/慢度積分法.....	44
2.4.1.3 震態疊加法.....	45
2.4.2 數值方法.....	47
2.4.2.1 有限差分法.....	48
2.4.2.2 有限元素法.....	56
2.4.2.3 擬頻譜法.....	63
第三章 研究方法與數值模擬參數.....	70
3.1 研究方法.....	70
3.1.1 速度-應力差分法運算式.....	72
3.1.2 傳統測線與 pseudo-section 測線施測.....	82
3.1.3 多頻道頻率波速轉換法.....	85
3.1.4 地層模型設計說明.....	88
3.2 表面波震測資料模擬參數設定.....	91
3.2.1 表面波震測施測參數.....	91
3.2.2 數值模擬參數.....	95
第四章 結果與討論.....	97
4.1 A 類地層.....	97
4.2 B 類地層.....	99
4.3 C 類地層.....	103
4.3.1 地層側向變化之影響.....	103
4.3.2 pseudo-section 概念可行性探討.....	115
第五章 結論與建議.....	122
5.1 結論.....	122

5.2 建議.....	123
參考文獻.....	125
附錄一 雷利波傳遞矩陣計算式.....	140
附錄二 四級有限差分法運算元推導.....	142
附錄三 有限差分法自由表面運算式.....	144



表目錄

表 2.1	卜松比與半無限域地層中雷利波波速對照表*	16
表 3.1	地層模型參數	89
表 3.2	表面波震測施測參數表	92
表 3.3	數值模擬參數表	96



圖目錄

圖 1.1	表面波震測法步驟示意圖.....	1
圖 1.2	多頻道表面波震測法現地施測參數圖.....	2
圖 1.3	pseudo-section 概念與傳統測線頻散曲線結果比較.....	3
圖 2.1	實體波示意圖 (Bolt, 1976).....	6
圖 2.2	表面波示意圖 (Bolt, 1976).....	7
圖 2.3	應力定義示意圖.....	8
圖 2.4	卜松比與半無限域雷利波速關係圖.....	16
圖 2.5	水平層狀地層模型.....	18
圖 2.6	多震態雷利波頻散曲線—Thomson-Haskell 法.....	28
圖 2.7	多震態雷利波頻散曲線—Delta Matrix 法.....	29
圖 2.8	SASW 現地施測示意圖.....	30
圖 2.12	MASW 現地施測示意圖.....	33
圖 2.13	多頻道波譜法頻散曲線分析(相位-空間位置圖).....	34
圖 2.14	多頻道波譜法頻散曲線分析結果.....	34
圖 2.15	多頻道波場轉換法頻散曲線分析結果.....	35
圖 2.16	空間映頻問題示意圖.....	36
圖 2.17	空間映頻於多頻道波場轉換法影響示意圖.....	37
圖 2.18	資料遺漏於多頻道波場轉換法影響示意圖.....	37
圖 2.19	pseudo-section 概念示意圖.....	39
圖 2.20	廣義射線理論示意圖.....	43
圖 2.21	複數空間頻率平面積分路徑示意圖.....	47
圖 2.22	有限差分法網格系統示意圖.....	49

圖 2.23	速度錯置網格架構，時間定義在 $k+1/2$	54
圖 2.24	應力錯置網格架構，時間定義在 $k+1$	55
圖 2.25	二維模型離散化示意圖	57
圖 2.26	二維空間問題常用元素	57
圖 2.27	節點自由度示意圖	58
圖 2.28	元素與內插方式示意圖	59
圖 2.29	一維空間問題內插權重係數示意圖	60
圖 2.30	擬頻譜法網格示意圖	68
圖 3.1	研究方法流程圖	70
圖 3.2	自由表面邊界設定示意圖	78
圖 3.3	吸收邊界示意圖	79
圖 3.4	衝擊式震源 α_s 參數的影響	80
圖 3.5	程式計算流程圖	81
圖 3.6	MASW 傳統測線施測示意圖	82
圖 3.7	MASW pseudo-section 測線示意圖	83
圖 3.8	震測資料矩陣格式	83
圖 3.9	MASW pseudo-section 測線靜態誤差示意圖 (Lin et al., in press).....	85
圖 3.10	震測資料空間-頻率域矩陣示意圖	85
圖 3.11	$U(f_i, x_n)$ 實部於頻率-空間上之反應 (Lin et al., in press).....	87
圖 3.12	最佳展距選取範圍 (Lin et al., in press)	88
圖 3.13	多頻道頻率波速轉換法頻散曲線分析的流程圖	88
圖 3.14	A 類地層模型示意圖	89
圖 3.15	B 類地層模型示意圖	90
圖 3.16	C 類地層模型示意圖	91

圖 4.1	A-1, A-2 傳統測線與 pseudo-section 測線震測資料	97
圖 4.2	A-1, A-2 傳統測線與 pseudo-section 測線施測頻散曲線比較圖	98
圖 4.3	B-1, B-2, B-3 傳統測線與 pseudo-section 測線施測頻散曲線比較圖	100
圖 4.4	B-1, B-2, B-3 傳統測線與 pseudo-section 測線施測頻散曲線比較圖	101
圖 4.5	B-2E 表面波陣測頻散曲線	102
圖 4.6	C1-1 傳統測線震測資料圖	104
圖 4.7	C1-1 表面波震測頻散曲線圖	104
圖 4.8	C1-2 傳統測線測資料圖	105
圖 4.9	C1-2 表面波震測頻散曲線圖	106
圖 4.10	C2-1 傳統測線震測資料圖	107
圖 4.11	C2-1 表面波震測頻散曲線	107
圖 4.12	C2-2 傳統測線震測資料圖	109
圖 4.13	C2-2 表面波震測頻散曲線	109
圖 4.14	C3 傳統測線震測資料圖	110
圖 4.15	C3 表面波震測頻散曲線	111
圖 4.16	C1-1 與 C3 傳統測線施測頻散曲線比較	112
圖 4.17	C4 傳統測線施測震測資料圖	114
圖 4.18	C4 表面波震測頻散曲線	114
圖 4.19	C1-1 pseudo-section 測線震測資料圖	115
圖 4.20	C1-1 擬震測資料的反射干擾	116
圖 4.21	C1-2 pseudo-section 測線震測資料圖	117
圖 4.22	C1-2E 表面波震測頻散曲線	117

圖 4. 23	C2-1 pseudo-section 測線震測資料圖.....	118
圖 4. 24	C2-1 擬震測資料表面波反射訊號圖.....	119
圖 4. 25	C2-2 pseudo-section 測線震測資料圖.....	119
圖 4. 26	C3 pseudo-section 測線震測資料圖.....	120
圖 4. 27	C4 pseudo-section 測線震測資料圖.....	121



第一章 緒論

1.1 研究動機

經過數十年的發展，表面波震測法除了其非侵入性及非破壞性的優點使其在難以鑽探的地層可以快速地進行工址調查外，還因其具有分析自動化以及結果影像化的潛力而獲得親睞。目前其已成功的應用在工址調查、液化潛能分析、地層分層、地盤改良效果以及道路鋪面厚度檢測等領域上。表面波震測法概略的說，主要有三個步驟(如圖 1.1 所示)：先至 1) 現地施測，而後對施測所得的地層震動訊號，進行 2) 頻散曲線分析，最後透過 3) 地層反算，而得到地層的剪力波速剖面。

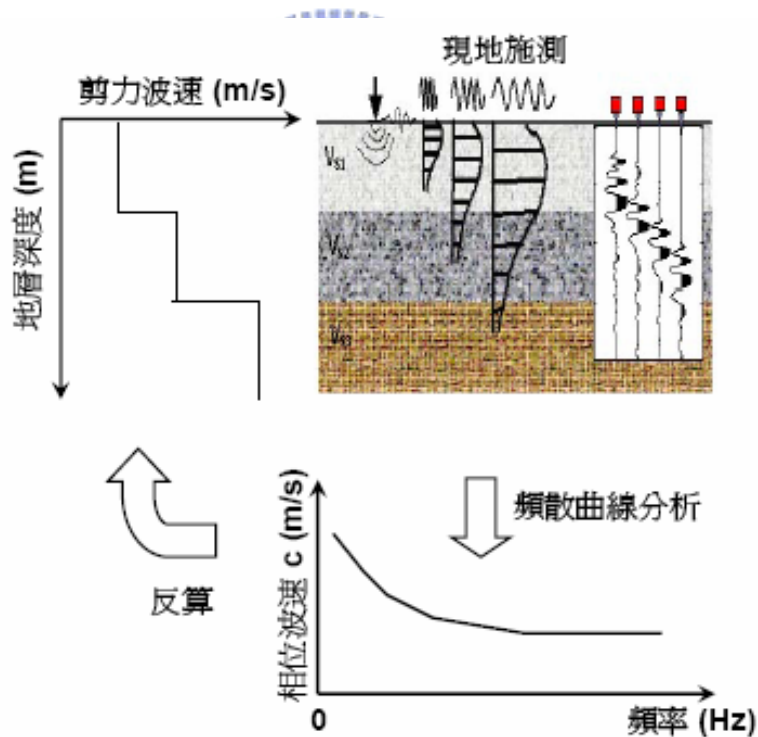


圖 1.1 表面波震測法步驟示意圖

根據在現地施測時所使用的接收器數目，表面波震測法可分為表面波譜法(Spectral Analysis of Surface Wave, SASW, Heisey et al., 1982；Nazarian et al., 1984；Stokete al., 1994)以及多頻道表面波震測法(McMechan and

Yedlin, 1981; Gabriels et al., 1978; Park et al., 1999)。多頻道表面波震測法採用在一直線上的多個接收器收錄資料，在施測上有三個施測參數需要考慮：近站支距、接收器間距以及測線展距(如圖 1.2 所示)。然而就震測目標(探測深度深，解析度好)以及訊號分析的需求，此三個參數存在著互制的衝突性，而致使此法在施作上有一定的困難性。陳逸龍(2004)提出了對於施測參數上的建議，降低這些互制的衝突對結果的影響，並以實際試驗測試 pseudo-section 概念(Lin et al., in press)對於徹底解決這互制問題的可行性。

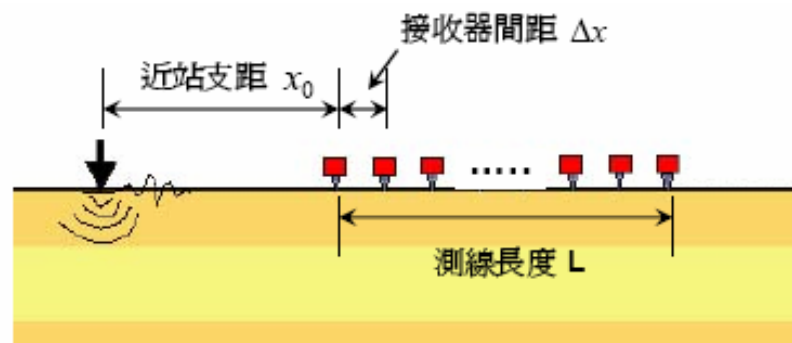


圖 1.2 多頻道表面波震測法現地施測參數圖

Pseudo-Section 的概念是固定接收器位置，藉由多次改變震源擊發處，而後將這些資料透過縫合(seaming)的技巧，將不同震源處的資料整合，模擬出一極長展距的震測資料(Lin et al., in press)，如此一來，在施測上便可以有限的接收器，採用較小的接收器間距而又能獲得夠大的測線展距，解決傳統多頻道表面波震測法施測參數互制衝突的現象。根據其測試的結果(見圖 1.3)，以 pseudo-section 概念施測的震測資料使用較少的接收器數量，但其所得到的頻散曲線結果，雖有預期外的跳動產生，仍能與使用較多接收器一次接收的傳統測線大致吻合，增加了我們對 pseudo-section 概念在實際施作上可行性的信心。

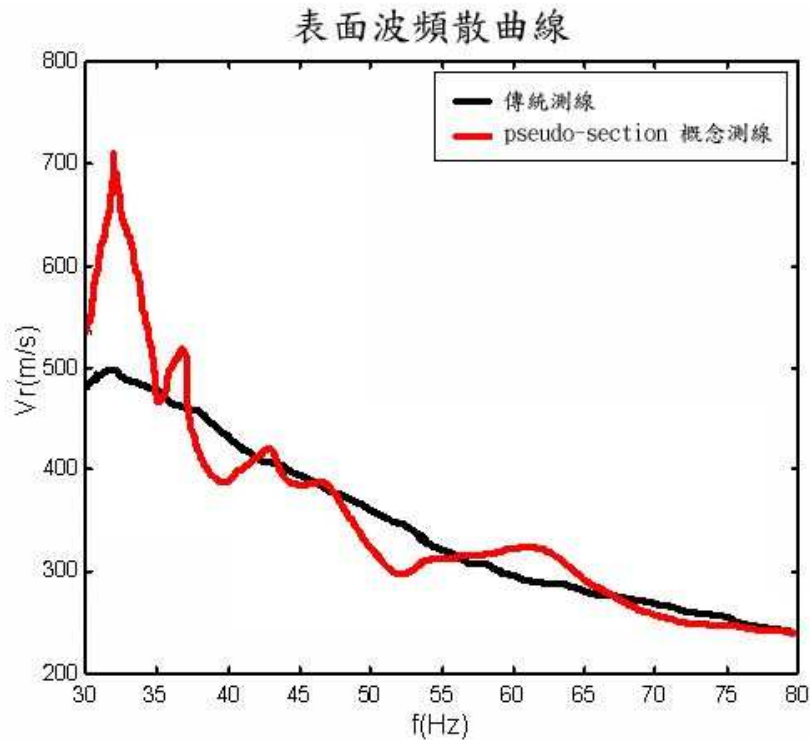


圖 1.3 pseudo-section 概念與傳統測線頻散曲線結果比較

在此測試中所出現預期外的跳動情形，初步檢討認為是由於地層具有的側向變化所造成的影響，然而，由於對現地情況的無法掌控，以及其他可能存在因素，如震源的不穩定、雜訊干擾或施作上的疏忽等，使得欲以實際試驗確認此跳動情形的原因有所困難。因此，為先排除其他可能因素的干擾，欲採用模擬的方式以人工製造在具有側向變化的土層中的震測資料，以對於 pseudo-section 概念在可控制地層條件下進行測試。

1.2 研究目的

本研究將採用數值模擬的方式，以已知的地層狀況製造傳統多頻道表面波震測資料以及採用 pseudo-section 概念所收錄的表面波震測資料，測試在純粹只有側向變化地層的影響時，表面波的行為差異以及 pseudo-section 概念的使用情形，並藉由觀察具有側向變化的地層對於震測資料的影響，檢討 pseudo-section 概念應用上的可能問題，而後統合觀察到的問題，提出目前應用 pseudo-section 概念的限制及可能解決方案，以期解決或降低施測

參數互制而造成震測目標無法同時達到要求以及不佳的離散訊號分析結果的問題。

1.3 研究內容

本研究以四個章目做為陳述，於第一章緒論中就引起此次研究的動機做說明(1.1 研究動機)，並將此研究所欲達到的成果列出(1.2 研究目的)。在第二章中，將由基本的波傳理論開始，了解在地層中傳遞的不同震波種類及其特性(2.1 震波種類與其基本理論)，而後介紹由表面波特性和發展出的不同表面波震測法及其施測上的問題(2.2 表面波量測方法及其施測問題)以及 pseudo-section 概念是如何嘗試解決這些問題(2.3 pseudo-section 概念)。製造人造震測資料可由解析方法以及數值方法下手，在 2.4 P-SV 震波模擬一節中，將對一些常見的模擬方式做簡單介紹，藉以瞭解在模擬震波的領域上有哪些技術可供使用。

經由第二章的文獻回顧後，統整收集到的文獻資料，於第三章中說明將要使用何種震波模擬方法，以及模擬震測方法的施測及其分析的詳細過程(3.1 研究方法)，而後說明本研究中模擬所用的參數(3.2 表面波震測模擬參數設定)。在第四章中以不同的模擬地層類型分別討論表面波的行為及 pseudo-section 測線所得到的結果。最後在第五章中提出本研究的結論，並以研究所得的結果提出建議。

第二章 文獻回顧

2.1 震波種類與其基本理論

在地層中傳遞的震波大致可分為兩類，一類稱作實體波(Body Wave)，而另一類稱作表面波(Surface Wave)。實體波指的是在物質內部傳遞的波，由其不同的傳遞特性可分為 P 波及 S 波(如圖 2.1 所示)。P 波又可稱為壓縮波，P 是指最初(Primary)的意思，表示在震波紀錄上最先到達。其在地層中傳遞時，地層介質顆粒的運動方向與傳遞的行進方向平行，亦即若 P 波在 x 方向上傳遞，則介質顆粒會沿著 x 方向，以原來位置為中心作左右的震盪，而使得介質顆粒有疏密的情形產生(如圖 2.1a 所示，介質顆粒在空間上相鄰最密或最疏處的距離是一個波長的距離)。S 波又可稱為剪力波，S 是指第二(Secondary)的意思，表示在震波紀錄上較 P 波慢到達。其在地層中傳遞時，地層介質顆粒的運動方向與傳遞方向相互垂直，亦即若 S 波在 x 方向上傳遞，則介質顆粒會沿著 z 方向，以原來位置為中心做上下的震盪，而使得介質顆粒的排列有高下之分如波浪狀(如圖 2.1b 所示，介質顆粒在空間上相鄰等高處的距離是一個波長的距離)。

表面波與實體波不同，表面波是存在於具有自由表面存在的介質中，其沿著自由表面行進，且會隨著深度而有能量衰減的現象。表面波依其傳遞特性可分為雷利波(Rayleigh Wave)及勒爾波(Love Wave)(如圖 2.2 所示)。雷利波在傳遞時，地層介質顆粒同時有與傳遞方向垂直及平行的運動，亦即當其向 +x 方向傳遞時，在地表面處，介質顆粒會以原位置為中心，形成橢圓形的路徑，以逆時鐘方向震動。其所形成的橢圓型平面只會在 x、z 平面上，而 y 方向上並無分量(如圖 2.2a 所示，介質顆粒在空間中相鄰最密或

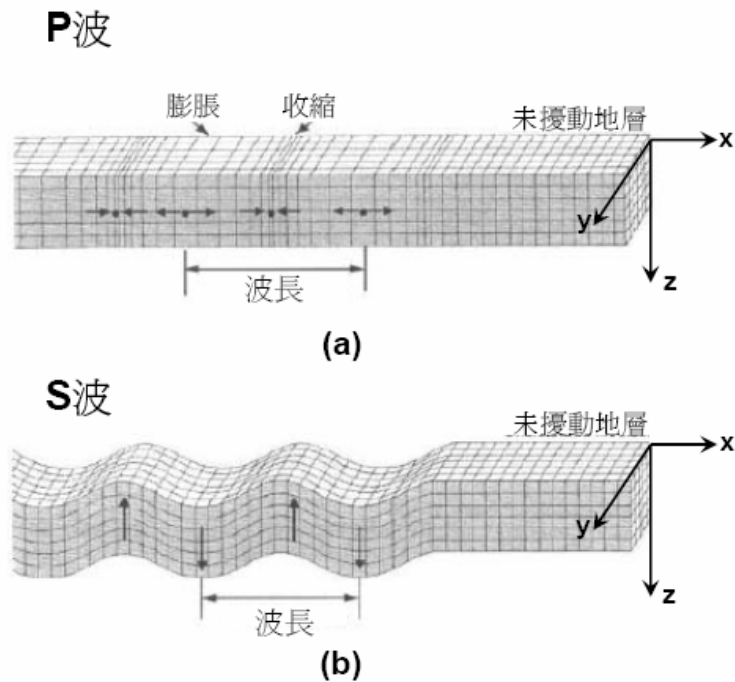
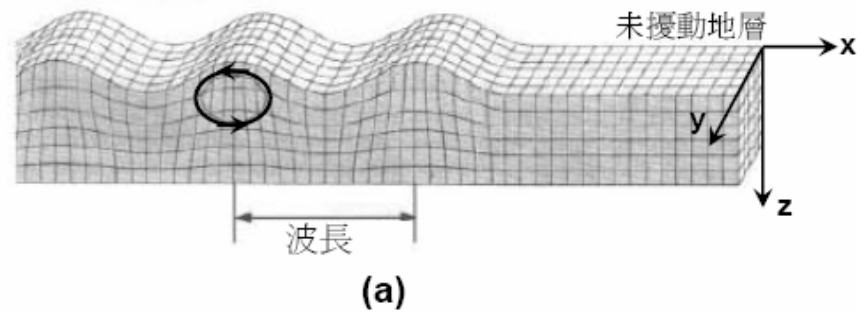


圖 2.1 實體波示意圖 (Bolt, 1976)

最舒的距離為一個波長)，與同在 x 、 z 平面上行進的 P 波及 x 、 z 平面上的 S 波分量(以 SV 表示)，統稱為 P-SV 波。勒爾波與表面波不同，雖亦是在地表面處傳遞，然而其傳遞方向與地層介質顆粒的運動方向互相垂直，且只有在 y 方向上有分量，亦即當其在 x 方向傳遞時，地層介質顆粒會以原位置為中心，沿著水平 y 方向做前後的運動(如圖 2.2b 所示，介質顆粒於空間中在 y 方向位移相同的最短距離為一個波長)。其單純只有 y 方向的分量，是由地底介面反射回地表的 S 波在 y 方向的分量組成，可以以 SH 波名之。在沒有介面存在的半無限域空間中，地表處不會有勒爾波的存在。

在接下來的兩小節中，我們將以量化的方式，以平面波(plane wave)為例來討論實體波與表面波的性質以及這兩種波與拉瑪彈性材料常數(Lame's constant) λ, μ 的關係。

雷利波



勒爾波

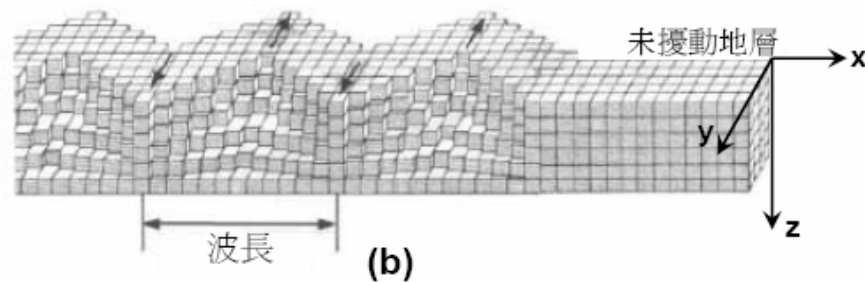


圖 2.2 表面波示意圖 (Bolt, 1976)

2.1.1 壓縮波與剪力波

地層在受到擾動後的運動情形是受到運動方程式(equation of motion)以及虎克定律(Hooke's Law)控制。在三維的空間中，以卡氏座標系為座標(如圖 2.3 所示)，運動方程式可寫做：

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= f_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= f_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中， ρ 表示地層密度； u_x, u_y, u_z 分別表示在 x, y, z 方向上的位移量； t 表示時間； f_x, f_y, f_z 分別表示在 x, y, z 方向上的實體力(Body force)； σ_{ij} 表示作用在法

線方向為 i 方向平面上 j 方向的應力，且 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。例如 σ_{xy} 便是表示作用在 x 平面上 y 方向的力(如圖 2.3 所示)且 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ 。假設在沒有震源影響或是實體力的作用下，((2.1)式可改寫為：

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (2.2a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad (2.2b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.2c)$$

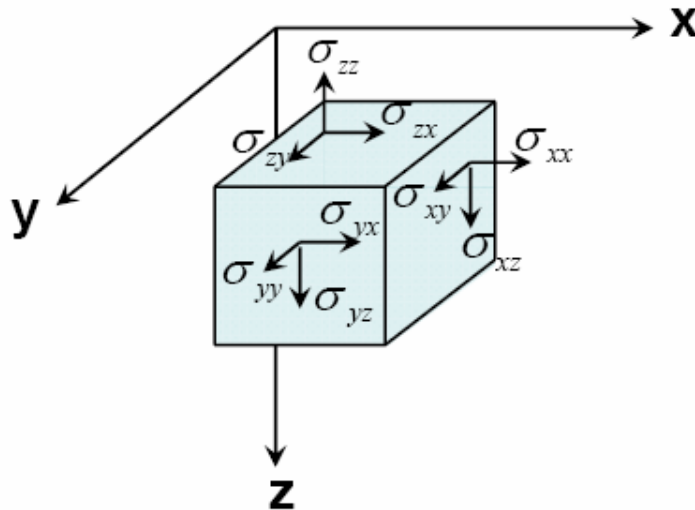


圖 2.3 應力定義示意圖

而對於均質均向的彈性材料來說，其應力應變之組合律可以兩個獨立的拉瑪彈性常數 λ, μ (Lame's constants) 透過虎克定律表示之，虎克定律的通用式可寫做：

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

其中， δ_{ij} 為 Kronet delta，表示其在 $i=j$ 時為 1， $i \neq j$ 時為 0； λ, μ 表示是地層材料的拉瑪彈性常數； ε_{ij} 表示 i 方向上的線段在 j 方向上的應變量，且依

位移與應變的關係可得 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$ 。例如：

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

將((2.4)式代入((2.2a)式中可得：

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.5a)$$

同理，由((2.2b),(2.2c)式可得：

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.5b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.5c)$$

將((2.5)式以向量型式表示，可表示為：

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.6)$$

便得到在三維空間中，均質均向線彈性材料的運動方程向量式。一般為了後續計算上的便利會採用向量關係式：

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.7)$$

將其帶入((2.6)式：

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.8)$$

根據 Helmholtz 理論(Lay and Wallace, 1995)，任何向量場 \mathbf{u} 皆可以純量潛能 ϕ (scalar potential)與向量潛能 Ψ (vector potential)表示為：

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \Psi \quad (2.9)$$

其中，

$$\nabla \times \phi = 0, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (2.10)$$

將((2.9)式帶入((2.8)式整理，便可獲得

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho\ddot{\phi}] + \nabla \times [\mu\nabla^2\Psi - \rho\ddot{\Psi}] = 0 \quad (2.11)$$

令

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.12)$$

則((2.11)式在符合下列的情況時，

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\ddot{\phi} = 0, \quad \nabla^2\Psi - \frac{1}{\beta^2}\ddot{\Psi} = 0 \quad (2.13)$$

可獲得其解。((2.13)式即為波動方程式，其中， α 、 β 分別為此彈性體的壓縮波(P波)與剪力波(S波)波速。由((2.13)式可知，對於地層受到擾動後的位移情形，可以將其分為 P 波組以及 S 波組討論，而且地層的實體波波速與頻率無關，只與地層材料的拉瑪彈性常數有關。對於一般地層材料而言， λ 與 μ 的值相差不大，由((2.12)式可知， $\alpha > \beta$ ，亦即 P 波的波速較 S 波快，也因此地震測資資料上會先看見 P 波造成的位移，而後才有 S 波的位移。

接著利用變數分離法(separation of variables)對((2.13)式波動方程式求解。假設

$$\phi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (2.14)$$

帶入(2.13)式可得平面波在任何方向行進時的波動純量潛能 ϕ 通解為

$$\phi(x, y, z, t) = A \exp[\pm i(\omega t \pm k_{\alpha x} x \pm k_{\alpha y} y \pm k_{\alpha z} z)] \quad (2.15)$$

其中，

$$k_{\alpha x}^2 + k_{\alpha y}^2 + k_{\alpha z}^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} \quad (2.16)$$

定義了於特定頻率 ω 下，以 P 波波速 α 在卡氏坐標系中朝 $(k_{\alpha x}, k_{\alpha y}, k_{\alpha z})$ 方向傳遞的平面波表面，而 A 為常數，表示其振幅；同理可得波動向量潛能 Ψ 的通解：

$$\Psi(x, y, z, t) = B \exp[\pm i(\omega t \pm k_{\beta x} x \pm k_{\beta y} y \pm k_{\beta z} z)] \quad (2.17)$$

其中，

$$k_{\beta x}^2 + k_{\beta y}^2 + k_{\beta z}^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2} \quad (2.18)$$

定義了於特定頻率 ω 下，以 S 波波速 β 在卡氏坐標系中朝 $(k_{\beta x}, k_{\beta y}, k_{\beta z})$ 方向傳遞的平面波表面， B 為常數，表示其振幅。

由地層擾動所造成的位移 \mathbf{u} ，基於 P 波與 S 波在行進時並不會受到互相的干擾的假設，我們可以以 P 波與 S 波震動的線性組合表示之。所以根據 Helmholtz 理論，((2.9)式可寫做：

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s \\ &= \nabla \phi + \nabla \times \Psi \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中， $\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_s$ 分別表示由 P 波及 S 波所造成的位移。又

$$\mathbf{u}_p = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_s = \nabla \times \Psi = \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (2.21)$$

其中， Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z 分別表示 Ψ 在 x, y, z 上的分量，符合((2.17)式通式解的形

式； $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分別表示 x, y, z 方向的單位向量。為了簡化問題，假設入射波為一 $k_{\alpha y}, k_{\beta y} = 0$ 的平面波，亦即此波在 y 方向上並無變化， $\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \rightarrow 0$ 。則((2. 21

式可改寫為：

$$\nabla \times \psi = \left(-\frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \hat{z} \quad (2. 22)$$

將((2. 20)及((2. 22)式代入((2. 19)式，得

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \hat{z} \quad (2. 23)$$

由((2. 23)式的結果，我們可以很清楚的看見，在 y 方向的位移只與 S 波有關，而在 x, y 方向上的位移則同時牽涉到 P 波與 S 波的反應，但其 S 波牽涉的與 y 方向牽涉的 S 波不同，所以我們可以很成功的，以適當的座標方式使 P 波的在一方向上，而後便可將擾動後地層的位移分解成 x - z 平面上，以及 y 方向上來討論。 y 方向的波動位移以 SH 波表示， x - z 平面上的位移以 P-SV 波表示。

2.1.2 表面波及其頻散曲線

表面波於半無限域地層：表面波的存在需有地表自由表面，其特徵是傳遞能量的大小會隨著深度的增加而遞減。在此我們先將探討在半無限域地層中，表面波存在的情形。由上一小節的結果可知，各個方向上的位移 u_x, u_y, u_z 可表示為：

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (2. 24a)$$

$$u_y = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad (2. 24b)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (2.24c)$$

然而，由於 u_y 可被獨立分開來，其位移僅牽涉到 S 波的向量潛能，是否以向量潛能的方式計算並不影響其通式的形式，因此將其保留為 u_y ，而不需特以向量潛能表示。由得到實體波通式的形式經驗，並已知其在 z 方向上有能量遞減的特性，我們對於一個在 $+x$ 方向上具有頻率 ω ，以波速 c 傳遞的波，可假設其 ϕ, ψ_y, u_y 分別為：

$$\phi = f(z) \exp[ik(x-ct)] \quad (2.25a)$$

$$\psi_y = g(z) \exp[ik(x-ct)] \quad (2.25b)$$

$$u_y = h(z) \exp[ik(x-ct)] \quad (2.25c)$$

其中， $f(z)$ 、 $g(z)$ 、 $h(z)$ 用以表示其隨著地層深度變化而有能量大小變化的現象； $k = \frac{\omega}{c}$ 表示空間頻率。將式((2.25a)，((2.25b)式代入((2.13)式，可得

$$f''(z) + k^2 r^2 f(z) = 0 \quad (2.26a)$$

$$g''(z) + k^2 s^2 f(z) = 0 \quad (2.26b)$$

其中，

$$r = \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.27a)$$

$$s = \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.27b)$$

而對於 u_y ，若以假設其向量潛能的方式代入((2.13)式中，亦可發現

$$h''(z) + k^2 s^2 h(z) = 0 \quad (2.26c)$$

將((2.26)式求解，可得

$$f(z) = A' \exp(ikrz) + A \exp(-ikrz) \quad (2.28a)$$

$$g(z) = B' \exp(iks z) + B \exp(-iks z) \quad (2.28b)$$

$$h(z) = C' \exp(iks z) + C \exp(-iks z) \quad (2.28c)$$

其中， A, A', B, B', C, C' 為任意常數，但由於表面波有隨著深度而能量傳遞遞減的行為，所以 $A' = B' = C' = 0$ ；且 r 為虛數， s 為實數，亦即表示 $\alpha > \beta > c$ 。將((2.28)式代回((2.25)式，整理後得到：

$$\phi = A \exp[-ikr z + ik(x - ct)] \quad (2.29a)$$

$$\psi_y = B \exp[-iks z + ik(x - ct)] \quad (2.29b)$$

$$u_y = C \exp[-iks z + ik(x - ct)] \quad (2.29c)$$

為了要將 A, B, C 的常數值找出來，我們需要給予邊界條件。在自由表面處，在 z 方向上的應力會為零，亦即 $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ 。採用((2.3)式及位移與應變的關係，我們可獲得邊界條件：

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.30a)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.30b)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.30c)$$

將((2.24)式代入((2.30)式，可得

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} = 0 \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (2.31b)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial z} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.31c)$$

先將((2. 29c)式代入((2. 31b)可得 $C = 0$ 。由此便可知，勒爾波在半無限域地層中是不存在的，其需要地層有介面的存在時，才會成形。再將((2. 29a)，((2. 29b)式分別代入((2. 31a)，((2. 31c)式中，將可獲得一組聯立方程式：

$$2rA - (1 - s^2)B = 0 \quad (2. 32a)$$

$$[\alpha^2(r^2 + 1) - 2\beta^2]A - 2\beta^2sB = 0 \quad (2. 32b)$$

則除了 $A = B = 0$ 的這組解之外，欲使此聯立方程式有解，必須

$$\begin{vmatrix} 2r & -(1-s^2) \\ \alpha^2(r^2+1)-2\beta^2 & -2\beta^2s \end{vmatrix} = 0 \quad (2. 33)$$

解出此行列式，得到

$$[\alpha^2(r^2 + 1) - 2\beta^2](1 - s^2) - 4rs\beta^2 = 0 \quad (2. 34)$$

將((2. 27)式代入((2. 34)式，整理後可得

$$\left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \quad (2. 35)$$

((2. 34)式便是在 1887 年首先由 Rayleigh 所提出的表面波波速解方程式，在此式中，並沒有頻率的出現，表示了在半無限域地層中，雷利波波速 c 與頻率無關，亦即沒有頻散現象的發生。為了更加了解此一方程式的特性，令

$$\xi = \left(\frac{c}{\beta}\right)^2, q = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \quad (2. 36)$$

代入((2. 35)式，且將等式兩邊平方後，去除 $\xi = 0$ 的解，可得：

$$\xi^3 - 8\xi^2 + 8(3 - 2q)\xi + 16(q - 1) = 0 \quad (2. 37)$$

在此式中，當半無限域地層的彈性參數確定後， q 便是常數， ξ 為未知數，((2. 37)式為一元三次方程式，可解得三個解。由於雷利波的波速 c 必符合 $\alpha > \beta > c$ 的要求，因此只有符合 $\xi < 1$ 的解，才是雷利波波速的解。

透過((2. 36)式的變數變換，可知在半無限域空間中，雷利波的波速與地層的卜松比(Poisson's Ratio)有關，如圖 2.4 及表 2.1 所示， q 與卜松比有一對一的關係。在可能的卜松比範圍(0~0.5)中， ξ 在 0.7640 至 0.9128 之間變動，而由((2. 36)式，可得到雷利波與 S 波波速的關係。在這要特別提出， $\xi=0.9128$ 是對應於 0.5 的卜松比，亦即 S 波波速為 0 的狀況，其雷利波波

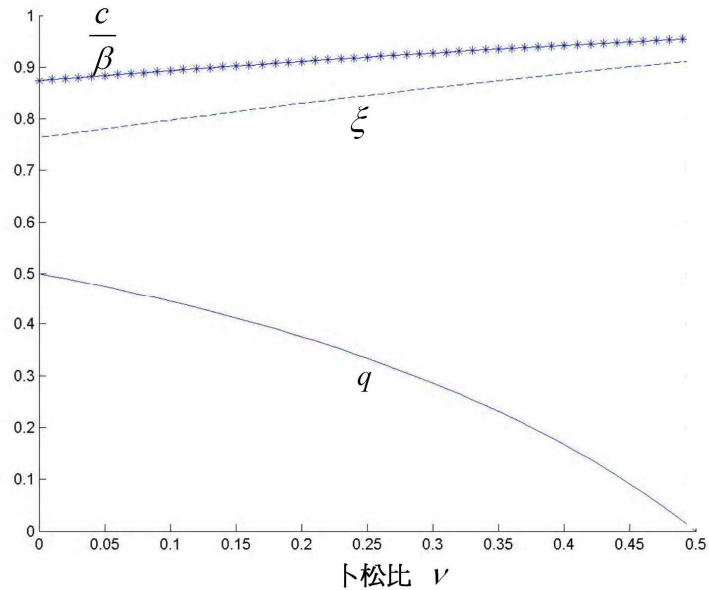


圖 2.4 卜松比與半無限域雷利波速關係圖

表 2.1 卜松比與半無限域地層中雷利波波速對照表*

卜松比 ν **	q	ξ	雷利波波速 c_R
0	$\frac{1}{2}$	0.7640	0.8741β
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{7}$	0.8059	0.8977β
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0.8453	0.9194β
$\frac{1}{2}$	0	0.9128	0

* Udias, 1999 ** $\nu = \frac{1-2q}{2(1-q)}$

速亦為 0，由此亦可知，雷利波是不存在於純彈性液體的半無限域空間中

(Udias, 1999)。

雷利波於水平層狀地層：本研究中採用的表面波震測法，其所收集分析的波實際是指在 P-SV 波中的雷利波。雷利波很重要的一個特性便是其因地層隨身度變化而產生頻散(dispersion)現象，亦即雷利波波速會因頻率的不同而有所不同，然而由半無限域地層的雷利波波速解可知，在半無限空間中，雷利波的波速固定。為表達雷利波的頻散現象，接下來將討論在均質均向的層狀水平地層(後續將以水平層狀地層表示之)中，雷利波波速與頻率的關係。

假設一水平層狀地層(如圖 2.5 所示)，地層的參數只與 z 有關。在接下來的推導中，將只討論 P-SV 波的部份，因此在 y 方向的位移分量 u_y 將令其為 0 則一個在 $+x$ 方向上傳遞的平面波可表示為：

$$u_x = U(k, z, c) \exp[ik(x - ct)] \quad (2.38)$$

$$u_z = iW(k, z, c) \exp[ik(x - ct)] \quad (2.39)$$

其中， $U(k, z, c), W(k, z, c)$ 分別表示在 x 及 z 方向位移量的振幅大小，其具有隨著 z 增加而遞減，隨著不同空間頻率 k 以及雷利波波速 c 而改變的特性，為求便易，後續將以 $U(z), W(z)$ 表示；此外， c, k 相乘便是頻率 ω 。由於在層與層之間，在 z 面上的應力有連續的現象，因此令

$$\sigma_{xz} = X(k, z, c) \exp[ik(x - ct)] \quad (2.40)$$

$$\sigma_{zz} = iZ(k, z, c) \exp[ik(x - ct)] \quad (2.41)$$

其中， $X(k, z, c), Z(k, z, c)$ 分別表示在 z 平面上， x 及 z 方向應力的大小，其具有隨著 z 增加而遞減，隨著不同空間頻率 k 以及雷利波波速 c 而改變的特性，為求便易，後續將以 $X(z), Z(z)$ 表示。

層界面 索引號	地層 索引號	拉瑪 參數	P 波 波速	S 波 波速	密度	厚度	自由表面
0							自由表面 ↓ z
1	1	λ_2, μ_2	α_1	β_1	ρ_1	d_1	
2	2	λ_2, μ_2	α_2	β_2	ρ_2	d_2	
3	3	λ_3, μ_3	α_3	β_3	ρ_3	d_3	
4	4	λ_4, μ_4	α_4	β_4	ρ_4	d_4	
⋮			⋮				
⋮			⋮				
n-1	n	λ_n, μ_n	α_n	β_n	ρ_n	d_n	
n	n+1	λ_{n+1}, μ_{n+1}	α_{n+1}	β_{n+1}	ρ_{n+1}	d_{n+1}	

圖 2.5 水平層狀地層模型

採用((2.3)式及位移與應變的關係，我們可獲得應力與位移的關係為：

$$\sigma_{zx} = \mu(z) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (2.42a)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (2.42b)$$

將((2.38), ((2.39)式代入((2.42)式中，

$$\sigma_{zx} = \mu(z) \left(-kW(k) \exp[ik(x-ct)] + \frac{dU(z)}{dz} \exp[ik(x-ct)] \right) \quad (2.43)$$

$$\sigma_{zz} = i(\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{dW(z)}{dz} \exp[ik(x-ct)] + i\lambda k U(z) \exp[ik(x-ct)] \quad (2.44)$$

再將((2.40), ((2.41)式代入((2.43), ((2.44)式中，整理後可得

$$\frac{dU(z)}{dz} = \frac{1}{\mu} X(z) + kW(z) \quad (2.45)$$

$$\frac{dW(z)}{z} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} Z(z) - \frac{\lambda k}{\lambda + 2\mu} U(z) \quad (2.46)$$

又，前述所假設的 u_x, u_z 必需符合運動方程式，由((2.5a), ((2.5c)式可知其須符合：

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda(z) + \mu(z)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu(z) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.47)$$

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda(z) + \mu(z)) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.48)$$

將((2.15), ((2.16)式代入，

$$\begin{aligned} & -\rho(z)U(z)c^2k^2 \exp[ik(x-ct)] = \\ & -k(\lambda(z) + \mu(z)) \left(kU(z) + \frac{dW}{dz} \right) \exp[ik(x-ct)] \\ & -\mu(z) \left(k^2U(z) - \frac{d^2U(z)}{dz^2} \right) \exp[ik(x-ct)] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & -i\rho(z)W(z)c^2k^2 \exp[ik(x-ct)] = \\ & i(\lambda(z) + 2\mu(z)) \left(k \frac{dU(z)}{dz} + \frac{d^2W(z)}{dz^2} \right) \exp[ik(x-ct)] \\ & + i\mu(z) \left(k^2W(z) + \frac{d^2W}{dz^2} \right) \exp[ik(x-ct)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

再將((2.45), ((2.46)式代入((2.49), ((2.50)式，整理過後可得

$$k^2 \left[-\rho(z)c^2 + \lambda(z) + 2\mu(z) \right] U(z) = \frac{dX(z)}{dz} - k\lambda(z) \frac{dW(z)}{dz} \quad (2.51)$$

$$k^2[-\rho(z)c^2 + \mu(z)]W(z) = k\mu(z)\frac{dU(z)}{dz} + \frac{dZ(z)}{dz} \quad (2.52)$$

最後將((2.46)式代入((2.51)式且將((2.45)式代入((2.52)式，整理後可得：

$$\frac{dX(z)}{dz} = k^2 \left[-\rho(z)c^2 + \frac{4\mu(z)(\lambda(z) + \mu(z))}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \right] U(z) + \frac{k\lambda(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)} Z(z) \quad (2.53)$$

$$\frac{dZ(z)}{dz} = -\rho(z)c^2 k^2 W(z) - kX(z) \quad (2.54)$$

由((2.45), ((2.46), ((2.53), ((2.54)式，可獲得運動-應力向量(motion-stress vector, Aki and Richard, 2002) $[U(z), W(z), X(z), Z(z)]$ 的一階微分方程式

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \\ X(z) \\ Z(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & \frac{1}{\mu(z)} & 0 \\ \frac{-\lambda(z)k}{\lambda(z) + 2\mu(z)} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \\ \zeta(z)k^2 - \rho(z)c^2 k^2 & 0 & 0 & \frac{k\lambda(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \\ 0 & -\rho(z)c^2 k^2 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \\ X(z) \\ Z(z) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

其中，

$$\zeta(z) = \frac{4\mu(z)[\lambda(z) + \mu(z)]}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \quad (2.56)$$

傳遞矩陣(Propagator Matrix)：欲解出((2.55)式的方法有許多，包括了數值積分法(numerical integration method, Takeuchi and Saito, 1972)以及傳遞矩陣法(Propagation matrix method, Thomson, 1950；Haskell, 1953；Gilbert and Backus, 1966)。目前較為使用的是傳遞矩陣法，其能符合我們將地層假設為水平層狀的情形。利用矩陣式求解的方法是由 Thomson(1950)先行提出，經由 Haskell(1953)對其中錯誤改正，最後在 1966 年由 Gilbert and Backus 將傳遞矩陣的方法引入，而得知 Thomson-Haskell 的矩陣求解方式是傳遞矩陣法的一個特例情況。以下將介紹傳遞矩陣的求解方式。

在求解前，為了後續參數使用的方便，採用((2.12)式將((2.55)式改為：

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \\ X(z) \\ Z(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & \frac{1}{\rho(z)\beta^2(z)} & 0 \\ -k\left(1 - \frac{2\beta^2(z)}{\alpha^2(z)}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{\rho(z)\alpha^2(z)} \\ k^2c^2\rho(z)\varpi(z) & 0 & 0 & k\left(1 - \frac{2\beta^2(z)}{\alpha^2(z)}\right) \\ 0 & -\rho(z)c^2k^2 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \\ X(z) \\ Z(z) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

其中，

$$\varpi(z) = 4 \frac{\beta^2(z)}{c^2} \left(1 - \frac{\beta^2(z)}{\alpha^2(z)}\right) - 1 \quad (2.58)$$

令 $\mathbf{b}(z) = [U(z) \ W(z) \ X(z) \ Z(z)]^T$ ，則((2.57)式可改寫為

$$\frac{d\mathbf{b}(z)}{dz} = A(z)\mathbf{b}(z) \quad (2.59)$$

其中，

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & k & \frac{1}{\rho(z)\beta^2(z)} & 0 \\ -k\left(1 - \frac{2\beta^2(z)}{\alpha^2(z)}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{\rho(z)\alpha^2(z)} \\ k^2c^2\rho(z)h(z) & 0 & 0 & k\left(1 - \frac{2\beta^2(z)}{\alpha^2(z)}\right) \\ 0 & -\rho(z)c^2k^2 & -k & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

定義傳遞矩陣為

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_0}^z A(\zeta_1) \int_{z_0}^{\zeta_1} A(\zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 + \dots \quad (2.61)$$

其中， I 為 4×4 的單位矩陣； z_{ref} 表示為深度參考點； ζ_i 為表示深度的不同變數。由此定義，可以清楚的發現，其符合((2.59)式：

$$\frac{dP(z, z_{ref})}{dz} = A(z)P(z, z_{ref}) \quad (2.62)$$

假設 z 是在第 i 層地層中 $z_i \sim z_{i+1}$ 變化的深度變數，則 A 將與深度無關，

成為常數方陣，記為 A_i 。由此假設，此層中的傳遞矩陣可簡化為

$$\begin{aligned} P(z, z_{ref}) &= I + (z - z_{ref})A_i + \frac{1}{2}(z - z_{ref})^2 A_i A_i + \dots \\ &= \exp[(z - z_{ref})A_i] \end{aligned} \quad (2.63)$$

根據 Sylvester 的展開式(Hildebrand, 1952)，若一方陣 A 具有 n 個不同值的 eigenvalues λ_k ，則此方陣的函數 P 可表示為：

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(\lambda_k) \frac{\prod_{r \neq k} (A - \lambda_r I)}{\prod_{r \neq k} (\lambda_k - \lambda_r)} \quad (2.64)$$

對 A_i 求其 eigenvalues λ_k ，即是求

$$|A_i - \lambda I| = 0 \quad (2.65)$$

的解，可得 $\lambda_k = \pm k \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_i^2}}$ 及 $\pm k \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_i^2}}$ ，代入(2.64)式，便可獲得每一層的傳遞矩陣(見附錄一)。

由傳遞矩陣的定義((2.61)式)可知：

$$P(z_{ref}, z_{ref}) = I \quad (2.66)$$

亦即對於在任何深度 z ，以 z_{ref} 為深度參考點的傳遞矩陣可寫做

$$P(z, z_{ref}) = P(z, z_{ref})P(z_{ref}, z_{ref}) \quad (2.67)$$

假設 $b(z_0)$ 為((2.59)式)以 z_0 為深度參考的解，則

$$\mathbf{b}(z) = P(z, z_0)\mathbf{b}(z_0) \quad (2.68)$$

為((2.59)式)的另一個解。在此我們將可得到傳遞矩陣的兩個特性：其一，使用((2.68)式)的關係，則在 z_0 至 z_n 間被 n 個不連續界面分開的水平層狀地層模型(如圖 2.5 所示)，其解可寫做

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(z_n) &= P(z_n, z_0)\mathbf{b}(z_0) \\ &= P(z_n, z_{n-1})P(z_{n-1}, z_0)\mathbf{b}(z_0) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$= P(z_n, z_{n-1})P(z_{n-1}, z_{n-2}) \dots P(z_1, z_0) \mathbf{b}(z_0)$$

亦即，由自由表面開始至半無限域空間的全域傳遞矩陣可以以每層地層所得到的區域傳遞矩陣相乘獲得。其二，傳遞矩陣具有

$$P^{-1}(z_1, z_0) = P(z_0, z_1) \quad (2.70)$$

的特性。由((2.69)式可知， $n=2$ 時，其解可寫做

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(z_2) &= P(z_2, z_1) \mathbf{b}(z_1) \\ &= P(z_2, z_1) P(z_1, z_0) \mathbf{b}(z_0) \end{aligned} \quad (2.71)$$

若令 $z_2 = z_0$ ，則

$$I = P(z_0, z_1) P(z_1, z_0) \quad (2.72)$$

便得到如((2.70)式的第二特性。

為了對傳遞矩陣法的物理意義更加顯著，在這再由 Thomson-Haskell 方法切入做討論。前已提及 Thomson-Haskell 方法是傳遞矩陣中的一個特殊解，假設

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{v}_k \exp[\lambda_k (z - z_{\text{ref}})] \quad (2.73)$$

為((2.59)式的解，其中 \mathbf{v}_k 為對應於 A 的 eigenvalue λ_k 的 eigenvector。若令一個矩陣 B ，其欄位的位置是((2.73)式形式的不同解，則 4×4 的常數矩陣 A 就有四個 λ_k 及 \mathbf{v}_k ，此矩陣 B 也就同為 4×4 的方陣。((2.59)式的通解便為((2.73)式形式的解線性疊加，則其解 \mathbf{b} 可寫做

$$\mathbf{b}(z) = B(z - z_{\text{ref}}) \mathbf{a} \quad (2.74)$$

其中， \mathbf{a} 為 4×1 的向量，表示不同解疊加時的權重係數。已知 B 為((2.73)式形式的解的收集，將((2.65)式所得到的解 λ_k 代入((2.73)式，則我們可以將其與 z 相關的部分與非 z 相關的部分分離出，得到

$$B(z - z_{\text{ref}}) = Q E (z - z_{\text{ref}}) \quad (2.75)$$

其中，

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & s & s \\ r & -r & 1 & 1 \\ 2\mu r & -2\mu r & \mu t & \mu t \\ \mu t & \mu t & 2\mu s & -2\mu s \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$E(z-z_{ref}) = \begin{bmatrix} \exp[kr(z_{ref}-z)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp[-kr(z_{ref}-z)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[ks(z_{ref}-z)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp[-ks(z_{ref}-z)] \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$t = 2 - \frac{c^2}{\beta^2} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} r &= \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha^2}} & c < \alpha (c < \beta) \\ i\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} = i\bar{r} & c > \alpha (c > \beta) \end{cases} \\ s &= \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta^2}} & c < \alpha (c < \beta) \\ i\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} = i\bar{s} & c > \alpha (c > \beta) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.79)$$

藉由波的特性給予((2.74)式邊界條件(詳細推導請見 Aki and Richard, 2002)，可以解得

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \downarrow PA & \uparrow PA & \downarrow SA & \uparrow SA \end{bmatrix}^T \quad (2.80)$$

其中， $\begin{bmatrix} \downarrow PA & \uparrow PA & \downarrow SA & \uparrow SA \end{bmatrix}$ 分別表示 P 波向下傳遞、向上傳遞、S 波向下傳遞及向上傳遞的量度(amplitude)，可稱其為量度向量(amplitude vector, Buchen and Ben-Hador, 1996)。由上述的式子可知，Q 與 \mathbf{a} 僅與地層參數有關，亦即在同一地層中，不論在地層中的任何位置，Q 與 \mathbf{a} 皆相同，因此在水平層狀的地層中，第 i 層的下部介面 z_i 處會滿足，

$$\mathbf{b}(z_i) = B(z_i - z_{i-1})\mathbf{a}_i \quad (2.81)$$

而在其上部介面 z_{i-1} 處會滿足

$$\mathbf{b}(z_{i-1}) = \mathbf{B}(z_i - z_{i-1})\mathbf{a}_i \quad (2.82)$$

將((2.76)式代入((2.82)式中可得

$$\mathbf{b}(z_{i-1}) = \mathbf{Q}_i\mathbf{a}_i \quad (2.83)$$

整理後可得

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{Q}_i^{-1}\mathbf{b}(z_{i-1}) \quad (2.84)$$

代入((2.81)式

$$\mathbf{b}(z_i) = \mathbf{Q}_i\mathbf{E}_i(-d_i)\mathbf{Q}_i^{-1}\mathbf{b}(z_{i-1}) \quad (2.85)$$

其中， $d_i = z_i - z_{i-1}$ ，即該層厚度。又由((2.69)式知

$$\mathbf{b}(z_i) = \mathbf{P}(z_i, z_{i-1})\mathbf{b}(z_{i-1}) \quad (2.86)$$

因而得到傳遞矩陣的定義便是

$$\mathbf{P}(z_i, z_{i-1}) = \mathbf{Q}_i\mathbf{E}_i(-d_i)\mathbf{Q}_i^{-1} \quad (2.87)$$

這所表示的傳遞矩陣是指，由 z_i 往 z_{i-1} 方向傳遞的傳遞矩陣，而若對於由 z_{i-1} 往 z_i 方向傳遞，則由((2.70)式的關係可得

$$\mathbf{P}(z_{i-1}, z_i) = \mathbf{Q}_i\mathbf{E}_i(d_i)\mathbf{Q}_i^{-1} \quad (2.88)$$

從上述式子，已可了解，傳遞矩陣在連結同一地層中不同深度的運動-應力向量是將各地層中的不變量 \mathbf{Q} 以 \mathbf{E} 矩陣依著其由參考深度開始的傳遞距離及方向做相位的變化後，而重新得到的一個矩陣量。也就是，傳遞矩陣最後是將每個地層的地層資訊以及波在傳遞時的相位變化總和起來，而得到整個地層的訊息。下段將代入邊界條件進而說明這一概念。

雷利波的頻散曲線 以水平層狀地層的模型來說，P-SV 波須符合三個邊界條件：1) 在自由表面處其在 z 面上的應力為零。2) 層與層的介面處，其運動-應力向量連續。3) 在最底層層面以下，波不會有向上傳遞的量。亦即，

$$\mathbf{X}_1(0) = \mathbf{Z}_1(0) = 0 \quad (2.89a)$$

$$\mathbf{b}_i(d_i) = \mathbf{b}_{i+1}(0) \quad (2.88b)$$

$$\overset{\uparrow}{P}\mathbf{A}_{n+1}(0) = \overset{\uparrow}{S}\mathbf{A}_{n+1}(0) = 0 \quad (2.88c)$$

由((2.74)式知

$$\mathbf{b}_i(0) = Q_i \mathbf{a}_i \quad (2.90)$$

$$\mathbf{b}_i(d_i) = Q_i E_i(-d_i) \mathbf{a}_i \quad (2.91)$$

將((2.91)式重新排列可得

$$\mathbf{a}_i = E_i(d_i) Q_i \mathbf{b}_i(d_i) \quad (2.92)$$

代入((2.90)式

$$\mathbf{b}_i(0) = Q_i E_i(d_i) Q_i^{-1} \mathbf{b}_i(d_i) \quad (2.93)$$

將邊界條件((2.89)式代入

$$\mathbf{b}_i(0) = Q_i E_i(d_i) Q_i^{-1} \mathbf{b}_{i+1}(0) \quad (2.94)$$

由此可發現，層與層之間的關係式已經得到，又由((2.88)式，已可清楚的了解傳遞矩陣扮演的角色(後續使用上，((2.88)式中的傳遞矩陣將記為 P_i)。利用這樣傳遞的關係，最後可得到

$$\mathbf{b}_1(0) = P_1 P_2 P_3 \dots P_n \mathbf{b}_{n+1}(0) \quad (2.95)$$

代入((2.90)式，

$$\mathbf{b}_1(0) = P_1 P_2 P_3 \dots P_n Q_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} \quad (2.96)$$

此式便是 Thomson-Haskell 方法所得到的關係式。令 $\mathbf{b}_1(0) = T \mathbf{a}_{n+1}$ ，並將邊界條件((2.89a), ((2.89c)式代入，

$$\begin{bmatrix} U_1(0) \\ W_1(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \downarrow \\ P \mathbf{A}_{n+1} \\ 0 \\ \downarrow \\ S \mathbf{A}_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

則在 $\downarrow PA_{n+1}, \downarrow SA_{n+1}$ 皆不為零的情況下，欲求((2. 97)式的 eigenvalue 需由

$$\begin{vmatrix} T_{31} & T_{33} \\ T_{41} & T_{43} \end{vmatrix} = 0 \quad (2. 98)$$

獲得，滿足此一式的 c 與 k 便是雷利波頻散曲線的位置。為使此式更便於表示頻散曲線方程式，令 $P = P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ ，則((2. 98)式可寫做

$$D(c, k) = |U'PV| = 0 \quad (2. 99)$$

其中，

$$U' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2. 100)$$

$$V = Q_{n+1} e_{13} = \begin{bmatrix} 1 & s_{n+1} \\ r_{n+1} & 1 \\ 2\mu_{n+1} r_{n+1} & \mu_{n+1} t_{n+1} \\ \mu_{n+1} t_{n+1} & 2\mu_{n+1} s_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2. 101)$$

如此一來，便得到隱性解表示的雷利波頻散曲線，亦可知道，在水平層狀的地層中，雷利波的波速是與頻率($\omega = ck$)相關的。

在求解上，雖說以數值計算設備進行試誤法找出符合((2. 99)式的 c, k 值，便可獲得其頻散曲線，然而，若僅是使用((2. 99)式的計算方式，當頻率(或空間頻率)變大，很容易會有計算不穩定的情況發生(如圖 2.6 所示，黑白的交界處為頻散曲線的位置，對應於其所使用的地層參數，約在頻率 1Hz 處便發生不穩定的現象)。造成其不穩定的原因，主要是因為 E 矩陣中有指數項的存在，當以數值計算設備進行計算時，因為數值計算設備在計算上有位數的限制，指數項的相乘將使得其值產生計算上的誤差，而造成錯誤。為解決此一問題，已有許多學者提出解決方法(Pestel and Leckie, 1963 ;

Knopoff, 1964 ; Dunkin, 1965 ; Watson, 1970 ; Schwab, 1970 ; Schwab and Knopoff, 1972 ; Kennett, 1974 ; Abo-Zena, 1979 ; Kennett and Kerry, 1979) , 目前對於水平層狀地層的計算，在使用上以 Delta Matrix 法(Dunkin, 1965) 以及 Schwab and Knopoff (Knopoff, 1964 ; Schwab, 1970 ; Schwab and Knopoff, 1972)法較為熱門。這部份的討論已超出本研究範圍，不予贅述，可逕行參考 Schwab and Knopff (1972)、Dunkin(1965)或是 Buchen and Ben-Hador(1996)的文章。在此須再一提，由 Kennett 團隊所發展的 RT Matrix 法(Kennett, 1974 ; Kennett and Kerry, 1979) ，將傳遞矩陣與反射傳遞係數的關係做出連結，說明了表面波是由許多不同的反射或折射波到達地面後被鎖在地表的反應。在計算水平層狀的地層時，以 RT Matrix 法做計算，其計算速度上的表現較不出色，然而，當目前開始考慮地層的黏滯性以及非均向性的水平層狀地層時，其在時間上的優異表現將會凸顯(Buchen and Ben-Hador, 1996)。

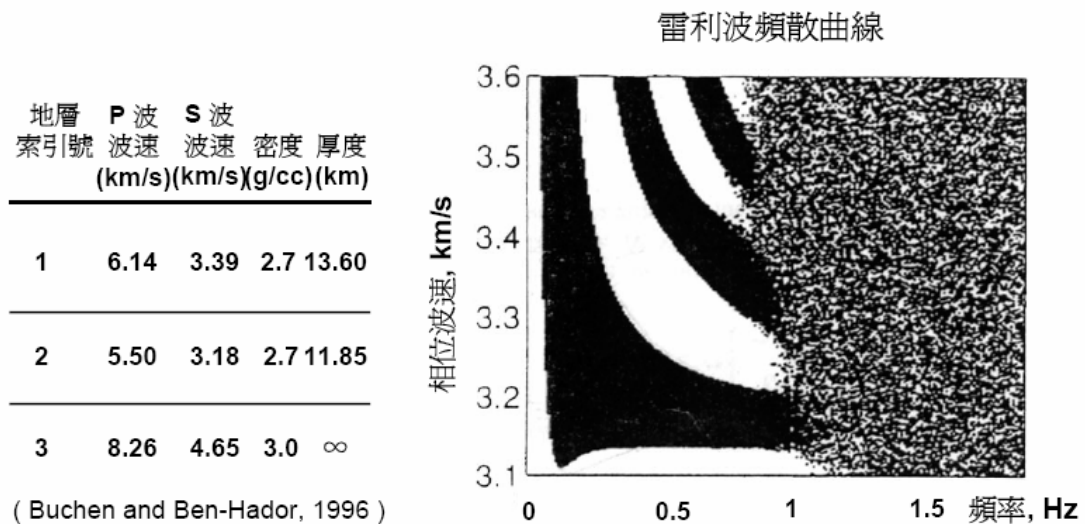


圖 2.6 多震態雷利波頻散曲線—Thomson-Haskell 法

如圖 2.7 所示，雷利波在同一頻率下有可能會以多種波速在行進，而使得解出的頻散曲線有許多條存在，每一條頻散曲線都對應著每一種震動的

模態(mode)，一般稱最下邊的這條頻散曲線震動模態為基態(fundamental mode)，而其餘的為高次態(higher mode)或是過頻(overtone)。如前所述，傳遞矩陣會攜帶不同地層參數的訊息在其中，因此，不同的地層參數，亦會有不同的雷利波頻散曲線存在。目前，藉由此一特性，以及其與剪力波的高相關性，我們可以透過反算的方式得到其相對應的地層剪力波數，而使得表面波震測法得以使用。只是，目前的反算只考慮基態的影響，而忽略高次態的貢獻，這部份擁有極好的發展空間，可使得反算結果更為可信。

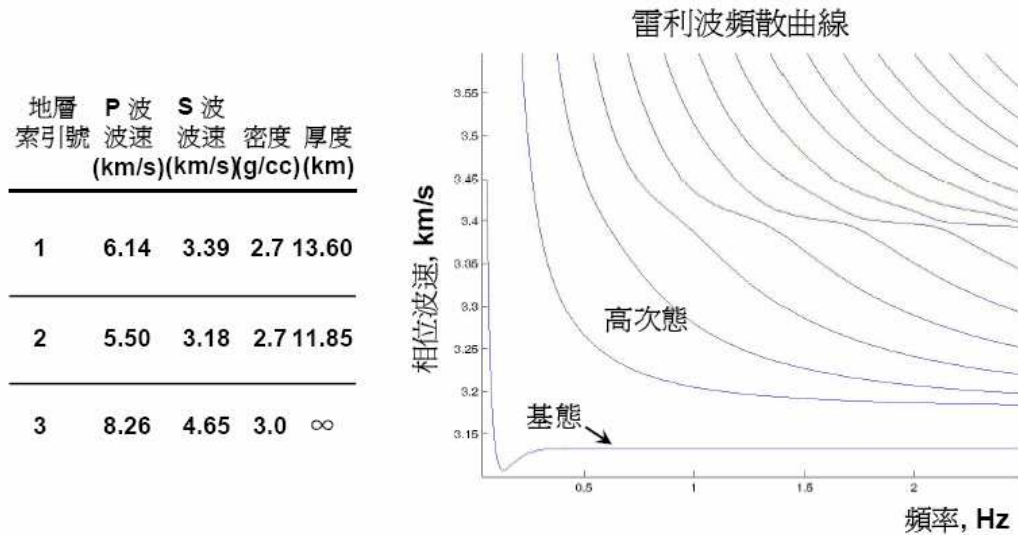


圖 2.7 多震態雷利波頻散曲線—Delta Matrix 法

雷利波的頻散現象上有一值得提及之處。以純彈性的地層假設而言，雷利波的傳遞並不受到震源能量分布的影響，震源對雷利波的影響僅在於，所產生的震源是否存在有涵蓋目標頻散曲線中所需頻率的能量，因此，雖然上述的推導過程中，僅假設了平面波的波傳形式，但，即使是點震源亦會有相同的結果(Wang, 1981)。在這並不深入推導，可逕行參考列於 2.4 節中的參考文獻，或是 Wang(1981)及 Kennett(1985)。但應注意，在實際的地層中，地層材料並非是全彈性，其會因實際狀況而具有黏滯性或非均向性的行為，而與全彈性的假設結果有所差異。

2.2 表面波量測方法及其施測問題

2.2.1 表面波量測方法

如前所述，表面波震測法主要可分為三個步驟：先至 1) 現地施測，而後對施測所得的地層震動訊號，進行 2) 頻散曲線分析，最後透過 3) 地層反算，而得到地層的剪力波速剖面。由於在現地施測時所採用接收器數目的不同，可將表面波震測法分為波譜分析法(Spectral Analysis of Surface Wave, 簡用 SASW)以及多頻道表面波震測法(Multi-channel Analysis of Surface Wave Method, 簡用 MASW)，又由於 MASW 提供了較多空間上的訊息，使得其頻散曲線的分析上有不同的方法，根據採用的方法不同，又可將 MASW 分為多頻道表面波譜法(Multi-channel Spectral Analysis of Surface Wave Method)以及多頻道波場轉換法(Multi-channel Wave Transform of Surface Wave Method)。

2.2.1.1 SASW

現地施測：SASW 在現地的施測上(如圖 2.8 所示)僅採用兩個接收器，以一

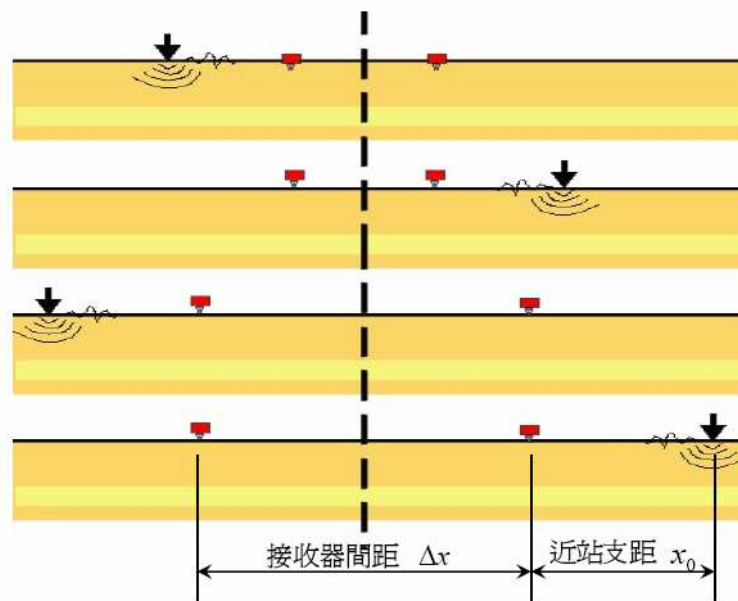


圖 2.8 SASW 現地施測示意圖

近站支距(即震源至第一個接收器位置的距離，一般而言，近站支距 x_0 採用

與兩個接收器相隔間距 Δx 相同的距離，即 $x_0 = \Delta x$ 。)，左敲、右敲、紀錄後改變接收器間距，使得兩個接收器的中點位置固定在同一個地方，而後左敲、右敲、紀錄，再繼續改變兩個接收器的間距，重複紀錄的動作。

頻散曲線分析：透過現地施測，每一筆紀錄我們都可收集到兩個接收器位置的地層震動訊號，此訊號可表示為位置與時間的函數 $u_1(x_1, t), u_2(x_2, t)$ 。透過傅利葉轉換(Fourier Transform)可得到此二函數在頻率域的函數 $U_1(x_1, \omega), U_2(x_2, \omega)$ 以及各頻率在 x_1, x_2 處的相位角。根據相位速度的計算式

$$c(\omega) = \frac{\omega}{\frac{\Delta\phi(\omega)}{\Delta x}} \quad (2.102)$$

其中， $c(\omega)$ 表示不同頻率時的雷利波波速； $\Delta\phi(\omega)$ 表示不同頻率時在 x_1, x_2 處相位角的相減； Δx 表示 $x_2 - x_1$ 。將不同頻率所計算得到的雷利波相位速度畫上，便可得到頻散曲線。在計算過程中，相位差 $\Delta\phi$ 可直接由 $u_1(x_1, t), u_2(x_2, t)$ 互能頻譜(Cross Spectral Density)的相位角獲得，即

$$\Delta\phi(\omega) = \text{Angel}(CSD(u_1(x_1, t), u_2(x_2, t))) \quad (2.103)$$

如圖 2.9(虛線)所示，由於頻譜分析所得之相位角差僅侷限在 $-\pi \sim \pi$ 之間，因此在計算((2.102)式前須先將其摺開(unwrap)，得到如圖 2.9 (實線)的結果。由圖 2.9 中亦可看見，在所得的頻譜分析結果中會有一段資料不佳段，不同的接收器間距會有不同位置及寬度的資料不佳段，因此在施測時收錄多筆不同間距的資料，分別計算完得到頻散曲線後取其算術平均數以為最後頻散曲線結果(如圖 2.10 所示)。最後藉由反算技術，獲得以接收器終點為代表值的地層剪力波速剖面(如圖 2.11 所示)。

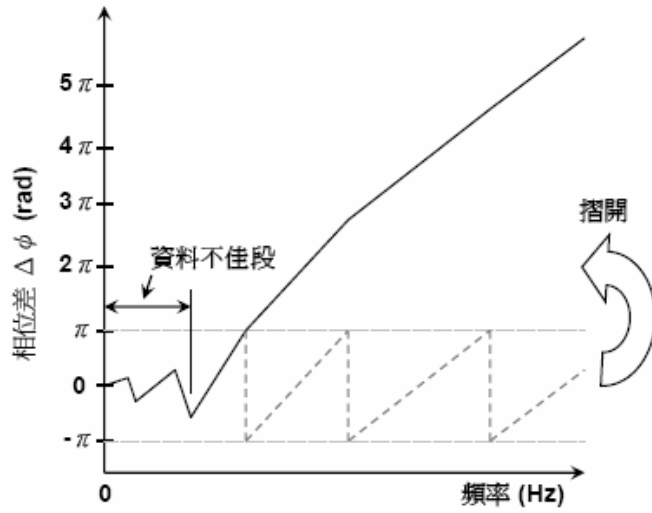


圖 2.9 SASW 頻散曲線分析(相位差-頻率圖)

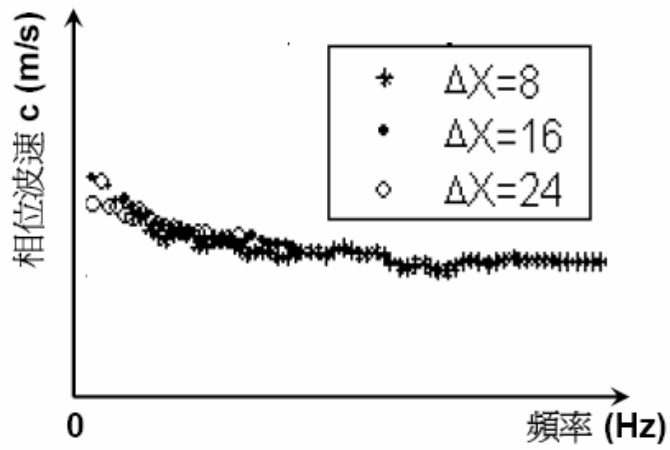


圖 2.10 SASW 頻散曲線分析結果

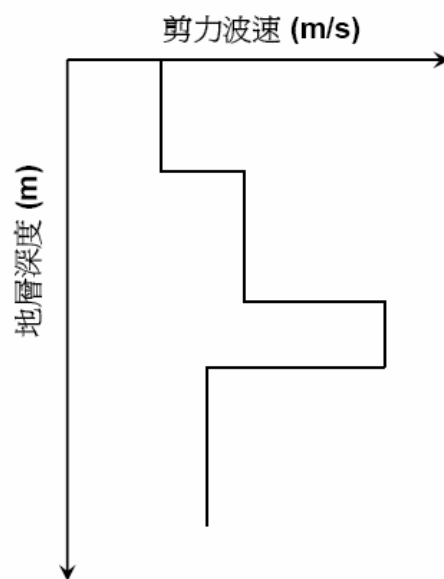


圖 2.11 地層剪力波速剖面

2.2.1.2 MASW

現地施測：多頻道表面波震測法(Multi-channel Analysis of Surface Wave Method, 簡稱MASW法), 首先是由地球物理領域之學者提出(McMechan and Yedlin, 1981; Gabriels et al., 1978; Park et al., 1999), 其在現地施測時, 採用多個在同一直線上的接受器(如圖 2.12 所示), 只需敲擊一次, 便可完成。在實際操作上, 一般採用 1~2 公尺之受波器間距, 並設置 12 個以上之接收器接收震源所發出之震波訊號。以 24 個受波器為例, 在第一個受波器之線外取適當近站支距, 反覆在同一震源處施作, 將其疊加以消除雜訊之影響, 直至收錄到清晰之表面波訊號為止。

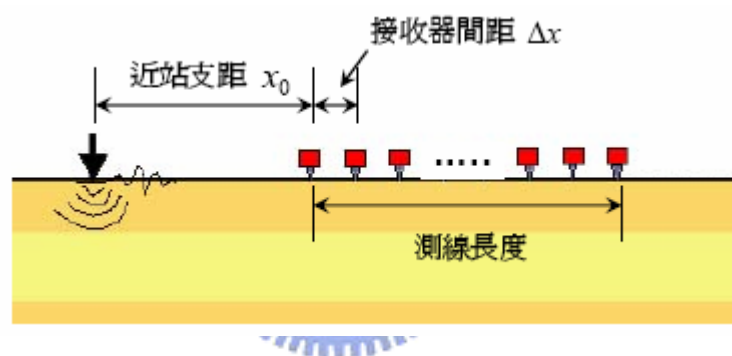


圖 2.12 MASW 現地施測示意圖

頻散曲線分析：多個接收器的收錄, 提供了更多空間上的訊息, 使得多頻道表面波震測法在頻散曲線的分析上可利用二維訊號處理技術分析震測資料, 求得訊號品質優良之頻散關係曲線。根據不同的訊號處理技術, 多頻道式表面波量測法可再分為多頻道波譜分析以及多頻道波場轉換法兩種。

1. 多頻道波譜分析法：多頻道波譜分析法與波譜分析法的頻散曲線分析類似, 經由將多處接收器位置之震測資料 $u_i(x_i, t)$ 透過傅利葉轉換後得到其在頻率域的函數 $U_i(x_i, \omega)$, 以及各頻率在 x_i 處的相位角。如此一來, 對於每一個特定頻率, 我們皆有其在不同接收器位置的相位角(如圖 2.13 所示), 將頻譜分析所得之相位角摺開後, 由((2.102)式可知, 由此斜率便可求得此特定

頻率的相位波速。在圖中亦可看見，線段中會有資料不佳的段落，依據不同的頻率資料不佳的段落出現位置會不同，一般來說，低頻時會發生於距離震源較近的位置，稱作近場效應(near field effect)，而高頻時會發生於距離震源較遠的位置，稱作遠場效應(far field effect)。分析過程中應當要注意此兩個效應所可能造成頻散曲線分析摺開時的錯誤(此種效應的影響在 SASW 的分析中不易發現，使得 SASW 的分析有潛在的錯誤)，於計算相位速度相關之斜率 $\Delta\phi/\Delta x$ 時，可避開資料不佳段。對不同頻率進行相同的動作，便可得到此地層表面波之頻散曲線(如圖 2.14 所示)。最後藉由反算技術便可獲得以測線中點為代表值的地層剪力波速剖面。

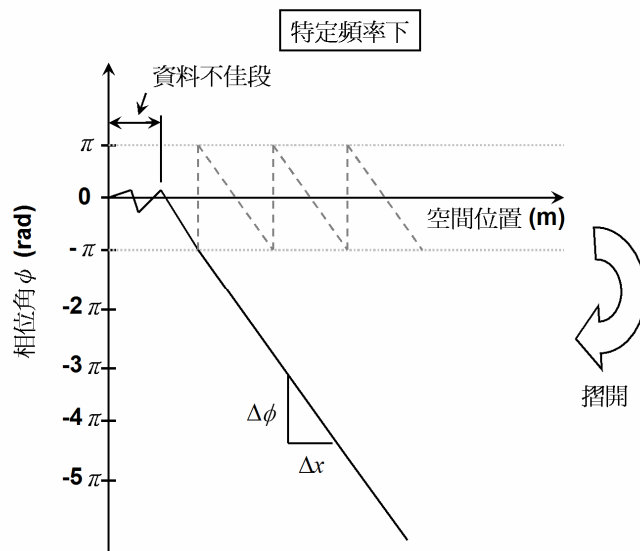


圖 2.13 多頻道波譜法頻散曲線分析(相位-空間位置圖)

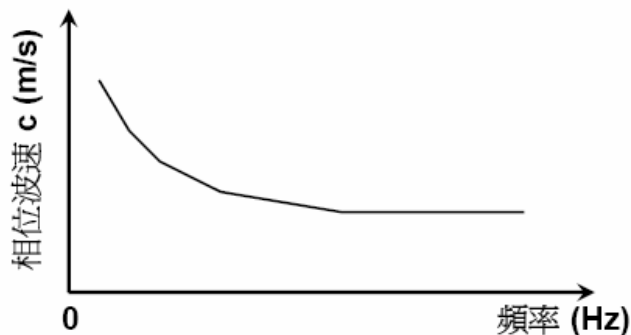


圖 2.14 多頻道波譜法頻散曲線分析結果

2.多頻道波場轉換法：多頻道波場轉換法常見於地球物理領域之濾波處理，包括頻率波數轉換法（Frequency-Wavenumber Transform, f-k Transform）及慢度頻率轉換法（Slowness- Frequency Transform, p-w Transform），其可用以區隔表面波與實體波，亦可用來求取表面波之頻散曲線(McMechan and Yedlin, 1981；Gabriels et al., 1978；Park et al., 1998)。雖說有不同域的轉換，然而不同域的轉換，實際的獨立變數僅有兩個，因此這些方法在數學上是相關連，只是由於需求性的不同而使其表現在所需的物理量上(Lin and Chang, 2004)。以頻率波速轉換法為例，將多處接收器位置之二維震測資料 $u(x,t)$ 透過在時間上以及空間上的傅利葉轉換後得到其在頻率-空間頻率域的函數 $U(k,\omega)$ ，又 $c = \frac{\omega}{k}$ 且 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ，對 $U(k,\omega)$ 進行變數變換即可得到波速與頻率的函數 $U(c,f)$ 。若以空間頻率的波譜大小為色階，可得到此波場轉換後的結果如圖 2.15 所示。圖中白線便是頻散曲線位置所在，亦是色階最深色處所在。若仔細注意，會發現在低頻位置的色階分佈較不集中，這是因為在離散的傅利葉轉換中，會因為有限的空間位置而產生的遺漏(leakage)現象，越低頻其波長越長，影響越顯著。待由此獲得頻散曲線後，便可透過反算技術獲得以測線中點為代表值的地層剪力波速剖面。

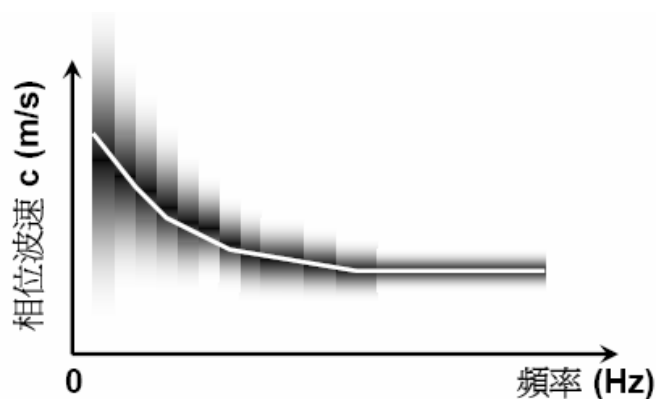


圖 2.15 多頻道波場轉換法頻散曲線分析結果

2.2.2 多頻道表面波震測之施測問題詳析

現行多頻道表面波之施測存在著以下四點問題：

1. 資料映頻干擾(Aliasing)：在頻譜分析的過程中，離散的震測資料會產生資料映頻干擾(Aliasing, Prokis and Manolakis, 1992)。所謂的映頻效應是說，對於兩個不同波數(wavenumber)的波，以相同間距的點位取值作代表而無法分辨此二者的情形，便稱為映頻效應。如圖 2.16 所示，虛線是 $-\sin(9\pi x)$ 的圖形，而實線是 $\sin(\pi x)$ 的圖形。若我們由-1 開始每隔 0.2 取一點，則可發現，對兩個波形來說都得到相同的值，使得我們要由點位上取得的值反推原三角函數時會無法分辨，而有映頻效應的產生。

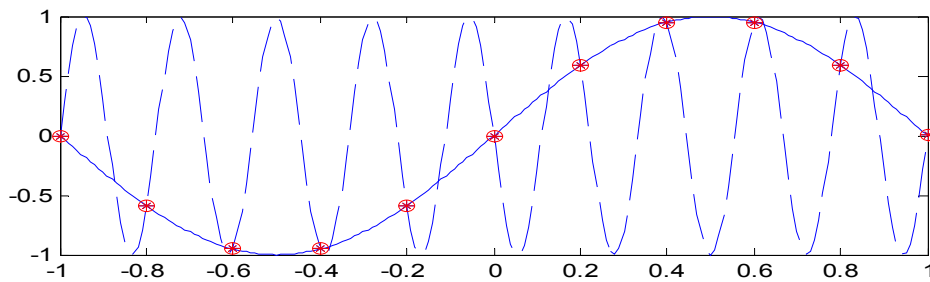


圖 2.16 空間映頻問題示意圖

在進行多頻道波譜法進行頻散曲線時，受波器間距(Δx)不夠小將導致空間軸離散化的過程取點產生映頻效應，因而導致在相位角-空間位置圖上進行摺開的動作後產生相位波速計算的誤差。若以多頻道波場轉換法進行分析，映頻干擾會產生錯誤的波數能量頻譜分佈，原只有在震態處(包括基態及高次態)存在的能量頻譜的峰值(如圖 2.17a 所示)，此時會有不存在的峰值出現(如圖 2.17b 所示)，進而可能導致挑選峰值的錯誤。雖然限制波速範圍挑選峰值可以避免挑選的錯誤，但若映頻干擾嚴重(即 Δx 選取不適當)，資料映頻與高階模組的震波所導致能量頻譜錯誤分布，對於頻散曲線的正确性會造成一定的影響。

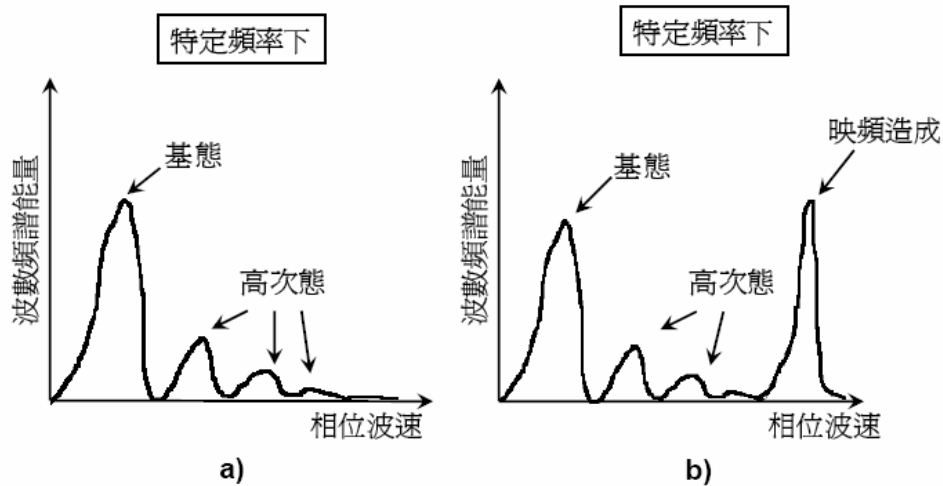


圖 2.17 空間映頻於多頻道波場轉換法影響示意圖

2. 資料遺漏(Leakage)及多重模態效應：由於震測資料之空間長度並不能無限延伸，所以進行資料擷取時須先經斬截(truncation)的動作。在斬截的過程中會產生遺漏(leakage)的現象(Prokis and Manolakis, 1992)。如圖 2.18 所示，以多頻道波場轉換法分析時，資料遺漏會造成波數能量頻譜波峰處有帶寬擴散的現象(如圖 2.18b 所示)，而多重模態震波效應也因資料遺漏而有錯誤的波數分佈，並且造成分辨不同震態的困難。此問題須藉由增加測線展距解決。

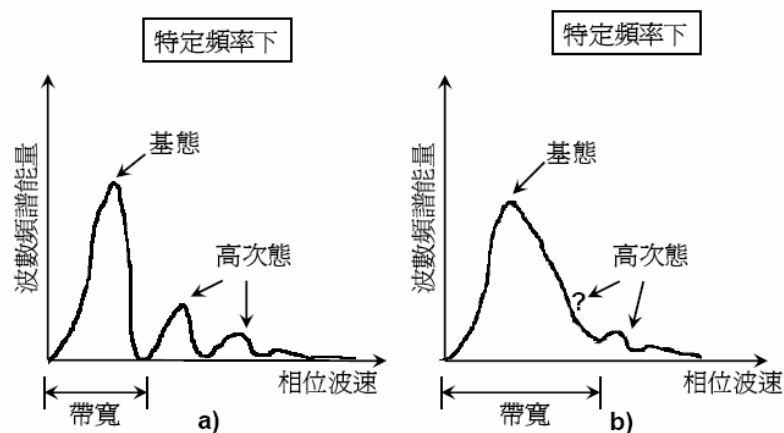


圖 2.18 資料遺漏於多頻道波場轉換法影響示意圖

3. 側向解析度：現行 MASW 測線佈設方式所得頻散曲線，其代表性為測線展距底下土壤之平均值，因此單一測線配置所得側向解析度會與測線展距

成反比，亦即測線展距越長則側向解析度越差。於要求高解析度的工址調查，勢必以縮短側線展距所得頻散曲線代表其所量測之空間範圍方可滿足側向高解析度。但，應用震測取得地層參數的目標中，除了側向解析處的需求外，亦希望能探測較深度的地層情形。表面波震測法的探測深度與測線展距相關，展距越大可正確量測之波長越長、探測深度越深，在要求側向解析度的前提下，以有限的接收器勢必會造成深度地層探測的困難。

4.近場效應與遠場效應：當 MASW 試驗進行測線佈置需決定近站支距(X_0)，但近站支距的決定會受到近場效應與遠場效應的牽制(Park et al., 1999)。雖然 MASW 可利用一組測線的配置獲得各個頻率的資料，然近場效應會使得低頻波的資料品質受影響，遠場效應會使得高頻波的資料品質受影響。近站支距決定後，近場效應通常發生在測線較前方之受波器。震源敲擊後，低頻波(波長較長)在測線前幾個受波器處尚未成形，且受到未衰減的實體波干擾，因此前幾個受波器所收到低頻波的品質相對較差。遠場效應通常發生在測線後方受波器，主要因為高頻波(波長較短)的衰減嚴重，導致測線後幾個收波器收到高頻波的品質相對較差。

由上述的問題可知，施測的目標(側向解析度、探測深度)以及離散的訊號處理會使得施測參數(近站支距、接收器間距及展距)無法兼顧，而有互相矛盾的情形產生。陳逸龍(2004)在目前的多頻道表面波震測法施作方式下，提出施測參數的準則，將彼此間的衝突降至最低，而得到較為良好的震測結果，並以實際試驗探討 pseudo-section 概念(Lin et al., in press)作為解決此衝突問題的可能性。

2.3 Pseudo-Section 概念

Pseudo-Section 的概念是固定接收器位置，藉由多次改變震源擊發處，而後將這些資料透過縫合(seaming)的技巧，將不同震源處的資料整合，模

擬出一極長展距的震測資料(Lin et al., in press)。舉例來說，如圖 2.19 所示，以四個接收器進行 pseudo-section 概念施測，選用近站支距為 1 公尺，接收器間距為 1 公尺，將震源位置一次往後移動一個測線展距(3m)的距離。第一個震源處施作時可得到支距範圍 1m~4m 的資料，第二個震源處施作後可得到支距範圍 4m~7m 的資料，第三個震源施作後可得到支距範圍 7m~10m 的資料。以此類推，進行多個不同震源位置試驗之後則可得到足夠展距範圍的資料用以避免資料洩漏。換言之，若重複施作八個不同震源位置可分別得到與震源相距 1~4m，4~7m，7~10m，10~13m，13~16m，16~19m，19~22m，22~25m 的震測資料，將資料組合即可得到類似 1~25m 展距範圍資料。

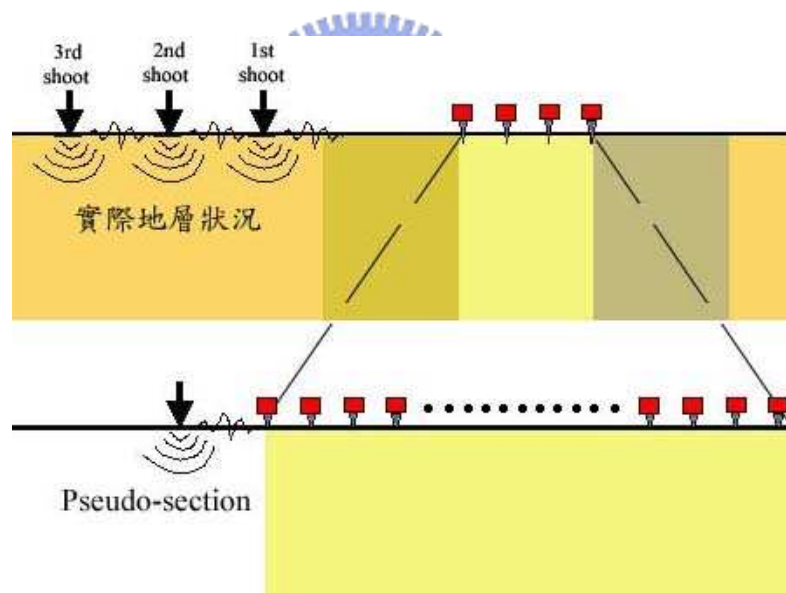


圖 2.19 pseudo-section 概念示意圖

此種施作技巧可模擬夠長的測線展距用以避免空間上資料洩漏的問題，且其所代表之取樣空間為同一中點處之地層剖面資料，即使擷取系統所能允許接受頻道不夠，或受波器間距過小而造成測線佈設空間有所限制，皆可利用 Pseudo section 的概念擴展所需要夠長之測線展距。如此一來，在施測上便可以有限的接收器，採用較小的接收器間距而又能獲得夠大的

測線展距，解決傳統多頻道表面波震測法施測參數互制衝突的行為。

2.4 P-SV 震波模擬方法

在震波模擬的研究領域中，其可分為解析方法以及數值方法兩種。解析方法是利用數學的求解過程得到符合理論的實際解（此解以解析解名之），而數值方法是利用數學上的近似求解方式得到我們欲求值的近似解（此解以數值解名之）。解析解可以得到理論基礎上最正確的震波傳遞情形，然而，在目前的解析上，其僅能處理水平層狀均質均向地層（Helmberger, 1968；Fuchs and Muller, 1971；Cormier and Richards, 1977；Kind, 1978；Cormier, 1980；Alekseev and Mikhailenko, 1980；Wang and Herrmann, 1980；Harvey, 1981；Korn and Muller, 1983；Panza, 1985）或是有條件式的具有側向變化的均向地層（Chapman, 1978；Chapman and Drummond, 1982）。然而，在許多重要的震波傳遞問題上，我們所面臨的是具有高度側向變化的地層結構，尤其以工程的需求角度來看，局部區域的非均質情形常會需要納入考量範圍。這樣複雜的結構，並不容易獲得通用的解析解，即使有能力解決，卻可能相當耗費計算時間，使我們需要使用較具柔性的數值方法，犧牲可允許的誤差，得到具有高度側向變化地層的震波傳遞情形。在本節中，作者將對震波模擬的解析方法以及數值方法作一簡單回顧與介紹。

2.4.1 解析方法

第一個由解析方法獲得的震波模擬是 1904 年由 Lamb 所推導出在均質均向的半無限域空間中，受土層中一衝擊式點震源(Impulsive Point Source)擾動所引起的地層振動資料。此一人工的模擬震波資料已將 P 波、S 波以及雷利波(Rayleigh Wave)包含在內，然而，這結果與實際記錄的資料比起尚過於簡單。1948 年，Pekeris 以一連串的研究工作成果提出以震態疊加方式以及不同射線路徑所引起的反應總合解決水平層狀均質均向地層(後續將以層

狀地層表示)位移問題的可能性，並建議在欲得到近距離處或是初始震動反應的需求下，以使用射線理論(Ray Theory)為佳；若與得到遠距離處或是較慢到達的震動反應，則以震態疊加(Modal Summation)模擬較為適合。1968年 Helmberger 提出廣義射線理論(Generalized Ray Theory)，自此開始了各種基於不同理論而同樣以層狀地層作為模型的震波模擬。雖然層狀地層模型無法真實的表現出具有側向變化地層的震波傳遞情形，但由於這樣的理論值已能基本符合大尺度現地狀況的需求，並也能快速的得到模擬結果，而使得以這樣的地層模型進行的震波模擬技術依舊受到重視。

至目前為止，較為被人使用的層狀地層的震波模擬理論方法大致有五種，包括了：廣義射線理論(Helmberger, 1968；Muller, 1969；Ben-Menahem and Vered, 1973)、全波理論(Full-Wave Theory, Cormier and Richards, 1977；Choy, 1977)、WKBJ 理論(WKBJ Theory, Chapman, 1978)、空間頻率/慢度積分法(Wavenumber or Slowness Integration Methods, Kind, 1978；Cormier, 1980；Wang and Herrmann, 1980；Ingate et al., 1983；Ha, 1984)以及震態疊加法(Modal Summation Method, Takeuchi and Saito, 1972；Harvey, 1981；Panza, 1985)。其中，前三項方法適用於實體波所造成的地層反應，而後兩項方法可同時獲得實體波與表面波所造成的地層反應，亦即完整的地層反應情形(Muller, 1985)。

頻率-慢度域與空間-時間域：由於上述這些理論方法都牽涉了數學上的轉換，通常是傅立葉轉換或漢克爾轉換(Hankel Transform)，透過轉換使原本在空間-時間域中的地層位移函數轉換至頻率-慢度域(可參閱 Aki and Richard, 2002 對不同轉換方式進行更深入了解)。因此，在對各個不同的理論方法做概念式介紹之前，我們將先簡單說明頻率-慢度域與空間-時間域中地層位移函數的關係。

假設有一水平層狀均質均向地層，在地層某深度有一點震源存在，我們採用圓柱座標系統 (r, θ, z) 對空間進行描述，自地表垂直向下為 $+z$ 方向。假定點震源為圓柱對稱，地層震動將與 θ 無關，則在地表面的地表位移 $u(t, r, z=0)$ 可單純表示為時間以及地表位置與震源水平距離 r 的函數。對於地層位移函數 $u(t, r, z)$ ，可透過雙轉換(Double Transform)轉換至頻率-慢度域 $U(\omega, p, z)$ 。我們可將時間-空間域上的位移 $u(t, r, z)$ 表示為：

$$u(t, r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \exp(i\omega t) \int_{-0}^{\infty} dp \cdot J_0(\omega pr) U(\omega, p, z) \quad (2.104)$$

其中， U 為頻率-慢度域中的地層位移函數； ω 為頻率； p 為慢度； J_0 是一般使用的貝索函數(Bessel Function)。對於層狀地層的位移情形的解析解來說，處理的技術差異主要就在於如何解出 U 的控制方程式解及如何處理不同域的轉換。從式((2.104)中可知，時間-空間域中的地層位移情形可以透過對頻率-慢度域中的位移函數積分獲得。因此，對於函數 U 在慢度/頻率的複數平面上性質的了解是很重要的，這些特性將牽涉欲獲得時間-空間域地層位移情形時應如何劃分所需的積分路徑，及在積分過程中需做哪些的假設，而這些不同的劃分及假設將會影響這些理論方法所能適用的範圍 (Clarke, 1989)。

2.4.1.1 射線理論

在震波模擬上，有一派學者採用射線理論作為基礎，認為地層的反應是由於波的射線所造成，其最基本假設便是此波的頻率極大。一般常見的有廣義射線理論、全波理論以及WKB理論。

廣義射線理論：完整的頻率-慢度域地層反應 U 可視為是在地層中以不同能量管道(Route)傳遞的射線路徑(Raypath)所造成的地層反應總和，而這些地層反應是由在地層中傳遞的 P 波、S 波及其在介面上的折射及反射所造成的

結果。廣義射線理論是藉由清楚分離出不同射線路徑的到達波(Isolated Arrival)，然後逐一將這些波對同一位置的影響作加總而得到模擬的地層反應。如圖 2.20 所示，假設有二組以不同慢度 p 前進的射線，因為不同的 p 而會有不同的路徑產生。對於 A 點來說，造成其位移的除了路徑 1 的反射波外尚有路徑 2 的折射波，將這兩種波的影響皆考慮便是廣義射線理論的基本精神。

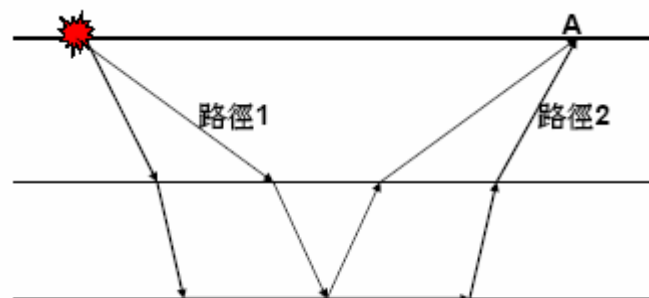


圖 2.20 廣義射線理論示意圖

1968 年，Helmberger 藉由 Cagniard 所發展而由 de Hoop(1960)修正的理論，採用 Laplace 轉換將時間-空間域的位移函數轉換至頻率-慢度域，並對慢度 p 進行變數變換，使得原本由零積至無限大的積分變成在複數平面上有限的封閉曲限，亦即 Cagniard 積分路徑的積分。如此一來，在頻率及慢度上的積分將能互相抵消而只剩下時間上的積分。在這技術中最困難的要屬將 Cagniard 積分路徑找出，因為這積分路徑是以非顯性的方程式呈現，並且會因為不同的射線路徑及不同的計算位置而不同，常需耗費許多時間 (Clarke, 1989)。此方法對於高頻及計算相位角上有極好的結果，但對於有較多水平地層的狀況或是須計算遠距離處的位移便不適合 (Wang and Herrmann, 1980)。

全波理論：雖然廣義射線理論已經納入了折射波與反射波的影響，然而在實際上，地層的震動情形並不僅止於折射波與反射波的影響，其尚有波前

或是沿著不連續介面前進的波等非地層幾何不連續(nongeometric effect)所造成的影響。為能將這些影響包括於理論中，全波理論直接對慢度域及頻率域積分，以近似法轉換射線理論(Ray Theory)中頻率-慢度域上的地層反應函數後，將原本是實數慢度的積分分解為在複數慢度平面上的積分，並以劇降近似(steepest descent approximation)技巧解決鞍點(saddle point)上的積分困難，維持頻率上的積分不變(Kennett, 1983)，而得到最後時間-空間域上的地層反應。這樣的方式使得其可處理鞍點處的震波影響，進而增加了模擬震波的準確性。

WKBJ 理論：WKBJ 理論是由 Chapman 在 1978 年時提出在有低速帶夾層或在 caustic 處(請參考 Aki and Richards, 2002)時，射線理論會無法計算或得到錯誤的地層反應的修正方法。此理論名稱的由來是 Chapman 使用 Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys 四人所提出的理論，得到頻率-慢度域中 U 的近似值，先對頻率做積分，再在複數慢度平面上延著實部軸進行慢度的積分。此方法值得一提的是它可自然的對地層反應進行平滑化的動作，而使得 caustic 的存在不成問題。然而與全波理論比起，此理論較為無法考慮頻率相關的問題，但可有較為快速的計算(Muller, 1985)。

2.4.1.2 空間頻率/慢度積分法

概念上，這一類的方法是將進行傅立葉轉換後得到的頻率-慢度域上的 U 以積分的方式得到時間-空間域的 u 。這樣的作法似乎與上述方法相同，然而其差別在於，上述三個方法的理論基礎都是建立在射線理論(Ray Theory)上，亦即考慮波場中頻率極大時的情形，僅考慮較為高頻的實體波 P 波與 S 波的影響。但此類方式的理論基礎不將 P 波與 S 波的影響抽離出來看待，不僅考量頻率趨近於無限大時的地層反應，亦考慮了其他頻率的狀態而得到完整的震波模擬地層反應。

這類方法中較為人所熟悉並常被使用的是反射係數法(Reflectivity Method, Fuchs, 1968 ; Fuchs and Muller, 1971 ; Kennett and Kerry, 1979 ; Kennett, 1983)。反射係數法的主要精神是將頻率-慢度域中的 U 分解成向上行進及向下行進兩部份，藉由使用傳遞矩陣(Propagator Matrix)的概念，使其符合層面間應力須連續的邊界定義。重複進行此動作直至將每層的反射訊息獲得，而後使用快速傅立葉轉換及數值漢克爾轉換(Numerical Hankel Transform)得到前述的雙轉換結果。

一開始所發展的反射係數法(Fuchs, 1968 ; Fuchs and Muller, 1971)只侷限於無自由表面存在且震源在反射係數收集區的另一側的地層模型，而在慢度上的積分也只能是慢度對應在入射波的角度為實數時的範圍(Clark, 1989)。經過 Kennett and Kelly (1979)及 Kennett (1983)對此方法的改良，其將所要計算的反射係數分成震源以上以及震源以下兩部份進行計算，而後分開積分加總，使得自由表面存在並且任意震源位置的地層模型震波模擬得以實現。此外，在這基礎上只需將在慢度的積分範圍擴大至基態表面波的慢度處，便可獲得完整的震波模擬(Clark, 1989)。

2.4.1.3 震態疊加法

震態疊加法的要義是將地層反應視為所有存在的表面波震態反應的總和(Takeuchi and Saito, 1972)，藉由將在頻率-空間頻率域(空間頻率(wavenumber)與頻率及慢度有關，頻率-空間頻率域是頻率-慢度域的一體兩面，僅是變數的變換)中的 singular 位置(即表面波頻散曲線的位置)找出，我們便可使用殘數定理(Residue Theorem)將頻率-空間頻率域中的空間頻率積分改以殘數數列(Residue Series)表示。當有足夠數目的數列加總在一起，我們便可得到完整的地層反應(Harvey, 1981)。

震態疊加法在起初的發展中，採用 Tomson and Haskell 方法求得 pole

的位置，然而此方法在採用數值計算時，在高頻區會有精準度的問題，這使得早期的震態疊加法僅適用於取得頻率小於 1Hz 的震波反應。對於 Tomson and Haskell 方法在高頻會有精準度的問題，現已有許多處理方式可解決(請參閱 2.1.2 節所列參考資料)，最常為使用的是 Knopoff's Method (Knopoff, 1964; Randall, 1967; Schwab, 1970; Schwab and Knopoff, 1972) 及 Delta Matrices (Pestel and Leckie, 1963; Thrower, 1965; Dunkin, 1965; Watson, 1970)。如此一來即使至 10000Hz 部份的 pole 位置亦能準確的求出(Schwab et al., 1984)，使得震態疊加法模擬出的地層反應更加準確。

到此，震態疊加法已將在複數空間頻率平面上積分時 pole 對地層反應的影響考慮，然而，如圖 2.21，此圖是表示欲取得在頻率/空間頻率域中完整的地層的總反應時在空間頻率複數平面上的積分情形，其不僅要考慮複數空間頻率上 pole 的影響，亦應要同時考慮 branch cut、branch point 的部分，若不考慮此二處對地層反應的影響，將會漏失掉反應初期 P 波或是 S 波的震動，而無法獲得全部的地層反應。Harvey 於 1981 年提出了震態鎖近似法(Locked Mode Approxiation)，避開在 branch cut 的積分，而改以震態疊加的方式處理。其作法是在極深的位置置入一極高速地層，使得原本在 Reimann 面上的遺漏震態(Leaking Mode, Gilbert, 1964; Aki and Richard, 2002) 能在空間頻率的實數軸上出現，再以震態疊加的方式計算其對地層的影響，如此便可獲得完整的地層反應模擬(Harvey, 1981)。在使用此方法時有些許問題需要注意，例如需小心放置高速地層的深度，不讓其介面反射回地表的波干擾了原本地層的反應；此外，在尋找由於使用震態鎖近似法而鎖住的遺漏震態需要耗費極大的時間，使其極其相鄰的 pole 能被精準的找出(Wang, 1981)，才可有較好的結果。

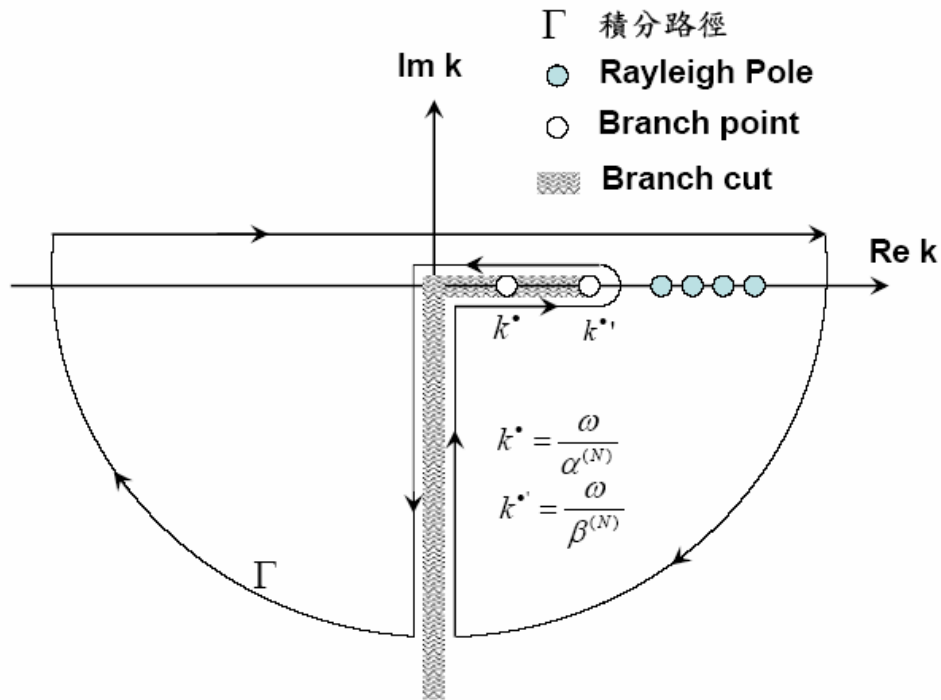


圖 2.21 複數空間頻率平面積分路徑示意圖

2.4.2 數值方法

震測資料的數值模擬目前已被廣泛的用來協助現地震測資料的解讀、提供震測試驗訊號分析和研究試驗參數設定所需的人造震測資料，以及對震波在非均質、非均向地層傳遞行為的瞭解。經過二、三十年的演進，目前已有許多不同的數值方法可供選用。除了廣為人知的有限差分法 (Alterman and Karal, 1968 ; Boore, 1972 ; Kelly et al., 1976 ; Virieux, 1986 ; Levander, 1988 ; Takeuchi and Geller, 2000 ; Zhang, 2004 等)、有限元素法 (Lysmer and Drake, 1972 ; Schlue, 1979 ; Chen, 1984 ; Kay and Krebes, 1999) 外，尚有擬頻譜法 (pseudo-spectral method) (Gazdag, 1973 ; Kosloff and Baysal, 1982 ; Johnson, 1984 ; Reshef et al., 1988a, 1988b ; Huang and Yeh, 1991 等)、混合數值法 (hybrid method) (Shtivelman, 1985 ; Kummer, Behle & Dorau, 1987 ; Ven den Burg, 1984 ; Emmerich, 1992 ; Moczo et al., 1997 等) 等技術。除此之外，許多合於上述數值方法概念但有不同操作上的應用變形，使得

數值模擬的成果越加豐碩。在下面三個小節中，作者將對有限差分法、有限元素法及擬頻譜法在震波模擬使用上作回顧並簡單介紹各方法的基本概念。

2.4.2.1 有限差分法

有限差分法簡單的說便是在離散的向度上，將控制方程式及邊界狀態中的微分項以差分式替代(Boore, 1972)，使得原先的微分方程式變成簡單的四則運算式(Mocoz, Kristek and Halada, 2004)。當我們要將有限差分法應用至特定的控制方程式或微分方程式中時，總括來看有三個主要步驟：先(1) 建構離散的有限差分離散模型，亦即建構離散的網格，並對微分方程式導入有限差分式。然後對導出的有限差分運算式進行(2) 有限差分離散模型的分析，確定離散模型的收斂性、穩定性及餘尾誤差級數。最後使用計算系統協助(3) 疊代計算(iteration)。

網格系統(Grid)：使用有限差分法的第一步便是要先決定所採用的離散網格系統。所謂離散網格系統的意思是說，在微分方程式中，其所定義的時間及空間皆是連續，而為了將有限差分是導入，必須將連續的空間以及時間向度離散，而以離散的點代替原本連續的物理量。這樣離散後的時間及空間向度，便稱做為離散網格系統，或簡稱網格。

在傳統的有限差分法使用上，皆是採用均勻方型網格(Uniform Rectangular Grid, Alterman and Karal, 1968 ; Boore, 1972 ; Kelly et al., 1976)，亦即其將空間離散為均勻分布的格點(如圖 2.22a 所示)。而後為因應不同的使用需求而有均勻三角形網格(Uniform Trigular Grid)、非均勻網格(non-uniform grid)等網格系統的使用(如圖 2.22b,c,d 所示)(Moczo, 1989 ; Zhang, 1997 ; Pitarka, 1999)。

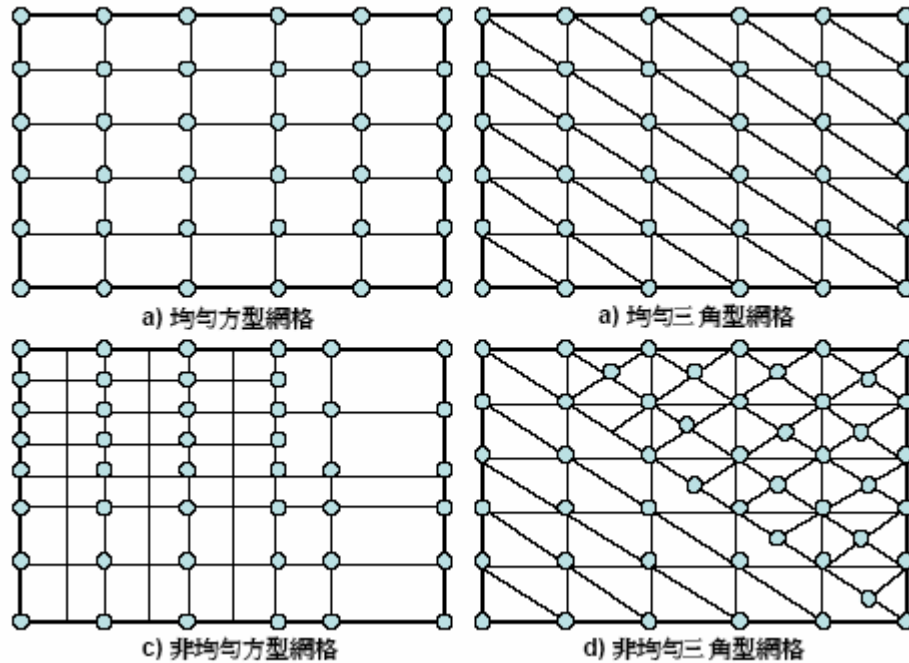


圖 2.22 有限差分法網格系統示意圖

以均勻方型網格舉例，若有一個具有三變數的物理量其變數為 (x,y,t) ， x 表示空間上水平向， y 表示空間上垂直向， t 表示時間，則在這三個量度上，其離散後的變數 x_i 、 y_j 、 t_k 定義為：

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_0 + i\Delta x \quad , \text{ for } i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 y_j &= y_0 + j\Delta y \quad , \text{ for } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 t_k &= t_0 + k\Delta t \quad , \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

其中， $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ 分別為在 x 方向、 y 方向以及時間軸上，離散後相鄰兩點的間距； x_0, y_0, t_0 為網格中各向度上任一點的實際值。假設格點上的物理量為 $U(x_i, y_j, t_k)$ ，則可簡單表示為 $U_{i,j}^k$ 。

標準有限差分式(Standard Finite Difference Approximation):當離散網格系統選定後，便可開始選用適當的有限差分式導入微分方程式中。習慣上，對於一開始發展有限差方法時應用在均勻方型網格系統的有限差分式，我們便稱其為標準有限差分式。假設有一函數 $F(x)$ 存在有連續的一次微分式，則此微分式可以採用有限差分式((2.106)~((2.108)式進行導入：

$$\text{前向差分式} \quad F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + O(h) \quad (2.106)$$

$$\text{後向差分式} \quad F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.107)$$

$$\text{中央差分式} \quad F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.108)$$

其中， h 惟一極小的數； O 為餘尾誤差， $O(h)$ 稱作一級餘尾誤差； $O(h^2)$ 稱作二級餘尾誤差，級數越大表示誤差較小。此餘尾誤差用來表示有限差分式的誤差估計，誤差級數估計方式是使用泰勒展開式

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x) \quad (2.109)$$

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \dots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)$$

對 $F(x+h)$ 、 $F(x-h)$ 等位於有限差分式右側的函數進行展開後，以單一式子或以線性方式組成上述三式結果，而剩下未出現在差分式中的展開項便以 O 來表示。若其展開至一次微分項則寫做 $O(h)$ ；若其展開至二次微分項則寫做 $O(h^2)$ ，以此類推。

基於使用上對於誤差大小的忍受度，除了上述的一級及二級餘尾誤差差分式外，我們可以採用更高級數的餘尾誤差有限差分式。這些高級數誤差有限差分式可用上述方式導出，如

$$\text{前向差分式} \quad F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 4F(x+h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2) \quad (2.110)$$

$$\text{後向差分式} \quad F'(x) = \frac{3F(x) - 4F(x-h) + F(x-2h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.111)$$

中央差分式

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 8F(x+h) - 8F(x-h) + F(x-2h)}{2h} + O(h^4) \quad (2.112)$$

由((2.106), ((2.107), ((2.108), ((2.110), ((2.111), ((2.112)式可以發現，雖同樣都稱前向差分式、後向差分式及中央差分式，但其所需的鄰處格點值以及係數皆不相同。前向、後向或是中央差分式，其僅是表達出對某一格點位置上的 F 做一次微分差分時與所需鄰處格點值的關係(即是，前向差分式在計算 $F(x)$ 處的一次微分時，需要有在 x 前方的 $F(x+h)$ 值及 $F(x+2h)$)，因此，通常為了區分不同餘尾誤差級數的差分式，會將餘尾誤差的級數一併表示。例如，((2.112)式便可稱作四級中央差分式(fourth-order central difference approximation)。對於更高級餘尾誤差的一次微分差分式或是更高階的微分方程的有限差分式，都可使用相同的方式獲得，在這不詳加介紹，可逕行參考 Mitchell and Griffiths (1980)、Morton and Mayers (1994)或 Durrant (1999)等人的著作，有詳細的推導及應用。

一致性、穩定性與收斂性分析：在採用有限差分法的時候應要特別注意幾點有限差分運算式的特性。首先，對於有限差分式與其所欲計算的微分式的一致性(consistent)。一致性的意思是說，當離散的間距趨近於零的時候，有限差分式將會與微分式幾乎相等。大致而言，這一點是可確認的。經由泰勒展開式得到的差分式餘尾誤差級數可很容易的證明這點，但在某些情況下，必須要使空間間距與時間間距符合某種關係時才可成立。若一差分式具有這樣的特性，我們稱此差分式是有條件的具有一致性(Conditionally Consistent)。惟有當一致性能成立時，才可使用此有限差分式。

再者需注意的是導出的差分運算式(Finite Difference Equation)所得到的解是否具有穩定性。當微分方程的解具有結界(bounded)時，差分運算式所得到的解亦具有結界，則稱此差分運算式是穩定的；但若差分運算是所得到的解並不具有結界，則稱其是不穩定。大致而言，我們所探求的物理現象都是具有結界的，這點可由微分方程的解析解得知，因此我們期待使用差分運算式所獲得的解亦是具有結界。若任意的空間與時間離散間距都可使差分運算式滿足穩定性的要求，則稱此運算方程式是無條件穩定(unconditionally stable)；反之，若需使空間與時間的離散間距滿足某種關係時才可達到穩定性的要求，便稱其是有條件式的穩定(conditionally stable)。若無法達到穩定性的要求，則此差分運算式所獲得的解將無法表現實際解的行為。穩定性的分析只能對具有線性行為的微分方程進行，若針對對非線性問題，則通常需要先使問題成為區域性線性(linearized locally)。最常被使用於穩定性分析的方法是 von Neumann Method，對於此方法的說明可參考 Moczo, Kristek, and Hakada (2004)。

最後一個需要對採用的差分運算式進行解析的是其收斂性(Convergent)。收斂性所表示的是，當離散的間距趨近於零的時候，微分方程的解與差分運算式所得到的解會幾乎相等。在這需要做一個釐清，一致性與收斂性所關心的是不同的兩個問題：一致性所關心的是差分式本身與微分這動作的關係，而收斂性所關心的是由差分運算式所得到的解。對於收斂性的分析是困難的，然而，幸運地，收斂性與一致性以及穩定性有絕對的關係。根據 Lax equivalent theorem，在數值架構中，當一致性與穩定性同時滿足時，其必然亦滿足收斂性 (Moczo, Kristek and Halada, 2004)。

因此，在採用有限差分式時應當要注意一致性與穩定性的滿足條件。除此之外，採用不同的有限差分式以及網格系統，會因為不同的問題而有

其需考慮的特定問題，若僅是盲目的使用任一有限差分法於不同的問題上，而不對其可能造成的誤差進行了解，過度信任所得到的結果，很容易便有錯誤的使用發生。以震波模擬問題而言，在採用有限差分法時，除了要注意滿足穩定性的條件，還應當注意因為不同網格系統而造成不同程度的假頻散現象(Grid Dispersion，即在地質材料本身性質外，因為空間離散而造成波速隨頻率變化的現象)，亦應該要注意其整個有限差分系統(包含控制方程式，網格系統，以及使用的有限差分式)所能應用的地質材料狀況(Moczo, Kristek and Halada, 2004)。

有限差分法震波模擬：在震波數值模擬領域中，有限差分法因為在應用上及程式撰寫上的便利性成為最為廣為使用的技術。其在震測資料模擬的研究上，最先是由學者 Z. S. Alterman 在 1968 年代導入使用。她與她的研究團隊利用標準的有限差分法，施以不同的起始值與邊界值進行一系列震波在均質均向的半無限域土層中傳遞的模擬 (Alterman and Kornfeld, 1968；Alterman and Karal, 1968；Alterman and Rotenberg, 1969；Alterman and Loewenthal, 1970；Ottaviani, 1971；Ilan et al., 1975 等)。然而，如前所述，我們常須了解的是具有不平整介面且有側向變化的土層，因此 Alterman 研究團隊的數值計算模式發展到 1972 年後，便有針對在非均質土壤中的二階微分方程的有限差分計算模式出現 (Boore, 1972)，並加以改進擴充 (Kelly et al., 1976)，使得運算式能自動符合模型內部的地層材料變化，而無須設定內部的邊界狀態。

然而，在標準有限差分法的架構下所進行的震波模擬，容易因為高波松比(Poisson's Ratio)地層材料的存在而發生即使已滿足穩定性條件，亦會有不穩定以及嚴重的假頻散現象產生的問題。為解決這問題，目前在有限差分法網格系統中受到大量採用的錯置網格(Staggered Grid)系統是由

Madariaga 在 1976 年提出，應用在地震時地層裂隙的動態模擬上。錯置網格與均勻方型網格的主要差異是在於，在錯置網格中，各物理量的定義位置不在同一格點上，且相距離散間距的一半(如圖 2.23, 2.24 所示)。此一網格系統由 Virieux(1984,1986)引進至震波模擬上使用，採用二級有限差分式導入控制方程式。其在控制方程的處理上，與過去以位移做為導入物理量處理二階微分方程的方式不同，以速度以及應力為其導入物理量，成功的將控制方程降為一階微分式，因而增加了其導入有限差分式的簡單性。因其採用速度及應力作為導入物理量，故常以速度應力法(Velocity-Stress Method)稱之(詳細內容請見 3.1.1 節)。經由 Levander (1988)將四級有限差分式導入速度應力法，其發展已大致完成。由於其計算上的效率以及準確性，雖仍有許多新概念的方法出現，但依舊是目前有限差分法在震波模擬上的主流架構(Olsen and Schuster, 1992; Graves, 1993; Rodrigues, 1993; Yomogida and Etgen, 1993; Graves, 1996; Robertsson and Holliger, 1997; Hayashi and Suzuki, 2004)。

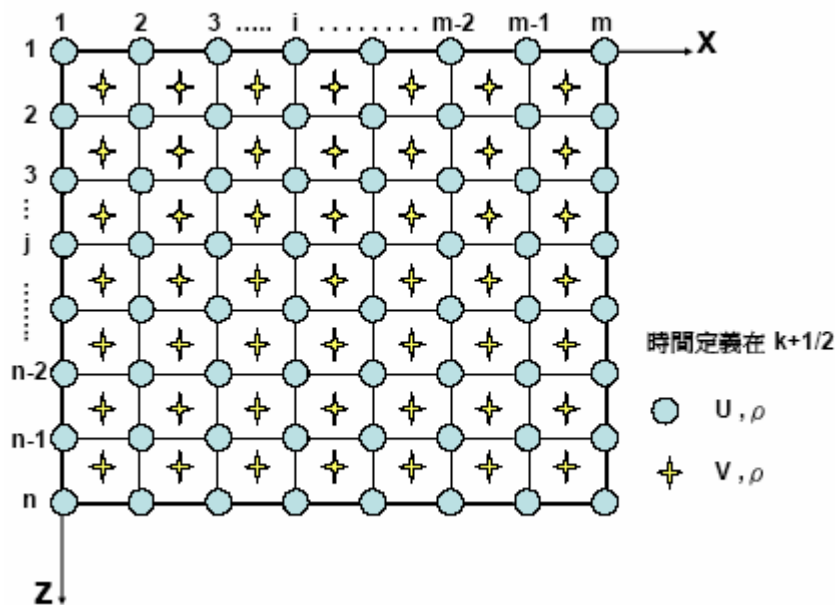


圖 2.23 速度錯置網格架構，時間定義在 $k+1/2$

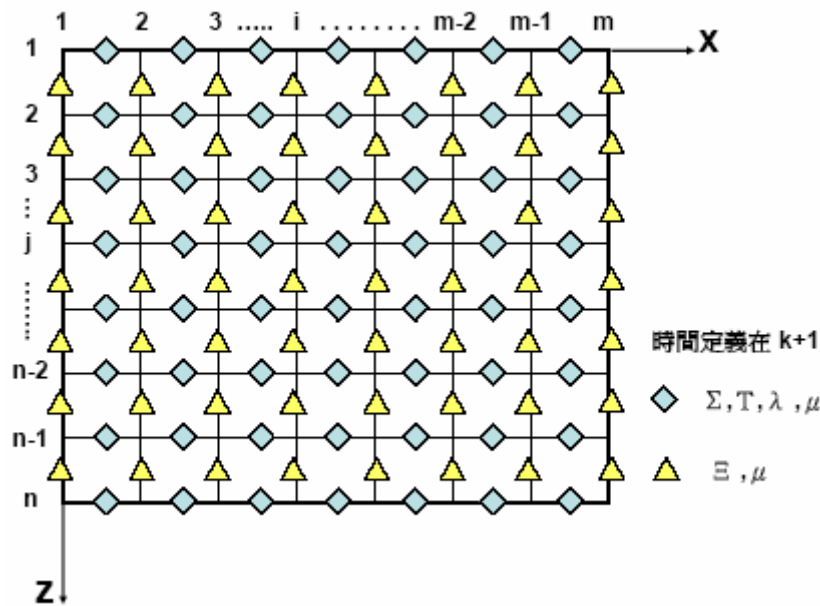


圖 2.24 應力錯置網格架構，時間定義在 $k+1$

由於速度應力法所得到的是速度值而非位移值，須經由對速度進行時間積分才可得到位移。然而在這存在著一問題，積分的過程中會有一未知的常數存在，而使得所得位移會與實際位移有一常數差距，造成震波的位移歷時(time history)有平移現象的可能；又積分過程需要時間，因而降低了些許效率。於是，在 1990 年 Luo and Schuster 提出位移應力法 (Displacement-Velocity Method)，依舊採用錯置網格，但以位移及應力為其導入物理量。在這雖需處理位移的二階微分，但其不須經由積分便可得到位移資料，進而使其效率增加。

近來對於地層的震波模擬除討論純彈性的非均質土層外，還對具有黏滯性及非均向的土層感到興趣，更複雜的定義關係使得錯置網格不敷使用，因此 Magnier et al.(1994)引進了 Andrews(1973)提出的部份錯置網格 (partly-staggered grid) 系統。部份錯置網格與錯置網格的不同是在於，錯置網格的物理量是定義在不同的位置上，而部分錯置網格則是有些共用格點而有些不共用。由於其能使得錯置網格無法應用的非均向地層模擬問題

得到解決，而引起不少的注意與應用(Zhang, 1997；Saenger et al., 2000；Saenger and Bohlen, 2004；Cruz-Atienza and Virieux, 2004)。

2.4.2.2 有限元素法

在數值模擬中，除了有限差分法之外，有限元素法亦是相當常用的一種技術。其藉由將實際的物理或數學問題模型簡化為許多元素(element)的組合，先針對每個離散後的元素進行計算後，再將所有的元素整合而得到整體的表現。在操作上，其可以概略的分為六個步驟：(1) 將問題進行離散(Discretization)；(2) 選擇每個元素中的內插(interpolation)方式；(3) 導用有限元素法計算式；(4) 組結(assembly)各個離散的元素；(5) 邊界條件給定(constrain)；最後(6) 求解。

模型離散化：在使用有限元素法進行數值解時的第一個步驟便是將物理或數學模型離散化，將原本在空間中連續的模型，分割為許多無重疊元素的組合(如圖 2.25 所示)。很直觀的可以知道，當我們使用更多更小的元素去組合成原本連續的模型時，我們將能有更接近真實的解。在圖 2.25 的例子中，原本是弧狀的邊界，經由採用多邊形元素將其離散化後組成一多邊形形體，因而有誤差的產生，然而，在有限元素法中是容許具有弧形的元素，使得邊界的定義上可以完全符合，但這需採用更為複雜的元素作為組合元件，也需要更高技巧的解決方式。

常被用於有限元素法中的元素，對二維空間問題來說有三角形與四邊形，又因為在這一元素中所使用的節點數目不同而可分為線性元件(linear member)、二次元件(quadratic member)及三次元件(cubic member)等不同元素種類(如圖 2.26)。元素種類的採用間接影響了內插方式的選用，亦會對解決的問題產生不同程度的誤差。例如對於解決二階微分的問題，若以線性元

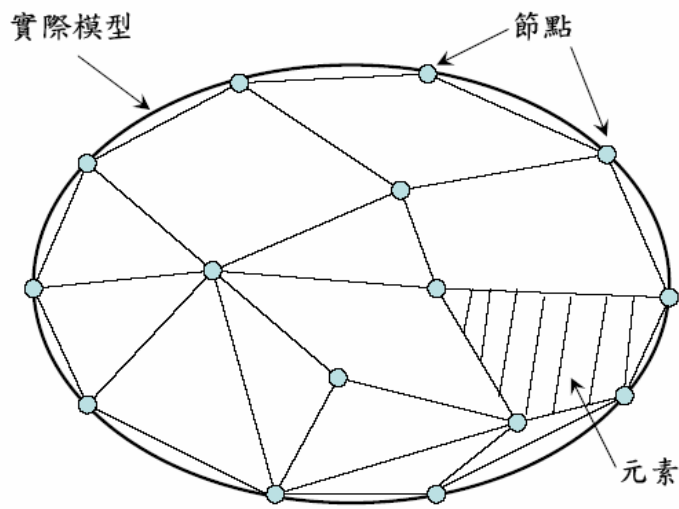


圖 2.25 二維模型離散化示意圖

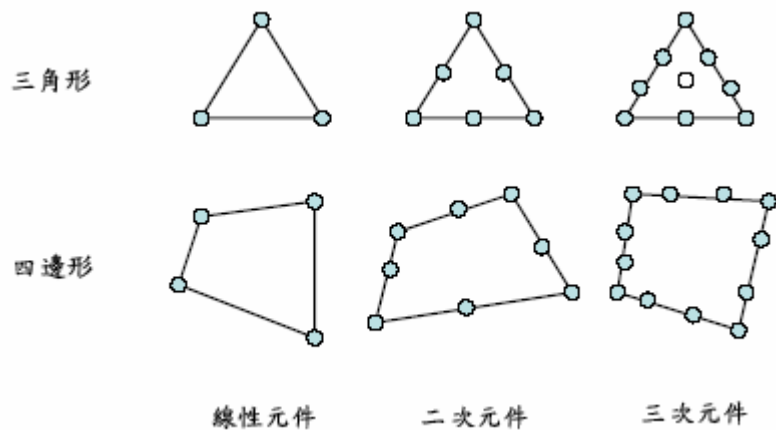


圖 2.26 二維空間問題常用元素

件的元素組成具有弧度的邊界，在邊界周圍所得到的近似值常會向錯誤的值收斂；而若是同樣的離散方式要解決四階微分的問題，則其值必不收斂 (Kaliakin, 2002)。因此，在不同的問題情況下，必須選用不同的元素，以期能達到最佳的結果。

要對於每個元素的特徵進行了解，除了其形狀以及節點數外，還須了解節點的屬性、在每個節點上的自由度以及所將採用的內插方法。如圖 2.26 中三次元件的三角形元素，在此元素中的節點便有不同的屬性存在，一種是屬於圍外節點(exterior)，一種是內節點(interior)。圍外節點(圖 2.26 中填

實的位置)與內節點(圖 2.26 中中心未填實的圓圈處)的主要差異在於，圍外節點將會與其他元素的圍外節點共用或是在邊界上，而內節點則與鄰近元素皆無關。其次是在節點上的自由度，亦即在節點處所須計算的獨立未知數，以二維空間問題來說，節點處除了可以有水平方向及垂直方向的移動，亦可以有轉動方向的移動量(如圖 2.27)，每個節點上的自由度會因為問題的不同而有所不同。

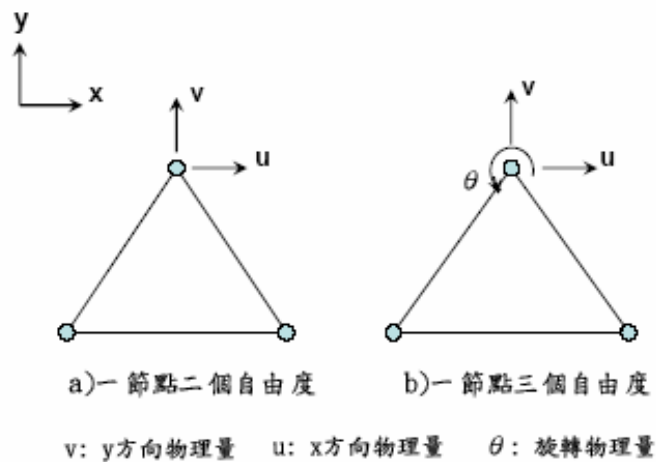


圖 2.27 節點自由度示意圖

內插方式：與節點相關的特徵中，還有一個極需注意的是內插方式。內插方式說的是一個元素內沒有節點的位置的值是如何以節點的值做表示。對應於不同的節點數的元素使用，內插的方式可以有線性(linear)或二次式(quadratic)等高次的內插方式，使得 e 元素中的 u 物理量可表示為

$$u^{(e)}(X) = Nu_n^{(e)} \quad (2.113)$$

其中， X 是一空間向量，表示在 e 元素中任一位置 u 物理量的座標； N 為一權重係數矩陣，用來表示元素中不同節點對此一位置物理量的不同權重； $u_n^{(e)}$ 為一向量，表示節點處物理量 u 的值。舉例來說，在一個二維空間中，以單自由度三個節點的三角形元素做離散後(如圖 2.28 所示)，在 e 元素中的 u 物理量可表示為：

$$u^{(e)}(x, y) = N_i(x, y)u_i^{(e)} + N_j(x, y)u_j^{(e)} + N_k(x, y)u_k^{(e)} \quad (2.114)$$

其中， N_i, N_j, N_k 分別為節點 i, j, k 的權重係數，與元素中所欲求的物理量座標位置 (x, y) 有關，以不同的內插方式會有不同的權重係數函數； $u_i^{(e)}, u_j^{(e)}, u_k^{(e)}$ 為在元素 e 中節點處的物理量 u 的值。

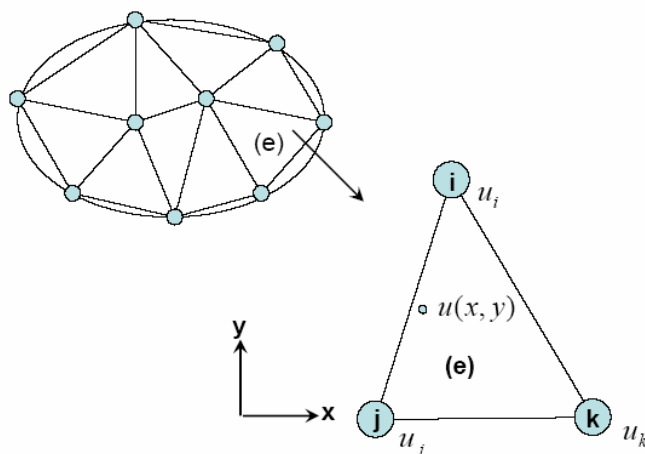


圖 2.28 元素與內插方式示意圖

內插的權重係數函數主要是在其相對的節點上為 1，其他節點為 0，而在這中間便是由內插方式計算。為使這樣的觀念得以表達，將問題降至一維空間來看。圖 2.29 a) 中 i, j 表示一個有兩個節點的元素，b) 中 i, j, k 表示一個有三個節點的元素。首先看圖 2.29 a)，對節點 i 而言，其內插權重在 i 的地方為 1，在節點 j 的地方為 0，而在 i 與 j 中間的地方是線性的內插，反之，對於節點 j 亦然。再看圖 2.29 b)，其以二次式為內插方式，但同樣的，對節點 i 來說，其內插權重在 i 為 1，在點 j, k 的地方為 0，而在這之間的便是以二次式進行內插。反之，對其他節點亦然。從這也可知前述提及元素的選用會間接的影響內插方式的選用原因：欲使用二次式為內插方式在一個一維元素中至少需要有三個節點，而若使用線性內插方式在一個一維元素中只需兩個節點。

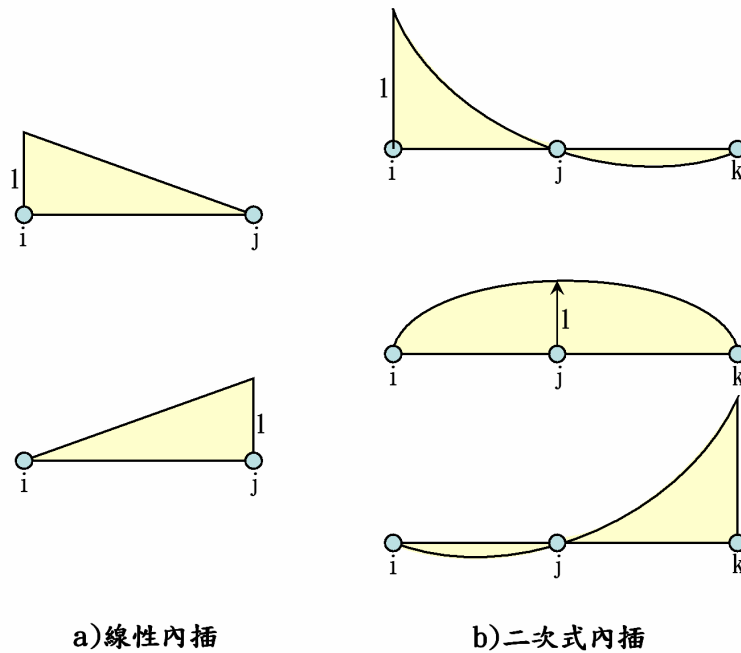


圖 2.29 一維空間問題內插權重係數示意圖

收斂性、協和性與完整性：對有限元素法的分析來說，其主要產生的誤差一部分是來自於離散化的過程，而有一大部分是來自於內插方式的選用。內插方式的選用並非是任一選取的，為了讓有限元素法得到的解有單一收斂(monotonic convergence)，亦即當離散時的元素使用越多時，其解的準確度會越高，內插方式的選用必須符合協和性(compatibility)及完整性(completeness)的要求。協和性所要求的可以分為兩項，一是平滑(smoothness)要求，亦即在元素內部內插的結果必須是連續的；另一是連續性(continuity)要求，亦即在每個元素邊界處(或圍外節點)對內插函數進行與控制方程式相同階數微分後，其不可為0。由此兩項要求便可知，協和性的要求是要確保當我們將元素與其周圍元素接合時不致會有不連續的間隙(gap)產生。而完整性所欲保障的是，確保即使當離散過程中所使用的元素數目增加，其將含有內插函數的值微分至常數的值都不會有所改變，確保這些微分後的常數在不同的元素數目下都有再現性。當一內插方式能達到此兩點要求便使得此有限元素法達到單一收斂的目的。

有限元素法計算式導用：內插方式確認可以使有限元素法的解具有單一收斂結果後，便可將此內插式代入針對不同問題所得到的控制方程式，再因應不同的問題採用戈林肯有限元素模型(Galerkin finite element model)或變異有限元素模型(Variational finite element model)導出有限元素運算式(詳細過程可參考 Kaliakin, 2002 或 Bickford, 1994)。導出的有限元素運算式以矩陣方式表達，其一般式為：

$$K^{(e)}U_n^{(e)} = f^{(e)} \quad (2.115)$$

其中， $K^{(e)}$ 是第 e 個元素的常數矩陣； $U_n^{(e)}$ 是第 e 個元素在節點上的未知物理量向量； $f^{(e)}$ 是第 e 元素節點處的”力”向量(此處力向量的意義並非是真的力，而是表示已知的作用物理量，只是因為有限元素法起初是應用於結構的計算，因此習慣上以力矩陣稱之)。

組結：以上述的式子我們將可得到每個元素處的區域性(local)有限元素運算式，當每個元素都計算完成後，我們需要將這些區域性的式子依照當初離散的相互關係組結起來，而得到全域性(global)有限元素運算關係式，其一般是可以表示為：

$$KU_n = f \quad (2.116)$$

其中， K 是模型的常數矩陣； U_n 是模型中每個節點上的未知物理量向量，其未知數的個數與整個模型的全部自由度相同； f 是整個模型的”力”向量。這意思也就是說，將所有的未知數整合為 U_n 矩陣，依造 U_n 矩陣中未知數擺放的位置將得到的 $K^{(e)}$ 適當擺放至相對應的 K 矩陣位置，而對於相同位置的係數只需將其相加便可，而 f 亦是將相對應的 $f^{(e)}$ 係數置入便完成組結的步驟。

邊界條件給定：待全域性的有限元素關係式給定後，依照問題不同的條件給予自然邊界條件(Neumann boundary condition)、強制邊界條件(Dirichlet

boundary condition)或是兩者皆有的混合邊界條件，代入全域性的有限元素關係式中，而後以矩陣關係去除多餘的陣列，得到：

$$K^r U_n^r = f^r \quad (2.117)$$

其中， r 表示為去除多餘陣列後的全域有限元素關係式。而後求解便可求得未知數矩陣：

$$U_n^r = (K^r)^{-1} f^r \quad (2.118)$$

而獲得節點上未知數的解。

有限元素法震波模擬：相較於在震波模擬領域文獻豐富的有限差分法，有發表出的有限元素法相關討論文章極為缺乏，這除了有限元素法的使用較有限差分法困難外，也因為有限元素法的基本架構已大致發展齊全(Bathe and Wilson, 1976; Zienkiewicz, 1977)，在震波模擬的使用上只是處理邊界條件以及導用有限元素計算式的不同(Kelly and Marfurt, 1990)。震波模擬在有限元素法上最大的突破便是為了解決對地層反應的龐大計算量而發展出的數值計算方式(Marfurt et al., 1987)。

早期以有限元素法進行震波模擬的文章有 Lysmer 團隊在 1970 年代以在頻率域解得表面波波傳行為的一系列文章(Lysmer and Drake, 1971, 1972; Drake, 1972a, b)，這之後又有 Smith 對於有限元素法對實體波波傳以及地表自由震盪(Free Oscillations)情形所做的模擬(Smith, 1975, 1980)，而 Marfurt 以半無限域空間為例，探討以有限差分法及有限元素法進行波傳模擬的準確性(Marfurt, 1984)。這之後在震波模擬領域上有限元素法的討論便失之闕如。直至近年，因為對於複雜的地形效應以及具有高度側向變化的非均質非均向甚至具有黏滯性地層的探討需求，使得有限元素法逐漸恢復舞台，引起了許多對於高級數(higher order)有限元素法的討論(Cohen et al.,

1993, 1995 ; Padovani et al., 1994 ; Mulder, 1996 ; Kay and Krebes, 1999) 。 Mulder(1996)更以音波波動方程(Acoustic wave equation)在非均質地層中的傳遞結果說明，在非均質的條件下，有限元素法比有限差分法更為有效率。

2.4.2.3 擬頻譜法

擬頻譜法與有限差分法是相當類似的應用方法，然而擬頻譜法的計算效率卻高出有限差分法許多。根據 Fornberg (1987)對有限差分法與擬頻譜法的比較結果指出，對於相同大小的格網而言，擬頻譜法只需要使用四分之一倍二級有限差分式架構下的格點密度(亦即擬頻譜法可用 4 倍二級有限差分式的格點間距)，便可獲得相同的結果。這樣的高效率性使得擬頻譜法受到廣大的注意。擬頻譜法與有限差分法的主要差異性在於有限差分法對微分式所使用的近似法是區域性的計算式(Local Arguments)，如式((2. 106), ((2. 107), ((2. 108), ((2. 110), ((2. 111), ((2. 112)所示，其運算式通常只與微分處的鄰近點位有關，但擬頻譜法是全域性的(Global)，其微分式的近似法計算式需要空間上的所有點位參與。擬頻譜法可說是極限級有限差分法(Limit of Finite Difference Method, Fornberg, 1987)。

擬頻譜法與有限差分法 假設欲取微分值位置的格點數為 0，在其右側相鄰 i 點的格點數為 i ；在其左側 i 點的格點數為 $-i$ ，則有限差分法裡的中央差分式用於一階微分的格點係數 ξ 與餘尾誤差級數 $2p$ 的關係式(Fornberg, 1987)為：

$$\xi_{p,i} = \frac{2(p!)^2(-1)^{i+1}}{i(p+i)!(p-i)!}, \text{ for } i = \pm 1, \pm 2, \dots, i \neq 0 \quad (2. 119)$$

$$\xi_{p,i} = 0, \text{ for } i = 0$$

由((2. 119)式可知，在理論上存在著無限級餘尾誤差級數的有限差分法，其格點位置的係數為：

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \xi_{p,i} = \frac{2(-1)^{i+1}}{i}, \text{ for } i \neq 0 \quad (2.120)$$

當我們將問題假定為具有週期性行為並採用修正後的上述係數時，此極限級有限差分法便是擬頻譜法(Fornberg, 1987)。

網格系統：將擬頻譜法應用在微分方程的解題上，其基本的第一個步驟與有限差分法相同，必先選擇格網系統，將空間及時間做離散化的動作。在這部份上，擬頻譜法所可以使用的網格系統較不似有限差分法或有限元素法具有靈活性，其必然需要均勻的方形網格，以供其運算式的計算正常。因此，在此前提下的各種網格系統皆可使用，例如錯置網格系統(Fornberg, 1990)、非連續性網格系統(Discontinuous Grid, Wang and Takenaka, 2001)等皆可視問題需求而採用。

擬頻譜法近似式：擬頻譜法的基本精神是欲使用一加總的平滑函數(smooth functions)去逼近實際的解。亦即，假設若有一欲求得之物理量為 $u(x)$ ，則使用 $N+1$ 個平滑函數 $\phi_k(x)$ ，依各函數所佔權重 a_k 進行加總。其數學式表示為：

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x) \quad (2.121)$$

在這使用到的平滑函數 $\phi_k(x)$ ，為能提供我們將擬頻譜法應用在微分方程上的目的，其至少需要符合三項要求：(1) ((2.121)式要能快速達到收斂狀態。(2)給定的權重係數 a_k 須能容易的獲得另一權重係數 b_k ，使得

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x) \right) = \sum_{k=0}^N b_k \phi_k(x) \quad (2.122)$$

(3)要能快速的在權重係數 a_k 與在一網格系統格點上的 $u(x_i)$ 加總進行轉換。

在數學已發展的函數中，已有許多可滿足上述平滑函數的前提，然而，

對週期性問題而言，三角函數展開式(Trigonometric Expansions)，透過快速傅立葉轉換法能符合這三項要求，使其計算效率與有限差分法或有限元素法比起大為提升(對於非週期性問題而言，其所需考慮的尚有不連續與非週期性的問題，三角函數展開式無法滿足上述三點要求，然此問題並不在震波模擬的範圍中，因此不詳加描述，進一步資料可參考 Fornberg (1996)。在這我們將提出以三角函數展開式為平滑函數，並透過離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform)獲得權重係數的擬頻譜法。

假設有一物理量 u 是空間與時間的函數，且其存在空間一階微分及時間二階微分值，則其空間上對單一變數的一階微分可表示為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{N_x} \left[\sum_{k_x=0}^{N_x-1} u(k) \exp(2\pi i k_x x / N_x) \right] \\ &= \frac{1}{N_x} \left[\sum_{k_x=0}^{N_x-1} \frac{2\pi i k_x}{N_x} u(k) \exp(2\pi i k_x x / N_x) \right] \end{aligned} \quad (2.123)$$

其中，

$$\hat{u}(k_x) = \sum_{x=0}^{N_x} u(x) \exp(-2\pi i k_x x / N_x) \quad (2.124)$$

是 $u(x)$ 的離散傅立葉轉換； N_x 是在 x 方向上的格點數目。而其對雙變數的二階微分為：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{-1}{N_x N_z} \sum_{k_x=0}^{N_x} \sum_{k_z=0}^{N_z} \left[\left(\frac{2\pi i k_x}{N_x} \right) \left(\frac{2\pi i k_z}{N_z} \right) \right] \cdot \hat{u}(k_x, k_z) \exp[2\pi i (k_x x / N_x + k_z z / N_z)] \quad (2.125)$$

其中， $\hat{u}(k_x, k_z)$ 為 $u(x, z)$ 在 x 及 z 方向上的離散傅立葉轉換； N_z 是在 z 方向上的格點數目。擬頻譜法在應用上，近似式通常只使用在空間的微分上，而至於時間上的微分，便多是採用有限差分法相互搭配(Huang, 1992)。

對於上述離散傅立葉轉換的使用，在實際的作法中為使其更有效率都是以快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform)進行應用。若是對單一變數 x 進行一階微分，便先對物理量 u 在 x 方向上進行快速傅立葉轉換，將其乘上 ik_x 後，對 x 方向進行反向快速傅立葉轉換(Inverse Fast Fourier Transform)，便完成以擬頻譜法近似一階微分的動作。若是對雙變數 x 、 z 進行二階微分，則可分次先對 x 方向進行快速傅立葉轉換後，再對 z 方向進行快速傅立葉轉換，之後將轉換後的值乘上 $-k_x k_z$ ，再分別對 x 、 z 方向進行反向快速傅立葉轉換，便完成以擬頻譜法近似二階微分的動作。其中所牽涉到的快速傅立葉轉換，在這並不多做介紹，可逕行參考 Walker (1996) 或 Smith (1997)。

一致性、穩定性與收斂性：由前述已知，擬頻譜法與有限差分法有著極大的相似性，在使用上亦與有限差分法有著相同的問題考量。根據 Lax equivalent theorem，當數值架構能滿足一致性與穩定性時，必亦滿足收斂性。擬頻譜法的一致性是無庸置疑的，若以極限級有限差分法看待，其自然是滿足此一條件，因此，是否可使用擬頻譜法主要控制在穩定性滿足與否上。通常擬頻譜法是有條件性的滿足穩定性，其穩定的條件與有限差分法相去不大，但較有限差分法寬鬆。在此應要注意的是，即使在高級數有限差分法皆能滿足穩定性條件的情況下，擬頻譜法有時亦會有不穩定的情形產生(Tadmor, 1987)。擬頻譜法的穩定性分析較有限差分法複雜，其除了需考量非線性問題的困難外，尚需考量函數的平滑問題。對於擬頻譜法穩定性分析的討論可進一步參閱 Fornberg (1996)。

在這要在特別提出的是，由於擬頻譜法牽涉到離散傅立葉轉換的使用，此轉換所得到的是斬截(truncate)後的傅立葉展開數列，僅使用同間距格點上的值，格點間的值沒有計算而未能使用，因而有映頻(Aliasing)效應的問題產生。所謂的映頻效應是說，對於兩個不同頻率的波，以相同間距的

點位取值作代表而無法分辨此二者的情形，便稱為映頻效應(發生在空間中的映頻效應是兩個不同波數的波)。如圖 2.16 所示，虛線是 $-\sin(9\pi x)$ 的圖形，而實線是 $\sin(\pi x)$ 的圖形。若我們由 -1 開始每隔 0.2 取一點，則可發現，對兩個波形來說都得到相同的值，使得我們要由點位上取得的值反推原三角函數時會無法分辨，而有映頻效應的產生。

雖說在理論上此映頻效應會對結果產生問題，也已有數學技巧可避免映頻的發生，然而實際使用的經驗表示，對於與時間有相依關係的問題，映頻效應通常會有循環(Oscillatory)的現象，使得此映頻問題可忽略(Kreiss and Olinger, 1979)；而對於穩態的問題(即與時間無關的問題)，Canuto (1988) 亦表示映頻問題影響不大。但這並非是理論上的證明，只是由應用所獲得的現象歸結出的結果，因此在使用上還是該注意這問題所可能造成的影響。

擬頻譜法震波模擬：擬頻譜法最先是在 1970 年代由計算物理學家開始發展 (Orszag, 1972 ; Gazdag, 1973)，直至 1980 年代才由 Kosloff and Baysal(1982) 開始應用在震波模擬的領域上。Kosloff and Baysal(1982) 首先將擬頻譜法應用在二維的音波材料模型(Acoustic Model)的模擬，發現擬頻譜法較有限差分法在計算上有效率。Johnson (1984) 接續著 Kosloff and Baysal (1982) 的初步成果，將此技術用以計算三維的音波材料模型問題，與此同時 Kosloff, Reshef and Loewenthal(1984) 累積之前的經驗，將此法使用在控制方程式更加複雜的二維彈性材料模型上，亦即我們所要處理的地層震波模擬，從此開啟了擬頻譜法在震波模擬應用的大門。

直至今日，擬頻譜法已可應用於三維的震波傳遞模擬問題上。Reshef et al. (1988a, 1988b) 首先完成擬頻譜法在三維震波傳遞的應用。但由於三維問題所要處理的資料量非常龐大，即使以相對於有限差分法及有限元素法具有高效率的擬頻譜法來進行，依舊需要花費極大的時間，而使得問題的探

討論局限在音波(Acoustic Wave)的波傳問題上(例如，Chen and McMechan, 1993；Huang, Teng and Yeh, 1995 等)。為解決此一問題，Reshef et al. (1988b) 提出了使用電腦平行處理技術的概念，亦很快的被應用在一維、二維的快速模擬上(Renaut and Woo, 1992；Sato et al., 1994,1995；Liao and McMechan, 1993)，直至 1998 年才由 Furumura, Kennett and Takenaka (1998)將這技術落實在三維的震波模擬，進而增進了我們處理三維問題的能力。

由於擬頻譜法的良好表現，使得在計算上網格常常不需要過於細密，然而這樣的結果會造成在低速帶地區的部分資料細節遺失(Wang and Takenaka, 2001)。與有限差分法相比，在傳統的均勻方型網格系統(如圖 2.30a 所示)下，擬頻譜法較難以在低速帶區域進行細節資料的獲得。有鑒於此，Wang and Takenaka (2001)為解決此一問題，提出了非連續網格系統 (Discontinuous Grid，如圖 2.30b 所示)。其將整各網格分成許多不同的副區塊(Subdomain)，對於低速帶區域便使用較細密的網格，而高速帶便使用較粗網格，使得擬頻譜法對於地質材料波速差異過大的地層亦能有效的反應出其間差異。對於網格的使用，與有限差分法比起，在擬頻譜法使用上討

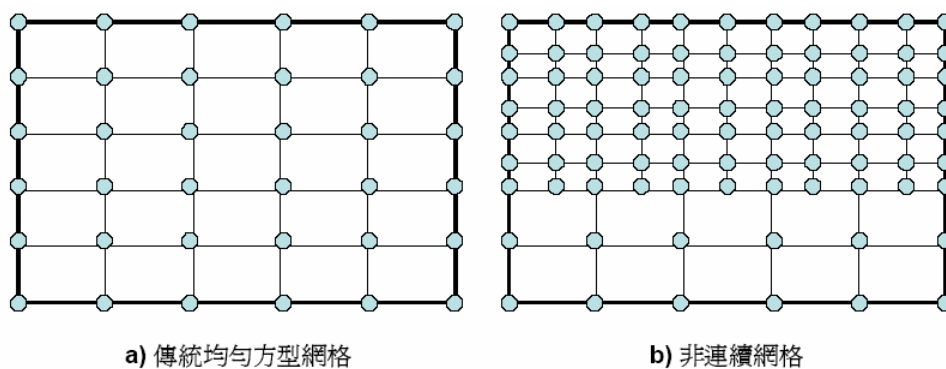


圖 2.30 擬頻譜法網格示意圖

論的並不多。自擬頻譜法應用開始，除 Fornberg (1990a)提出以錯置網格增加擬頻譜法在應用上的穩定及準確性外，便也只有 Wang and Takenaka (2001) 提出不同的網格使用。然而，這兩種網格基本上還是維持等間距的前提，

與有限差分法或是有限元素法可因應特殊需求而對部分或局部性加密網格或以非方形網格的多元性網格比起，擬頻譜法在網格系統使用上的彈性少了許多。



第三章 研究方法與數值模擬參數

3.1 研究方法

如圖 3.1 所示，本研究將對震源產生的地層表面擾動情形進行數值模

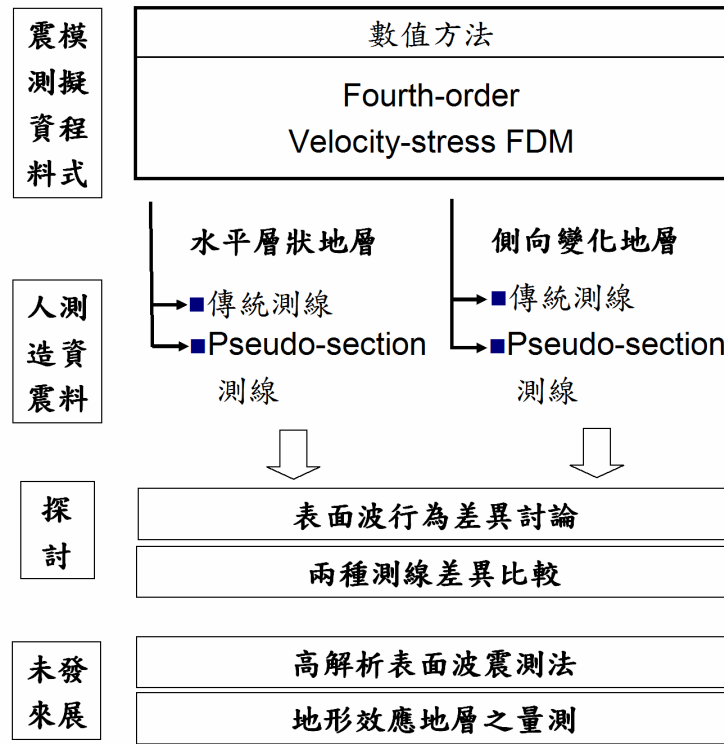


圖 3.1 研究方法流程圖

擬。以已知的地層情況，製造震源穩定且無雜訊等可能干擾因素存在的震測資料，而後觀察在不同地層況狀下以傳統測線施測以及以 pseudo-section 概念施測的震測資料，並以多頻道波譜轉換法對其進行訊號分析，以求得雷利波的頻散曲線。在已知的地層情況中，均質均向半無限域地層以及水平層狀地層中的頻散曲線具有解析解(詳見 2.1.2 節)，因此，我們將以解析解的結果與數值法結果做一個比較，討論施測參數對頻散曲線的影響，並以此處的結果作為經驗值，避免對具有側向變化地層的數值模擬結果做過度的解讀。而對於兩種不同施測方式結果的震測資料，將以時間/空間域的表面擾動情形以及在頻率/波數域上的頻散曲線差異為討論重心，避免牽涉

需反算過程的震測地層波速剖面結果。本研究中的數值模擬是以Mathworks公司所發展的 Matlab 6.5.1 為程式撰寫引擎。

震測模擬：在本研究中，由於欲討論具有側向變化的土層，因此震測模擬將採用由 Levander(1988)在 Madariaga(1976)、Virieux(1984;1985)使用的速度應力(velocity-stress)有限差分法架構下所發展的四級錯置網格有限差分法(fourth-order staggered-grid finite-difference method)作為運算式(以下將以速度應力差分法表示)。

速度應力差分法其運算式與傳統解決波傳方式不同，其不直接對二次微分的微分方程進行差分動作，而是對兩組一次微分方程進行差分；在網格上採取錯置網格(staggered-grid)，讓不同的物理量不在同一位置上，而可使下一時間中，空間上一點之物理量位於這一時間點空間物理量的中心，美好的符合差分式所需(其細節將在 3.1.1 節中加以說明)。在時間上採用中央差分式(central difference approximation)，但由於其錯置網格的定義，使其為顯性解法(亦即其下一時間的結果可由這一時間決定)。此方法除具有容易程式化、高計算效率以及由於有限差分法在計算上的區域性(local)而不需龐大的記憶體等一般有限差分法所具有的優點外，還具有(1)僅需處理一次微分方程的單純性(2)較不受地層物質卜松比(Poisson's ratio)而影響計算的容許性(3)較不因格網而產生嚴重人造頻散現象的正確性(4)可依情況使用應力式震源或速度式震源的選擇性；(5)穩定並正確定義自由表面邊界狀態的容易性；(6)可依需求再提高有限差分運算式精度級數(order)的擴充性；(7)可因應不同計算特性的程式而採用純量式、向量式或平行電腦處理的多元性 (Levander, 1988; Yao and Margrave, 2000) 等優點。

表面波震測法：所欲模擬的表面波震測法是採用多頻道波場轉換法。多頻道波場轉換法與僅使用兩個接受器的波譜分析法比起，1) 不需多次變換間

距而可有較好的頻散曲線頻寬；2) 可避開進行摺開的動作而無須擔心其造成的錯誤；3) 可使用影像判斷技巧將頻散曲線分析自動化；4) 可得到高次態的頻散曲線，使得反算技術上可考慮高次態的影響；5) 施作上的高效率等優點。又與同為使用多個接收器的多頻道波譜分析法比起，1) 不需進行摺開的動作，而無因摺開造成錯誤的疑慮；2) 可採用影像處理方式將分析自動化；並 3) 以影像處理技巧獲得最佳的頻散曲線結果等優點。因此，在這些優越條件下，只要有能力解決施測參數的互制問題，便將可有最佳且最便利的表面波震測法。下邊小節將詳細描述上述所採用的模擬震測以及震測施作方法。

3.1.1 速度-應力差分法運算式

控制方程式：在考量的 xz 平面二維空間問題中使用卡式座標系，水平向為 x 軸，往右為正，垂直向為 z 軸，往下為正。則對於純彈性均向材料而言，其 PS-V 波的傳遞行為是受到運動方程式(equation of motion)及虎克定律兩組方程式控制，其數學表示式如下：

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (3.1a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.1b)$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

其中， u_x, u_z 代表 x 方向及 z 方向的位移； $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ 是表示材料應力； λ, μ 是表示材料性質的拉瑪常數(Lame coefficients)； ρ 是材料的密度。在這需要注意的是，當我們在處理具有側向變化的地層問題時， λ, μ, ρ 此三項材料常數是會隨著空間而有所不同的，亦即是 λ, μ, ρ 皆為 x 與 z 的函數，可以以 $\lambda(x, z), \mu(x, z), \rho(x, z)$ 來表示。

當我們以有限差分法處理這樣的兩組控制方程式時，會需要處理較為複雜的二級海格波利克系統(second-order hyperbolic system)，因此，在速度應力差分法中並不直接對此兩組控制方程進行差分運算元應用，反之，放棄原本作為計算目標的位移量而改為計算速度，亦即是將((3. 1a)式裡的 $\partial u / \partial x$ 以 v 替代，且將((3. 1b)式對 t 微分，得到另兩組新的控制方程式：

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = b \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

(3. 2a)

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = b \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

(3. 2b)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

其中， v_x, v_z 代表在 x 方向及 z 方向上的速度， b 是 ρ 的倒數。

錯置網格架構：在有限差分法的使用上需先將問題討論的時間、空間進行離散。如前所述，速度應力差分法採用錯置的網格將不同的物理量定義在不同的離散點上，使物理量定義處能自然符合運算式的需求(為使差分運算式中物理量表示易為閱讀，且讓離散後的物理量與理論上的物理量有所區分，將使用 U, V, Σ, T, Ξ 分別代表 $v_x, v_z, \tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$)。在時間上，速度($U、V$)與應力($\Sigma、T、\Xi$)並不定義在同一時間點上，而是將其錯開相差，亦即將速度定義在 $k+1/2$ 時間點上，而將應力定義在 $k+1$ 時間點上(如圖 3.2 及圖 3.3 所示)。對空間的離散上，速度 U 與 V 並不在同一點： U 是定義在格點，即點 i,j 上，而 V 則是平移錯開至四個相鄰格點的中央，即點 $i+1/2, j+1/2$ 處(如圖 3.2 所示)；應力 $\Sigma、T$ 定義在 $i+1/2, j$ 的位置，而應力 Ξ 定義在 $i, j+1/2$ 位置上(如圖 3.3 所示)。除了會隨著時間而有所變化的速度與應力兩個物理量外，材料的性質(λ, μ, ρ)是不變的，因而不需在時間上做離散的動作，然而在空間上的離散卻是避免不了。此錯置網格架構將 λ 定義在 $i+1/2, j$ 的位置；將 μ 同時定義在 $i+1/2, j$ 及 $i, j+1/2$ 處；亦將 ρ 同時定義在 i, j 及 $i+1/2, j+1/2$ 兩個位置上(如圖 2.23 及圖 2.24 所示)。這樣的網格架構將可使得下一時間物理量能自然在這一時間物理量的中央位置，而使四級有限差分式可以應用。詳細的運算關係將在下一段做介紹。

四級錯置網格有限差分法運算式：在將有限差分法導入(3.2 式時，需要空間上以及時間上的有限差分運算元，亦即將微分式以差分式替換的轉換方式。四級錯置網格有限差分法在時間的一次微分上是採用標準的二級中央差分式(second-order central difference)，其運算元如下：

$$D_t a^k = \frac{1}{\Delta t} (a^{k+1/2} - a^{k-1/2}) \quad (3.3)$$

其中， D_t^+ 為對時間一次微分的差分運算元，用以逼近控制方程中的 $\frac{\partial}{\partial t}$ ； a^k

表示在時間離散後的第 k 個時間點的任一物理量； Δt 是表示每一次步進 (time-step) 的時間間隔。而對於空間上的一次微分是採用四級有限差分式(詳細推導過程請見附錄二)，其運算元如下：

$$D_x a_i = \frac{1}{h} \left[\frac{9}{8} (a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) - \frac{1}{24} (a_{i+3/2} - a_{i-3/2}) \right] \quad (3.4)$$

其中， D_x 為對空間一次微分的差分運算元(difference operator)； a_i 表示在空間離散後第 i 個格點(nodal point)上的任一物理量； h 表示離散後每個相鄰隔點的間距。在使用空間中四級有限差分運算元時，若是對 z 方向進行微分，僅需將運算元中 x 處改為 z ， i 處改為 j 即可使用。

將上述差分運算元導入兩組控制方程式中，可以以下列有限差分式表示：

$$D_t v_{x|i,j}^k = b_{i,j} \left[D_x \tau_{xx|i,j}^k + D_z \tau_{xz|i,j}^k \right]$$

$$D_t v_{z|i+1/2,j+1/2}^k = b_{i+1/2,j+1/2} \left[D_x \tau_{xz|i+1/2,j+1/2}^k + D_z \tau_{zz|i+1/2,j+1/2}^k \right]$$

$$D_t \tau_{xx|i+1/2,j}^{k+1/2} = (\lambda_{i+1/2,j} + 2\mu_{i+1/2,j}) D_x v_{x|i+1/2,j}^{k+1/2} + \lambda_{i+1/2,j} D_z v_{z|i+1/2,j}^{k+1/2} \quad (3.5)$$

$$D_t \tau_{zz|i+1/2,j}^{k+1/2} = (\lambda_{i+1/2,j} + 2\mu_{i+1/2,j}) D_z v_{z|i+1/2,j}^{k+1/2} + \lambda_{i+1/2,j} D_x v_{x|i+1/2,j}^{k+1/2}$$

$$D_t \tau_{xz|i,j+1/2}^{k+1/2} = \mu_{i,j+1/2} (D_z v_{x|i,j+1/2}^{k+1/2} + D_x v_{z|i,j+1/2}^{k+1/2})$$

分別將運算元(3.3、(3.4)代入式(3.5)中，再經整理可得最後於有限差分法中所採用的運算式為：

$$U_{i,j}^{k+1/2} = U_{i,j}^{k-1/2} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (\Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k) - \frac{1}{24} (\Sigma_{i+3/2,j}^k - \Sigma_{i-3/2,j}^k) \right] + \quad (3.6)$$

$$b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (\Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k) - \frac{1}{24} (\Xi_{i,j+3/2}^k - \Xi_{i,j-3/2}^k) \right]$$

$$V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = V_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} +$$

$$b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (T_{i+1/2,j+1}^k - T_{i+1/2,j}^k) - \frac{1}{24} (T_{i+1/2,j+2}^k - T_{i+1/2,j-1}^k) \right] + \quad (3.7)$$

$$b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (\Xi_{i+1,j+1/2}^k - \Xi_{i,j+1/2}^k) - \frac{1}{24} (\Xi_{i+2,j+1/2}^k - \Xi_{i-1,j+1/2}^k) \right]$$

$$\Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,j}^k +$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i+2,j}^{k+1/2} - U_{i-1,j}^{k+1/2}) \right] + \quad (3.8)$$

$$\lambda_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+1/2,j+3/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-3/2}^{k+1/2}) \right]$$

$$T_{i+1/2,j}^{k+1} = T_{i+1/2,j}^k +$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+1/2,j+3/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,j-3/2}^{k+1/2}) \right] + \quad (3.9)$$

$$\lambda_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i+2,j}^{k+1/2} - U_{i-1,j}^{k+1/2}) \right]$$

$$\Xi_{i,j+1/2}^{k+1} = \Xi_{i,j+1/2}^k +$$

$$\mu_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i,j+2}^{k+1/2} - U_{i,j-1}^{k+1/2}) \right] + \quad (3.10)$$

$$\mu_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i-1/2,j+1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+3/2,j+1/2}^{k+1/2} - V_{i-3/2,j+1/2}^{k+1/2}) \right]$$

其中， $\Delta x, \Delta z$ 代表空間離散後相鄰格點在 x 方向及 z 方向的間距。

穩定性與假頻散問題的控制：在使用顯性有限差分法進行震測模擬時，其需注意運算穩定性(stability)及因為空間離散所造成的假頻散現象(grid dispersion)。為使此兩項問題對結果的影響最小需要對於 $\Delta x, \Delta z, \Delta t$ 的值有所限制。根據 Levander(1988)對本研究中速度應力差分法所提出的建議是：

$$\text{穩定性控制} \quad \Delta t < \frac{6h}{7\sqrt{3}\alpha} \quad (3.11)$$

$$\text{假頻散控制} \quad h < \frac{\lambda_{\min}}{5} \quad (3.12)$$

其中， h 是 $\min(\Delta x, \Delta z)$ ； α 是表示在地層材料中最大的壓縮波波速； λ_{\min} 表示我們所可以信賴的最小波長結果。(3.12 式亦即表示，在網格中傳遞的波，其一個波長中至少須有五個格點存在，以保證其較不會有假頻散的現象產生。

初始狀態與邊界定義：對於模型中的初始狀態，因為我們假設地層在未受到震源擾動前都是處在平衡的狀態下，因此其速度及應力在初始時都為零。而在邊界的定義上，可視模擬狀況的要求而有所不同。一般來說，即使在具有側向變化的地層模型中，我們亦不需要對存在於模型內部的邊界進行定義，位於內部的邊界會自然因為地層材料參數的不同而自然由控制方程式反應出來(Virieux, 1986)，所以，在此我們要討論的是位於模型外圍的一個水平自由表面(free surface)與三個輻射邊界(radiation condition)。

在錯置網格的架構下要正確且穩定的定義自由表面在垂直面上沒有應力的狀態是很容易的(Levander, 1988)。在自由表面的位置，其邊界條件是

$$\tau_{zz}|_{z=0} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.13)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = 0$$

為了讓離散後的地層模型能符合(3.14)式，我們需在自由表面處及其上方位置增加格點，對格點在自由表面上下的應力值予以限制，使其以自由表面為中心，而成反對稱的值(Levander, 1988, 又稱作虛擬影像法(image method), 如圖 3.2 所示)。亦即，若假設自由表面處是網格中 z 方向上代號數為 0 (j = 0)，則

$$T_0 = 0, \quad T_{-1} = -T_1 \tag{3.14}$$

$$\Xi_{1/2} = -\Xi_{-1/2}, \quad \Xi_{-3/2} = -\Xi_{3/2}$$

此外，為解決 U、W 在自由表面處上方的值的問題，採用 Robertsson(1996) 所建議的，將自由表面以上的 U、V 皆設為零(處理自由表面的詳細計算式請見附錄三)。

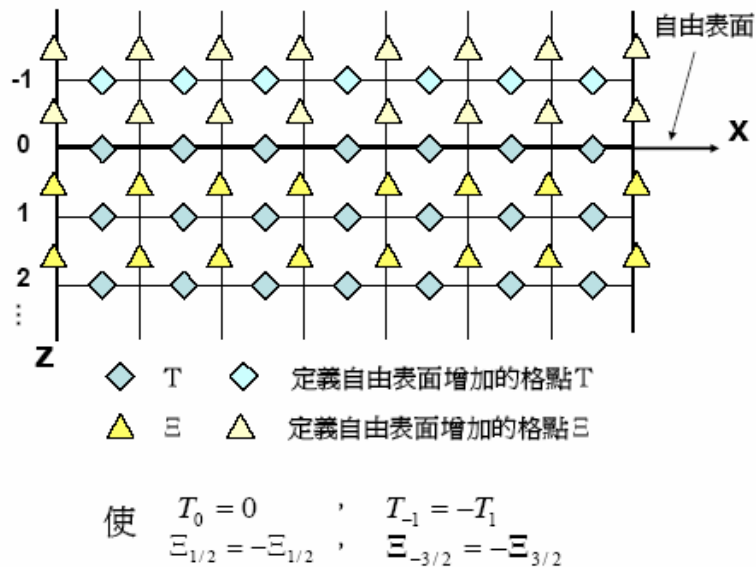


圖 3.2 自由表面邊界設定示意圖

而至於位於左側、右側以及底部的邊界，在輻射的情況下，不會有反射面存在，且沒有能量會在這裡擾動，但若只是將邊界的速度值及應力值設為零，會因為有限的模型大小而無法真實模擬無線遠的邊界，而造成虛

擬的反射面存在。為了達到無限遠的邊界定義，有許多不同種類的吸收邊界(absorbing boundary condition, Cerjan et al., 1985；Sochacki et al., 1987；Chew and Liu, 1996；Festa and Nielsen, 2003)或是傳導邊界(transmitting boundary condition, Clayton and Engquist, 1977；Reynolds, 1978；Emmerman and Stephen, 1983；Higdon, 1990,1991,1992,1994；Zhu, 1999)已被發展用以消除在此三個邊界的反射情形。

在此，我們將採用較易為使用的吸收邊界(Cerjan et al., 1985)，沿著三個邊界建立起三個寬帶，使得波在此寬帶內傳遞會有遞減的情形(如圖 3.3 所示)。將這樣的觀念應用在此的方法是建立起一個權重矩陣 $W(x,z)$ ，規範

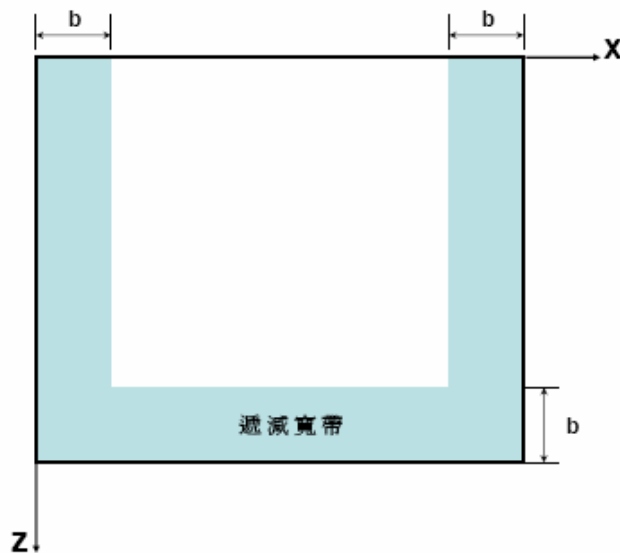


圖 3.3 吸收邊界示意圖

著計算出的速度值應以多少的比例減少，越接近寬帶外緣，其值越接近零；越接近寬帶內緣，其值越接近 1。其數學式為：

$$\begin{aligned}
 W(x,z) = & \\
 & \exp-[a(b-x)]^2, & \text{for } x < b \text{ or } x > Lx - b \\
 & \exp-[a(b-z)]^2, & \text{for } z > Lz - b \\
 & 1, & \text{其他位置}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

其中， a 是可控制遞減速度的係數，數字越大遞減越快接近零(一般盡量不使其小於 0.92)； b 是控制遞減帶寬的係數(Cerjan et al.(1985)建議至少需 20)； L_x 、 L_z 分別是模型中 x 方向和 z 方向的大小。

震源設定：震源的形式有許多不同種類，例如有爆炸型、剪力型、水平或垂直型的點震源等等，在震源的設定上會以不同的應力或速度值又或是震源所分佈在格點上的多寡或是影響範圍作為不同震源類型的區隔(Aboudi, 1971)。常見用於數值模擬的衝擊式震源(impulse)函數有三種：

高斯函數

$$g(t) = \exp(-\alpha_s(t-t_0)^2) \quad (3.16)$$

(Gaussian function)

高斯函數一階微分 $g(t) = -2\alpha_s(t-t_0)\exp(-\alpha_s(t-t_0)^2) \quad (3.17)$

高斯函數二階微分 $g(t) = (4\alpha_s^2(t-t_0)^2)\exp(-\alpha_s(t-t_0)^2) \quad (3.18)$

其中， α_s 是控制衝擊式震源到達最大位移所需的時間，其值越大，越快到達(如圖 3.4 所示)，亦即表示其所包含的高頻波能量將較 α_s 小的能量增加； t_0 是指震源開始作用的時間，在此之前皆為零。

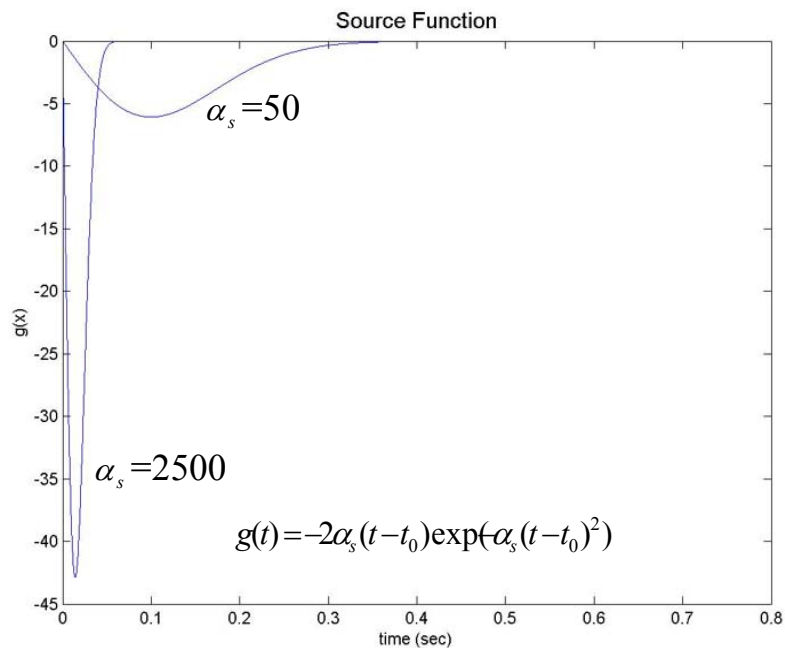


圖 3.4 衝擊式震源 α_s 參數的影響

對於點震源來說，可依目的的不同而有不同置入模型的方式，大致上有壓力式震源(pressure source)、剪力波式震源(shear wave source)以及正向應力/速度式震源(normal stress/velocity source)(Yao and Margrave, 2000)，不同震源方式所擾動的物理量值如下：

$$\text{壓力式} \quad \Sigma_{i,j} = g(t), T_{i,j} = g(t) \quad (3.19a)$$

$$\text{剪力波式} \quad U_{i,j} = g(t), U_{i,j-1} = -g(t), \quad V_{i,j} = g(t), V_{i+1,j} = g(t) \quad (3.19b)$$

$$\text{正向應力/速度式} \quad T_{i,j} = g(t) \text{ 或 } V_{i,j} = g(t) \quad (3.19c)$$

本次研究中採用高斯函數一階微分為正向應力的衝擊式震源函數，函數的控制參數取為 $\alpha_s = 2500, t_0 = 0$ 。

程式計算流程 程式的計算流程非常的簡單，大抵上是由六個動作完成：(1) 定義地層參數及程式控制參數；(2) 檢驗離散後的穩定性及假頻散現象的控制；(3) 激發震源；(4) 以速度應力差分運算式計算震波傳遞；(5) 套用邊界定義；(6) 將結果記錄下輸出(如圖 3.5 所示)。

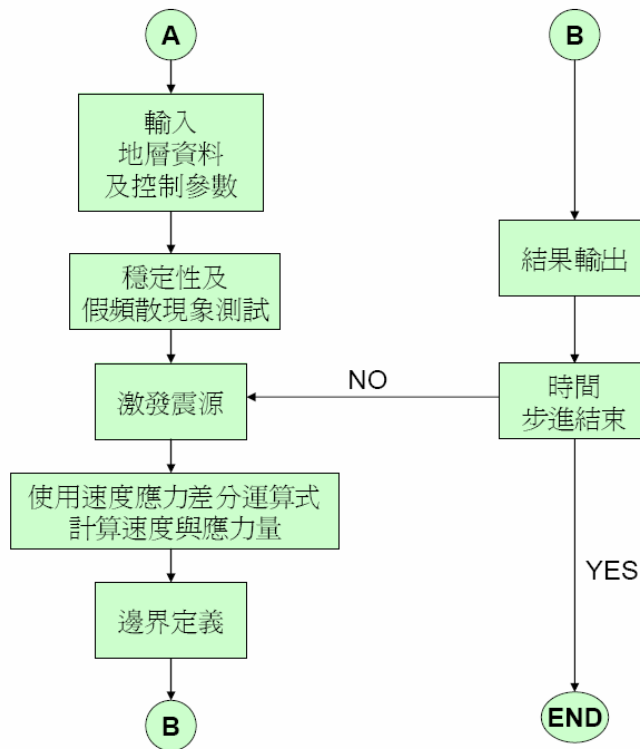


圖 3.5 程式計算流程圖

3.1.2 傳統測線與 pseudo-section 測線施測

如圖 3.6 所示，由 2.2.1.2 節處已知多頻道表面波震測法的施測參數有三個：近站支距 x_0 、接收器間距 Δx 以及測線長度 L 。已知測線長度與接收器數目 N 有關： $L = (N-1)\Delta x$ ，為了比較上的便利，在後續模擬中的參數說明將以接收器數目取代測線長度。又由於在具有側向變化的地層上，我們關心地層側向變化狀況與所得到的模擬結果關係，因此增加震源位置 x_s 的表示。則，一個以傳統測線施測的模擬中，表達其施測參數的會有四個：震源位置 x_s 、近站支距 x_0 、接收器間距 Δx 以及接收器數目 N 。

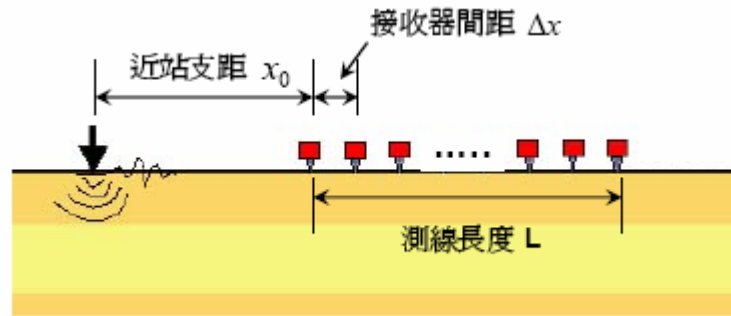


圖 3.6 MASW 傳統測線施測示意圖

對於 pseudo-section 測線而言(如圖 3.7 所示)，其需要改變震源位置，以得到其震測結果。就 pseudo-section 概念而言，不同震源位置並無一定要求，只需其拓展的展距必須與原展距有所重疊，在此，本研究採用在擴展的展距中，只有一個接收器重疊，亦即，每一次的震源位置會改變一個展距長。例如第一次的震源位置為 x_c ，展距長 $L = (N-1)\Delta x$ ，則下一次震源的位置便在於 $x_c - L$ 的位置。一旦震源改變的方式以此方式固定後，每一次的 pseudo-section 測線除了須給定傳統測線的四個施測參數外，還需給定震源位置改變的次數 N_s 。由於每一個震源位置，就會儲存一筆震測資料，因此，每一次的 pseudo-section 測線施測，將會有 N_s 筆資料。

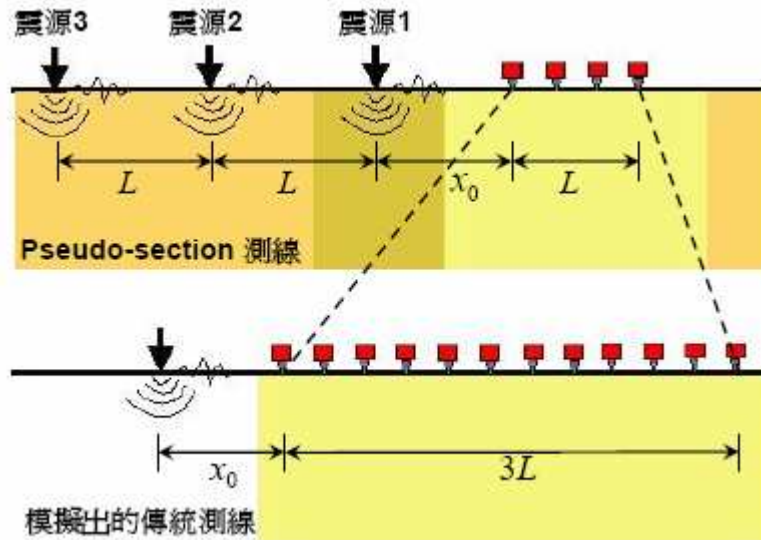


圖 3.7 MASW pseudo-section 測線示意圖

Pseudo-section 測線震測結果縫合(seaming)：震測所得的每一筆結果，將以矩陣的方式儲存，如圖 3.8 所示，每一欄皆為不同位置接收器收集到的資

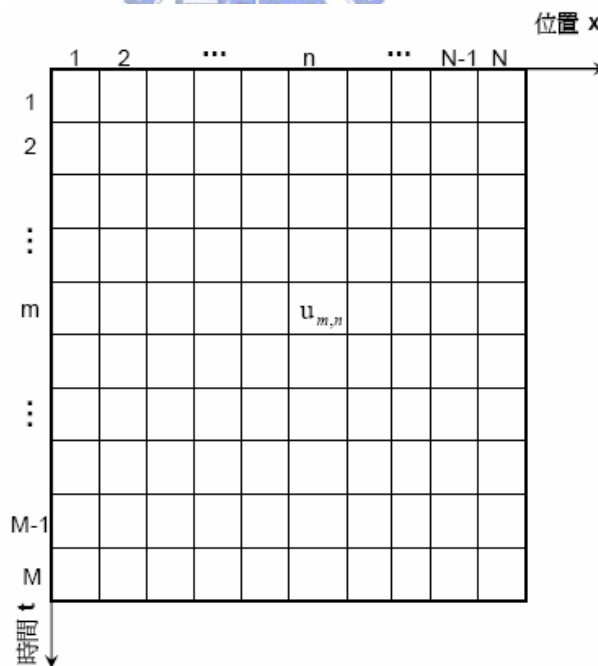


圖 3.8 震測資料矩陣格式

料，而每一格為不同時間點上取得的資料，以 $u(t_m, x_n)$ 表示， x_n 表示在第 n 個接收器的位置， t_m 表示在第 m 個取樣時間，簡單表示為 $u_{m,n}$ 。傳統測線只需一個位置的震源，故只有一筆震測資料，然而，pseudo-section 測線會有 N_s

筆資料，要將這 N_s 筆資料組成模擬出的傳統測線資料將透過縫合(seaming, Lin et al., in press)的技巧達成。

對於已成型的表面波而言，地表所收錄到在不同頻率下以不同波速前進的表面波相位角，由於震源的不穩定以及不同的行經路徑下，將會有一個固定的相位角差的靜態誤差。如圖 3.9 所示，由相位角-空間域來觀察，直接將不同筆資料組合在一起(before seaming)的結果，與進行過縫合動作(after seaming)的結果會有一個段落的平移差異，這部份便是靜態誤差。為將這靜態誤差修正，須要強迫其與前一筆震源處資料重疊處接收器所得到的相位角相同，此一強迫其相位角相同的動作便稱為縫合。縫合的動作應需有相位角的資料，因此我們必須先以快速傅立葉轉換

$$U(f_i, x_n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} u(t_m, x_n) \exp(-j2\pi f_i t_m) \quad (3.20)$$

其中， $j = \sqrt{-1}$ ，進入頻率-空間域中，取得各頻率在不同接收器位置的相位角資料。其中， M 是在時間軸上以 Δt 為取樣時間間距的離散數目，亦即在

時間軸上所取的紀錄點數； n 表示接收器位置的索引號； $f_i = \frac{i}{(M-1)\Delta t}$ ，表

示頻率。則原有的 $u(t_m, x_n)$ 資料，將成為以複數存在的 $U(f_i, x_n)$ ，其資料型態可簡單以 $A_{i,n}^{n_s} \exp(j\phi_{i,n}^{n_s})$ 表示(如圖 3.10 所示)。 $A_{i,n}^{n_s}$ 表示第 n_s 個震源處震測資料在第 n 個接收器位置上頻率為 f_i 的量值； $\phi_{i,n}^{n_s}$ 表示第 n_s 個震源處震測資料在第 n 個接收器位置上頻率為 f_i 的相位角。而後強制第 n_s 個震源處第 N 個接收器位置的相位角與第 $n_s + 1$ 個震源處第 1 個接收器位置的相位角及量值相等，即是使

$$\phi_{i,1}^{n_s+1} = \phi_{i,N}^{n_s} \quad (3.21)$$

而在 $n_s + 1$ 資料中 2 ~ N 接受器的資料，便以調整相同的相位角及相對的量值

做修正，即

$$U_{i,n}^{n_s+1} = A_{i,n}^{n_s+1} \exp(j(\phi_{i,n}^{n_s+1} + \Delta\phi)) \quad (3.22)$$

其中，

$$\Delta\phi = \phi_{i,1}^{n_s} - \phi_{i,N}^{n_s+1} \quad (3.23)$$

如此便完成縫合的動作。將處理後的不同震源結果組合起來(捨去 $n_s + 1$ 重疊的接收器位置資料)，便可繼續進行頻散曲線的分析。

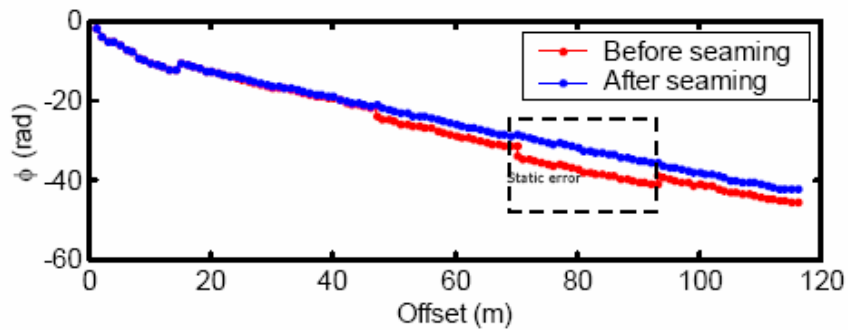


圖 3.9 MASW pseudo-section 測線靜態誤差示意圖(Lin et al., in press)

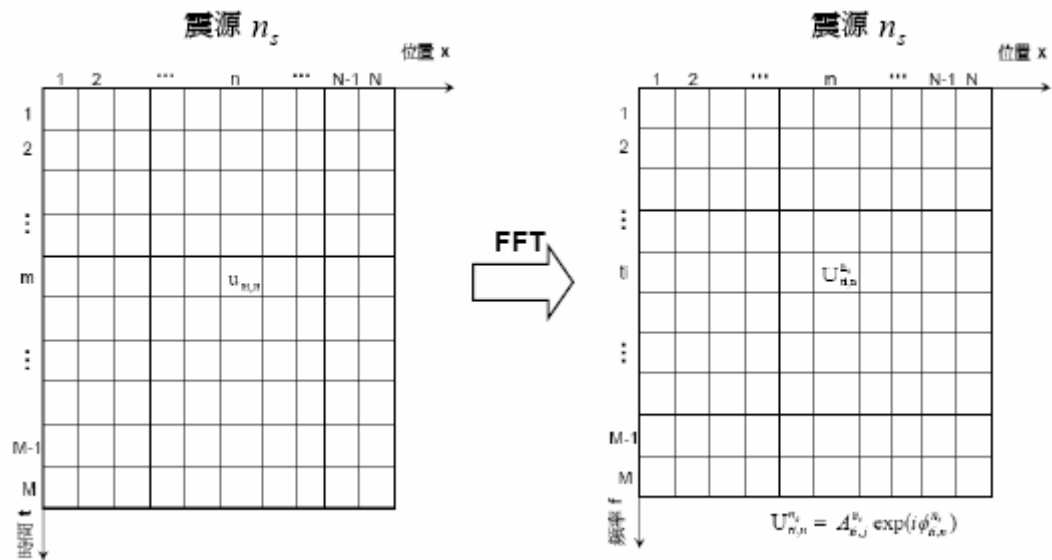


圖 3.10 震測資料空間-頻率域矩陣示意圖

3.1.3 多頻道頻率波速轉換法

本研究主要是利用多頻道波場轉換法中頻率波數轉換法進行資料的分析(Lin and Chang, 2004)。其在頻散曲線分析上，主要是將震測資料由時間-

空間域 (t - x domain) 以離散傅立葉轉換轉換至頻率-空間域 (f - x domain)，再經離散空間域傅立葉轉換(discrete-space Fourier Transform)將頻率-空間域轉換至頻率-波數域(f - k domain, Prokis and Manolakis, 1992)，再透過變數轉換而獲得頻率-波速域(f - v domain)的結果。在實際操作中，由於在時間上的取樣點較為豐富，時間與頻率的轉換可以經由較為有效率的快速傅立葉轉換來進行，而空間與波數的轉換上，依舊維持。由數學運算來看，首先得到將多處接收器位置之二維震測資料 $u(x_n, t_m)$ 進行快速傅立葉轉換

$$U(f_i, x_n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} u(t_m, x_n) \exp(-j2\pi f_i t_m) \quad (3.24)$$

得到離散的頻率-空間域資料 $U(f_i, x_n)$ 。其中， M 是在時間軸上以 Δt 為取樣時間間距的離散數目，亦即在時間軸上所取的紀錄點數； n 表示接收器位置的索引號； $f_i = \frac{i}{(M-1)\Delta t}$ ，表示頻率。而後再將 $U(f_i, x_n)$ 進行離散空間域傅立葉轉換，

$$Y(f_i, k) = \sum_{n=0}^{N-1} U(f_i, x_n) \exp(-jkx_n) \quad (3.25)$$

得到在波數上連續的頻率-波數域資料 $Y(f_i, k)$ 。其中， N 是接收器的數目。

又已知波速 $c = \frac{2\pi f}{k}$ ，則欲得到頻率-波速域的結果可將((3.25)式改寫做(Lin and Chang, 2004)

$$Y(f_i, c) = \sum_{n=0}^{N-1} U(f_i, x_n) \exp(-j\frac{2\pi f_i}{c} x_n) \quad (3.26)$$

而於頻率-波速域中，單一頻率之頻譜波峰值即為其所對應之雷力波波速。

如 3.1.2 節所述，對於 pseudo-section 概念所得的震測資料，需採用縫

合的技巧修正其靜態誤差，因此，在對於 pseudo-section 概念的震測資料做頻散曲線分析時，需依照 3.1.2 節完成縫合的動作，而此縫合後的資料，才是繼續進行(3.26 式所需的 $U(f_i, x_n)$ 。

最佳展距範圍選取(Optimum Offset Range Selection)：在進行(3.26 式的轉換前，尚可有一濾波的動作可進行。由 2.2.2 節可知，近場效應以及遠場效應是先天的限制，必然會在不同距離的接收器資料中的不同頻率上發生，為避免其對頻散曲線分析造成的問題，可採用濾波的方式，將發生近場效應及遠場效應的資料排除在空間-波速域轉換之外。

當完成(3.24 式的時間-頻率轉換後(pseudo-section 概念的資料須再完成縫合的動作)，由 $U(f_i, x_n)$ 的實部可發現如圖 3.11 的帶狀存在，此帶狀區域

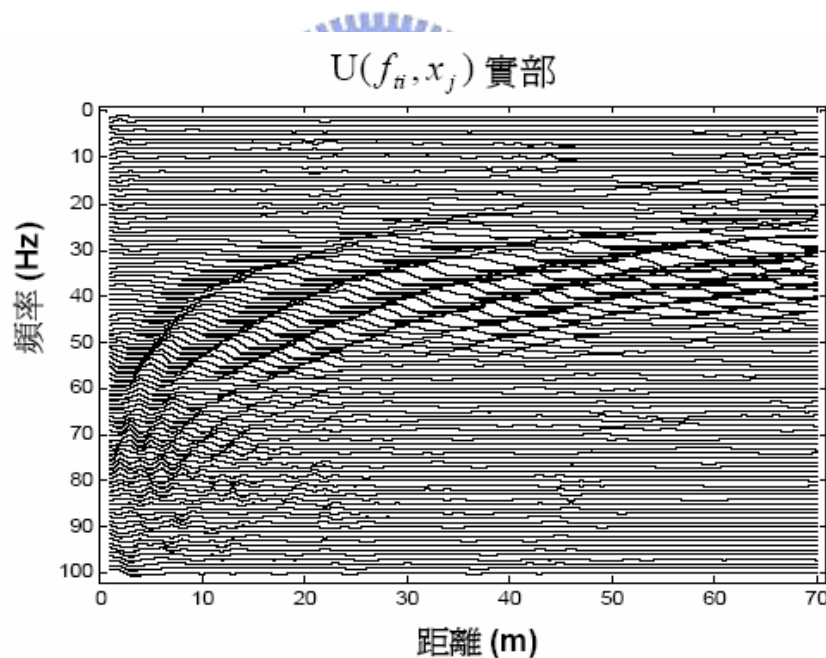


圖 3.11 $U(f_i, x_n)$ 實部於頻率-空間上之反應 (Lin et al., in press)

便是相對應於各頻率在空間範圍中無近場或遠場效應的區域(Lin et al., in press)，我們可使用相對應於這帶狀區域的 Kaiser 濾波器(如圖 3.12 所示)，將其使用在 $U(f_i, x_n)$ 中，濾去近場及遠場效應的干擾，而後再進行((3.26)式的轉換，得到最佳的頻散曲線結果。多頻道頻率波速轉換法頻散曲線分析

的流程總結於圖 3.13。

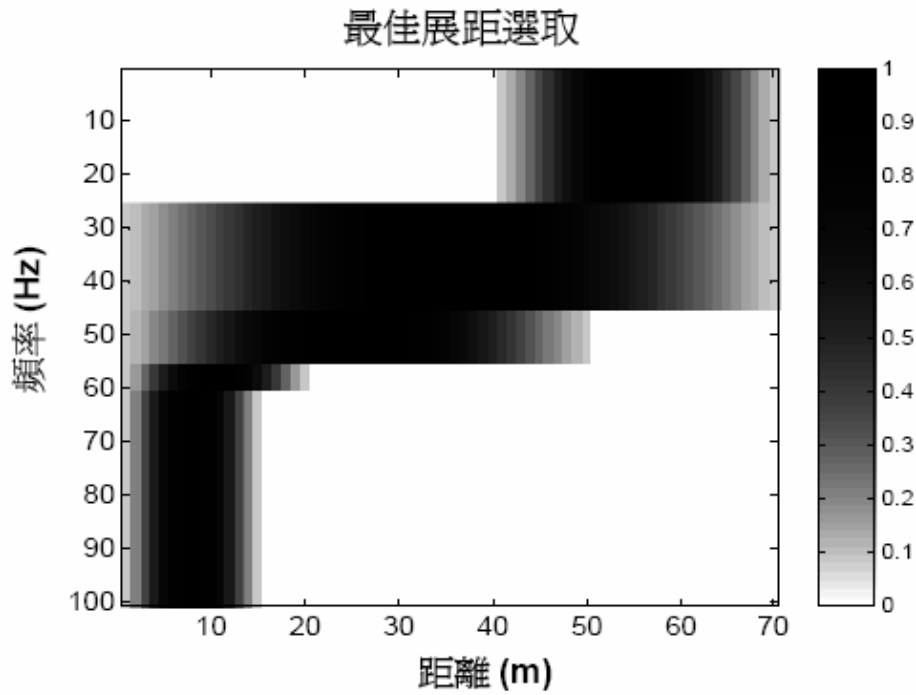


圖 3.12 最佳展距選取範圍 (Lin et al., in press)

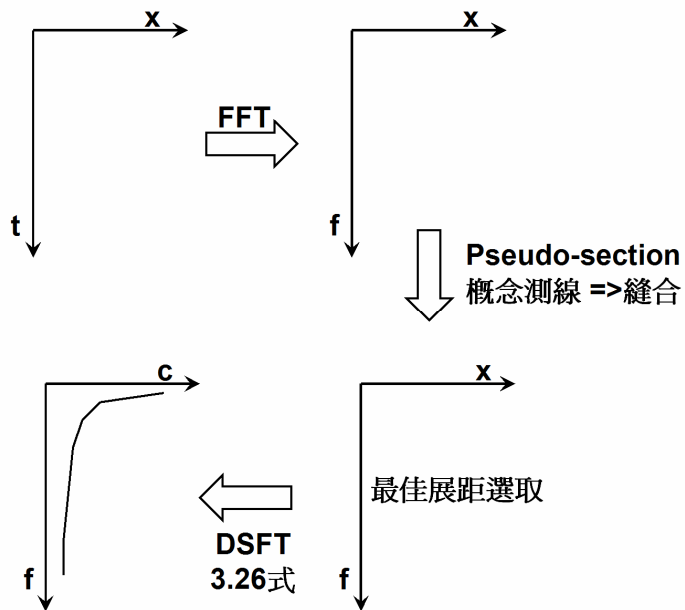


圖 3.13 多頻道頻率波速轉換法頻散曲線分析的流程圖

3.1.4 地層模型設計說明

本研究中的地層模型設計，為先簡化問題，僅以兩種不同彈性參數(壓縮波波速、剪力波波速及密度)地層進行組合，共可分為三大類：A 半無限

域地層，B 水平層狀地層，C 具水平側向變化地層。在地層參數的選用上，一般地層參數的卜松比在 0.2~0.4 之間，於此，我們將使用波松比約為 0.3 的地層參數，兩種地層參數的使用如表 3.1 所示。

表 3.1 地層模型參數

	壓縮波波速	剪力波波速	密度	卜松比
	Vp (m/s)	Vs (m/s)	ρ (g/cc)	ν
L1	500	260	2.1	0.31
L2	1000	530	2.5	0.3

A 半無限域地層：如圖 3.14 所示，地層模型中的參數固定，為半無限域空間。於此地層狀況中的雷利波頻散曲線具有解析解，用以作為對照組與具有側向變化地層的模擬結果做比對，並以在此地層情況下數值模擬的結果驗證 pseudo-section 概念在半無限域地層中確實可行。



圖 3.14 A 類地層模型示意圖

B 水平層狀地層：如圖 3.15 所示，地層模型僅具有垂直向的變化，L1 為具有一定厚度的上部地層，L2 為厚度極大的下部地層，地表面震源所產生的波將由波速慢的區域進入波速快的區域。此種地層狀況的雷利波頻散曲線具有解析解，可因應需要調整 L1 的厚度作為對照組與數值模擬的結果做比對，並以在此地層情況下數值模擬的結果驗證 pseudo-section 概念在水平層狀地層中確實可行。



圖 3.15 B 類地層模型示意圖

C 具水平側向變化地層：如圖 3.16 所示，地層模型在水平方向上的地層參數會有所不同，為探討水平側向的影響，我們將此類地層再加以分為四類：C1 是在水平方向上具有瞬間的地層變化，而在地層變化處之前或之後皆為半無限域空間，且其地層的不連續是延伸至地表。C2 同樣在水平方向上去有瞬間的地層變化，而在地層變化處之前或之後皆為兩層的水平層狀地層，只是上部地層的厚度不同，於左側處(較厚)，上部地層厚度為 10 公尺；於右側處(較薄)，上部地層厚度為 5 公尺。C3 地層模型具有漸變的水平側向變化段，在此變化段之前或之後皆為半無限域地層；此變化段的地層介面與水平成 45 度交角，且此地層的不連續有延伸到地表處。C4 亦具有漸變的水平側向變化段，在此變化段之前或之後皆為兩層的水平層狀地層，但有厚度的差異，左側處(較厚)上部地層厚度為 10 公尺，右側處(較薄)上部地層厚度為 5 公尺；此變化段的地層介面與水平成 45 度交角，下部地層並無出露至地表處。

側向變化地層的可能情形有太多，於此我們將先以此類地層進行模擬，以模擬出的表面波震測數值模擬結果作為討論的目標，配合 A、B 兩類地層的解析解以及數值解，觀察不同表面波施測方式(傳統測線以及 pseudo-section 測線)所得到的震測資料在時間/空間域(t-x domain)以及頻率/波速域(f-v domain)結果的差異，以期能對 pseudo-section 測線的施測有更進一步的了解。

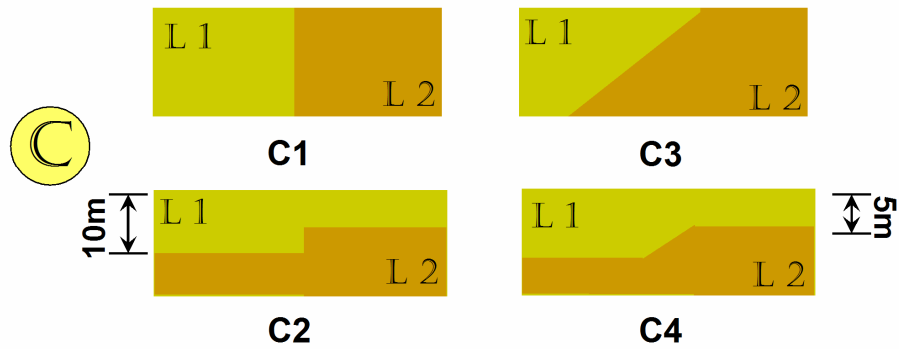


圖 3.16 C 類地層模型示意圖

3.2 表面波震測資料模擬參數設定

3.2.1 表面波震測施測參數

在模擬中所使用的不同地層模型，配合不同地震波震測施測參數共有 11 組地層模型進行模擬，整理如表 3.2 所示。對於具有側向變化的地層，測線所在的位置會影響施測後所得到的震測資料，因此在此表中亦有實際佈測的簡圖，以提供測線與地層變化位置的相互關係。在這些地層模型中要特別說明的是 C1-1，C1-2，C2-1，C2-2，C3 以及 C4。

就地層的情形來說，C1-1 與 C1-2 相同，C2-1 與 C2-2 相同，然而其差異性在於測線的中點位置處。一般而言，多頻道表面波震測所得到的一筆震測資料可以反算得到一個地層波速剖面，以測線中點位置作為此波速剖面的代表位置，C1-1 的代表位置波速剖面與 A-1 相同，是位在地層介面左側 6.5 公尺處，而 C1-2 的代表位置波速剖面與 A-2 相同，是位在地層介面右側 6.5 公尺處；C2-1 的代表位置波速剖面與 A-1 相同，是位在地層側向變化處的左側 6.5 公尺處，而 C2-2 的代表位置波速剖面與 A-3 相同，位在地層側向變化右側 6.5 公尺處。C3 與 C4 的地層情形雖然不同，然而，其代表位置的波速剖面皆與 A-2 相同。

表 3.2 表面波震測施測參數表

地層 模型	施測方 式 C/P*	震源位 置數 NF	近站支 距 x_0 **	接收器 數目#	接收器 間距 Δx	取樣速 率 SR+	取樣數 SN
	C	1	15	24	1	0.396	2048
	P	4	15	6	1	0.396	2048

A-1

傳統測線 Pseudo-section 測線

C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

A-2

傳統測線 Pseudo-section 測線

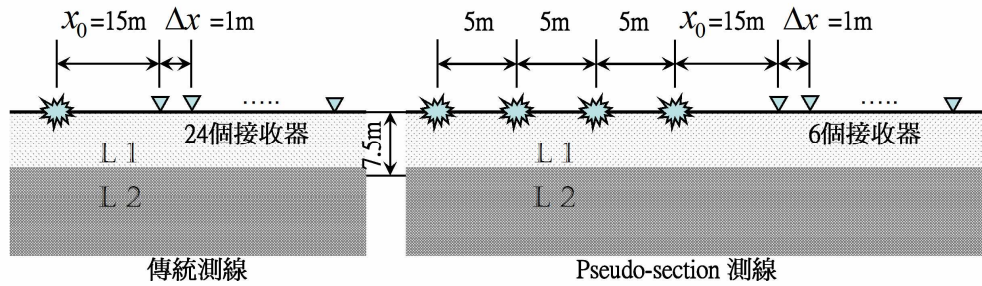
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

B-1

傳統測線 Pseudo-section 測線

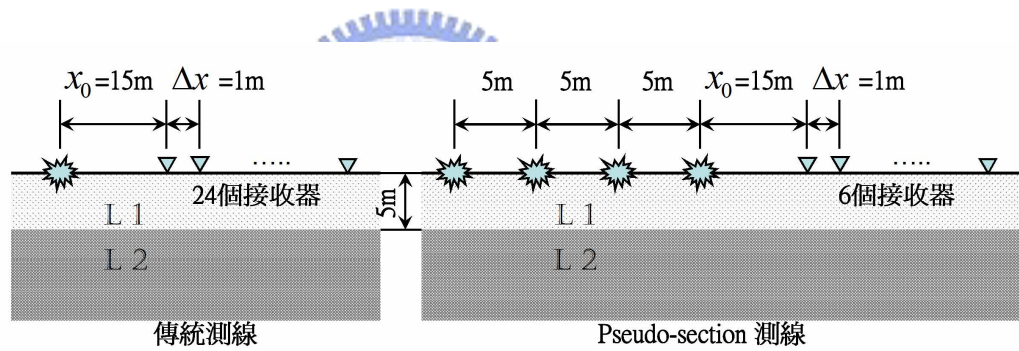
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

B-2



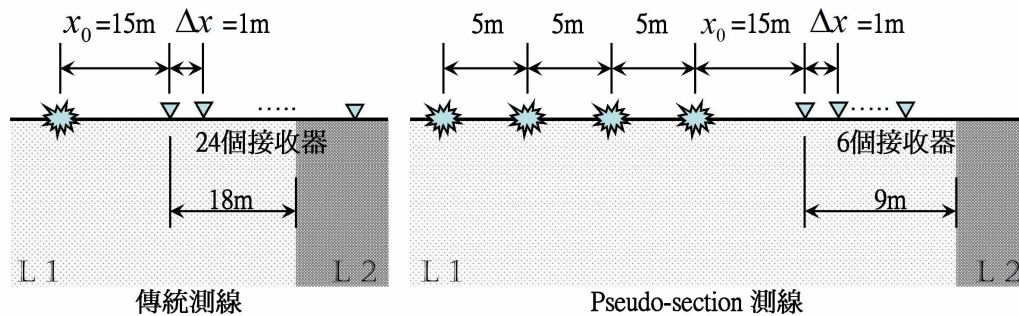
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

B-3



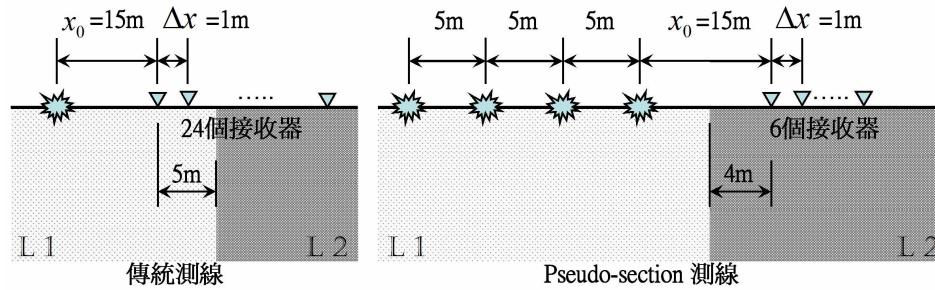
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C1-1



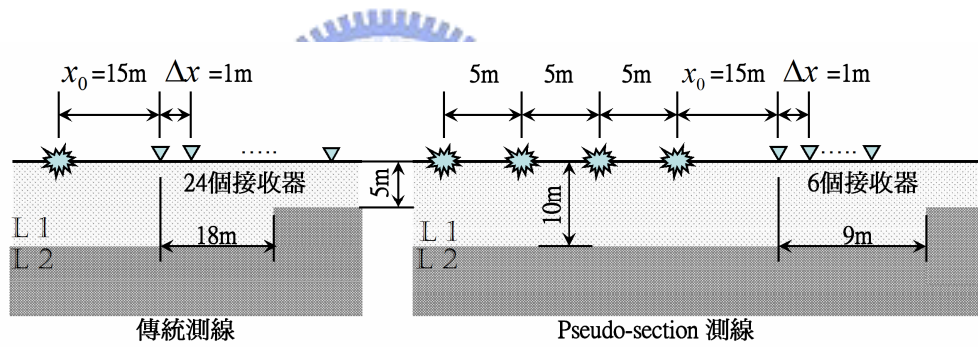
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C1-2



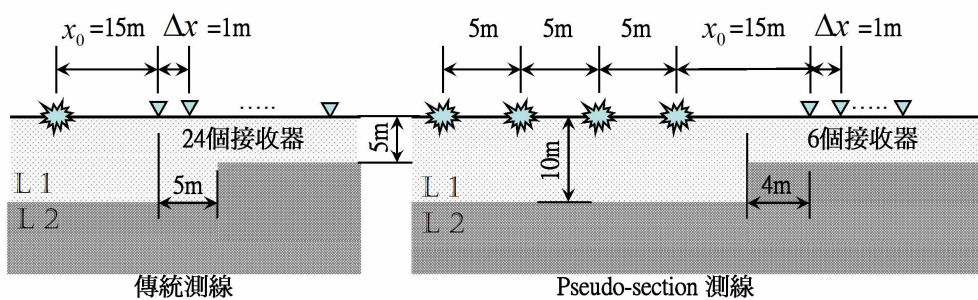
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C2-1



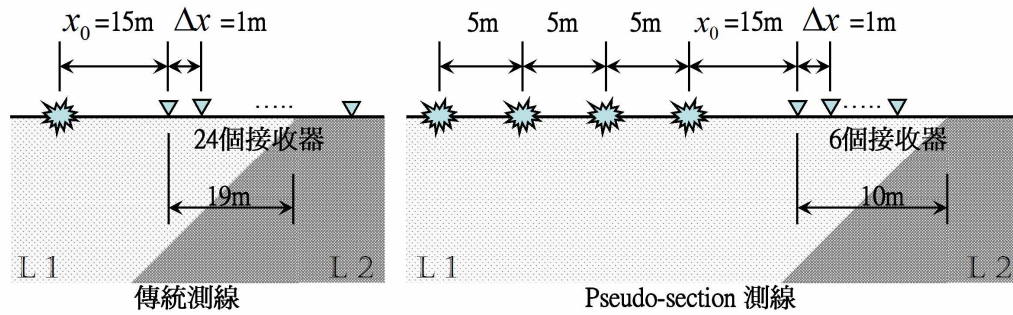
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C2-2



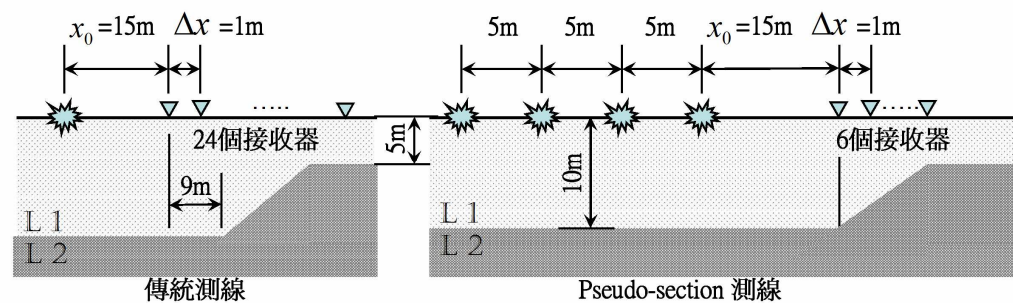
C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C3



C/P	NF	x_0	#	Δx	SR	SN
C	1	15	24	1	0.396	2048
P	4	15	6	1	0.396	2048

C4



* C 表示傳統測線，P 表示 pseudo-section 測線

** 長度單位皆為公尺 (m)

+ 時間單位皆為毫秒(ms)

3.2.2 數值模擬參數

在進行數值模擬時，對於各項使用參數的注意事項已於 3.1.1 節中做說明，參數使用上除了數值運算架構本身的穩定性((3.11 式)以及假頻散現象((3.12 式)，還應考慮接收器佈置位置是否會受到因為網格空間邊界效應所可能產生的假反射訊號，而決定模擬空間使用的大小。由於這些參數與地層參數相關，因此，在固定的地層參數組合下，我們可採用相同的數值模

擬參數，數值模擬的參數如表 3.3 所示。

表 3.3 數值模擬參數表

網格參數				震源參數		吸收邊界參數		假頻散控制
m	n	dx,dz (m)	dt (ms)	t_0 (ms)	α_s	min(W(x,z))	b	f_{\max} (Hz)
800	400	0.5	0.198	0	2500	0.92	60	97



第四章 結果與討論

4.1 A 類地層

Pseudo-section 概念施測於半無限域地層：如圖 4.1 所示，橫軸表示與震源的距離，垂直軸表示時間，上側是 A-1 地層模型的結果，下側是 A-2 地層模型的結果；左側的圖是以傳統測線直接收錄的資料，右側的圖是以 pseudo-section 測線所收錄的資料經過縫合後的資料結果。傳統測線一次佈開 24 個接收器，展距長 23 公尺，而 pseudo-section 測線一次僅有 6 個接收器，展距長 5 公尺，總共施測完畢所組合出的展距共長 20 公尺，由時間

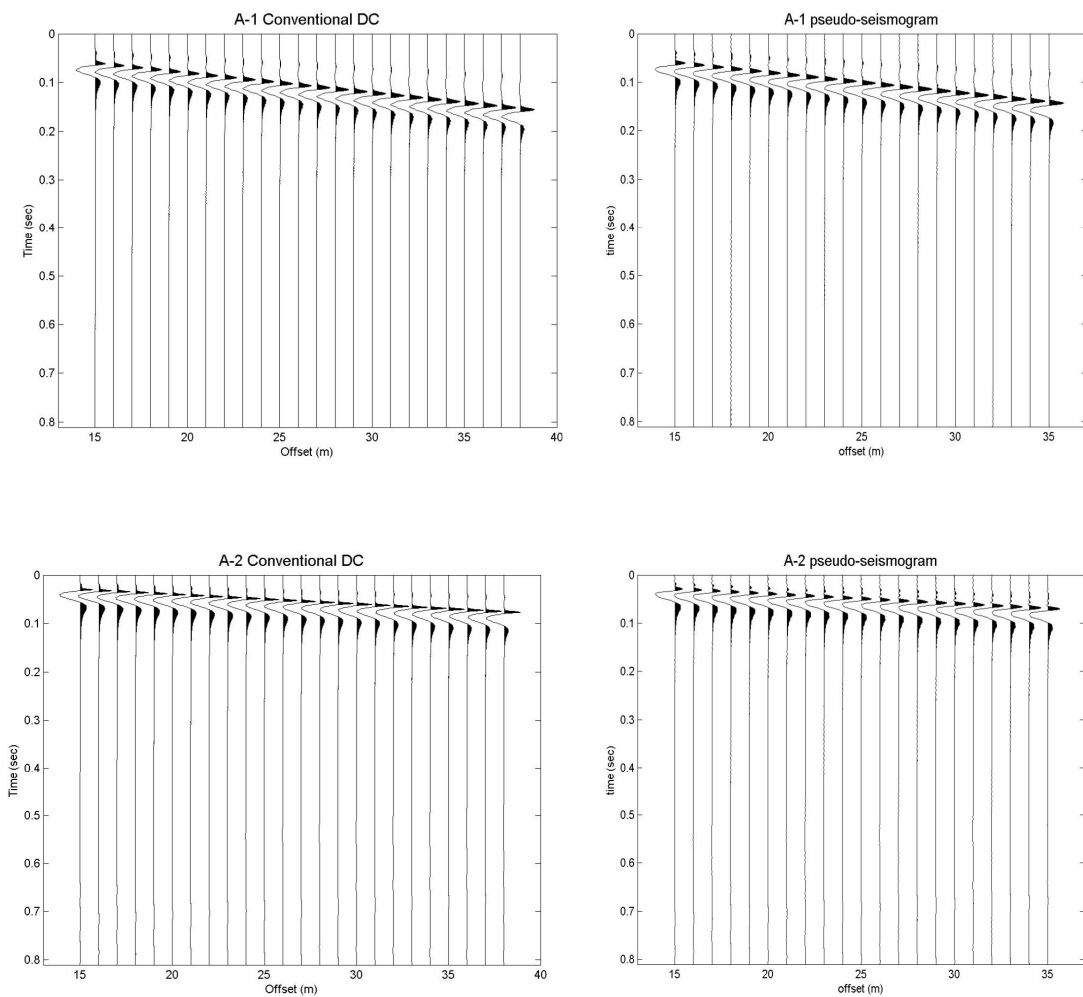


圖 4.1 A-1, A-2 傳統測線與 pseudo-section 測線震測資料

/空間域來比對，並無特別的差異性存在。

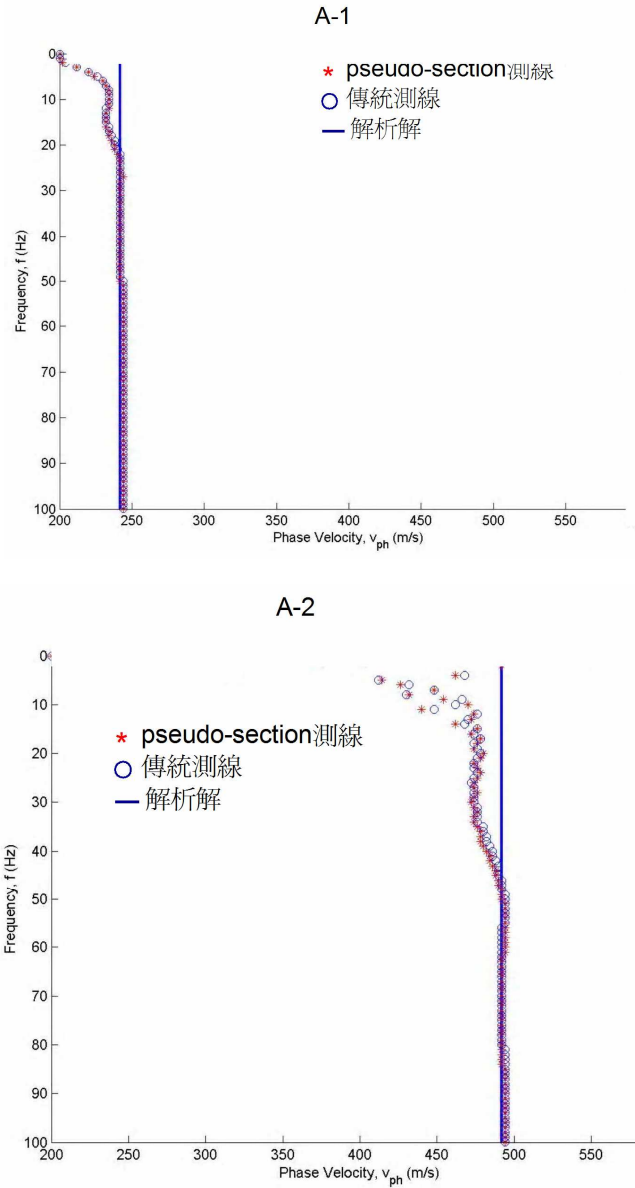


圖 4.2 A-1, A-2 傳統測線與 pseudo-section 測線施測
頻散曲線比較圖

再如圖 4.2，由頻率/波速域的頻散曲線來比較，空心圓圈為傳統測線所得頻散曲線，星號為 pseudo-section 測線所得頻散曲線，由圖上看，不論是 A-1 地層模型或是 A-2 地層模型，兩種施測方式的頻散曲線結果可說是幾乎完全吻合，因而說明了 pseudo-section 概念在半無限域地層中是可行的。這樣的結果並不令人訝異，pseudo-section 概念起源是由於在獲得地層

表面波的波速時，我們所需的僅是相對的相位角變化(如圖 2.13 所示)，而非絕對的相位角，在半無限域地層中，若震源穩定無其他因素干擾，一次的震源擊發與四次的震源擊發，在與震源相對位置固定的接收器處其地層反應必然相等。因此，以此直觀想法便可預知 pseudo-section 概念在半無限域地層中勢必可行。在圖 4.2 中可發現，雖然傳統測線與 pseudo-section 測線所獲得的頻散曲線一致，但與解析解卻有所差異，關於這點，這是由於施測的展距過小所造成訊號分析上不佳的結果，而非震測分析或是數值模擬的錯誤。我們將在 B-2 的模擬結果討論中再進行一組 B-2E 的模擬，除了將傳統側線接收器數目由 24 個擴大成 81 個，以及將 pseudo-section 測線接收器由 6 個增加為 21 個外，其餘參數皆不改變。

4.2 B 類地層

Pseudo-section 概念施測於水平層狀地層：如圖 4.3 所示，上中下處分別為 B-1，B-2 及 B-3 地層模型的震測資料結果；左側為傳統測線所收錄的震測資料，右側為 pseudo-section 測線經過縫合後所得到的擬震測資料。由時間/空間域來看，兩邊的資料都顯示出除了直接到達的波之外，後續還有許多由介面反射上來的波造成地表的振動持續，兩種施測方式由此觀察並無明顯差異。再看圖 4.4，在頻率/波速域中的頻散曲線，空心圓圈為傳統測線所得頻散曲線，星號為 pseudo-section 測線所得頻散曲線，很明顯可以看出除了在頻散曲線錯誤的彎轉處會有所差異外，兩種施測方式的結果幾乎疊合在一起。得到這樣的結果，與半無限域地層的思考相同，對於一個穩定的震源，一次的震源擊發與四次的震源擊發，在與震源相對位置固定的接收器處，其地層反應會相同。縫合的概念主要是在調整不同震源擊發時所產生的靜態相位差，在使用數值模擬的情況下，並沒有初始相位角不同的問題，因此模擬中 pseudo-section 測線所得的震測資料，即使沒有進行縫合

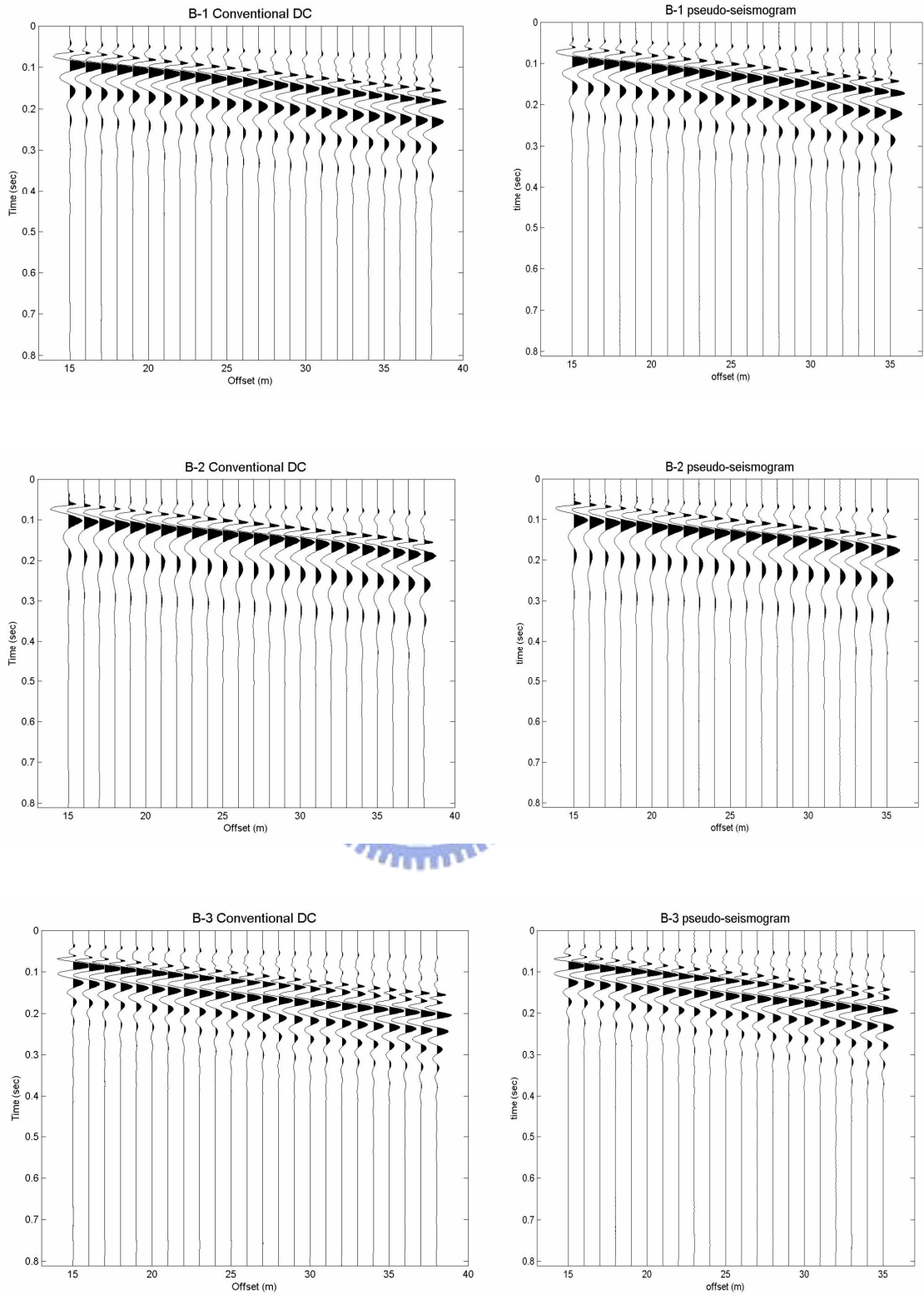


圖 4.3 B-1, B-2, B-3 傳統測線與 pseudo-section 測線施測頻散曲線比較圖

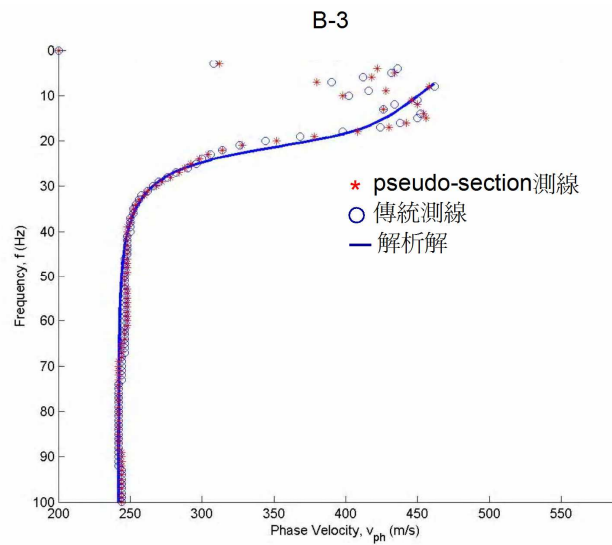
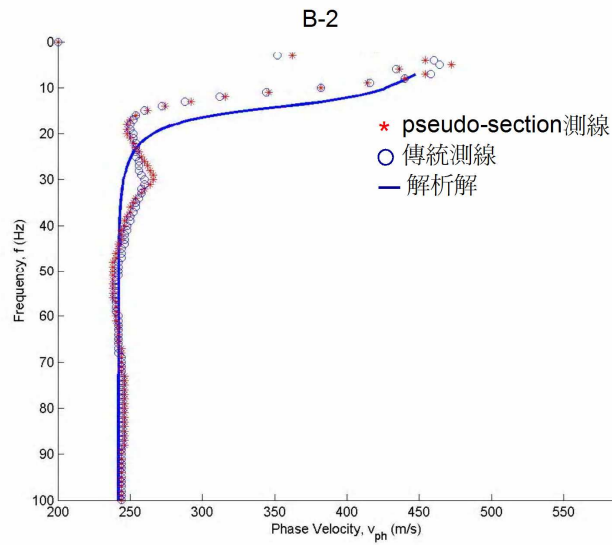
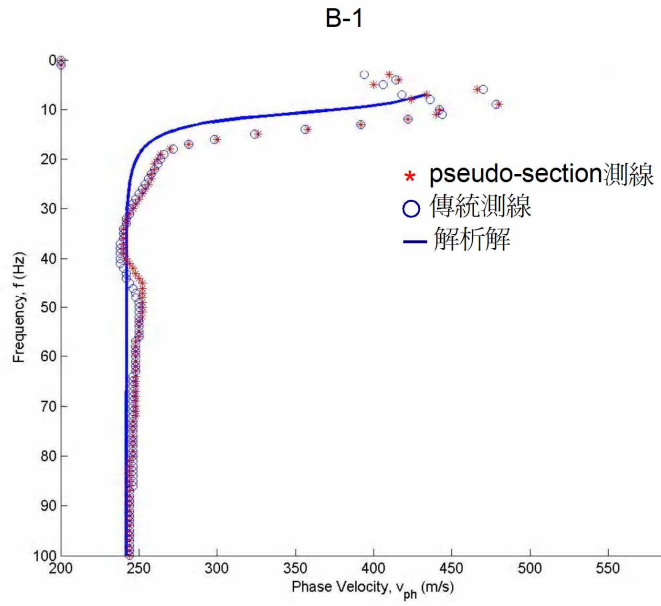


圖 4.4 B-1, B-2, B-3 傳統測線與 pseudo-section 測線施測頻散曲線比較圖

的修正，其相位角亦不會有靜態的誤差產生，如此一來，在沒有側向變化的水平地層中，pseudo-section 測線所得的震測資料與傳統測線所得的震測資料相同，亦是預期中的結果。

在 A 類及 B 類的模擬結果(見圖 4.2 及圖 4.4)中，會看見所得到的頻散曲線結果與解析解結果並不符合，甚至有怪異的差異產生，這樣的情形乃是受限於展距過小以及接收器過少所致；展距的大小與可接收的最大波長有關，而接收器的數目會影響到訊號分析過程中空間頻率上的解析度。為證實這兩個施測參數的影響，於此再進行一組模擬 B-2E。此組模擬除了將傳統測線接收器數目由 24 個增加至 81 個，以及將 pseudo-section 測線接收器數目由 6 個增加至 21 個外，其餘施測參數以及數值模擬參數皆與 B-2 相同，其頻散曲線結果如圖 4.5 所示。

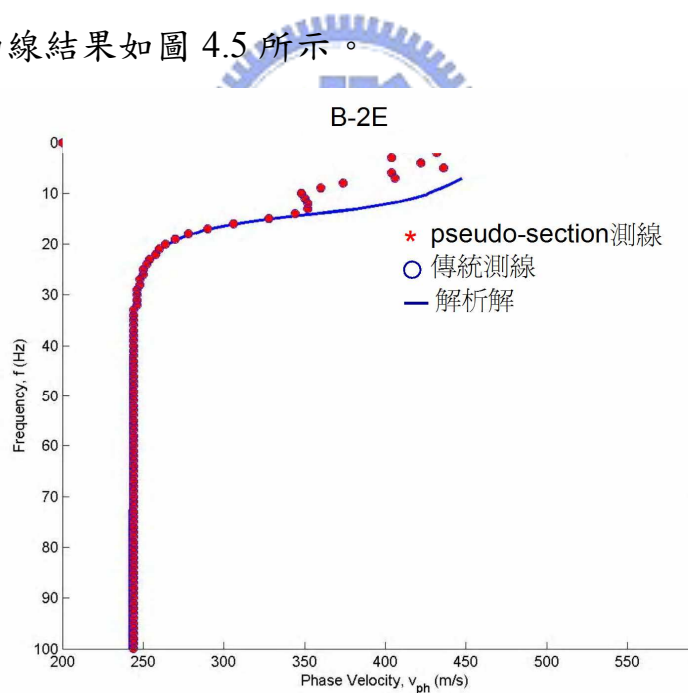


圖 4.5 B-2E 表面波陣測頻散曲線

由圖中的結果可知，當測線展距夠大時，其頻散曲線結果就會變佳，而對於再更低頻的部份，其需仰賴於更長測線展距的施作。也便是因為在頻散曲線結果較佳的要求下，常需要使用大量的接收器，但在實際的經濟考量上，接收器的數目通常受限，因此才欲發展 pseudo-section 測線，希冀使用

較少的接收器數量，但依舊能獲得較佳的頻散曲線結果。

4.3 C 類地層

在具有側向變化的 C 類地層模擬中，以四個簡化後的側向變化地層作為試驗，先行由傳統測線的結果討論地層側向變化對表面波的影響，再將其與 pseudo-section 測線進行比較，對其可行性做一初步結論。

4.3.1 地層側向變化之影響

C1-1：圖 4.6 是 C1-1 以傳統測線方式取得的震測資料，圖中箭號處為地層介面在地表的出露位置，在此位置左側為 A-1 地層，在此右側為 A-2 地層。由這圖上可以清楚的看見，在介面位置左側的接收器訊號與圖 4.1 中 A-1 傳統測線的資料比起，有一由介面位置開始的反射訊號存在。

圖 4.7 中空心圓圈處為頻率/波速域上的頻散曲線結果。一般我們採用測線中點作為頻散曲線的代表地層，於施測設計上，C1-1 的測線中點在地表地層介面左側 6.5 公尺處，其地層波速剖面與 A-1 相同，因此以 A-1 地層之解析解作為其對照。當仔細觀看此頻散曲線結果時應注意，由於測線展距僅有 23 公尺長，以此展距在最佳情況下可獲得的正確最大波長為 23 公尺，若以波速 250m/s 計算，頻率 11Hz 是可信任的最低頻率，於此以下的結果應當放棄。由圖中可發現，傳統測線所得到的頻散曲線會隨著頻率的降低而往高速發展，然而因為其所攜帶的左側地層訊號並不多，受其影響有限，往高速偏移的量至頻率 20Hz 處約 20m/s。在以水平層狀地層為假設，由所得的頻散曲線進行反算的前提下，波長與探測深度成正比，頻散曲線中波長較長(低頻)的點，一般認為牽涉較深處的地層參數資訊，則以這樣的觀點來解讀此頻散曲線，容易誤以為在地層不深處另有與左側地層地層參數相近的地層存在，實際上卻是一劇烈的側向變化地層。

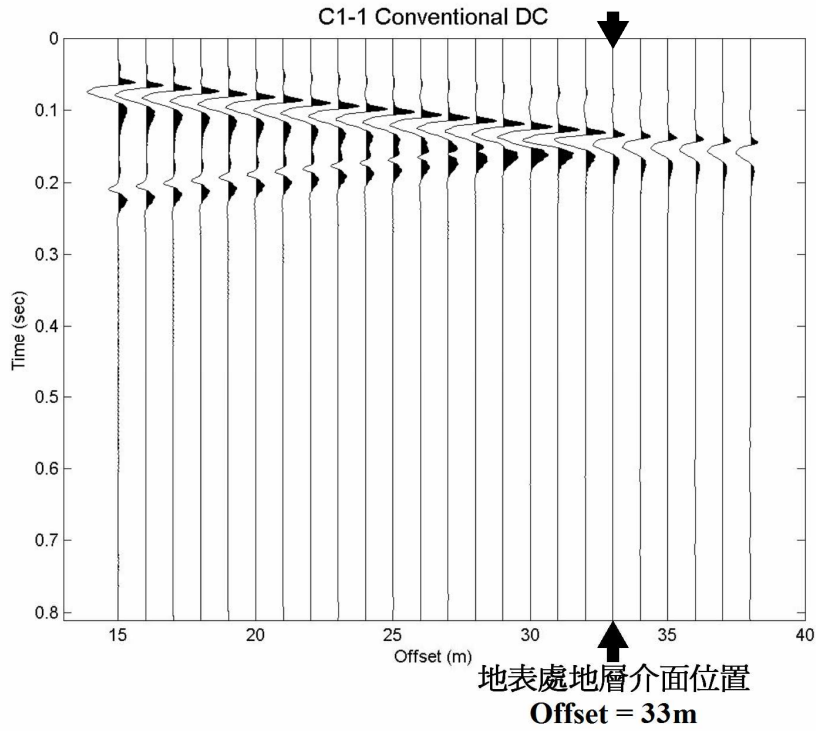


圖 4.6 C1-1 傳統測線震測資料圖

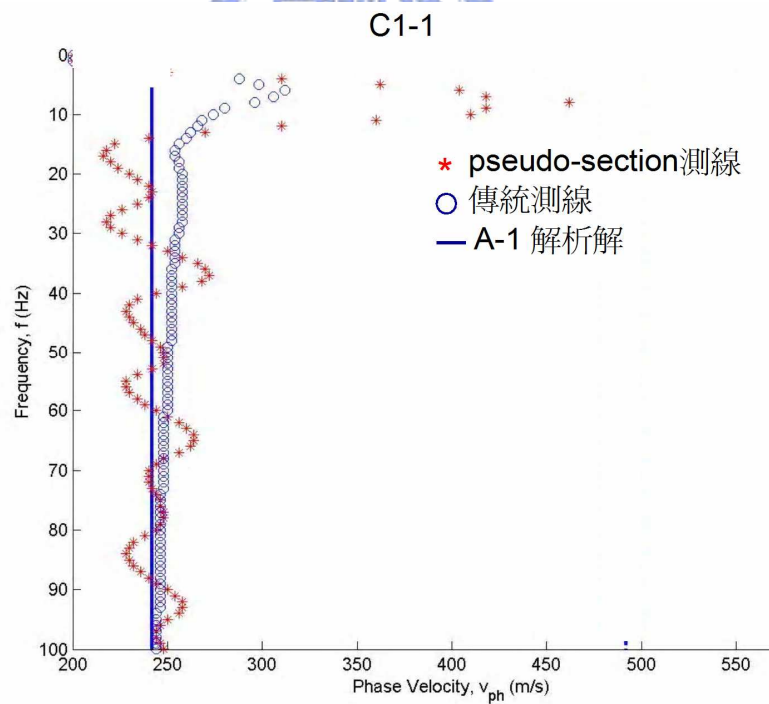


圖 4.7 C1-1 表面波震測頻散曲線圖

C1-2：圖 4.8 是 C1-2 以傳統測線施測所得到的震測資料，圖中箭號處為地層介面在地表的出露位置，在此位置左側為 A-1 地層，在此右側為 A-2 地

層。從這圖上與圖 4. 6 比起，在介面左側的接收器較少，不易看見明顯的反射訊號，大部分訊號是經過介面透射而後繼續前進的波引起的地表震動，其振幅強度與介面左側比起小的多。

再由頻率/波速域觀看此震測結果，如圖 4. 9 所示，空心圓圈為傳統測線所得的頻散曲線，以其波速 495m/s 計算，其可信任的最低頻率約為 21Hz，所得頻散曲線隨著頻率的降低，波速亦有降低的情形，對於一般的地層而言較不會有如此情形發生。又此測線的代表位置是位在介面右側，其地層波速剖面與 A-2 相同，因此以 A-2 解析解與其比對後可發現，至頻率 20Hz 其波速降低了 50m/s。若無注意在時間/空間域上的震測資料有不連續的反射波出現的情形，逕行以上述波長與探測深度的關係加以解釋，便會有高速層在低速層之上的解讀出現，但實際上卻是有劇烈的側向變化地層存在。

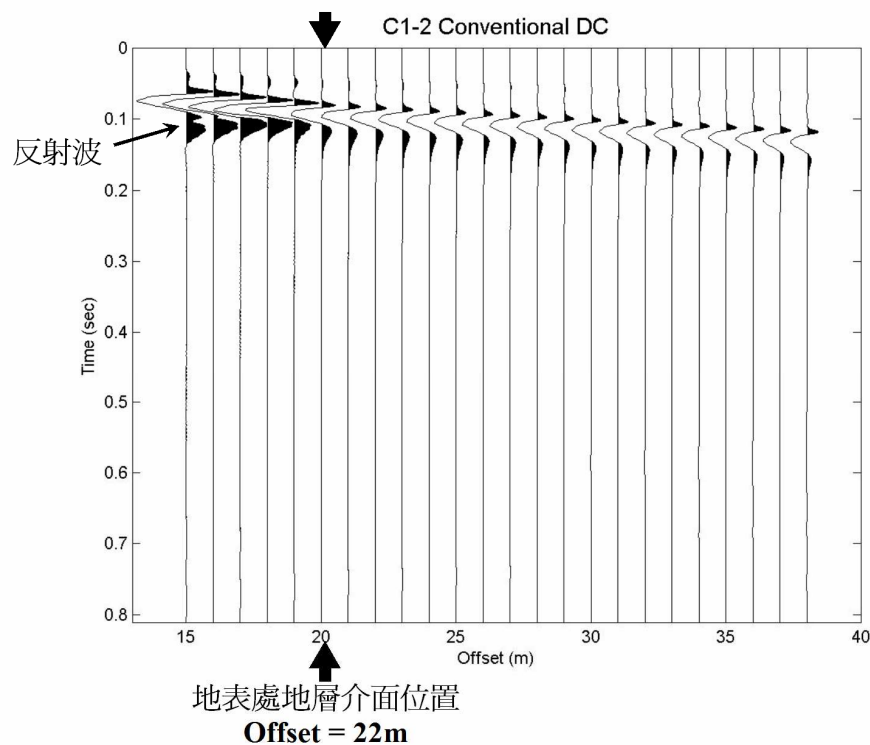


圖 4. 8 C1-2 傳統測線測資料圖

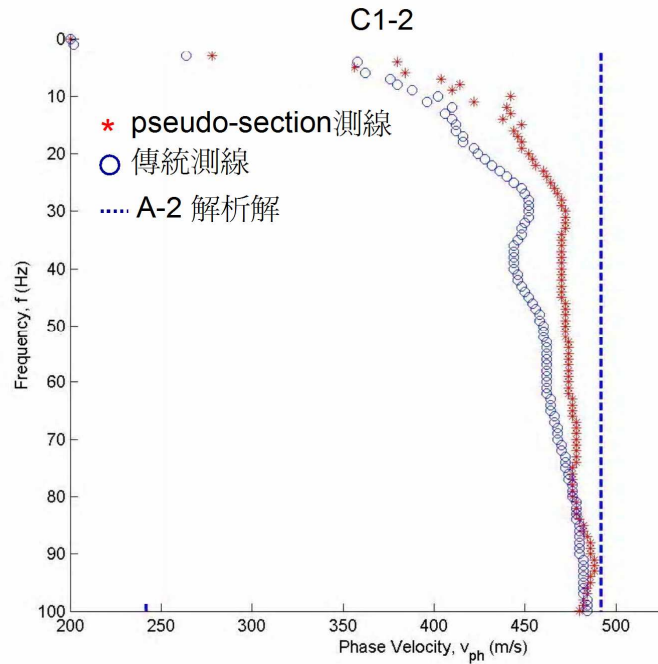


圖 4.9 C1-2 表面波震測頻散曲線圖

C2-1：圖 4. 10 是 C2-1 以傳統測線施測所獲得的震測資料，圖中短箭號處是地層側向變化的位置，在此位置左側的地層波速剖面與 B-1 相同，而在此位置右側的地層波速剖面與 B-2 相同。對於此種地層狀況，僅有一個階梯式的介面存在，並無法像 C1-1 及 C1-2 的情況一般在水平方向上有明顯的反射位置，大致上與兩層的地層震測資料類似，然而，若仔細觀察其與 B-1 及 B-2 差異可發現，在 B-1 及 B-2 的水平層狀地層情況中，其陸續反射上的波呈現平行的情形，但在這可發現，波由深層進入淺層，沿著長箭號方向的反射訊號間距有逐漸變小而後漸而平行的現象，此外，在方框區內的訊號，與 B-1 及 B-2 比起，右段(短箭號右側)有部分反射訊號消失的現象，中段約略呈現水平，而左段與中段的訊號並不連續，推估這是因為階梯式的側向變化使得在側向變化處的左右側有不同的反射情形產生(階梯式的不連續會阻擋由左側反射上來往右側傳遞的波，使得右側對這波的訊號接收到的能量極小，此外，此被階梯阻擋住的波又會往回反射到左側的接收器而被接收到)。

再看圖 4.11，C2-1 在頻率/波速域上的頻散曲線，

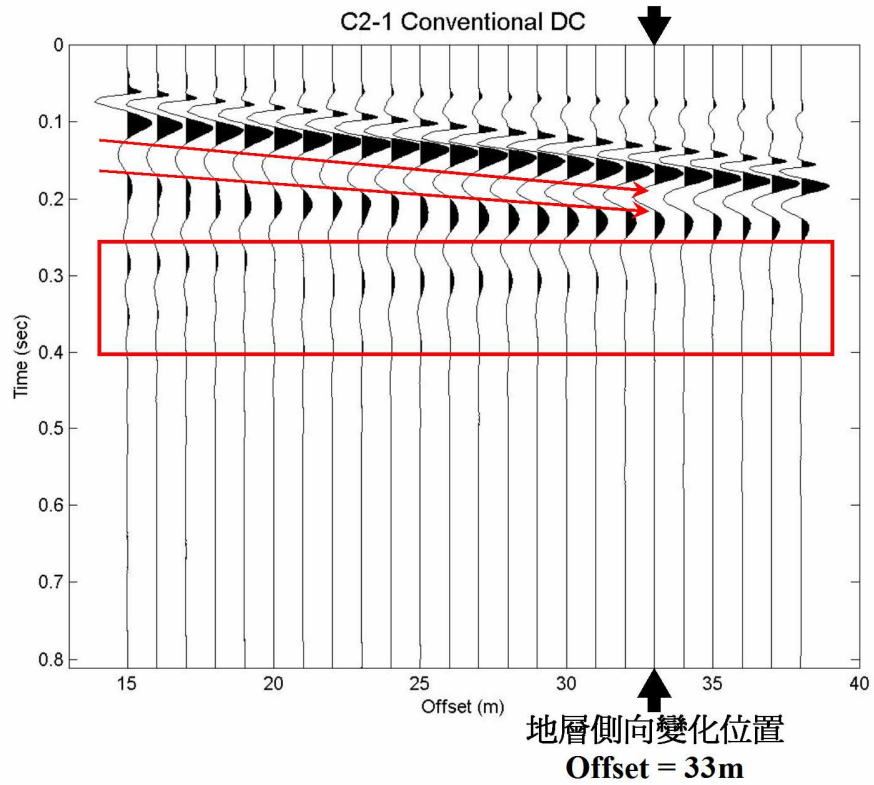


圖 4.10 C2-1 傳統測線震測資料圖

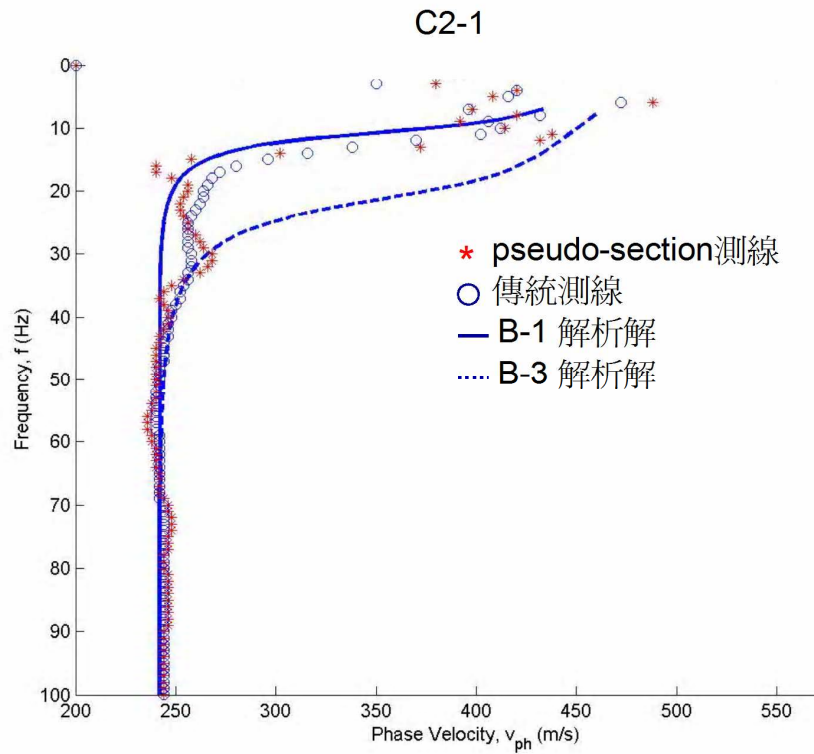


圖 4.11 C2-1 表面波震測頻散曲線

空心圓圈處為傳統測線所得頻散曲線位置，以波速 350m/s 計算，其可信任的最低頻率為 15Hz。此測線中點所在位置是在側向變化位置的左側 6.5 公尺處，地層波速剖面與 B-1 相同，但因其接收器亦有接收在側向變化右側位置的訊號，因此同時將 B-1 及 B-3 頻散曲線的解析解畫上做比對可發現，傳統測線所得到的頻散曲線是在 B-1 及 B-3 的頻散曲線間游走，頻率較高時是依隨著 B-2 的頻散曲線但至 35Hz 左右開始向 B-3 的頻散曲線靠攏，至頻率 15Hz 已幾乎貼上 B-1 頻散曲線。

C2-2: C2-2 地層模型以傳統測線施測的震測資料結果如圖 4. 12 所示，圖中短箭號處是地層側向變化的位置，震波依舊由較厚的地層進入較薄的地層中，然而與 C2-1 不同，C2-2 的傳統測線有十八個接收器是在地層側向變化的右側處。由圖中可看見，在地層側向變化處的左側兩個長箭號中間所夾的時間差較大，這是由於這部份的接收器接收到的反射訊號是由十公尺深的地層處反射上來，接著經過中間一段距離的調整帶後，右側兩個長箭號中間所夾的時間差便變小了，且趨向平行，表示這裡開始的反射訊號是由五公尺深的地層處反射上來。已知在地層側向變化處右側的地層情形與 B-3 相同，將此圖與 B-3 傳統測線的震測資料(圖 4. 3)做比對可發現，B-3 中的震測資料有較多密集的反射訊號出現但在這卻沒有，原因很明顯，因為在 B-3 的地層中，震波會在第一層地層中快速的來回反射，震波的入射角可以是任意的，而在 C2-2 地層中，震波的入射角受到限制，惟有直接傳遞至右側地層介面處的震波，才有較足夠的能量展現出反射訊號，而這直接傳遞來的震波自 20 公尺遠的地方直接來到五公尺深的地層，可想而知此入射角之大，而使得在此薄地層中來回反射的訊號大大的減少。

再進而觀察其頻散曲線圖 4. 13 的結果，空心圓圈處便是傳統測線施測所得的頻散曲線結果，以波速 400m/s 作計算，其可信任最低頻率約在

20Hz。在施測設計上，此測線的中點位在地層側向變化處的右側，其波速剖面與 B-3 相同，又為

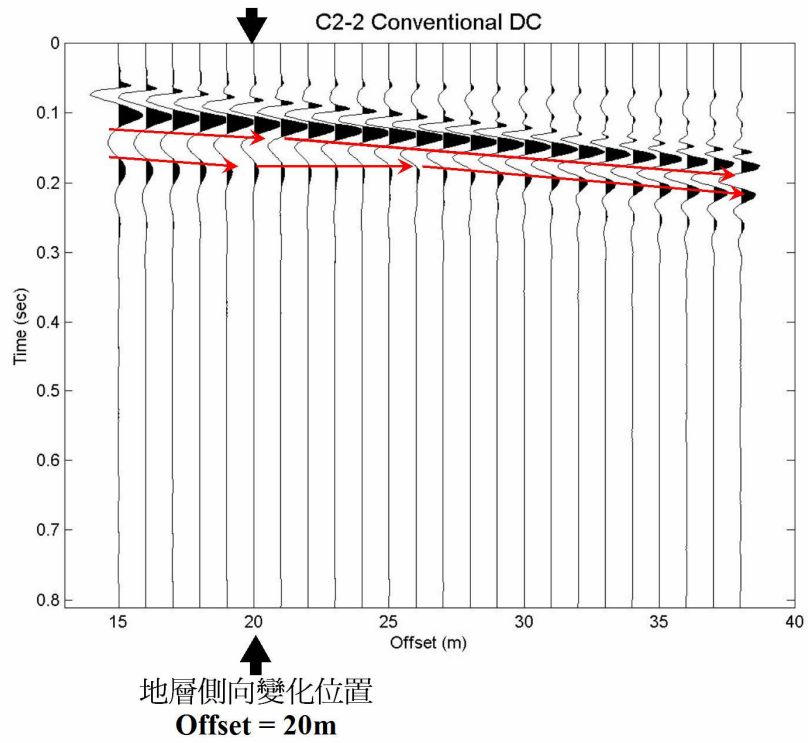


圖 4.12 C2-2 傳統測線震測資料圖

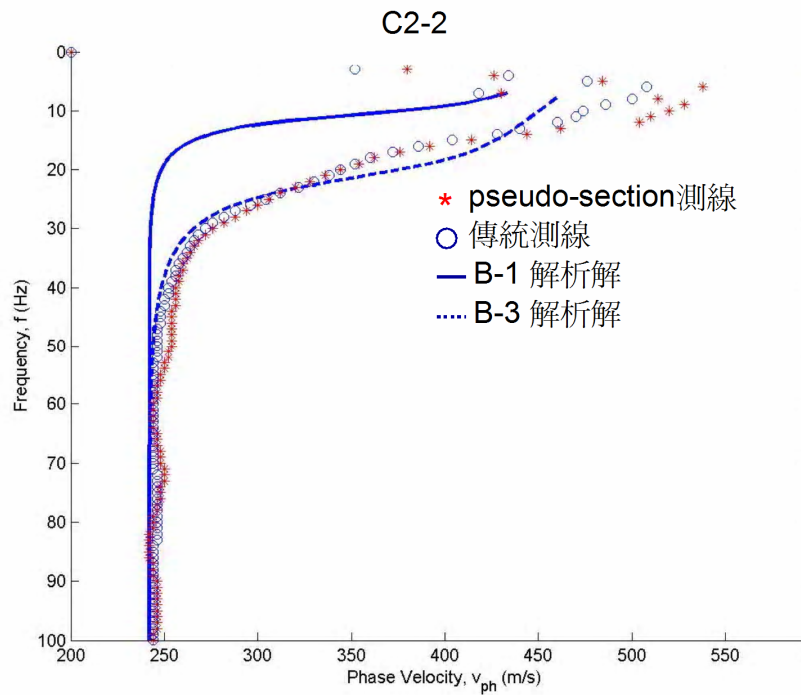


圖 4.13 C2-2 表面波震測頻散曲線

了解左側地層對其影響程度，因此以 B-1 及 B-3 的解析解作為對照比對。由圖中結果可輕易的看見，傳統測線在這裡的表現非常好，雖然在頻率 23Hz 左右有開始向 B-1 靠攏的情形，然而其後續頻率中出現有震盪的情形，且這位置極靠近最低信任頻率，所以也可能是因為施測上的限制(展距太短)而造成訊號分析後其頻散曲線在低頻處有偏離 B-3 的傾向，但也不能忽略，在側向變化位置前的五個接收器帶有左側地層的訊息，勢必會對結果造成影響。

C3：由地層模型 C3 以傳統測線施測所得的震測資料如圖 4.14 所示，短箭號所指是地表處地層介面的位置，在此右側的地層波速剖面與 A-2 相同，而在此左側的地層有漸深的傾斜變化。由圖中的震測資料圖可看出在地表處地層介面的左側有明顯反射訊號出現，與在地表處有地層介面的 C1-1 相類似，雖然因為在此側向變化是漸變形式，使得反射訊號部分的波形與

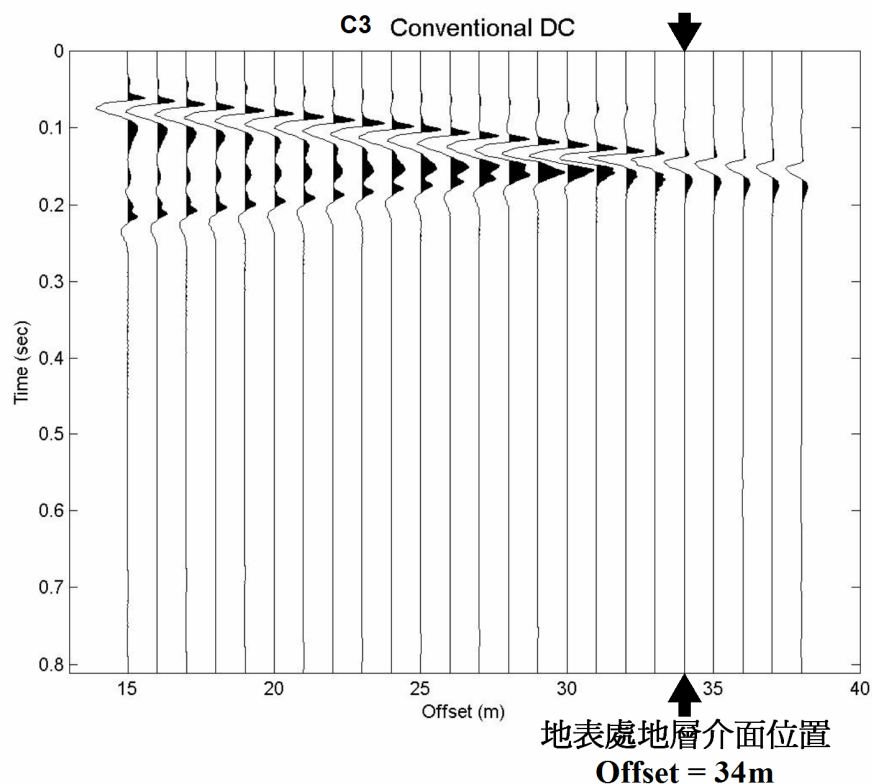


圖 4.14 C3 傳統測線震測資料圖

C1-1 的不同，然而，欲以此做區分並不容易。

由頻率/波速域(如圖 4. 15)觀看其頻散曲線，空心圓圈處便是傳統測線施測所得的頻散曲線結果，以波速 350m/s 作計算，其可信任最低頻率約在 15Hz。當初施測的設計上，其頻散曲線的代表位置處的波速剖面與 B-2 相同，因此以 B-2 作為對照。由圖上可發現，傳統測線所得到的頻散曲線與 B-2 解析解的結果比起，有平均化的表現，不似解析解在頻率 20Hz 的時候驟然開始往高速發展，而是在頻率 60Hz 左右便開始漸漸的往高速偏移。

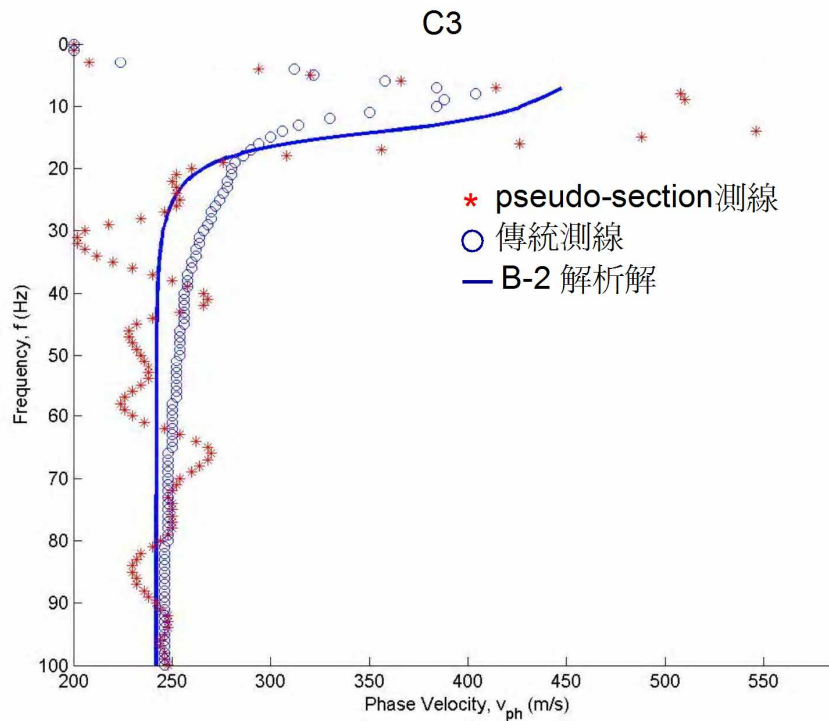


圖 4. 15 C3 表面波震測頻散曲線

此外，剛提過在時間/空間域的震測資料上不易看出 C3 與 C1-1 的差異，因此，將其與 C1-1 傳統測線所得的頻散曲線與 C3 傳統曲線所得的頻散曲線作差異比較(如圖 4. 16 所示)，可發現，兩條頻散曲線在頻率 40Hz 以上幾乎是相同，而低過了頻率 40Hz 以後便開始有分開的情形，C3 的頻散曲線往高速偏移的程度較大。這樣的情形是因為，表面波在某波長下的波速與此波長影響深度所及的地層有相互關係(表面波波長與深度的地層參

數有關，波長越長與其相關的地層深度越深)，因此，當頻率高時，其牽涉的是淺地層處的資料，就 C1-1 與 C3 來說都是以 L1 地層的資料為主，而後當頻率降低至某一程度(亦即波長大到某一程度)，C3 在深度上有 L2 的訊息開始產生，於是便反應在頻散曲線上。C1-1 中的表面波，其對 L2 地層參數的訊息只要是來自側向的反射波，而在垂直方向上幾乎沒有，但 C3 中的表面波，其對於 L2 地層參數的訊息除了由側向反射回的表面波外，尚有由深處來的訊息，因此在頻散曲線上，相較於 C1-1 有更明顯向高速偏移的現象，若將此頻散曲線以水平層狀地層看待，便會造成對其地層的介面有高估的情形。

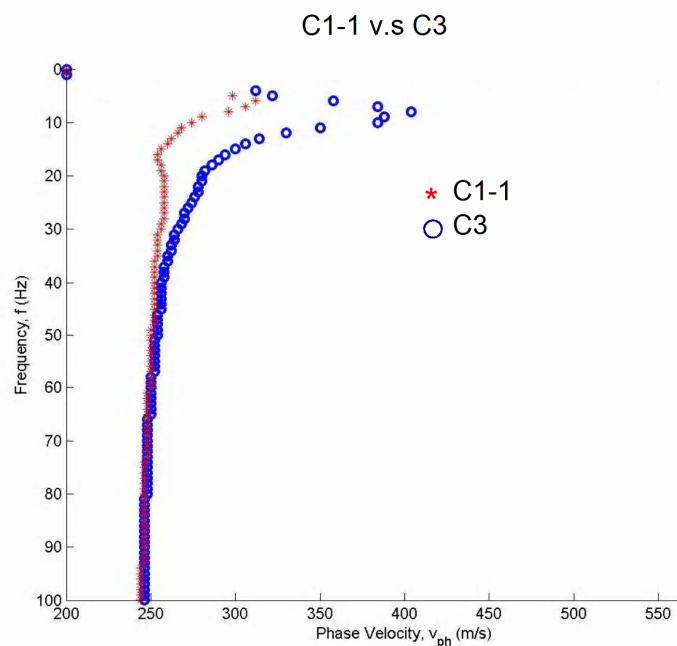


圖 4.16 C1-1 與 C3 傳統測線施測頻散曲線比較

C4：如圖 4.17 所示是 C4 地層模型以傳統測線施測所得的震測結果，短箭號間是地層側向變化帶，在此帶左側的地層波速剖面與 B-1 相同，在此帶右側的地層波速剖面與 B-3 相同。由圖中可見，接收器所接收到的反射訊號在地層側向變化帶的左側兩個長箭號所夾的間距較大，慢慢的開始進入側向變化帶後，地層介面有上升的趨勢，也使得反射的訊號中間間隔時間

縮小，當通過側向變化帶後，有一小段的調整段，而後長箭號所夾的間距趨於固定。此現象與 C2-1 相類似，但因為具有側向變化帶，因此其由左側地層的反射間隔時間調整至右側地層的反射間隔時間需要較大的調整段。

將觀察的震測資料結果表現域轉至頻率/波速域上來看(如圖 4. 18 所示)，空心圓圈為傳統測線施測所得的頻散曲線，以波速 370m/s 計算，其可信任的最低頻率約是 17Hz。施測時設計其測線中點位置的地層波速剖面與 B-2 相同，又側向變化帶左側地層波速剖面與 B-1 相同，右側波速剖面與 B-2 相同，因此將此頻散曲線與 B-1，B-2，B-3 解析解一同比較。由圖中可見，其傳統測線施測所得的頻散曲線，由高頻開始沿著 B-3 的解析解發展，至頻率 30Hz 後開始轉向往 B-2 解析解靠攏，至頻率 20Hz 左右已貼上 B-2 的解。

這樣的結果稍有一奇特之處，在接收器的佈設上，位於側向變化帶左側以及右側的接收器數目是相同的，頻散曲線的結果在部分頻率段表現了右側地層的現象，但卻沒有表現位於左側地層的現象。對此結果，可以在 C3 中所提及表面波波長與深度中所涵蓋的地層參數有關來做為解釋。對於側向變化帶左側的地層，其 L2 的深度在 10 公尺以下，而位於右側的地層，其 L2 的深度自 5 公尺以下便是，因此可以知道，對於左側地層而言需要較大的波長以將地層在深度上的資訊做足夠的獲得；而相對於左側地層，右側地層只需較為短的波長。也由此可進一步的解讀圖中 C4 的頻散曲線結果，雖然其在低頻位置往其所代表的地層波速剖面頻散曲線靠攏，但，在這地層模型中，B-2 的地層坡面只是一個點的小部份，不應有這麼大的影響，所以在此表現出的是表面波已獲得了些許來自左側地層的訊息，只是此訊息尚不明顯，而與側向變化帶的地層訊息有了權重調整後的綜合表現。對於如此的解釋，只需與 C2-1 及 C2-2 的結果對照便可知只要有足

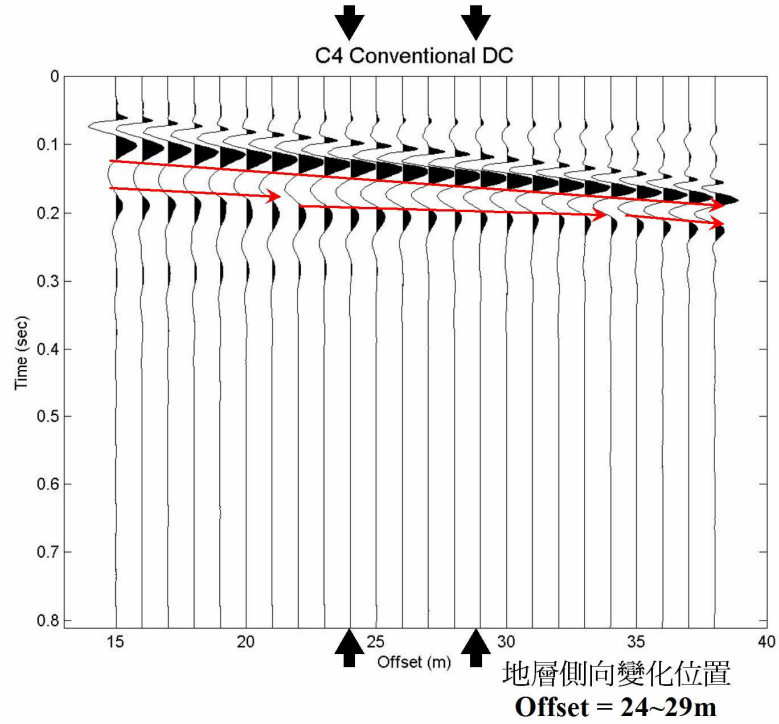


圖 4.17 C4 傳統測線施測震測資料圖

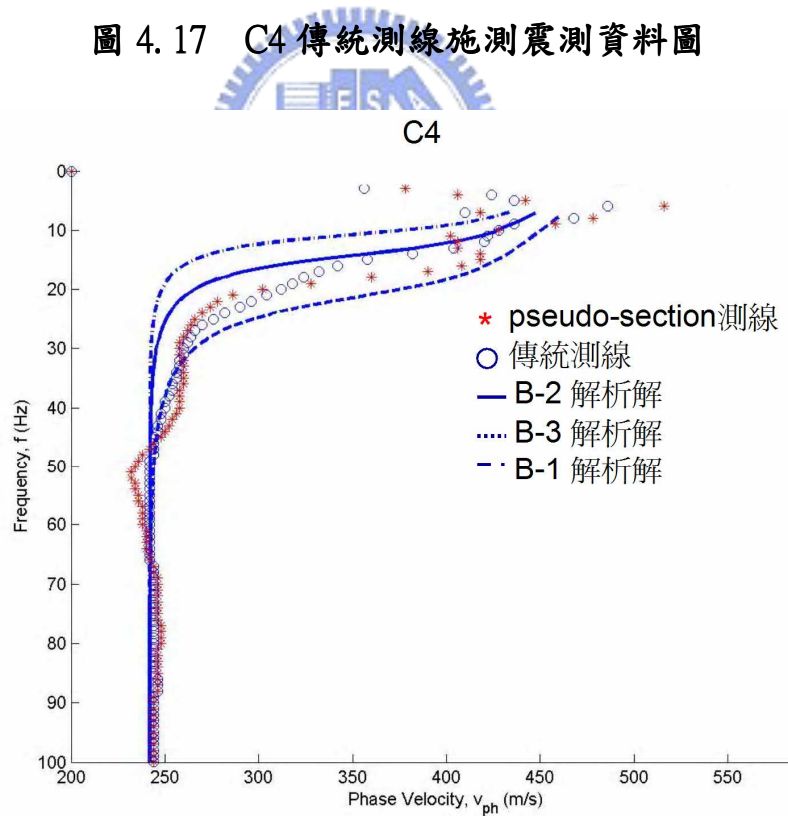


圖 4.18 C4 表面波震測頻散曲線

夠的接收器對左側地層進行訊息接收，便會使頻散曲線往左側的地層(B-1)頻散曲線靠攏，而表現出來。可再對此解釋作進一步的模擬，便可更加確

定這樣的說法。

4.3.2 pseudo-section 概念可行性探討

C1-1：圖 4.7 中星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，此測線的代表處地層波速剖面與 A-1 相同，以其與 A-1 解析解相比較可發現，pseudo-section 測線所得到的結果會在解析解附近有震盪的現象。由此域上不易討論造成此現象的原因，轉回以時間/空間域的震測資料來討論，圖 4.19 左側是四次敲擊分別所獲得的震測資料結果，而右側是將這四筆資料在頻率域進行縫合後，再轉回至時間/空間域的擬震測資料。由圖中右側來看可發現，在測線旁的側向變化介面造成的反射訊號在每一筆震源的資料中皆有出現，且其與直達波的相對時間具都固定，因此，當我們將這些資料

C1-1

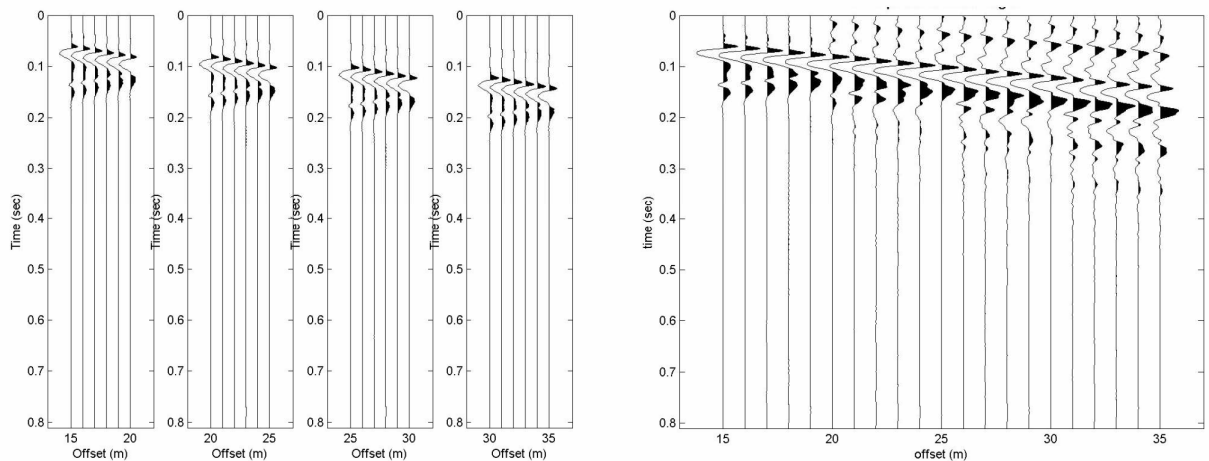


圖 4.19 C1-1 pseudo-section 測線震測資料圖

都縫合後(見右側的圖)除了從一開始會有因為訊號分析產生的假訊號外，還可看見在訊號中有重複出現的區域性反射訊號(如圖 4.20 所示)。這樣的反射訊號與圖 4.6 中的反射訊號不同，此由地表介面處所傳來的反射訊號會持續的影響直接傳遞的波所攜帶的訊息，而沒有與直達波的訊號分開，使得向右傳遞的表面波與向左傳遞反射回的表面波互相干擾，而造成震盪的情形持續。後續的模擬中將會持續檢示此一觀點。

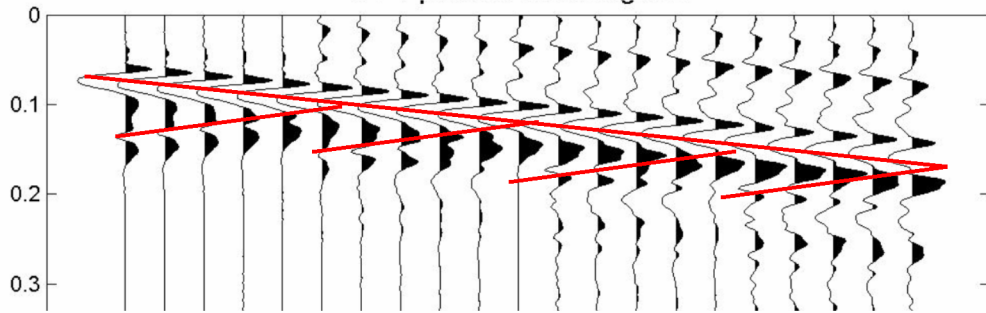


圖 4.20 C1-1 擬震測資料的反射干擾

C1-2：如圖 4.9，星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，此測線的代表處地層波速剖面與 A-2 相同，以其與 A-2 解析解相比較可發現，pseudo-section 測線所得到的結果有往低速偏移的情形，頻率越低偏移的情形越明顯，但與傳統測線所得到的頻散曲線相比較，更加貼近其代表地層的解析解。我們可發現，在此頻散曲線結果中，其震盪的情況改善許多，為了解此一情形，並審視於 C1-1 所做解釋的合理性，將觀察的域轉回至時間/空間域的震測資料結果。

如圖 4.21 所示，圖中左側為四次震源所收到的震測資料，右側為在頻率域縫合後再轉回時間/空間域的擬震測資料，在這裡的原始資料中(圖左側)沒有反射波的干擾情形存在，其縫合後所得到的擬震測資料亦無此情形的存在，且在此擬震測資料的開端，類似於 C1-1 中的假訊號現象也改善許多。此外，在所得到的頻散曲線中，即使是在高頻處，也會有往低速偏移的現象。關於此點，推估是因為表面波由左側地層進入右側地層的時候，其所攜帶的右側地層訊息會對左側的地層訊息產生干擾，而使其在地層訊息的轉換上存在著干擾帶，波長越長(低頻)所存在的干擾帶會越大(波長較長的表面波，一個波所存在的空間(一個完整波長)較大，因此在過渡後需要有較大的空間使其轉換至右側地層的訊息)。為說明此一推論的正確性，我們再進行一個模擬 C1-2E，模擬的參數值都與 C1-2 相同，惟有改變近站支距，

讓測線位置往後移，使其得到的表面波訊號已是經過一段干擾帶。其結果如圖 4.22 所示。由此結果便可見到，距地表介面較遠所獲得的頻散曲線較 C1-2 的結果好，不但高頻處的波速在解析解上，且在頻率 40Hz 以後才有向低速偏移的現象產生。

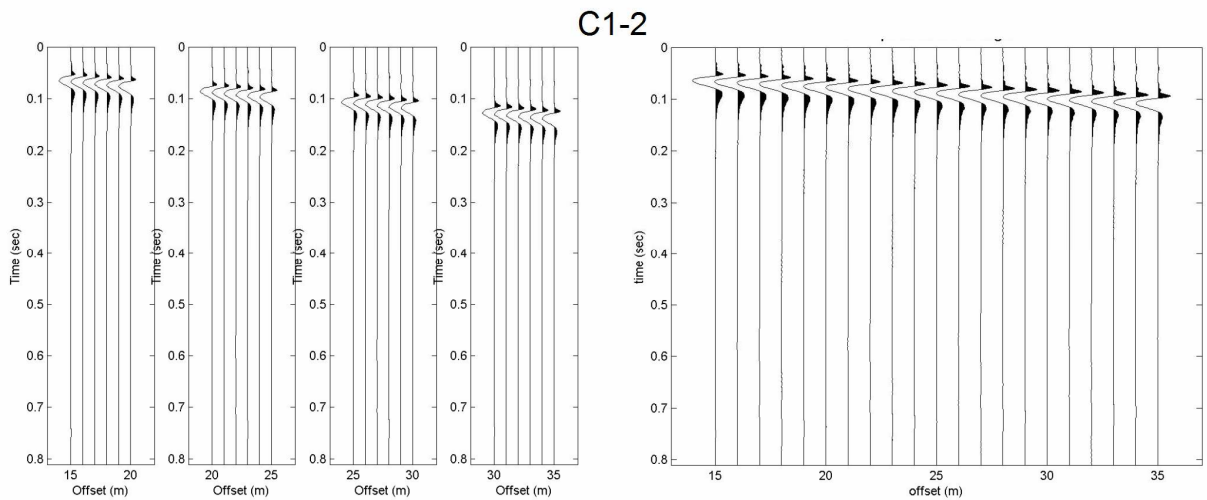


圖 4.21 C1-2 pseudo-section 測線震測資料圖

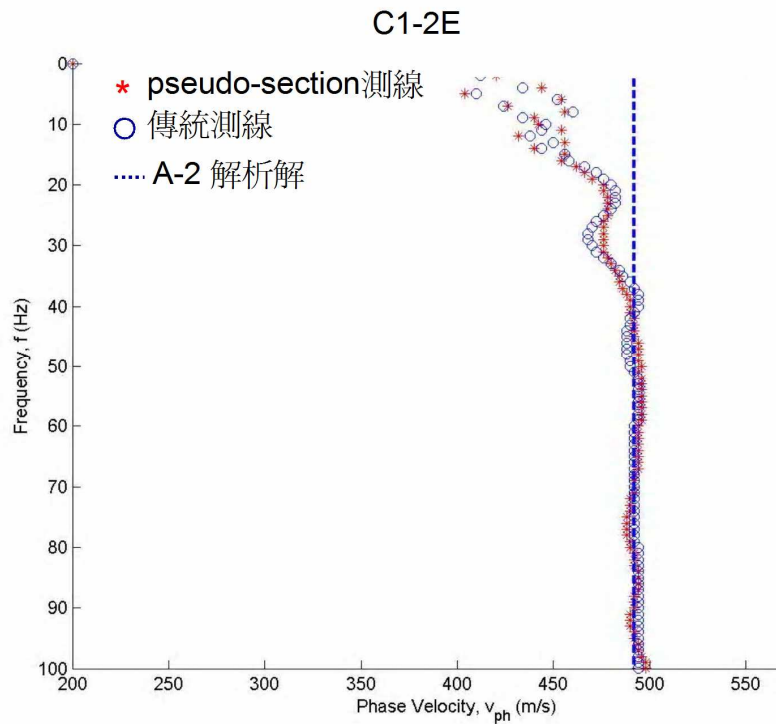


圖 4.22 C1-2E 表面波震測頻散曲線

C2-1：如圖 4.11 所示，星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，

將其與傳統測線結果比較，可發現 pseudo-section 測線所得的頻散曲線在傳統測線所得的頻散曲線周圍震盪。但與傳統測線不同的是，傳統測線因為同時接受到來自地層側向變化左右兩側訊號的影響，所以在低頻處會有往高速偏移的情形，但 pseudo-section 測線所佈設的接收器並沒有在地層側向變化處左側的地表，卻依舊有往高速偏移的現象。推估，造成這樣的原因可能是當表面波在地表傳遞時，波長較長的部份擾動較大，牽涉的地層較深，而造成表面波的反射，只是這裡的反射與地層側向變化有至表面的反射不同，僅有低頻部份反射，當然，若此一推估成立，於傳統測線所得的震測資料中亦會有所影響。

將觀察的域轉至時間/空間域的結果上，如圖 4.23 所示，左側是四次震源所接受到的震測資料，而右側是在頻率域進行縫合後轉回時間/空間域的擬震測資料。從左側的圖中並沒有發現有明顯與 B-1(圖 4.4)的不同，然而在右側的擬震測資料圖中在 offset 27 至 35 公尺處的反射訊號中(見圖 4.24)有波形改變的出現，推疑便是此反射波訊號，但因能量較小而無明顯情形，只是對於此部分的推想應再做進一步的了解才可更加確定。

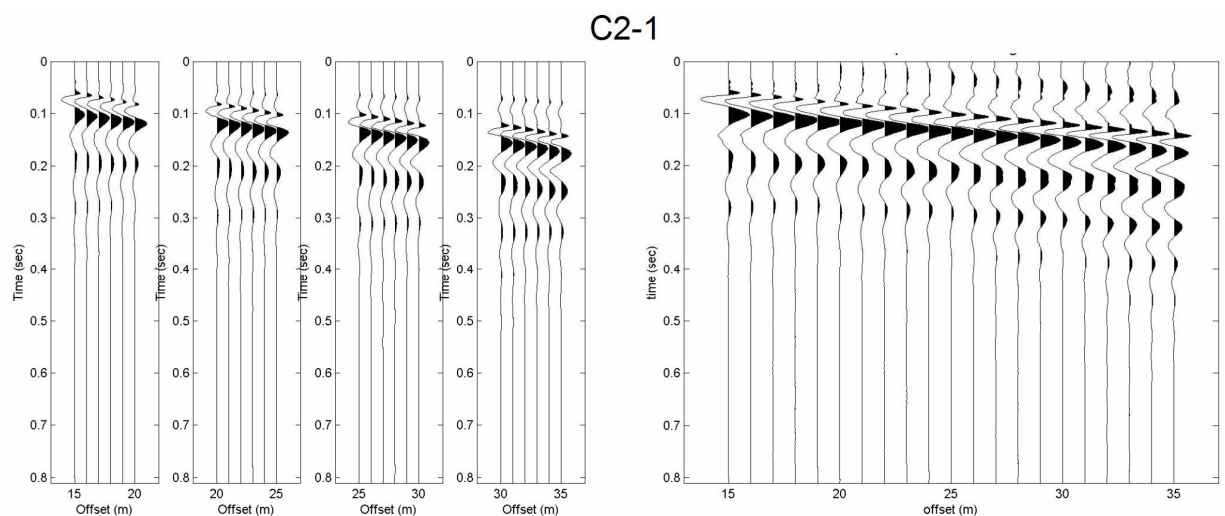


圖 4.23 C2-1 pseudo-section 測線震測資料圖

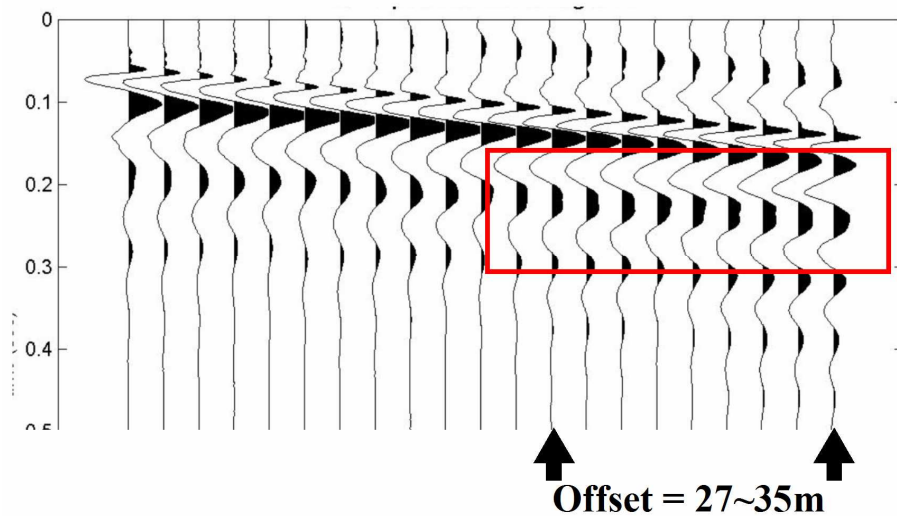


圖 4.24 C2-1 擬震測資料表面波反射訊號圖

C2-2: 如圖 4.13 所示，星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，將其與傳統測線結果比較，可發現 pseudo-section 測線所得的頻散曲線與傳統測線所得結果幾乎一致，震盪情形雖然依舊存在，但是並不嚴重。由其時間/空間上的震測資料結果(如圖 4.25)來看，左側是四次震源所產生的震

C2-2

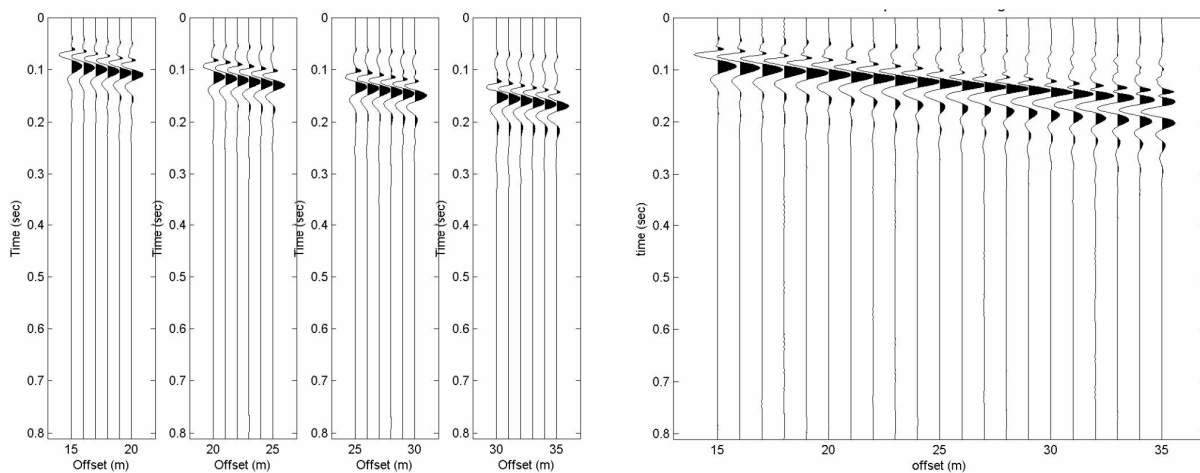


圖 4.25 C2-2 pseudo-section 測線震測資料圖

測資料，右側是在頻率域經過縫合後再轉回時間/空間域上的擬震測資料，除了在較遠處的擬震測資料上有些假訊號的產生外，並無其他明顯的異常現象。可見，pseudo-section 測線所得的頻散曲線的震盪情形並非純粹只是

反向行進的表面波干擾所造成，極可能因為訊號分析所產生的假訊號亦是造成的原因之一。

C3：如圖 4. 15 所示，星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，測線中點的地層波速剖面與 B2 相同，將其與傳統測線結果以及 B2 解析解比較，可發現 pseudo-section 測線所得的頻散曲線在解析解的周圍震盪，與傳統測線所得的頻散曲線結果較不相同。由時間/空間域的震測結果來看(如圖 4. 26 所示，左側是四次震源所產生的震測資料，右側是在頻率域經過縫合後再轉回時間/空間域上的擬震測資料)，右側圖中便可見到由表面地層介面處反射回的表面波訊號會持續的出現，進而干擾頻散曲線的結果而有頻散曲線震盪的情形發生。由擬震態資料的圖中亦可看見在資料初始處有因為訊號分析而產生的假訊號存在。

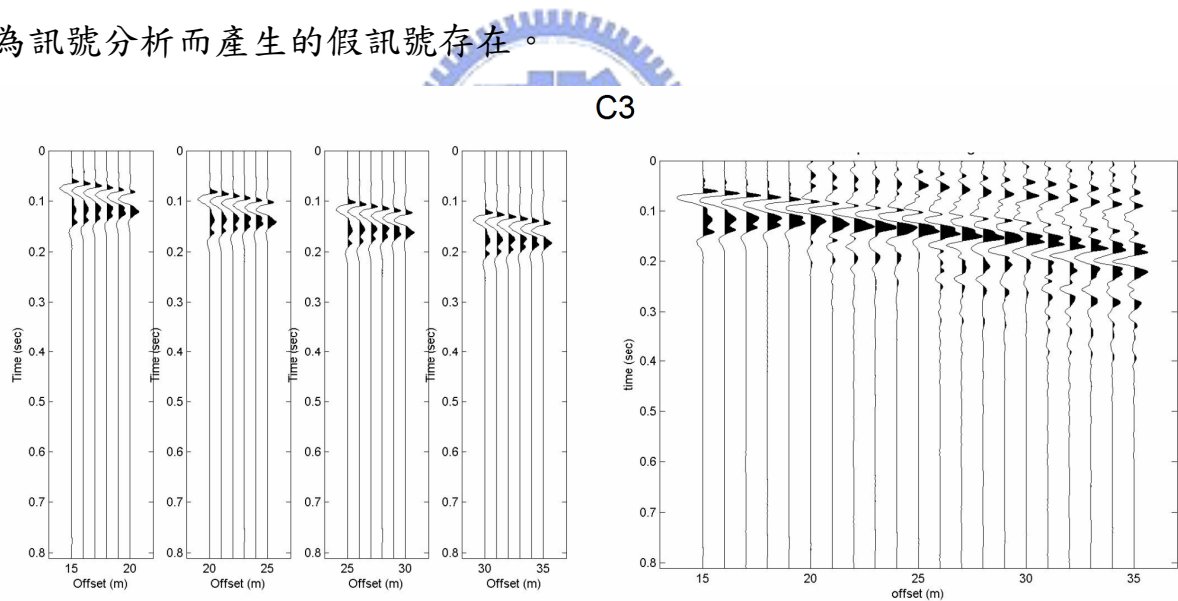


圖 4. 26 C3 pseudo-section 測線震測資料圖

C4：如圖 4. 18 所示，星號是以 pseudo-section 測線施測所得的頻散曲線，測線中點的地層波速剖面與 B2 相同，在其地層側向變化帶的左側地層波速剖面與 B-1 相同，在其地層側向變化帶的右側波速剖面與 B-3 相同，因此將其與傳統測線結果以及 B1, B2, B3 解析解作比較，可發現 pseudo-section 測線在傳統測線所得的頻散曲線周圍震盪。此外，在低頻處(20Hz 以下)

pseudo-section 測線所得的頻散曲線有向 B-3 解析解靠攏的情形，然而，因為此結果的可信任最低頻率僅至 17Hz，無法確切得知此靠攏情形是實際靠攏又或只是震盪中的一個段落。再由時間/空間域來觀看(如圖 4. 27 所示，左側是四次震源所產生的震測資料，右側是在頻率域經過縫合後再轉回時間/空間域上的擬震測資料)，應要注意，在左側的圖中可發現，在第一次、第二次震源擊發所得的反射訊號與第三次、第四次震源擊發所得的反射訊號是不同的。第一次、第二次震源擊發所得的反射訊號是由地層側向變化帶反射上來被接收到的反射訊號而第三次、第四次震源擊發所得的反射訊號則是由地層側向變化帶左側所得到的反射訊號(觀看其不同接收器接收到反射訊號的時間差關係得知)。由前述的經驗得知，往反方向傳遞的反射波訊號會對 pseudo-section 施測所得的頻散曲線造成震盪的影響，但是同方向的反射訊號是不至於對結果產生影響，因此，在此所得到的頻散曲線雖有震盪的現象，但其震盪情形並不如 C1-1 的嚴重。

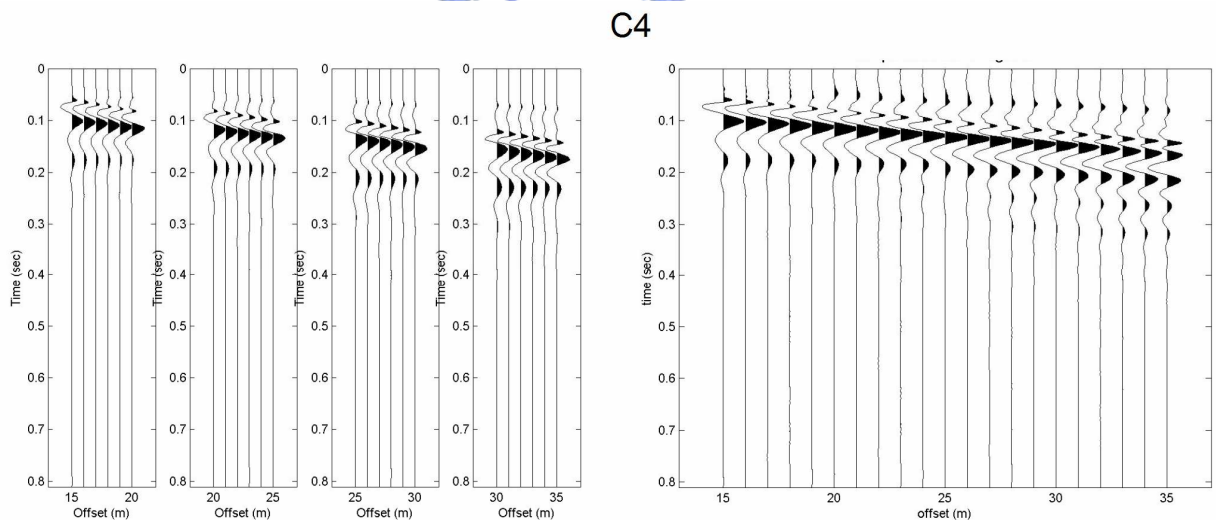


圖 4. 27 C4 pseudo-section 測線震測資料圖

第五章 結論與建議

5.1 結論

側向變化地層對表面波震測的影響：在側向變化地層中，側向變化的存在會使得表面波震測結果有假頻散的情形產生，亦即，在不具有垂直變化的地層中，即使測線中點位置處的地層沒有水平層狀分層，或是僅在較深處才有另一層面的存在，但是測線的附近卻存在有側向的地層變化，則在所獲得的頻散曲線中亦會有頻散的現象，此時若只是以水平層狀的地層解讀此一頻散曲線，便會誤認在垂直方向上有地層介面的存在。又，即使在垂直方向上有地層參數的變化，側向變化的存在亦會使得在垂直方向上的層面位置解讀出現錯誤。也就是說，表面波所帶有的地層訊息是同時來自於垂直方向以及側向方向，若不考慮側向上的訊息所造成的影響，只單獨以垂直向訊息看待之，其解讀結果便會有所錯誤。此外，表面波由一個介質進入另一介質時，其存在一個干擾帶，其所原有的地層參數會干擾新進入地層的參數表現，而這一干擾帶的大小與波長有關，波長越長其所存在的干擾帶便越大，反之，亦然。

Pseudo-section 概念的可行性：經由模擬的測試結果，以 pseudo-section 概念施測所得的資料，配合目前所使用的訊號分析方法，在沒有反向行進的反射波或是反向行進的反射波與正向行進的表面波訊號分離的夠開的情況下，pseudo-section 測線所得頻散曲線可獲得與傳統測線所得頻散曲線差不多或更好的結果。而當有反向行進的反射訊號存在時，以 pseudo-section 所得的頻散曲線會有強烈的震盪情形，雖然此震盪大約以實際頻散曲線為振盪中心，但震盪情形不定容易造成誤判。這樣的結果並不能稱壞，因為震盪的情形與側向變化地層的存在有高度相關性，以此施作的結果，可有效

的檢測側向變化地層的存在或影響程度，並且，目前已大約知道反向行進的反射波是造成此震盪情形的主因，若能再搭以濾波的訊號處理方式，pseudo-section 測線便能更有效的處理各種地層情況。就目前的結果顯示，pseudo-section 概念在表面波震測上的應用是可行的，雖然在有反向行進的反射訊號下會有不佳的情形發生，但這結果能使我們在不需解讀時間/空間域上的反射情形下，亦能提供地層側向變化存在的訊息。因此，不論以pseudo-section 測線作為施測主體，提供反算用的頻散曲線，又或是作為輔助使用的側向變化地層偵測，都具有正面的意義。

5.2 建議

震波傳遞模擬程式：目前所使用的數值模擬程式中，在邊界的處理上採用的是最容易施用的吸收邊界(Cerjan et al., 1985)。使用此種邊界並無法完全的吸收在人造邊界上所可能造成的反射情形，使得在進行模擬時需要以較大的模擬空間避免接收器擺放位置在取樣的時間內接收到這些假的反射波，且在施用此種邊界的寬帶處，因為在帶中開始有遞減的情形，而造成力的不平衡，而有假震源的產生，會對模擬結果造成錯誤。因此，應當再以其他邊界的技巧使得邊界的模擬有更好的效果，而不需以極大的模擬空間造成模擬上的耗時，亦可使得模擬結果不致受到假震源的影響。此外，目前的數值模擬是以彈性材料為假設，與實際的地層情形並不相同，應可再進一步考慮有阻尼效果的非彈性地層作為數值模擬中的控制方程式。

表面波震測及表面波行為：由結論中可知，以目前的表面波震測方式所獲得的反算結果都忽略了側向變化的影響，然而，側向變化的存在會產生假頻散的現象，使得反算結果與實際地層相去太大。在目前未使用pseudo-section 測線的施測中，為避免對結果造成錯誤的解讀，應當增強對時間/空間域震測資料的解讀能力，以此震測資料中的反射訊號觀察可能存

在的地層側向變化，而對反算結果有更進一步的掌握。

表面波在側向變化地層中的行為有干擾帶的存在，應當對此再做進一步的探討，以期能將此干擾帶的範圍數量化。就目前的觀察，此干擾帶與波長以及地層幾何情形有關，可由此為出發點以解析方式或數值模擬方式進行探討。

直至目前，本文中所討論的表面波行為僅以兩層地層作為討論標的，如此所得到的結果難免會缺乏普遍性的現象，因此，應當再繼續對存在多層的側向變化地層進行探討，以期能更加了解表面波在側向變化地層中的行為。此外，在本次的模擬中並未討論地表變化存在時表面波的行為為何，應配合有地形起伏的數值模擬程式開發，對其進行探討。

Pseudo-section 概念：以數值模擬的結果，初步結論 pseudo-section 概念有其優點所在，然而在分析上仍有其使用限制存在，在 5.1 節中已有提及其目前問題，應針對此一問題加以進行了解，並嘗試採用或發展新的訊號處理方式將不同行進方向的反射波得以分離，使得 pseudo-section 概念能達到其所預期的功能。Pseudo-section 概念可使用較少的接受器(較短的側線展距)而得到與傳統測線差不多或是更好的頻散曲線結果，較少的接收器數目相對的可有較短的測線展距，亦表示其所涵蓋的地層具有側向變化的可能性減少，又或表示其所得的結果僅是較短的側向變化地層的綜合表現值，如此一來對於地層的波速剖面便可有較高的解析度。針對這一想法可進行數值模擬的討論，探討應用 pseudo-section 測線得到高解析度表面波的結果可能性。此外，配合對於表面波在地表有變化情況下的行為了解，嘗試以 pseudo-section 測線進行施測模擬，觀察此是否有潛力能解決在地形因素影響下表面波行為較不易掌握的困難。

參考文獻

- Aboudi J. Numerical simulation of seismic sources. *Geophysics*, vol. 36, 1971. p. 810-21.
- Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values. *The geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 58, 1979. p. 91-105.
- Aki K, Richards PG. *Quantitative Seismology*, 2nd ed.. Sausalito, California:University Science Books, 2002.
- Alekseev AS, Mikhailenko BG. The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods. *Journal of geophysics*, vol. 48, 1980. p. 161-72.
- Alterman Z, Karal FC. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 58, 1968. p. 367-98.
- Alterman Z, Kornfeld P. Finite difference solution for pulse propagation in a sphere. *Israel journal of technology*, vol. 6, 1968. p. 138-49.
- Alterman Z, Loewenthal D. Seismic waves in a quarter and three-quarter plane. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 20, 1970. p. 101-26.
- Alterman Z, Rotenberg A. Seismic waves in a quarter plane. *Bulletin of seismological society of America*, vol. 59, 1969. p. 347-68.
- Andrew DJ. A numerical study of tectonic stress release by underground explosions. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 63, 1973. p. 1375-91.
- Bathe K, Wilson EL. *Numerical methods in finite element analysis*. Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall. 1976.

- Ben-Menahem A, Vered M. Extension and interpretation of the Cagniard-Pekeris method for dislocation sources. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 63, 1973. p. 1611-36.
- Bickford W. *A first course in the finite element method*. Homewood, IL: Irwin. 1994.
- Bolt BA. *Nuclear explosions and earthquakes: The Parted Veil*. San Francisco: Freeman, 1976.
- Boore DM. Finite-difference methods for seismic propagation in heterogeneous materials. In: Bolt BA, editor. *Methods of computational physics* vol. 11. Academic Press, New York, 1972. p. 1-37.
- Buchen PW, Ben-Hador R. Free-mode surface-wave computations. *Geophysical journal international*, vol. 124, 1996. p. 869-87.
- Canuto MY, Hussaini A, Zang T. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- Cerjan C, Kosloff D, Kosloff R, Reshef M. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, vol. 50, 1985. p. 705-8.
- Chapman CH, Drummond R. Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 72, 1982. p. S277-S317.
- Chapman CH. A new method for computing synthetic seismograms. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 54, 1978. p. 481-518.
- Chen HW, McMechan GA. 3-D physical modeling and pseudospectral simulation of seismic common-source data volumes. *Geophysics*, vol. 58, 1993. p. 121-33.
- Chen KH. Numerical modeling of elastic wave propagation in anisotropic in homogeneous media: a finite element approach. Presented at the 54th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.
- Chew WC, Liu QH. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary

- condition. *Journal of computational acoustics*, vol. 4, 1996. p. 341-59.
- Choy GL. Theoretical seismograms of core phases calculated by a frequency-dependent full wave theory, and their interpretation. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 51, 1977. p. 275-311.
- Clarke TJ. Seismograms: synthetic. In: James DE, editor, *The encyclopedia of solid earth geophysics*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989. p. 1192-97.
- Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 67, 1977. p. 1529-40.
- Cohen G, Joly P, Tordjman N. Construction and analysis of higher order finite elements with mass lumping for the wave equation. In: Kleiman R, editor, *Second international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation*, 1993. p. 152-60.
- Cohen G, Joly P, Tordjman N. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. In: Cohen G, editor, *Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation*, 1995. p. 270-79.
- Comier VF, Richards PG. Full-wave theory applied to a discontinuous velocity increase: The inner core boundary. *Journal of geophysical research*, vol. 43, 1977. p. 3-31.
- Comier VF. The synthesis of complete seismograms in an earth model specified by radially inhomogeneous layers. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 70, 1980. p. 691-716.
- Cruz-Atienza VM, Virieux J. Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach. *Geophysical journal international*, vol. 158, 2004. p. 939-54.
- Drake LA. Love and Rayleigh waves in nonhorizontally layered media. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 62, 1972a. p. 1241-58.

- Drake LA. Rayleigh waves at a continental boundary by the finite element method. Bulletin of the seismological society of America, vol. 62, 1972b. P. 1259-68.
- Dunkin JW. Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. Bulletin of the seismological society of America, vol. 55, 1965. p. 335-58.
- Durrant DR. Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. Springer, 1999.
- Emerman SH, Stephen RA. Comment on "absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations," by R. Clayton and B Engquist. Bulletin of the seismological society of America, vol. 73, 1983. p. 661-5.
- Emmerich H. PSV-wave propagation in a medium with local heterogeneities: a hybrid formulation and its application. Geophysical journal international, vol. 109, 1992. p. 54-64.
- Festa G, Nielsen S. PML absorbing boundary. Bulletin of the seismological society of America, vol. 93, 2003. p. 891-903.
- Fornberg B. The pseudospectral method: comparisons with finite differences for the elastic wave equation. Geophysics, vol. 52, 1987. p. 483-501.
- Fornberg B. High order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. SIAM journal on numerical analysis, vol. 27, 1990. p. 904-18.
- Fornberg B. A practical guide to pseudospectral methods. New York: Cambridge university press, 1996.
- Fuchs K, Muller G. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. Geophysical journal of the royal astronomical society, vol. 23, 1971. p. 417-33.
- Fuchs K. The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. Journal of physics of earth, vol. 54, special issue, 1968. p. 27-41.

- Furumura T, Kennett BLN, Takenaka H. Parallel 3-D pseudospectral simulation of seismic wave propagation. *Geophysics*, vol. 63, 1998. p. 279-88.
- Gabriels P, Snieder R, Nolet G. In situ measurements of shear-wave velocity in sediments with higher-mode Rayleigh waves. *Geophysical Prospecting*, vol. 35, 1987. p. 187-96.
- Gazdag J. Numerical convective schemes based on the accurate computation of space derivatives. *Journal of computational physics*, vol. 13, 1973. p. 100-13.
- Gilbert F, Backus G. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, vol. 31, 1966. p. 326-332.
- Gilbert F. Propagation of transient leaking modes in a stratified elastic waveguide. *Reviews of geophysics*, vol. 2, 1964. p. 123-53.
- Graves RW. Modeling three-dimensional site response effects in the Marina district basin, San Francisco, California. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 83, 1993. p. 1042-63.
- Graves RW. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 86, 1996. p. 1091-106.
- Ha J. Recurrence relations for computing complete P and SV seismograms. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 79, 1984. p. 863-73.
- Harvey DJ. Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 66, 1981. p. 37-69.
- Haskell NA. The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 43, 1953. p. 17-34.
- Hayashi K, Suzuki H. CMP cross-correlation analysis of multi-channel surface-wave data. *Exploration geophysics*, vol. 35, 2004. p. 13-19.

- Heisey JS, Stokoe II KH, Hudson WR, Meyer AH. Determination of in situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves. Research Report No. 256-2, Center for Transportation Research, The University of Texas at Austin, 1982. p. 277.
- Helmberger DV. The crust-mantle transition in the Bering Sea. Bulletin of the seismological society of America, vol. 58, 1975, p. 179-214.
- Higdon RL. Radiation boundary conditions for elastic wave propagation. SIAM journal on numerical analysis, vol. 27, 1990. p. 831-69.
- Higdon RL. Absorbing boundary condtions for elastic waves. Geophysics, vol. 56, 1991. p. 231-41.
- Higdon RL. Absorbing boundary condtions for acoustic and elastic waves in stratified media. Journal of computational physics, vol. 101, 1992. p. 386-418.
- Higdon RL. Radiation boundary conditions for dispersive waves. SIAM journal on numerical analysis, vol. 31, 1995. p. 1203-16.
- Hildebrand FB. Methods of Applied Mathematics, 2en ed., Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1952.
- Huang BS, Teng TL, Yeh TY. Numerical modeling of fault zone trapped waves. Proc. 14th national conf. Theor. And Appl. Mechanics, ROC, 1990. p. 709-18.
- Huang BS, Teng TL, Yeh TY. Numerical modeling of fault -zone trapped waves: acoustic case. Bulletin of the seismological society of America, vol. 85, 1995. p. 1711-17.
- Huang BS, Yeh YT. Numerical modeling of wave propagation effects by the pseudo-spectrum method. Proceedings of 3rd Taiwan symposium in Geophysics, 1991. p. 34-46.
- Ilan A, Ungar A, Alterman Z. An improved representation of boundary condition in finite difference schemes for seismological problems. Geophysical journal of the royal astronomical society, vol. 43, 1975. p. 727-45.

- Ingate SF, Bock G, Kind R. Synthesis of complete SH seismograms. Geophysical journal of the royal astronomical society, vol. 75, 1983. p. 261-74.
- Johnson OG. Three-dimensional wave equation computations on vector computers. Proc., inst. Electr. Electron. Eng., vol. 72, 1984. p.90-5.
- Kaliakin VN. Introduction to approximation solution techniques, numerical modelling, and finite element methods. New York: Marcel Dekker, Inc. 2002.
- Kay I, Krebs ES. Applying finite element analysis to the memory variable formulation of wave propagation in anelastic media. Geophysics, vol. 64, 1999. p. 300-7.
- Kelly KR, Marfurt KJ. Classical finite-difference and finite-element methods. In: Kelly KR, Marfurt KJ, editor. Geophysics reprint series No. 13: Numerical modeling of seismic wave propagation. 1990. p. 1-3.
- Kelly KR, Ward RW, Treitel S, Alford RM. Synthetic seismograms: a finite-difference approach. Geophysics, vol. 41, 1976. p. 2-27.
- Kennett BLN, Kerry NJ. Seismic waves in a stratified halfspace. Geophysics, vol. 57, 1979. p. 557-583.
- Kennett BLN. Reflection, rays and reverberations. Bulletin of the seismological society of America, vol. 64, 1974. p. 1685-96.
- Kennett BLN. Seismic wave propagation in stratified media. New York:Cambridge university press, 1983.
- Kind R. The reflectivity method for a buried source, Journal of geophysics, vol. 44, 1978. p. 603-12.
- Knopoff L. A matrix method for elastic wave problems. Bulletin of the seismological society of America, vol. 54, 1964. p. 431-38.

- Korn M, Muller G. Comparison of the Alekseev-Mikhailenko method and the reflectivity method. Geophysical journal of the royal astronomical society, vol. 72, 1983. p. 909-29.
- Kosloff D, Baysal E. Forward modeling by a Fourier method. Geophysics, vol. 47, 1982. p. 1402-12.
- Kosloff D, Reshef M, Loewenthal D. Elastic wave calculations by the Fourier method. Bulletin of the seismological society of America, vol. 74, 1984. p. 875-91.
- Kreiss HO, Olinger J. Stability of the Fourier method. SIAM journal on numerical analysis, vol. 16, 1979. p. 421-33.
- Kummer B, Behle A, Dorau F. Hybrid modelling of elastic wave propagation in 2D laterally inhomogeneous media. Geophysics, vol. 52, 1987. p. 765-71.
- Lay T, Wallace TC. Modern global seismology. San Diego: Academic Press Inc., 1995.
- Levander AR. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. Geophysics, vol. 53, 1988. p. 1425-36.
- Liao Q and McMechan GA. 2-D pseudospectral viscoacoustic modeling in a distributed-memory multiprocessor computer. Bulletin of the seismological society of America, vol. 83, 1993. p. 1345-54.
- Lin CP, Chang CC, Chang TS. The use of MASW method in the assessment of soil liquefaction potential. Soil dynamics and earthquake engineering, vol. 22, 2004. p. 689-98.
- Lin CP, Chang TS. Multi-station analysis of surface wave dispersion. Soil dynamics and earthquake engineering, vol. 24, 2004. p. 877-86.
- Lin CP, Chang TS, Lin CH. Towards the standardization of multi-station surface wave method for site investigation. In press.
- Luo Y, Schuster G. Parsimonious staggered grid finite-differenceing of the wave equation.

- Geophysical research letters, vol. 17, 1990. p. 155-58.
- Lysmer J, Drake LA. A finite element method for seismology. In: Bolt BA, editor. Methods of computational physics vol. 11. Academic Press, New York, 1972. p.181-215.
- Lysmer J, Drake LA. The propagation of Love waves across nonhorizontally layered structures. Bulletin of seismological society of America, vol. 61, 1971. p. 1233-52.
- Madariaga R. Dynamics of an expanding circular fault. Bulletin of the seismological society of America, vol. 67, 1976. p. 163-82.
- Magnier S-A, Mora P, Tarantola A. Finite differences on minimal grids. Geophysics, vol. 59, 1994. p. 1435-43.
- Marfurt KJ, Sandschaper JR, Corvin JB. Seismic modeling on the Cray-2 supercomputer. In: Science and engineering on Cray supercomputers, Cray Research. 1987.
- Marfurt KJ. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. Geophysics, vol. 49, 1984. p. 533-49.
- McMechan GA, Yedlin MJ. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. Geophysics, vol. 46, 1981. p. 869-74.
- Mitchell AR, Griffiths DF. The finite difference method in partial differential equations. John Wiley and Sons, New York, 1980.
- Moczo P, Kristek J, Halada L. The finite-difference method for seismologists. An introduction. Comenius University, Bratislava, 2004.
- Moczo P. Finite-difference technique for SH-waves in 2-D media using irregular grids-application to the seismic response problem. Geophysical journal international, vol. 99, 1989. p. 321-29.
- Morton KW, Mayers DF. Numerical solution of partial differential equations. Cambridge University press, 1994.

- Mozoc P, Bystricky E, Kristek J, Carcione JM, Bouchon M. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 87, 1997. p. 1305-23.
- Mulder WA. A comparison between higher-order finite elements and finite differences for solving the wave equation. *Numerical Methods in Engineering '96*, 1996. p. 344-50.
- Muller G. The reflectivity method: a tutorial. *Journal of Geophysics*, vol. 58, 1985. p. 153-74.
- Muller G. Theroetical seismograms for some types of point sources in layered media. Part III: Single force and dipole sources of arbitrary orientatin. *Zeitschrift für Geophysik*, vol. 35, 1969. p. 347-71.
- Nazarian S, Stokoe II KH. In situ shear wavevelocities from spectral analysis of surface waves. *Proceedings of Eighth Conference on Earthquake Engineering, San Francisco*, vol. 3, 1984. p. 38-45.
- Olsen KB, Schuster GT. Seismic hazard analysis in Salt Lake Vally by finite-difference simulation of three dimensional elastic wave propagation. *Scientific excellence in high performance computing: the 1990 IBM price papers*, vol. 1, sec. 6, Baldwin Press, Athens, Georgia, 1992. p. 135-65.
- Orszag SA. Comparison of pseudospectral and spectral approximations. *Studies in applied mathematics*, vol. 51, 1972. p. 253-9.
- Ottaviani M. Elastic-wave propagation in two evenly welded quarter spaces. *Bulletin of seismological society of America*, vol. 61, 1971. p. 1119-52.
- Padovani E, Priolo E, Seriani G. Low and high order finite element method: experience in seismic modeling. *Journal of computational acoustics*, vol. 2, 1994. p. 371-422.
- Panza GF. Synthetic seismograms: the Rayleigh waves modal summation. *Journal of geophysics*,

- vol. 58, 1985. p. 125-45.
- Park CB, Miller RD, Xia J. Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, vol. 64, 1999. p. 800-8.
- Pestel E, Leckie FA. *Matrix method in elasto-mechanics*, New York:McGraw-Hill, 1963.
- Pitarka A. 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 89, 1999. p. 54-68.
- Prokis JG, Manolakies DG. *Digital signal processing-principles, algorithms, and applications*, 3rd ed. New Jersey:Prentice Hall, 1992.
- Randall MJ. Fast programs for layered half-space problems. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 57, 1967. p. 1299-316.
- Renaut RA, Woo ML. Parallel pseudospectral method for the solution of the wave equation. In: *Wave propagation and inversion*, Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- Reshef M, Kosloff D, Edwards M, Hsiung C. Three-dimensional acoustic modeling by the Fourier method. *Geophysics*, vol. 53, 1988a. p. 1175-83.
- Reshef M, Kosloff D, Edwards M, Hsiung C. Three-dimensional elastic modeling by the Fourier method. *Geophysics*, vol. 53, 1988b. p. 1184-93.
- Reynolds AC. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. *Geophysics*, vol. 43, 1978. p. 1099-110.
- Robertsson JOA and Holliger K. Modeling of seismic wave propagation near the Earth's surface. *Physics of the earth and planetary interiors*, vol. 104, 1997. p. 193-211.
- Robertsson JOA. A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, vol. 61, 1996. p. 1921-34.
- Rodrigues D. Large scale modelling of seismic wave propagation. PhD. Thesis, Ecole Centrale

Paris. 1993.

Saenger Eh, Bohlen T. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics*, vol. 69, 2004. p. 583-91.

Saenger Eh, Gold N, Shapiro SA. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, vol. 31, p. 77-92.

Sato T, Matsuoka T, Tsuru T. Wavefield modeling by pseudospectral method on a parallel computer. *Proc. Soc. Expl. Geophys. Japan conf.*, vol. 90, 1994. p. 96-99. (Japanese)

Sato T, Matsuoka T, Tsuru T. Wavefield modeling by pseudospectral method on a parallel computer(2) - seismic data simulation and processing. *Proc. Soc. Expl. Geophys. Japan conf.*, vol. 92, 1995. p. 392-96. (Japanese)

Schlue JW. Finite element matrices for seismic surface waves in three-dimensional structures. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 69. p. 1425-38.

Schwab F, Knopoff L. Fast surface wave and free mode computations. In: Bolt BA, editor. *Methods of computational physics* vol. 11. Academic Press, New York, 1972. p. 87-180.

Schwab F, Nakanishi K, Cuscito M, Panza GF, Liang G, Frez J. Surface-wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at high frequencies. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 74, 1984. p. 1555-78.

Schwab F. Surface-wave dispersion computations: Knopoff's method. *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 60, 1970. p. 1491-520.

Shtivelman V. A hybrid method for wave field computation. *Geophysical prospecting*, vol. 32, 1984. p. 236-57.

Smith WD. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 42, 1975. p. 747-768.

- Smith WS. The scientist and engineer's guide to digital signal processing. Amsterdam: Newnes, 1997.
- Sochacki J, Kubichek R, George J, Fletcher WR, Smithson S. Absorbing boundary conditions and surface waves. *Geophysics*, vol. 52, 1987. p. 60-71.
- Stokoe II KH, Wright GW, James AB, Jose MR. Characterization of geotechnical sites by SASW method. In: Woods RD, editor. *Geophysical characterization of sites*. Rotterdam: A.A. Balkema; 1994. p. 15-25.
- Tadmor E. Stability analysis of finite-difference, pseudospectral and Fourier-Galerkin approximations for time-dependent problems. *SIAM review*, vol. 29, 1987. p. 525-55.
- Takeuchi H, Saito M. Seismic surface waves. In: Bolt BA, Editor. *Methods of computational physics* vol. 11. Academic Press, New York, 1972, p. 217-95.
- Takeuchi N, Geller RJ. Optimally accurate second order time-domain finite difference scheme for computing synthetic seismograms in 2-D and 3-D media. *Physics of the earth and planetary interiors*, vol. 119, 2000. p. 99-131.
- Thomson WT. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, vol. 21, 1950. p. 89-93.
- Thrower EN. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media. *Journal of sound and vibration*, vol. 2, 1965. p. 210-26.
- Udias A. *Principles of seismology*. New York: Cambridge University Press, 1999.
- Van den Berg. A hybrid solution for wave propagation problems, in regular media with bounded irregular inclusions. *Geophysical journal of the royal astronomical society*, vol. 79, 1984. p. 3-10.
- Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method.

- Geophysics, vol. 51, 1986. p. 889-901.
- Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. Geophysics, vol. 49, 1984. p. 1933-57.
- Walker JS. Fast Fourier Transforms. London: CRC Press., 1991.
- Wang CY, Herrmann RB. A numerical study of P-, SV- and SH-wave generation in a plane layered medium. Bulletin of the seismological society of America, vol. 70, 1980. p. 1015-36.
- Wang CY. Wave theory for seismogram synthesis. Ph.D. Dissertation, Saint Louis University, 1981. 235 pp.
- Wang Y, Takenaka H. A multidomain approach of the Fourier pseudospectral method using discontinuous grids for elastic wave modeling. Earth planets space, vol. 53, 2001. p. 149-58.
- Watson TH. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered half-space. Bulletin of the seismological society of America, vol. 60, 1970. p. 161-66.
- Yao Z, Margrave GF. Elastic wavefield modelling in 3D by fourth-order staggered-grid finite difference technique. CREWES research report vol. 12, 2000.
- Yomogida K, Etgen JT. 3-D wave propagation in the Los Angeles basin for the Whittier-Narrows earthquake. Bulletin of the seismological society of America, vol. 83, 1993. p. 1325-44.
- Zhang J. Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation. Geophysical journal international, vol. 131, 1997. p. 127-34.
- Zhang J. Wave propagation across fluid-solid interfaces: a grid method approach. Geophysical journal international, vol. 159, 2004. p. 240-52.
- Zhu J. A transparent boundary technique for numerical modeling of elastic waves. Geophysics, vol. 64, p. 963-66.
- Zienkiewicz OC. The finite element method. New York: McGraw-Hill, 1977.

陳逸龍，多頻道表面波試驗程序標準化之研究，國立交通大學碩士論文，2004



附錄一 雷利波傳遞矩陣計算式

令

$$\mu_i = \rho_i \beta_i^2$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_i^2}{c^2}$$

(A1-1)

$$t_i = 2 - \frac{c^2}{\beta_i^2}$$

$$\begin{aligned}
 r_i &= \begin{cases} c < \alpha_i \ (c < \beta_i) & c > \alpha_i \ (c > \beta_i) \\ (1 - \frac{c^2}{\alpha_i^2})^{1/2} & i(\frac{c^2}{\alpha_i^2} - 1)^{1/2} = i\bar{r}_i \end{cases} \\
 s_i &= \begin{cases} c < \alpha_i \ (c < \beta_i) & c > \alpha_i \ (c > \beta_i) \\ (1 - \frac{c^2}{\beta_i^2})^{1/2} & i(\frac{c^2}{\beta_i^2} - 1) = i\bar{s}_i \end{cases} \\
 C_{\alpha_i}(k) &= \begin{cases} \cosh(kr_i d_i) & \cos(k\bar{r}_i d_i) \\ \sinh(kr_i d_i) & i \sin(k\bar{r}_i d_i) \end{cases} \\
 S_{\alpha_i}(k) &= \begin{cases} \cosh(ks_i d_i) & \cos(k\bar{s}_i d_i) \\ \sinh(ks_i d_i) & i \sin(k\bar{s}_i d_i) \end{cases}
 \end{aligned}$$

(A1-2)

且

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

(A1-3)

則

$$P_{11} = \gamma_i(2C_{\alpha_i} - t_i C_{\beta_i}), \quad P_{12} = \gamma_i \left(-\frac{t_i}{r_i} S_{\alpha_i} + 2s_i S_{\beta_i} \right)$$

$$P_{13} = \frac{\gamma_i}{\mu_i} \left(\frac{1}{r_i} S_{\alpha_i} - s_i S_{\beta_i} \right), \quad P_{14} = -\frac{\gamma_i}{\mu_i} (C_{\alpha_i} - C_{\beta_i})$$

(A1-4)

$$P_{21} = \gamma_i \left(2r_i S_{\alpha_i} - \frac{t_i}{s_i} S_{\beta_i} \right), \quad P_{22} = \gamma_i (-t_i C_{\alpha_i} + 2C_{\beta_i})$$

$$P_{23} = -P_{14}, \quad P_{24} = \frac{\mu_i}{\gamma_i} \left(-r_i S_{\alpha_i} + \frac{1}{s_i} S_{\beta_i} \right)$$

$$P_{31} = \mu_i \gamma_i \left(4r_i S_{\alpha_i} - \frac{t_i^2}{s_i} S_{\beta_i} \right), \quad P_{32} = -2t_i \mu_i \gamma_i (C_{\alpha_i} - C_{\beta_i})$$

$$P_{33} = P_{11}, \quad P_{34} = -P_{21}$$

$$P_{41} = -P_{32}, \quad P_{42} = \mu_i \gamma_i \left(-\frac{t_i^2}{r_i} S_{\alpha_i} + 4s_i S_{\beta_i} \right)$$

$$P_{43} = -P_{12}, \quad P_{44} = P_{22}$$



附錄二 四級有限差分法運算元推導

由泰勒展開式可得：

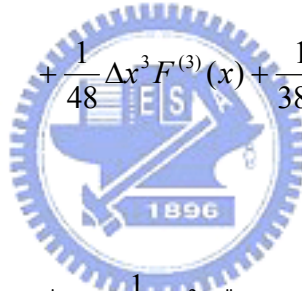
$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}F^{(4)}(x) + O(h^4) \quad (\text{A2-1})$$

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \frac{h^3}{3!}F^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}F^{(4)}(x) + O(h^4) \quad (\text{A2-2})$$

其中， $O(h^4)$ 表示其餘尾誤差為 h 的四級(fourth-order error)。則

$$F(x + \frac{1}{2}\Delta x) = F(x) + \frac{1}{2}\Delta x F'(x) + \frac{1}{8}\Delta x^2 F''(x) \quad (\text{A2-3})$$

$$+ \frac{1}{48}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + \frac{1}{384}\Delta x^4 F^{(4)}(x) + O(h^4)$$



$$F(x - \frac{1}{2}\Delta x) = F(x) - \frac{1}{2}\Delta x F'(x) + \frac{1}{8}\Delta x^2 F''(x) \quad (\text{A2-4})$$

$$- \frac{1}{48}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + \frac{1}{384}\Delta x^4 F^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$F(x + \frac{3}{2}\Delta x) = F(x) + \frac{3}{2}\Delta x F'(x) + \frac{9}{8}\Delta x^2 F''(x) \quad (\text{A2-5})$$

$$+ \frac{27}{48}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + \frac{81}{384}\Delta x^4 F^{(4)}(x) + O(h^4)$$

$$F(x - \frac{3}{2}\Delta x) = F(x) - \frac{3}{2}\Delta x F'(x) + \frac{9}{8}\Delta x^2 F''(x) \quad (\text{A2-6})$$

$$-\frac{27}{48}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + \frac{81\Delta x^4}{384} F^{(4)}(x) + O(h^4)$$

將(A2-6)式減去(A2-5)式，可得

$$F(x - \frac{3}{2}\Delta x) - F(x + \frac{3}{2}\Delta x) = \frac{-6}{2}\Delta x F'(x) - \frac{27}{24}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + O(h^4) \quad (\text{A2-7})$$

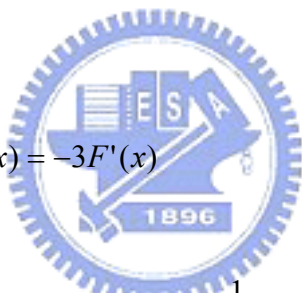
又將(A2-3)式減去(A2-4)式，可得

$$F(x + \frac{1}{2}\Delta x) - F(x - \frac{1}{2}\Delta x) = \Delta x F'(x) - \frac{1}{24}\Delta x^3 F^{(3)}(x) + O(h^4) \quad (\text{A2-8})$$

將(A2-8)式重新整理為

$$\Delta x^3 F^{(3)}(x) = 24F(x + 1/2) - 24(x - 1/2) - 24F'(x) \quad (\text{A2-9})$$

代入(A2-7)式，

$$F(x - \frac{3}{2}\Delta x) - F(x + \frac{3}{2}\Delta x) = -3F'(x) - 27F(x + \frac{1}{2}\Delta x) + 27F(x - \frac{1}{2}\Delta x) + 27F'(x) \quad (\text{A2-10})$$


則最後將(A2-10)式整理為下列形式，

$$F'(x) = D_x F(x) = \frac{1}{\Delta x} \times \left[\frac{9}{8}(F(x + \frac{1}{2}\Delta x) - F(x - \frac{1}{2}\Delta x)) - \frac{1}{24}(F(x + \frac{3}{2}\Delta x) + F(x - \frac{3}{2}\Delta x)) \right] \quad (\text{A2-11})$$

即獲得四級有限差分運算元的運算式。

附錄三 有限差分法自由表面運算式

根據虛擬影像法(Levander, 1988)以及將自由表面以上的U、V皆設為零(Robertsson, 1996)，令自由表面處其z方向索引號為0，則可得到在自由表面處施以邊界條件後的運算式為

$$\begin{aligned}
 U_{i,0}^{k+1/2} &= U_{i,0}^{k-1/2} + \\
 & b_{i,0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (\Sigma_{i+1/2,0}^k - \Sigma_{i-1/2,0}^k) - \frac{1}{24} (\Sigma_{i+3/2,0}^k - \Sigma_{i-3/2,0}^k) \right] + \\
 & b_{i,0} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (2\Xi_{i,1/2}^k) - \frac{1}{24} (2\Xi_{i,3/2}^k) \right]
 \end{aligned} \tag{A3-1}$$

$$\begin{aligned}
 U_{i,1}^{k+1/2} &= U_{i,1}^{k-1/2} + \\
 & b_{i,1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (\Sigma_{i+1/2,1}^k - \Sigma_{i-1/2,1}^k) - \frac{1}{24} (\Sigma_{i+3/2,1}^k - \Sigma_{i-3/2,1}^k) \right] + \\
 & b_{i,1} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (\Xi_{i,3/2}^k - \Xi_{i,1/2}^k) - \frac{1}{24} (\Xi_{i,5/2}^k + \Xi_{i,1/2}^k) \right]
 \end{aligned} \tag{A3-2}$$

$$\begin{aligned}
 V_{i+1/2,1/2}^{k+1/2} &= V_{i+1/2,1/2}^{k-1/2} + \\
 & b_{i,0} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (\Gamma_{i+1/2,1}^k - \Gamma_{i+1/2,0}^k) - \frac{1}{24} (\Gamma_{i+1/2,2}^k + \Gamma_{i+1/2,1}^k) \right] + \\
 & b_{i,0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (\Xi_{i+1,1/2}^k - \Xi_{i,1/2}^k) - \frac{1}{24} (\Xi_{i+2,1/2}^k - \Xi_{i-1,1/2}^k) \right]
 \end{aligned} \tag{A3-3}$$

$$\Sigma_{i+1/2,0}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,0}^k +$$

$$\left(\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right)_{i+1/2,0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,0}^{k+1/2} - U_{i,0}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i+2,0}^{k+1/2} - U_{i-1,0}^{k+1/2}) \right] \quad (\text{A3-4})$$

$$\Sigma_{i+1/2,1}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,1}^k +$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i+1/2,1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,1}^{k+1/2} - U_{i,1}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i+2,1}^{k+1/2} - U_{i-1,1}^{k+1/2}) \right] + \quad (\text{A3-5})$$

$$\lambda_{i+1/2,1} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,3/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+1/2,5/2}^{k+1/2}) \right]$$

$$T_{i+1/2,0}^{k+1} = 0$$

$$(\text{A3-6})$$

$$T_{i+1/2,1}^{k+1} = T_{i+1/2,1}^k +$$

$$(\lambda + 2\mu)_{i+1/2,1} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,3/2}^{k+1/2} - V_{i+1/2,1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+1/2,5/2}^{k+1/2}) \right] +$$

$$(\text{A3-7})$$

$$\lambda_{i+1/2,1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (U_{i+1,1}^{k+1/2} - U_{i,1}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i+2,1}^{k+1/2} - U_{i-1,1}^{k+1/2}) \right]$$

$$\Xi_{i,1/2}^{k+1} = \Xi_{i,1/2}^k +$$

$$\mu_{i,1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{9}{8} (U_{i,1}^{k+1/2} - U_{i,0}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (U_{i,2}^{k+1/2}) \right] +$$

$$(\text{A3-8})$$

$$\mu_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} (V_{i+1/2,1/2}^{k+1/2} - V_{i-1/2,1/2}^{k+1/2}) - \frac{1}{24} (V_{i+3/2,1/2}^{k+1/2} - V_{i-3/2,1/2}^{k+1/2}) \right]$$