

國立交通大學

工學院精密與自動化工程學程

碩士論文

以圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪的
齒面數學模式和接觸分析

Mathematical Model and Tooth Contact Analysis of Spherical Gears

Generated by a Hob with Circular-Arc Profiles

研究生：羅偉旭

指導教授：蔡忠杓 教授

中華民國九十六年六月

以圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪的齒面數學模式和接觸分析

Mathematical Model and Tooth Contact Analysis of Spherical Gears

Generated by a Hob with Circular-Arc Profiles

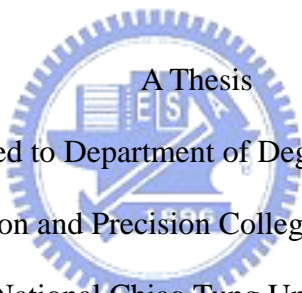
研究生： 羅偉旭

Student： Wei-Hsu Lo

指導教授： 蔡忠杓

Advisor： Dr. Chung-Biau Tasy

國立交通大學
工學院精密與自動化工程學程
碩士論文



A Thesis
Submitted to Department of Degree Program of
Automation and Precision College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
In
Automation and Precision of Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

以圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪的齒面數學模式和接觸分析

研究生：羅偉旭

指導教授：蔡忠杓 博士

國立交通大學精密與自動化工程學程

摘要

球形齒輪早已使用多時，但目前尚未見有以圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪，亦無對此類具有齒面修整之球形齒輪進行齒面接觸研究。因此，建立此類具有齒面修整之球形齒輪的齒面數學模式並進行其特性研究分析，探討此類對球形齒輪在具有裝配誤差狀態下對齒輪組傳動的影響，將可對球形齒輪之齒面修整的特性更為瞭解，並有助於本文所提之球形齒輪齒面修整技術在球形齒輪上的運用。

本論文依據齒輪原理與球形齒輪之創成機構，以推導用圓弧形滾齒刀來創成具有齒形修整之球形齒輪的齒面數學模式，而本文提出此圓弧形滾齒刀之滾削創成也可用具有圓弧剖面之曲線狀齒條刀來加以模擬。針對此類具齒形修整之球形齒輪，應用齒輪嚙合原理建立其齒面接觸分析模式，並輔以電腦輔助分析程式之開發，進行齒面修整之球形齒輪的齒面接觸模擬與特性分析，探討具有裝配誤差狀態下齒輪組之運動誤差。

Mathematical Model and Tooth Contact Analysis of Spherical Gears

Student : Wei-Hsu Lo

Advisor:Dr. Chung-Biau Tsay

Abstract

Spherical gears have been used for years, however, spherical gears generated by a hob cutter with circular-arc profiles have not found yet. Besides, there is no research on the tooth contact analysis of this type of spherical gears with tooth profile modification. Therefore, to establish the mathematical model of this type of gears and to investigate the contact characteristic of the gear pairs are most helpful to the applications of this tooth modified spherical gears.

In this research, the tooth mathematical model of the spherical gears with modified tooth profiles, generated by a hob cutter with circular-arc profiles, is developed based on the theory of gearing and the spherical gear generation mechanism. A concept of applying the curvilinear-tooth rack cutter with circular-arc profiles to simulate the hobbing generation of a hob cutter with circular-arc profiles is proposed. Based on the developed tooth mathematical model of the modified spherical gear as well as the theory of gear meshing and the developed tooth contact analysis computer simulation programs, the tooth contact simulations, characteristic analysis and kinematical errors of the gear pairs under various assembly errors are performed and discussed.

誌 謝

感謝指導教授 蔡忠杓博士在論文寫作上的細心教導，以及做人處世不時地給予學生作最佳言教及身教的榜樣。

還有齒輪實驗室內的瑞堂學長、立基、冠宇、俊諭、政豪、威良以及家誠、宗賢、健育，當我在課業上及研究上遭遇到困難時，總是給予最適當的協助。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	vii
符號表	x
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	1
1.3 研究內容	2
第二章 基本理論	3
2.1 位置向量轉換	3
2.2 嚙合方程式	5
2.3 相對運動速度	5
第三章 圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪的齒面數學模式	11
3.1 前言	11
3.2 齒條刀模擬圓弧形滾齒刀之理念及其刀面外形數學模式建立	13
3.3 齒條刀之軌跡方程式	16
3.4 球形齒輪之嚙合方程式	20
3.5 球形齒輪之齒面數學模式	23
3.6 球形齒輪之電腦輔助繪圖	23
第四章 球形齒輪的齒面接觸分析	27

4.1 前言	27
4.2 具運動誤差之齒輪組的座標系轉換.....	27
4.3 具運動誤差的齒輪之分析方程式.....	31
4.4 接觸分析例題討論	32
例題 1 球形齒輪組在理想裝配狀態下嚙合.....	33
例題 2 球形齒輪組在具有中心距組裝誤差狀態下嚙合.....	35
例題 3 凸狀與凹狀球形齒輪組在具有中心距、垂直軸向及水平軸向之 組裝誤差狀態下嚙合	37
例題 4 兩個凸狀球形齒輪組在具有中心距、垂直軸向及水平軸向之裝 配誤差狀態下嚙合	49
第五章 結論及未來展望.....	57
5.1 結論	57
5.2 未來展望.....	58
參 考 文 獻.....	59



圖目錄

圖 2.1 位置向量與座標系間的關係圖.....	4
圖 2.2 空間中兩相互嚙合運動曲面之關係示意圖.....	6
圖 2.3 空間物體之相對速度示意圖.....	7
圖 2.4 平行軸共軛運動對之關係示意圖.....	9
圖 3.1 假想齒條刀與被創成齒輪之座標關係示意圖.....	12
圖 3.2 齒條刀之法向剖面圖.....	14
圖 3.3 假想齒條刀刀面之座標關係示意圖.....	15
圖 3.4 假想齒條刀 Σ_F 創成小齒輪時之相對運動關係示意圖.....	17
圖 3.5 假想齒條刀 Σ_P 創成大齒輪時之相對運動關係示意圖.....	19
圖 3.6 凸狀球形齒輪之齒面外形電腦輔助繪圖.....	24
圖 3.7 凹狀球形齒輪之齒面外形電腦輔助繪圖.....	25
圖 3.8 凸狀球形齒輪與凹狀球形齒輪之配對示意圖.....	26
圖 4.1 球形齒輪具有組裝誤差時各座標系間之關係示意圖.....	28
圖 4.2 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果.....	40
圖 4.3 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果.....	42
圖 4.4 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差 狀態下之接觸分析結果.....	44
圖 4.5 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向 裝配誤差狀態下之接觸分析結果.....	46
圖 4.6 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂 直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果.....	48

表目錄

表 3.1 球形齒輪之主要設計參數.....	23
表 4.1 球形齒輪之主要設計參數.....	33
表 4.2 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 配對在無裝配誤差狀態下之接觸 分析結果.....	34
表 4.3 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在無誤差狀態狀態下之接觸 分析結果.....	34
表 4.4 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 配對在中心距組裝誤差為 0.1mm 狀態下之接觸分析結果	35
表 4.5 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在中心距組裝誤差為 0.1mm 狀態下之接觸分析結果	36
表 4.6 球形齒輪之主要設計參數.....	37
表 4.7 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果(1).....	39
表 4.8 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果(2).....	39
表 4.9 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果(3).....	40
表 4.10 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果(4).....	41
表 4.11 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果 (5).....	41
表 4.12 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下 之接觸分析結果(6).....	42

表 4.13 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果 (7).....	43
表 4.14 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(8).....	43
表 4.15 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(9).....	44
表 4.16 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(10).....	45
表 4.17 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(11).....	45
表 4.18 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(12).....	46
表 4.19 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(13).....	47
表 4.20 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(14).....	47
表 4.21 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(15).....	48
表 4.22 兩個凸狀球形齒輪之主要設計參數.....	49
表 4.23 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(1).....	50
表 4.24 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(2).....	51
表 4.25 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(3).....	51

表 4.26 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果 (4).....	52
表 4.27 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(5).....	53
表 4.28 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(6).....	53
表 4.29 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(7).....	54
表 4.30 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(8).....	55
表 4.31 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(9).....	55



符號表

A	齒條刀刀面之中點 Q 與終點 M 的刀具參數(mm)(圖 3.2)
B	齒條刀刀面之中點 Q 與起點 N 的刀具參數(mm) (圖 3.2)
C	理論中心距(mm) (圖 2.4)
I	共軛運動時的瞬心(圖 2.4)
L_{ij}	法向量轉換矩陣：(座標系 S_j 轉換至座標系 S_i)
m_n	法向模數(mm/齒)
M_{ij}	齊次座標轉換矩陣：(座標系 S_j 轉換至座標系 S_i)
$\mathbf{n}_c^{(i)}$	座標系 S_c 上齒條刀刀面之單位法線向量($i = p, g$)
$\mathbf{n}_f^{(i)}$	座標系 S_f 上齒條刀刀面之單位法線向量($i = p, g$)
N	嚙合齒面之共同法線向量
$\mathbf{N}_c^{(i)}$	座標系 S_c 上齒條刀刀面之法線向量($i = p, g$)
O_i	座標系 S_i 之原點
p_i	嚙合接觸點之位置向量的分量($i = x, y, z$)
P	嚙合齒面之共同接觸點
\mathbf{R}_i	齒輪齒面軌跡之位置向量($i = 1, 2$)
$R^{(i)}$	齒條刀刀面之圓弧線形的圓弧半徑(圖 3.2)
R_i	球形齒輪球體的節圓半徑($i = 1, 2$)
$\mathbf{R}_a^{(i)}$	齒條刀刀面於座標系 $S_a^{(i)}$ 之位置向量($i = F, P$)
$\mathbf{R}_c^{(i)}$	齒條刀刀面於座標系 $S_c^{(i)}$ 之位置向量($i = F, P$)
$S^{(F)}$	齒條刀刀面之參數(mm) $S^{(F)} = \overline{QQ'}$
$S_i(X_i, Y_i, Z_i)$	座標系 S_i ($i = 1, 2, f, h, v$)
$S_a^{(i)}(X_a^{(i)}, Y_a^{(i)}, Z_a^{(i)})$	座標系 $S_a^{(i)}$ ($i = F, P$)
$S_c^{(i)}(X_c^{(i)}, Y_c^{(i)}, Z_c^{(i)})$	座標系 $S_c^{(i)}$ ($i = F, P$)
T	嚙合齒面之共同切平面
T_i	齒數($i = 1, 2$)

$\mathbf{V}^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之速度
$\mathbf{V}_f^{(i)}$	物體 i 在座標系 S_f 之速度
$\mathbf{V}_f^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之速度表示於座標系 S_f
Σ_i	小、大齒輪齒面 ($i=1,2$)
Σ_j	齒條刀 1 與齒條刀 2 之齒面 ($j=F,P$)
γ	空間兩旋轉軸之交錯角(圖 2.3)
$\theta^{(i)}$	齒條刀刀面之起點與終點的刀具參數 ($i=F,P$) (圖 3.2)
ψ_i	球形角度 ($i=1,2$) (度)(圖 3.3)
ψ_{\max}	球形角度最大值(度)(圖 3.3)
ω_i	齒輪之旋轉角速度 ($i=1,2$) (弧度/秒)
r_i	節圓半徑 ($i=1,2$)(mm)
Δh	小齒輪在水平軸向之裝配誤差角度(圖 4.1)
Δv	小齒輪在垂直軸向之裝配誤差角度(圖 4.1)
ϕ_2'	大齒輪在裝配後嚙合時的轉動角度(圖 4.1)
ϕ_1'	小齒輪在裝配後嚙合時的轉動角度(圖 4.1)
C'	大小齒輪組裝後其中心距(圖 4.1)
ΔC	組裝時所產生之中心距誤差(圖 4.1)

第一章 緒論

1.1 前言

球形齒輪主要應用於具有軸交角的傳動軸上，尤其是在有軸交角變化之交錯軸間的傳動，使用球形齒輪會具有定角速度比的特性。由於球形齒輪在理論上是將正齒輪之轉位量沿著齒輪旋轉軸向作二次曲線變化，故球形齒輪之外形有凹狀及凸狀兩種，正轉位及負轉位滾削分別可以創成出凸狀及凹狀球形齒輪。當球形齒輪互相嚙合時，可以有三種主要的配對形態，正齒輪對凸狀、凸狀對凹狀及凸狀對凸狀；也由於球形齒輪這種配對的特性，使得球形齒輪可以應用於較多傳動連結之零組件上。一般創成球形齒輪時，其齒條刀具之外形曲線係採用最簡單的直線，且在一定的設計參數下，嚙合過程平穩且連續，即使齒輪組具有中心距之組裝誤差時，仍不會產生運動誤差，使得在製造、安裝及使用上，顯示出其優越性。但在傳遞高負載的動力傳動機構中，則需要增加其接觸比來降低每一個齒所承受的接觸應力與扭力。若欲提高球形齒輪接觸比，可對其齒面進行修整，以改變齒輪之接觸比、齒輪之強度與齒面接觸齒印等齒輪性質並需避免齒輪過切的問題。本文對於球形齒輪之齒面修整主要是以圓弧形曲線狀齒條刀，來模擬圓弧形滾齒刀之滾削創成並進行球形齒輪之齒形修整，試圖針對球形齒輪之齒形作改變後，進行其齒面接觸分析。

1.2 文獻回顧

對於圓弧形滾齒刀及以圓弧剖面之曲線狀齒條刀以模擬圓弧形滾齒刀來創成球形齒輪之相關研究尚不多見，過去對於球形齒輪之相關研究並不多，Litvin[1-3]針對正齒輪做了相關之探討，說明了正齒輪之過切條件及其接觸分析。蔡等人[4-5]於 1986 年推導漸開線螺旋齒輪之齒面數學模式，以

及提出漸開線螺旋齒輪之電腦輔助分析模擬與接觸分析。楊義雄[6]及山崎隆[7]提到球形齒輪之實體已經被加工出來。Yang[8,9]則於 2002 年提出雙自由度環狀漸開線球形齒輪之數學模式。張[10]於 1996 年提出一 CNC 滾齒機之泛用數學模式，來模擬 CNC 滾齒機創成機構之相對運動關係。趙[11]則於 2005 年探討了球形齒輪之數學模式及接觸分析。

1.3 研究內容

一般經齒形修整之齒輪，除齒形會改變外，其接觸狀況及齒印亦會隨著齒輪之齒面修整方式及其修整量而有所不同，本論文即探討球形齒輪經齒形修整後，齒輪之接觸狀況會產生何種變化。首先將利用 Litvin[1-3]所提出之齒輪原理及蔡等人[4]所發展之齒輪數學模式的推導流程，來模擬具圓弧形曲線狀齒條刀代替圓弧形滾齒刀，並據以創成球形齒輪的齒面數學模式，隨後亦進一步進行球形齒輪之齒面接觸分析。

本論文之研究大綱茲臚列如下：

第一章為緒論，概述球形齒輪之特色介紹與為何要進行齒形修整，並進行文獻之回顧與介紹各章之研究內容。

第二章為基本理論，介紹創成共軛運動對的基本理論，並做為後續章節建立齒輪齒面數學模式之依據。

第三章為圓弧形曲線狀齒條刀模擬圓弧形滾齒刀，並進行球形齒輪之齒面數學模式的推導。運用創成共軛運動對之相關理論為基礎，進行以圓弧形曲線狀齒條刀所創成之球形齒輪的齒面數學模式的推導。

第四章為圓弧形曲線狀齒條刀創成之球形齒輪接觸分析。

第五章為本論文之結論與未來展望。

第二章 基本理論

2.1 位置向量轉換

假設空間中有二個座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 與 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 之關係如圖 2.1 所示。在上述空間座標系中，有一點 P 其位置向量表示於座標系 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 為 \mathbf{R}_i ，如果要把 P 點之位置向量 \mathbf{R}_i 由 S_i 座標系轉換至 S_f 座標系來表示其位置向量 \mathbf{R}_f ，則此兩座標系間之位置向量轉換可用下列之齊次座標轉換矩陣(Homogeneous Coordinates Transformation Matrix)方程式表示之：

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{M}_{fi} \mathbf{R}_i \quad (2.1)$$

其中

$$\mathbf{M}_{fi} = \begin{bmatrix} \cos(X_f, X_i) & \cos(X_f, Y_i) & \cos(X_f, Z_i) & X_f^{(o_i)} \\ \cos(Y_f, X_i) & \cos(Y_f, Y_i) & \cos(Y_f, Z_i) & Y_f^{(o_i)} \\ \cos(Z_f, X_i) & \cos(Z_f, Y_i) & \cos(Z_f, Z_i) & Z_f^{(o_i)} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

上式中 $\cos(X_f, X_i)$ 表示 X_f 軸與 X_i 軸間之夾角餘弦值，而 $X_f^{(o_i)}$ 、 $Y_f^{(o_i)}$ 及 $Z_f^{(o_i)}$ 為 S_i 座標系之原點 O_i 表示於 S_f 座標系的三個座標軸的分量， \mathbf{M}_{fi} 則為齊次座標轉換矩陣，可將位置向量由 S_i 座標系轉換至 S_f 座標系。

至於一般之速度及法線向量等之座標間的轉換，因與座標系之原點無關，所以此類向量的座標系間轉換矩陣 \mathbf{L}_{fi} 可表示如下：

$$\mathbf{L}_{fi} = \begin{bmatrix} \cos(X_f, X_i) & \cos(X_f, Y_i) & \cos(X_f, Z_i) \\ \cos(Y_f, X_i) & \cos(Y_f, Y_i) & \cos(Y_f, Z_i) \\ \cos(Z_f, X_i) & \cos(Z_f, Y_i) & \cos(Z_f, Z_i) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

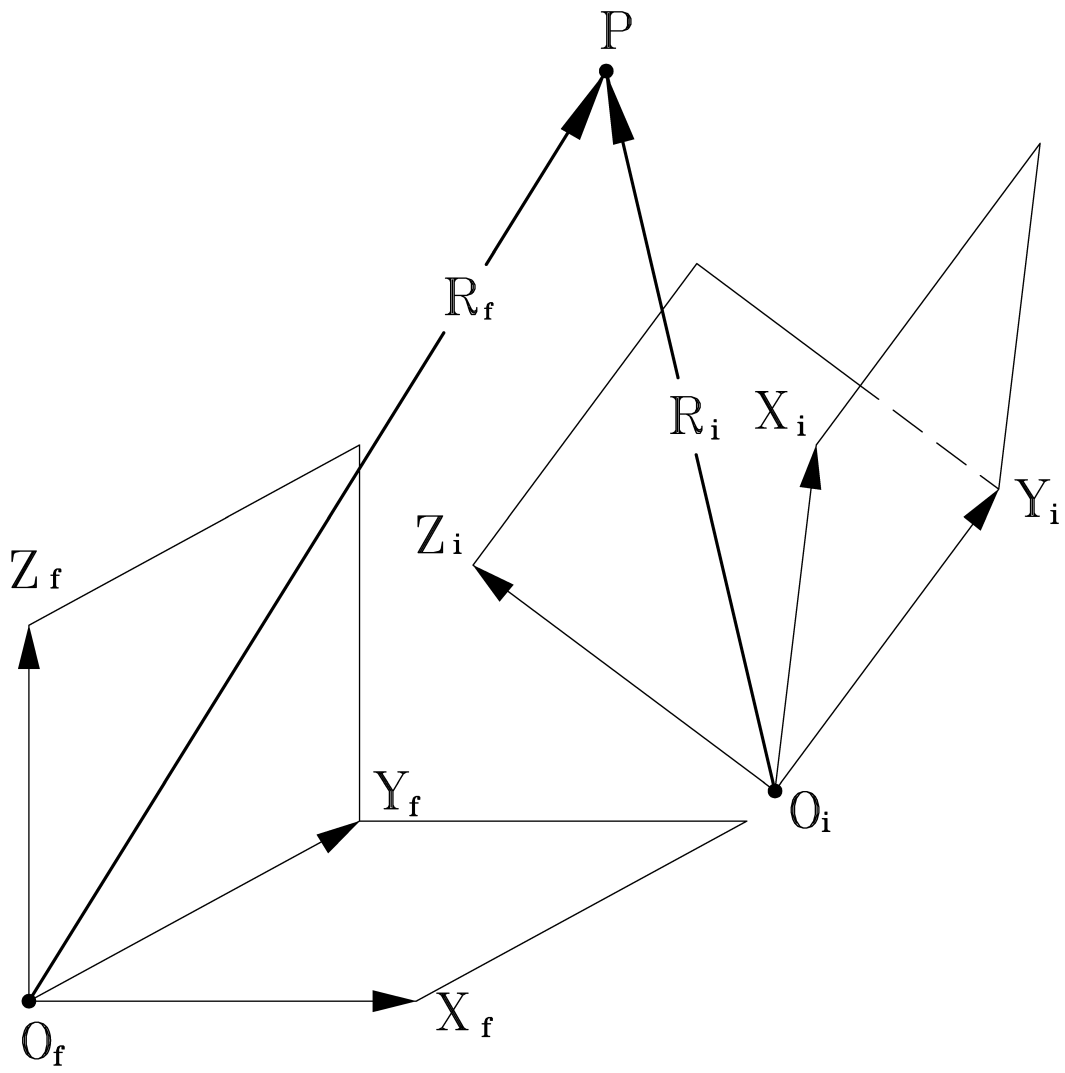


圖 2.1 位置向量與座標系間的關係圖

2.2 嚙合方程式

茲考慮空間中有二個相互嚙合運動的曲面 Σ_1 和 Σ_2 ，如圖 2.2 所示，P 點為這兩個嚙合運動曲面 Σ_1 和 Σ_2 相切時的共切點(Common Tangent Point)，同時也是這二個嚙合運動曲面的瞬時接觸點。兩個嚙合曲面在其共切點 P 點具有共同之曲面法向量 \mathbf{N} (Surface Normal Vector)；圖中 $\mathbf{V}^{(12)}$ 則表示曲面 Σ_1 和 Σ_2 在 P 點的相對速度。

由於兩曲面在嚙合運動時，其中一個曲面與另一曲面既不分離亦不嵌入彼此曲面內，因此，相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 在兩曲面的共同法向量方向上並無相對運動，亦即其相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 在沿著共同法向量 \mathbf{N} 的分量為零，故兩曲面之相對速度必落在其共同切平面T上面。因此，共同法向量 \mathbf{N} 必與此相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 互相垂直。我們可從上述的現象得到下列結論：兩嚙合運動曲面其相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 和共同法向量 \mathbf{N} ，在其共同接觸點 P 處必互相垂直，亦即兩者之內積為零，所以下式亦必成立：

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (2.4)$$

方程式(2.4)就是齒輪原理中探討共軛運動對(Conjugated Kinematics Pair)之嚙合運動條件的嚙合方程式(Equation of Meshing)。此嚙合方程式對於二維曲線及三維曲面的共軛運動對均可適用。

2.3 相對運動速度

假設空間中有兩個物體，物體1與物體2分別固聯於座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ，如圖2.3所示。 Z_1 軸與 Z_2 軸分別為物體1與物體2之旋轉軸，其旋轉之角速度分別為 ω_1 與 ω_2 ， γ 為兩旋轉軸之交錯角 (Crossed Axes)，C為兩旋轉軸的最短距離，P點則為物體1與物體2之瞬時接觸點。因此，

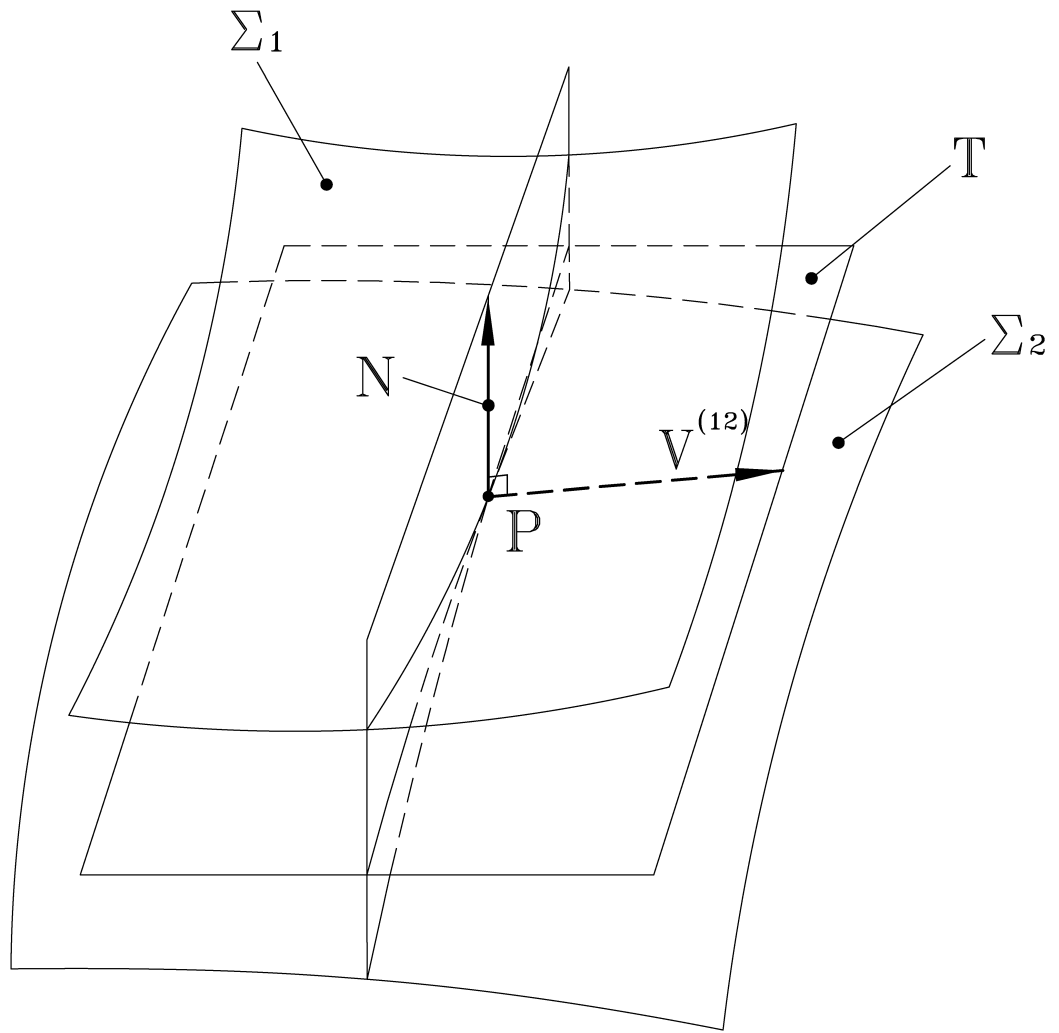


圖 2.2 空間中兩相互嚙合運動曲面之關係示意圖

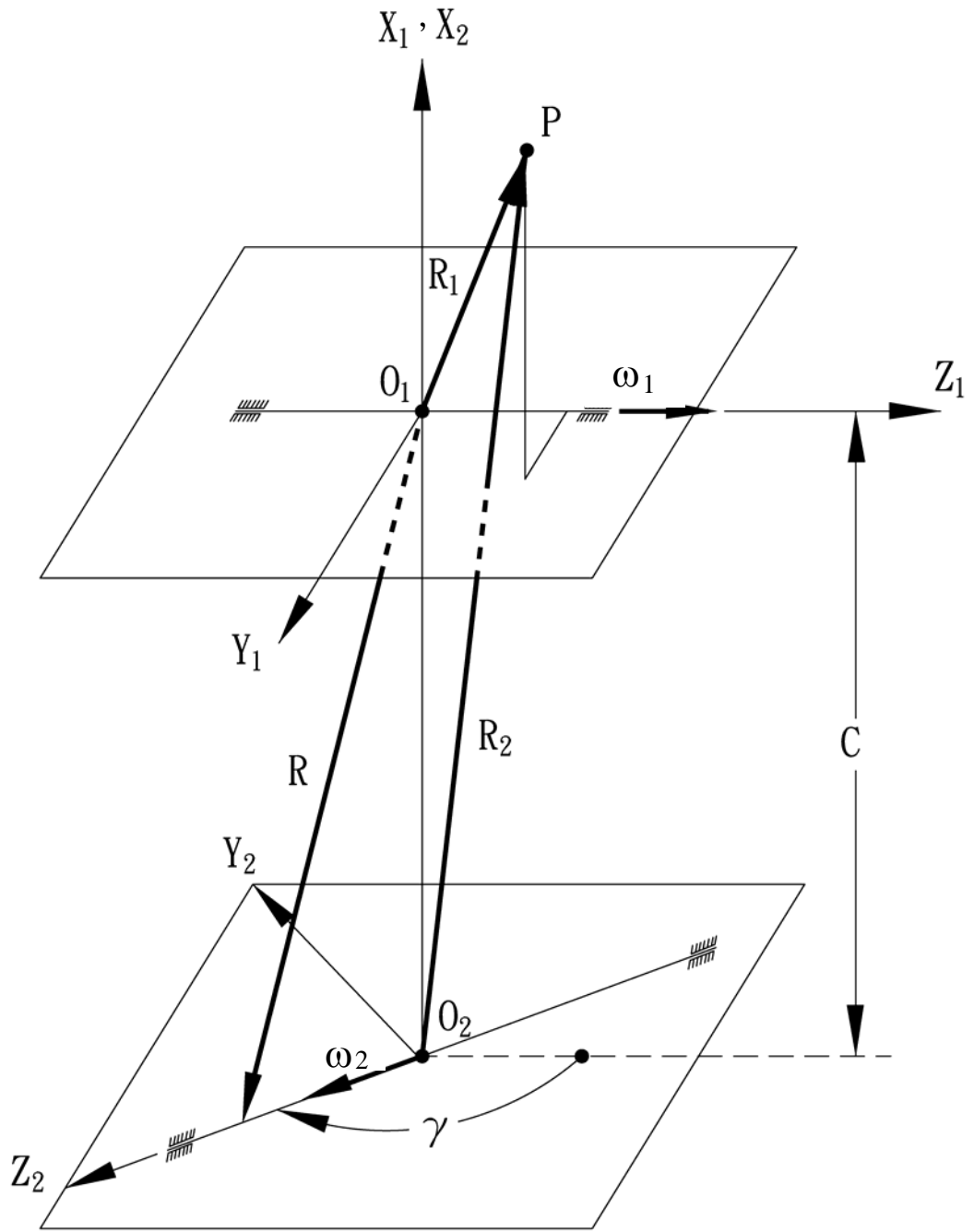


圖 2.3 空間物體之相對速度示意圖

在物體1上之瞬時接觸點P的速度 V_1 可由下式求得：

$$V_1 = \omega_1 \times R_1 \quad (2.5)$$

其中 R_1 乃是由物體 1 旋轉軸之座標原點指向接觸點 P 之位置向量。而在物體 2 上之瞬時接觸點 P 的速度 V_2 則可由下式求得：

$$V_2 = \omega_2 \times R_2 \quad (2.6)$$

其中 R_2 乃是由物體 2 旋轉軸之座標原點指向接觸點 P 之位置向量。因此，物體 1 與物體 2 之相對速度可求得如下：

$$\begin{aligned} V^{(12)} &= V_1 - V_2 = (\omega_1 \times R_1) - (\omega_2 \times R_2) \\ &= (\omega_1 - \omega_2) \times R_1 - R \times \omega_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 R 乃是由物體 1 之參考座標系原點 O_1 指向物體 2 之旋轉軸上任一點之位置向量。在此推導所得之方程式(2.7)主要適用於兩物體其兩旋轉軸間屬於交錯軸之運動時的相對速度，亦即兩軸既不相交亦不平行之共軛運動關係。

然而，當兩物體或者是創成刀具和被創成齒輪間的運動若屬於平行軸之共軛運動關係時，則其相對速度將可以簡化成二維的情況來加以討論，如圖 2.4 所示， $V^{(12)}$ 可以表示成：

$$V^{(12)} = \omega^{(12)} \times \overline{IP} \quad (2.8)$$

其中 I 點為創成刀具和被創成之齒輪做共軛運動時的瞬時旋轉中心 (Instantaneous Center of Rotation)。

茲考慮兩嚙合曲面在嚙合狀態時之二維關係示意圖，如圖2.4所示，相對速度 $V^{(12)}$ 必指向兩者之共同切線向量 T ，又共同切線向量 T 與共同法向量 N 兩者是相互垂直，兩曲面的共同接觸點 P 上的共同法向量 N 必定通過兩

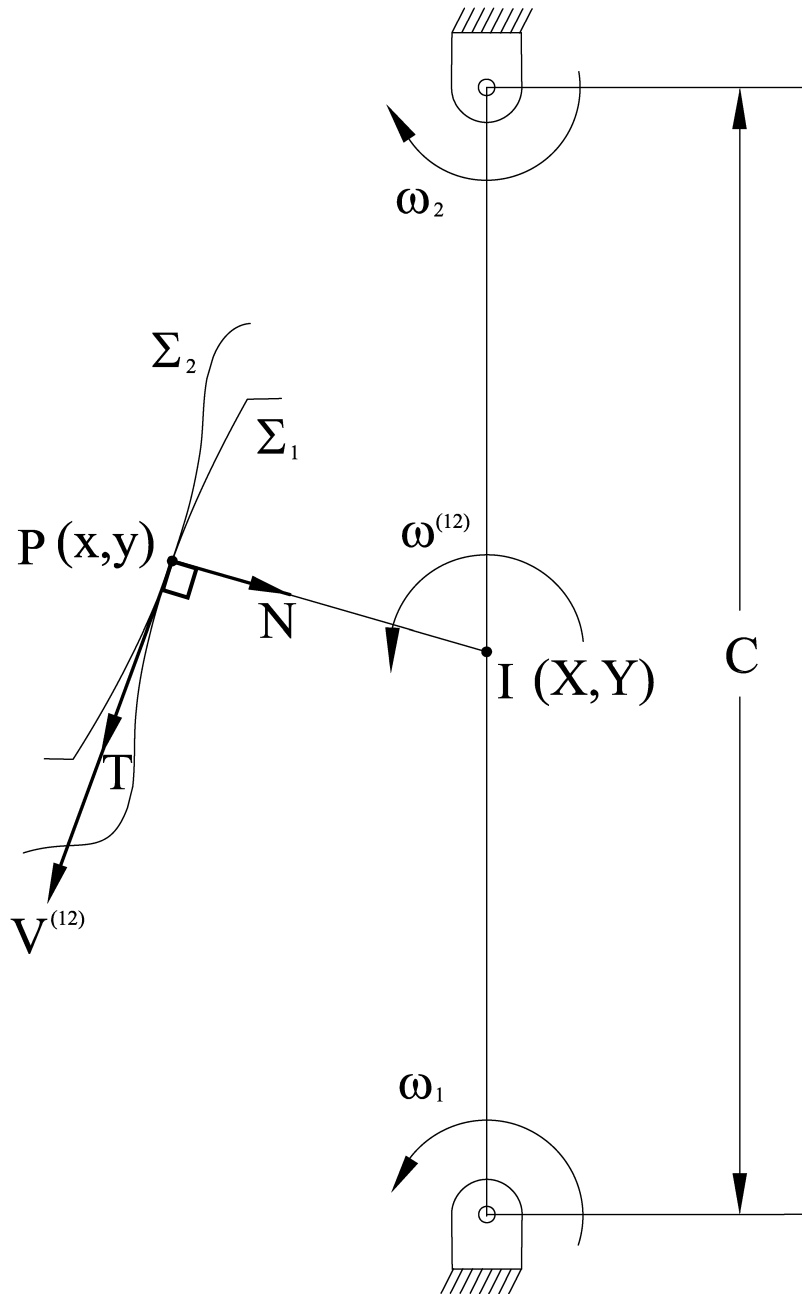


圖 2.4 平行軸共軛運動對之關係示意圖

曲面運動之瞬時旋轉中心 I。因此，相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 與 \overline{IP} 互相垂直，所以下式亦必成立：

$$\frac{X(\phi) - x(\theta)}{\mathbf{N}_x^{(\theta)}} = \frac{Y(\phi) - y(\theta)}{\mathbf{N}_y^{(\theta)}} \quad (2.9)$$

其中 $X(\phi)$ 及 $Y(\phi)$ 為瞬時旋轉中心 I 點之座標， $x(\theta)$ 及 $y(\theta)$ 是 P 點的座標，而 $\mathbf{N}_x^{(\theta)}$ 及 $\mathbf{N}_y^{(\theta)}$ 則為其共同法向量在 X 軸及 Y 軸之分量。利用方程式(2.9)即可推導出二維共軌運動對之嚙合方程式。



第三章 圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪的齒面數學模式

3.1 前言

在本章節中探討以圓弧形剖面之滾齒刀來創成球形齒輪，但根據 Litvin[1-3]所發展的齒輪創成原理可知，具圓弧形剖面之滾齒刀在滾削創成球狀齒輪時，將可用經修整之圓弧形曲線狀齒條刀來模擬創成球形齒輪，並可推導其齒面數學模式。茲考慮如圖 3.1 所顯示之兩嚙合齒輪的運動情形示意圖，此圖示同時顯示齒條刀創成大小齒輪時之運動情形，其中小齒輪的節圓半徑為 r_1 ，轉動角度為 ϕ_1 ，角速度為 ω_1 ；大齒輪的節圓半徑為 r_2 ，轉動角度為 ϕ_2 ，角速度為 ω_2 。由於兩齒輪之節圓的相對運動為純滾動，因此，根據其運動狀況必須符合下列關係式：

$$r_1\phi_1 = r_2\phi_2 \quad (3.1)$$

及

$$V = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad (3.2)$$



(3.2) 式中之 V 為齒條刀在創成大小齒輪時平移之線速度。由齒輪創成原理可知，在建立大小齒輪齒面數學模式時，需先從齒條刀的刀面外形數學模式著手，並利用位置向量之齊次座標轉換，即可求得齒條刀在被創成之齒輪座標系的齒條刀面軌跡方程式，接著依據齒輪嚙合原理及齒條刀具與被創成齒輪之間的相對運動關係，以推導兩者間的嚙合方程式，最後再將齒條刀在齒輪座標系的齒條刀面軌跡方程式與嚙合方程式聯立，即為被創成的球形齒輪之齒面數學模式。

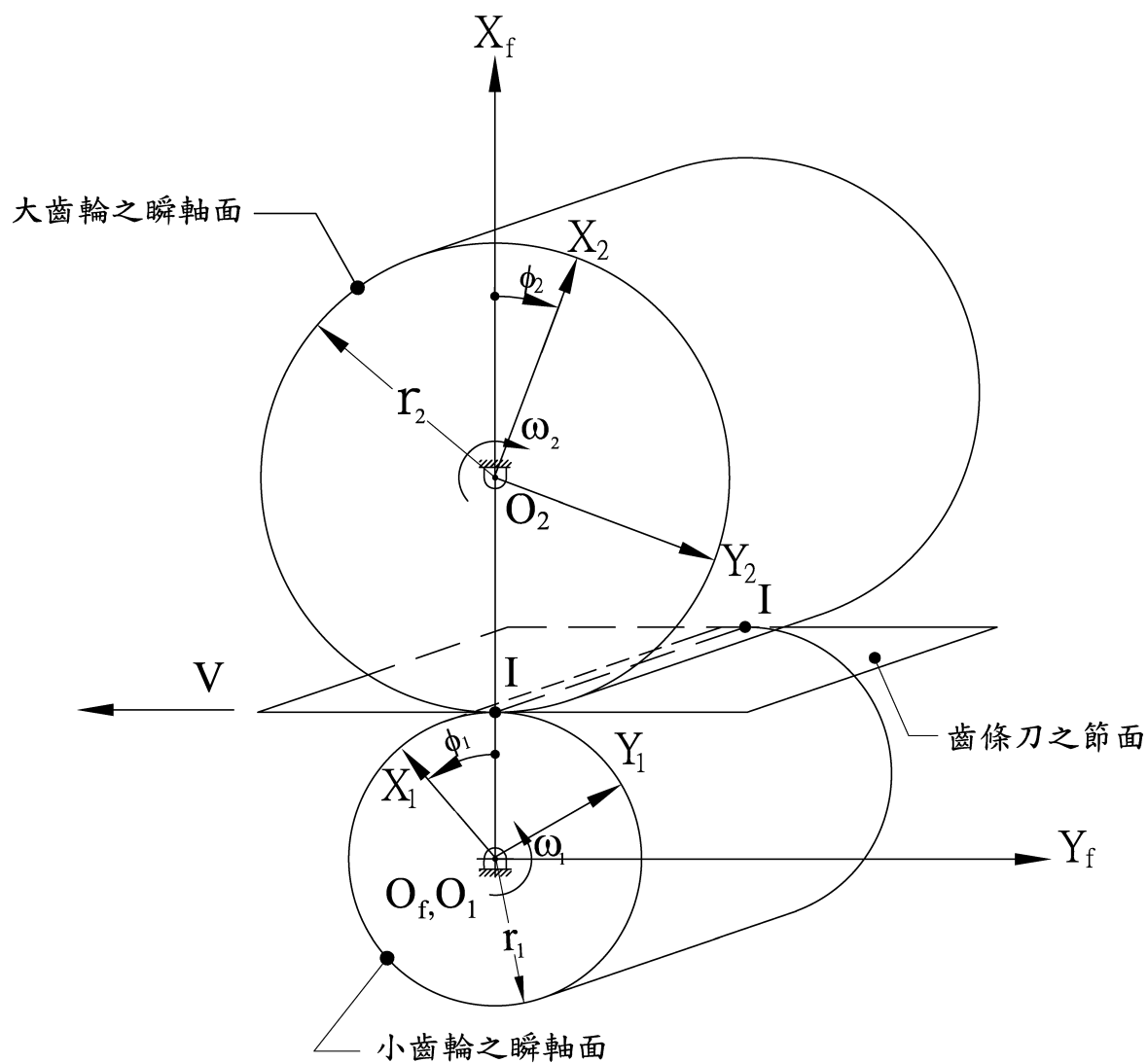


圖 3.1 假想齒條刀與被創成齒輪之座標關係示意圖

3.2 齒條刀模擬圓弧形滾齒刀之理念及其刀面外形數學模式建立

假設 Σ_F 與 Σ_P 分別代表齒條刀 1 與齒條刀 2，用來創成小齒輪 Σ_1 與大齒輪 Σ_2 。圖 3.2 所示為齒條刀 Σ_F 之法向剖面，此齒條刀法向剖面之兩側為圓弧邊刀刃且 Q 點為刀具節線與圓弧之交點。此刀刃在 Q 點之切線與 $X_a^{(F)}$ 軸夾角為 α_n ，此夾角亦為齒輪之壓力角。其中參數 A、B 分別為刀面之 Q 點與其圓弧之起點及終點的刀具參數， $S^{(F)} = \overline{QQ'}$ 為刀具創成齒厚之刀具設計參數，參數 $R^{(F)}$ 為此圓弧線形刀具之圓弧半徑， $\theta^{(F)}$ 則為表示此圓弧線形弧長的位置角度設計參數，表示由起點 N 與終點 M 點之間沿著圓弧線形到動點 M_1 點的位置參數。因此，齒條刀 Σ_F 其左右刀刃面之正交截面表示在 $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 座標系之參數方程式為：

$$\mathbf{R}_a^{(F)} = \begin{bmatrix} -R^{(F)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) \\ \pm \left\{ R^{(F)}(\cos \alpha_n - \cos \theta^{(F)}) - \frac{S^{(F)}}{2} \right\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

此處

$$\theta_{\min}^{(F)} \leq \theta^{(F)} \leq \theta_{\max}^{(F)} \quad (3.4)$$

$$\theta_{\min}^{(F)} = \sin^{-1} \left[\frac{R^{(F)} \sin \alpha_n - B}{R^{(F)}} \right] \quad (3.5)$$

$$\theta_{\max}^{(F)} = \sin^{-1} \left[\frac{R^{(F)} \sin \alpha_n + A}{R^{(F)}} \right] \quad (3.6)$$

(3.3)式中正負號上方之符號係表示齒條刀左刀刃面，而正負號下方之符號則表示齒條刀右刀刃面。

茲為模擬圓弧形滾齒刀之滾削路徑並構成三維之假想齒條刀刀具面座標系統 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ，如圖 3.3 所示，需將由圖 3.2 之齒條刀 Σ_F 的法向剖面置於圖 3.3 之 $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 座標系的 $X_a^{(F)} - Y_a^{(F)}$ 平面上，而 $X_a^{(F)} - Z_a^{(F)}$ 平面上有一圓弧半徑 R_1 ，此用來表示球形齒輪之球體的節圓半徑；參數

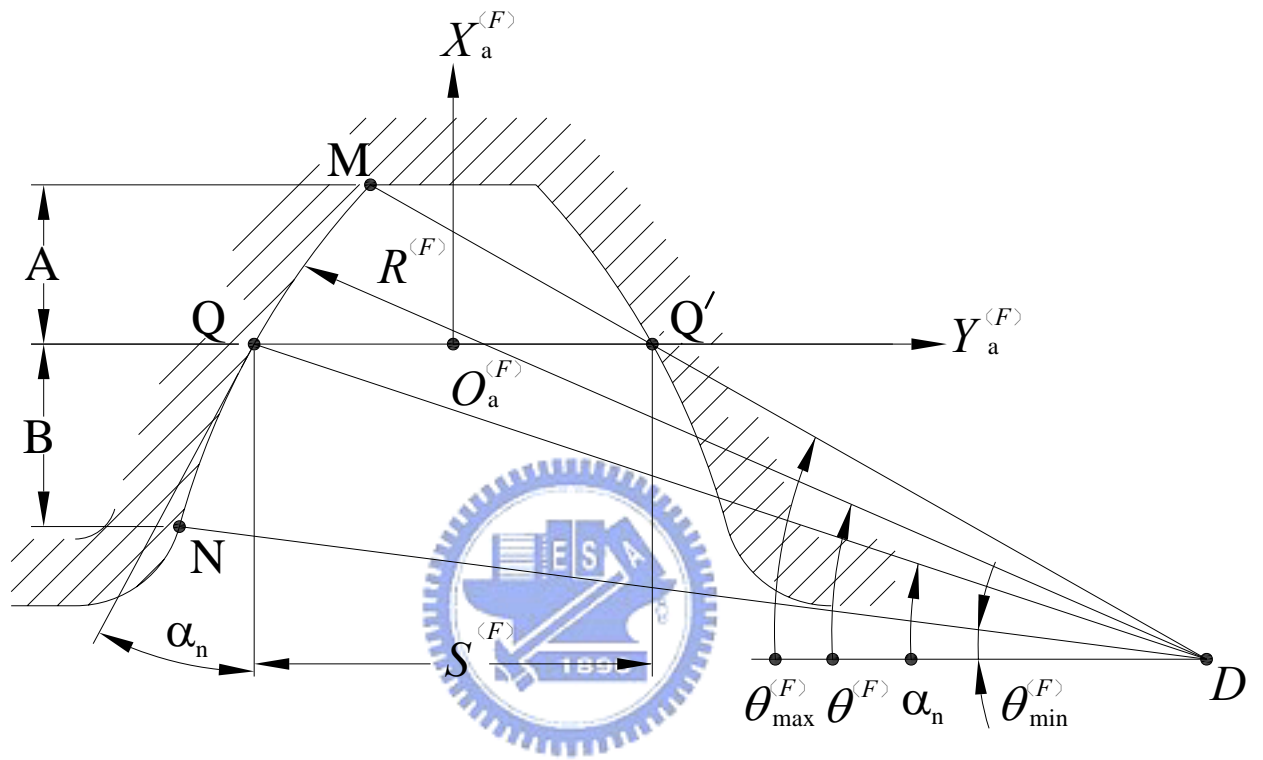


圖 3.2 齒條刀之法向剖面圖

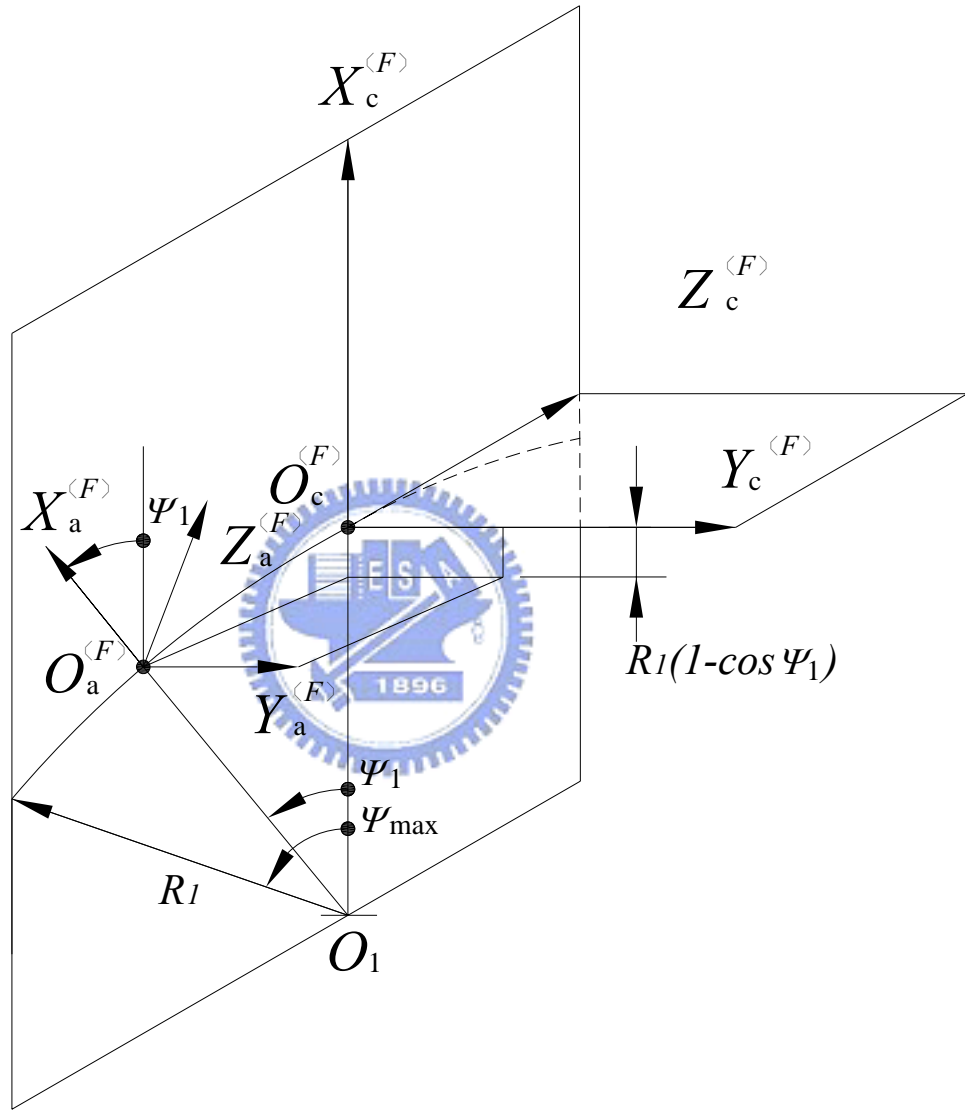


圖 3.3 假想齒條刀刀面之座標關係示意圖

ψ_1 為圓弧曲線展開的角度參數， ψ_{\max} 為其展開角度的最大值，用以表示球形齒輪之齒寬的大小。而點 $O_a^{(F)}$ 係沿著 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 座標系的 X_c-Z_c 平面做圓弧曲線移動，其圓弧半徑為 R_1 。因此，齒條刀 Σ_F 之法向剖面 $X_a^{(F)}-Y_a^{(F)}$ 做圓弧曲線運動所掃掠出的軌跡，即可形成三維之齒條刀刀面外形。茲利用齊次座標轉換矩陣方程式即可將 Σ_F 刀具面方程式表示 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 座標系如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c^{(F)} &= \mathbf{M}_{ca} \mathbf{R}_a^{(F)} \\ &= \begin{bmatrix} -R^{(F)} \cos \psi_1 (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - (R_1 - R_1 \cos \psi_1) \\ \pm \left\{ R^{(F)} (\cos \alpha_n - \cos \theta^{(F)}) - \frac{S^{(F)}}{2} \right\} \\ \left\{ R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1 \right\} \sin \psi_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$\mathbf{M}_{ca} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & 0 & \sin \theta_s & -(R_1 - R_1 \cos \psi_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_s & 0 & \cos \theta_s & R_1 \sin \psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

同理，創成大齒輪之齒條刀 Σ_p 之刀面方程式，亦可用此方法推導並表示於 $S_c^{(P)}$ 座標系如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c^{(P)} &= \mathbf{M}_{ca} \mathbf{R}_a^{(P)} \\ &= \begin{bmatrix} -R^{(P)} \cos \psi_2 (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) - (R_2 - R_2 \cos \psi_2) \\ \pm \left\{ R^{(P)} (\cos \alpha_n - \cos \theta^{(P)}) - \frac{S^{(P)}}{2} \right\} \\ \left\{ R^{(P)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) + R_2 \right\} \sin \psi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 齒條刀之軌跡方程式

本章節之目的在於推導刀具表示在被創成齒輪座標系之軌跡方程式。茲有假想齒條刀 Σ_F 與被創成之小齒輪的相對運動關係，如圖 3.4 所示，齒條刀之節平面與被創成之小齒輪的瞬軸面呈相切狀態，小齒輪之工件作反

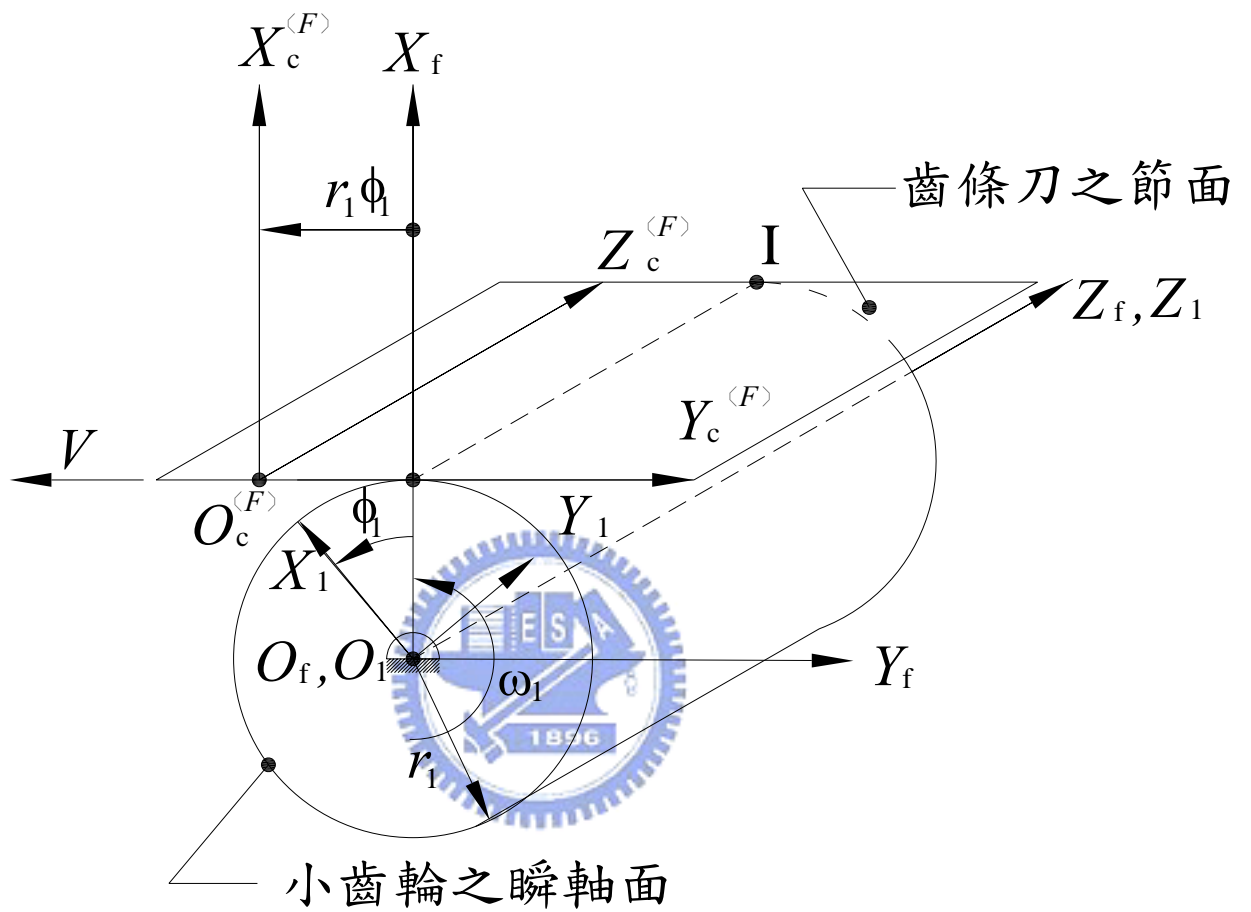


圖 3.4 假想齒條刀 Σ_F 創成小齒輪時之相對運動關係示意圖

時鐘方向旋轉而齒條刀則由右向左作平移運動，其平移速度為 V 。因此，可將表示在 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 座標系的齒條刀 Σ_F 其位置向量 $\mathbf{R}_c^{(F)}$ ，轉換至被創成之小齒輪座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，即可求得刀具表示在被創成之小齒輪座標系的軌跡方程式 \mathbf{R}_1 如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1c} \mathbf{R}_c^{(F)}$$

$$= \begin{bmatrix} X_c^{(F)} \cos \phi_1 - Y_c^{(F)} \sin \phi_1 + r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ X_c^{(F)} r_1 \sin \phi_1 + Y_c^{(F)} \cos \phi_1 + r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中

$$X_c^{(F)} = -R^{(F)} \cos \psi_1 (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - (R_1 - R_1 \cos \psi_1) \quad (3.11)$$

$$Y_c^{(F)} = \pm \left\{ R^{(F)} (\cos \alpha_n - \cos \theta^{(F)}) - \frac{S^{(F)}}{2} \right\}$$

$$(3.12)$$

$$\mathbf{M}_{1c} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

同理，假想齒條刀與大齒輪之相對運動關係如圖 3.6 所示，創成大齒輪之齒條刀的刀具面 Σ_p 表示在大齒輪座標系 S_2 之軌跡方程式亦可以齊次座標轉換方式求出，其軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{2c} \mathbf{R}_c^{(P)}$$

$$= \begin{bmatrix} X_c^{(P)} \cos \phi_2 + Y_c^{(P)} \sin \phi_2 - r_2 (\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_2) \\ -X_c^{(P)} \sin \phi_2 + Y_c^{(P)} \cos \phi_2 + r_2 (\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2) \\ \{R^{(P)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) + R_2\} \sin \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

其中

$$X_c^{(P)} = -R^{(P)} \cos \psi_2 (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) - (R_2 - R_2 \cos \psi_2) \quad (3.15)$$

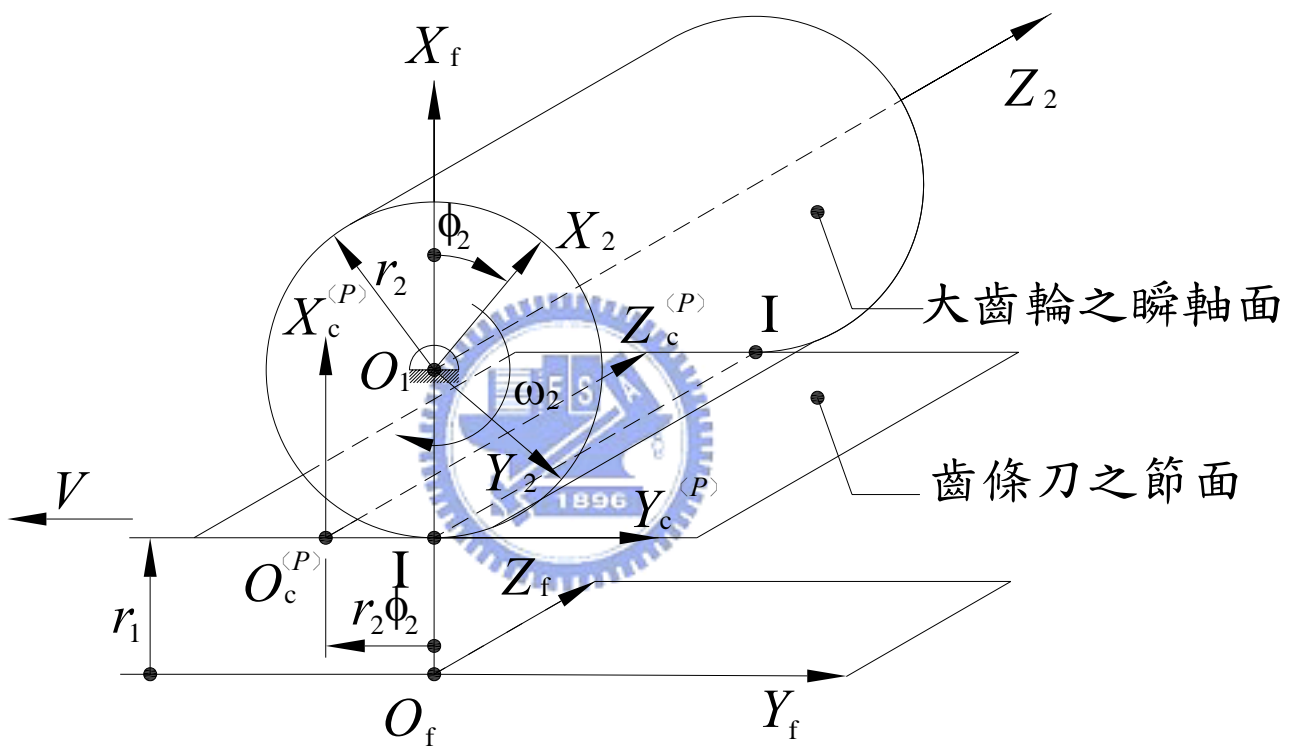


圖 3.5 假想齒條刀 Σ_P 創成大齒輪時之相對運動關係示意圖

$$Y_c^{(p)} = \pm \left\{ R^{(p)} (\cos \alpha_n - \cos \theta^{(p)}) - \frac{S^{(p)}}{2} \right\} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}_{2c} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & -r_2 (\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_2) \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & r_2 (\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.4 球形齒輪之嚙合方程式

由於齒條刀與被創成之齒輪齒面在創成過程中，其每一瞬間均有共同的接觸線，且兩者在此瞬間接觸線的法向量相同。依微分幾何原理，將齒條刀刀面 Σ_F 其左右刀面之數學模式分別對其兩個刀面參數 $\theta^{(F)}$ 和 ψ_1 取偏微分之內積，即可求出齒條刀之法向量如下：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta^{(F)}} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \psi_1} \quad (3.18)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta^{(F)}} = \begin{bmatrix} R^{(F)} \cos \theta^{(F)} \cos \psi_1 \\ \pm R^{(F)} \sin \theta^{(F)} \\ R^{(F)} \cos \theta^{(F)} \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \psi_1} = \begin{bmatrix} \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - R_1\} \sin \psi_1 \\ 0 \\ \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \cos \psi_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

將方程式(3.19)與(3.20)代入方程式(3.18)並經化簡後可得：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = R^{(F)} \begin{bmatrix} \pm \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \sin \theta^{(F)} \cos \psi_1 \\ \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - R_1\} \cos \theta^{(F)} \sin \psi_1^2 - \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \cos \theta^{(F)} \cos \psi_1^2 \\ \pm \sin \theta^{(F)} \{R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - R_1\} \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

同理，假想齒條刀 Σ_p 左右邊刀面之法向量亦可依照前述之方式求出如下：

$$\mathbf{N}_c^{(p)} = R^{(p)} \begin{bmatrix} \pm \{R^{(p)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(p)}) + R_1\} \sin \theta^{(p)} \cos \psi_1 \\ \{R^{(p)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(p)}) - R_1\} \cos \theta^{(p)} \sin \psi_1^2 - \{R^{(p)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(p)}) + R_1\} \cos \theta^{(p)} \cos \psi_1^2 \\ \pm \sin \theta^{(p)} \{R^{(p)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(p)}) - R_1\} \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

至於齒條刀 Σ_f 與被創成之小齒輪 Σ_1 間的相對速度，可依據圖 3.4 所示之相對速度關係示意圖求得。因齒條刀在小齒輪之瞬軸面上方由右向左平移，齒條刀面上與齒輪之接觸點的速度，表示在 S_f 座標系為：

$$\mathbf{V}_f^{(F)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1 r_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

被切製小齒輪上與齒條刀相對應之接觸點的速度表示於 S_f 座標系則為：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_f^{(1)} &= \omega_1 \times \mathbf{R}_c^{(F)} + \overrightarrow{\mathbf{O}_c^{(F)} \mathbf{O}_f} \times \omega_1 \\ &= \begin{bmatrix} (Y_c^{(F)} - r_1 \phi_1) \omega_1 \\ -(X_c^{(F)} + r_1) \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

將方程式(3.23)與(3.24)相減，即可求出齒條刀 Σ_f 左右齒面與小齒輪 Σ_1 運動時之相對速度如下：

$$\mathbf{V}_f^{(F1)} = \begin{bmatrix} (r_1 \phi_1 - Y_c^{(F)}) \omega_1 \\ X_c^{(F)} \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

其中

$$X_c^{(F)} = -R^{(F)} (\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - (R_1 - R_1 \cos \psi_1) \quad (3.26)$$

$$Y_c^{(F)} = \pm \left\{ R^{(F)} (\cos \alpha_n - \cos \theta^{(F)}) - \frac{S^{(F)}}{2} \right\} \quad (3.27)$$

同理，假想齒條刀 Σ_p 其左右齒面與大齒輪 Σ_2 之相對速度，亦可依據圖 3.6 所示之創成機構運動關係示意圖推導求得。因此，假想齒條刀 Σ_p 左右齒面與大齒輪 Σ_2 之相對速度可表示如下：

$$\mathbf{V}_f^{(P2)} = \begin{bmatrix} (Y_c^{(P)} - r_2 \phi_2) \omega_2 \\ -X_c^{(P)} \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

其中

$$X_c^{(P)} = -R^{(P)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) - (R_2 - R_2 \cos \psi_2) \quad (3.29)$$

$$Y_c^{(P)} = \pm \left\{ R^{(P)}(\cos \alpha_n - \cos \theta^{(P)}) - \frac{S^{(P)}}{2} \right\} \quad (3.30)$$

依據第二章所介紹之齒輪基本理論可知，嚙合方程式(2.4)係表示齒條刀在創成齒輪之瞬間，亦會有共同切平面產生，此共同切平面之法向量與齒條刀與齒輪之相對速度分別互相垂直，而此兩曲面之法向量及相對速度其內積必為零：

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (3.31)$$

將方程式(3.21)與(3.25)代入(3.29)，即可求得齒條刀 Σ_F 左右齒面與小齒輪之嚙合方程式如下：

$$\begin{aligned} & N_c^{(F)} \cdot V_c^{(F1)} \\ & = (\pm \{R^{(F)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \sin \theta^{(F)} \cos \psi_1)(r_1 \phi_1 - Y_c^{(F)}) \\ & + (\{R^{(F)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - R_1\} \cos \theta^{(F)} \sin \psi_1^2 - \{R^{(F)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) + R_1\} \cos \theta^{(F)} \cos \psi_1^2) X_c^{(F)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中

$$X_c^{(F)} = -R^{(F)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(F)}) - (R_1 - R_1 \cos \psi_1) \quad (3.26)$$

$$Y_c^{(F)} = \pm \left\{ R^{(F)}(\cos \alpha_n - \cos \theta^{(F)}) - \frac{S^{(F)}}{2} \right\} \quad (3.27)$$

同理，齒條刀 Σ_p 左右兩邊齒面與大齒輪之嚙合方程式亦可以相同之步驟求得如下：

$$\begin{aligned} & N_c^{(P)} \cdot V_c^{(P1)} \\ & = (\pm \{R^{(P)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) + R_2\} \sin \theta^{(P)} \cos \psi_2)(r_2 \phi_2 - Y_c^{(P)}) \\ & + (\{R^{(P)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) - R_2\} \cos \theta^{(P)} \sin \psi_2^2 - \{R^{(P)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) + R_2\} \cos \theta^{(P)} \cos \psi_2^2) X_c^{(P)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中

$$X_c^{(P)} = -R^{(P)}(\sin \alpha_n - \sin \theta^{(P)}) - (R_2 - R_2 \cos \psi_2) \quad (3.29)$$

$$Y_c^{(P)} = \pm \left\{ R^{(P)}(\cos \alpha_n - \cos \theta^{(P)}) - \frac{S^{(P)}}{2} \right\} \quad (3.30)$$

3.5 球形齒輪之齒面數學模式

方程式(3.10)為齒條刀表示在小齒輪座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 之軌跡方程式，若再與齒條刀 Σ_F 左右齒面與小齒輪之嚙合方程式(3.32)聯立，即為小齒輪之齒面數學方程式。

同理，大齒輪之軌跡方程式(3.14)，與齒條刀 Σ_p 左右齒面與大齒輪之嚙合方程式(3.33)聯立，即為大齒輪之齒面數學方程式。

3.6 球形齒輪之電腦輔助繪圖

依據 3.5 節所建立之球形齒輪齒面數學模式，並利用電腦輔助繪圖軟體，即可繪出球形齒輪之齒輪外形，茲舉一例以驗證本章所推導之球形齒輪之齒面數學模式。若球形齒輪及其創成刀具之主要設計參數如表 3.1 所列，根據前面章節所推導之球形齒輪之齒面數學模式，即可繪出球形齒輪之齒面外形，如圖 3.6 所示。

表 3.1 球形齒輪之主要設計參數

齒輪形狀	凸狀球形齒輪	凹狀球形齒輪
模數 m_n (mm/tooth)	4	4
壓力角 α_n (度)	20	20
齒數 T_i	36	72
節圓半徑 r_i (mm)	72	144
齒形最大展開角度 ψ_{max} (度)	20	20
刀具參數 A(mm)	3.2	3.2
刀具參數 B(mm)	3.2	3.2
刀具參數 $R^{(i)}$ (mm)	30	30
刀具參數 $\theta_{min}^{(i)}$ (度)	13.5	13.5
刀具參數 $\theta_{max}^{(i)}$ (度)	26.7	26.7

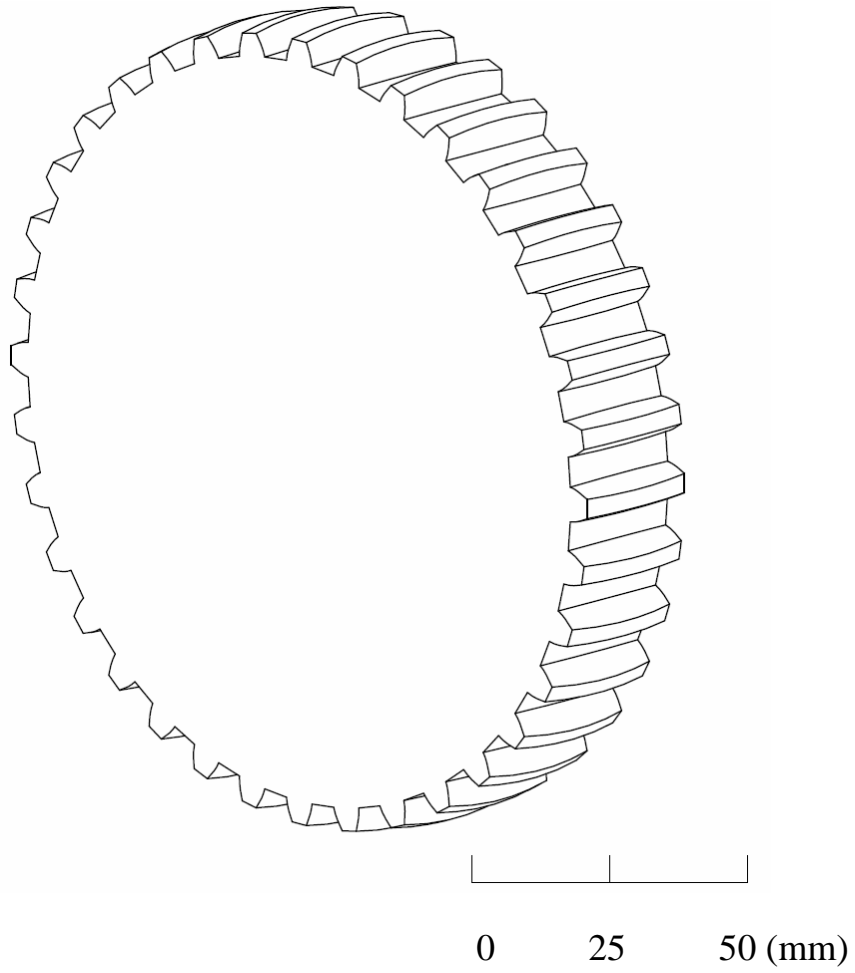


圖 3.6 凸狀球形齒輪之齒面外形電腦輔助繪圖

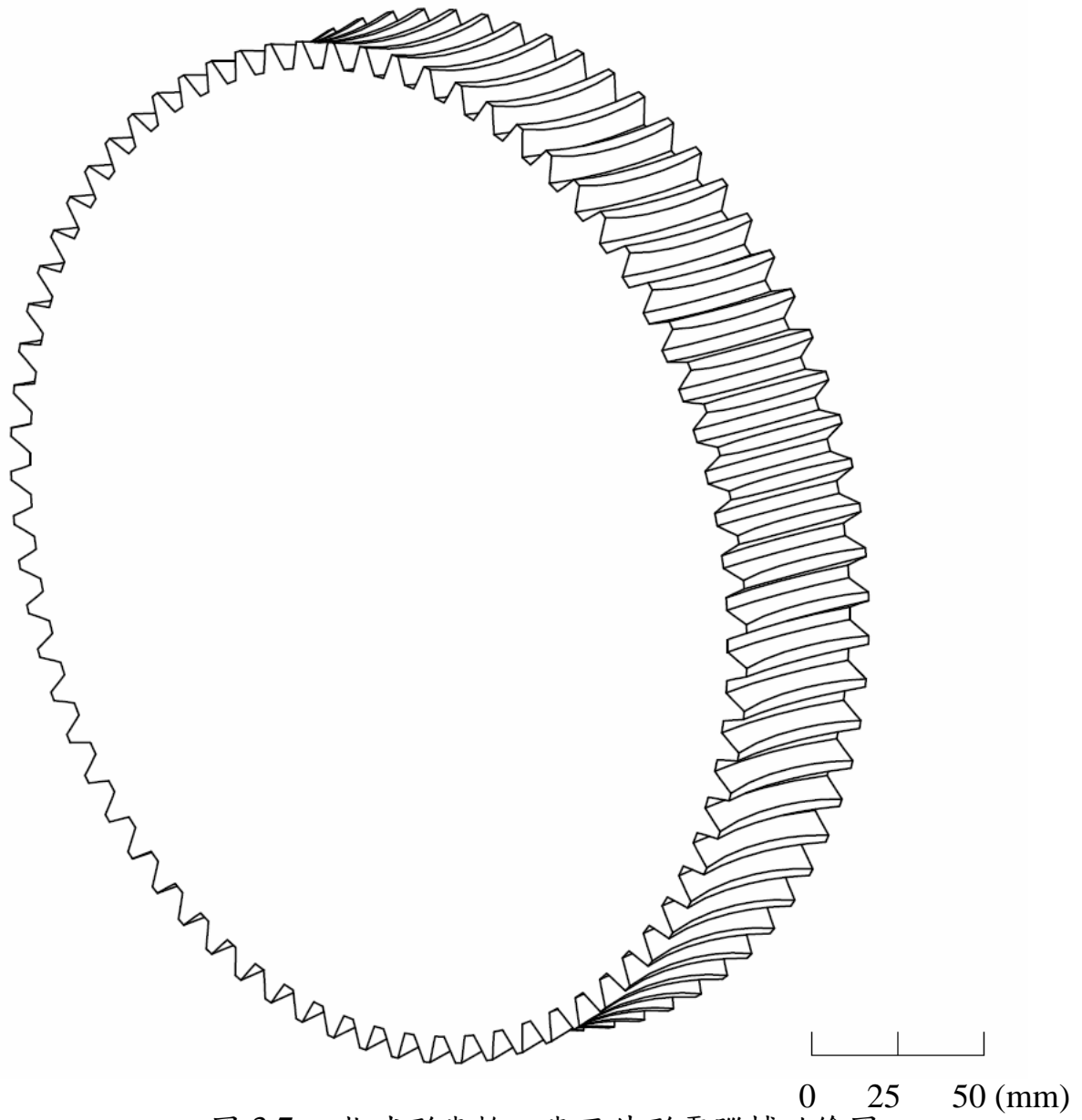


圖 3.7 凹狀球形齒輪之齒面外形電腦輔助繪圖

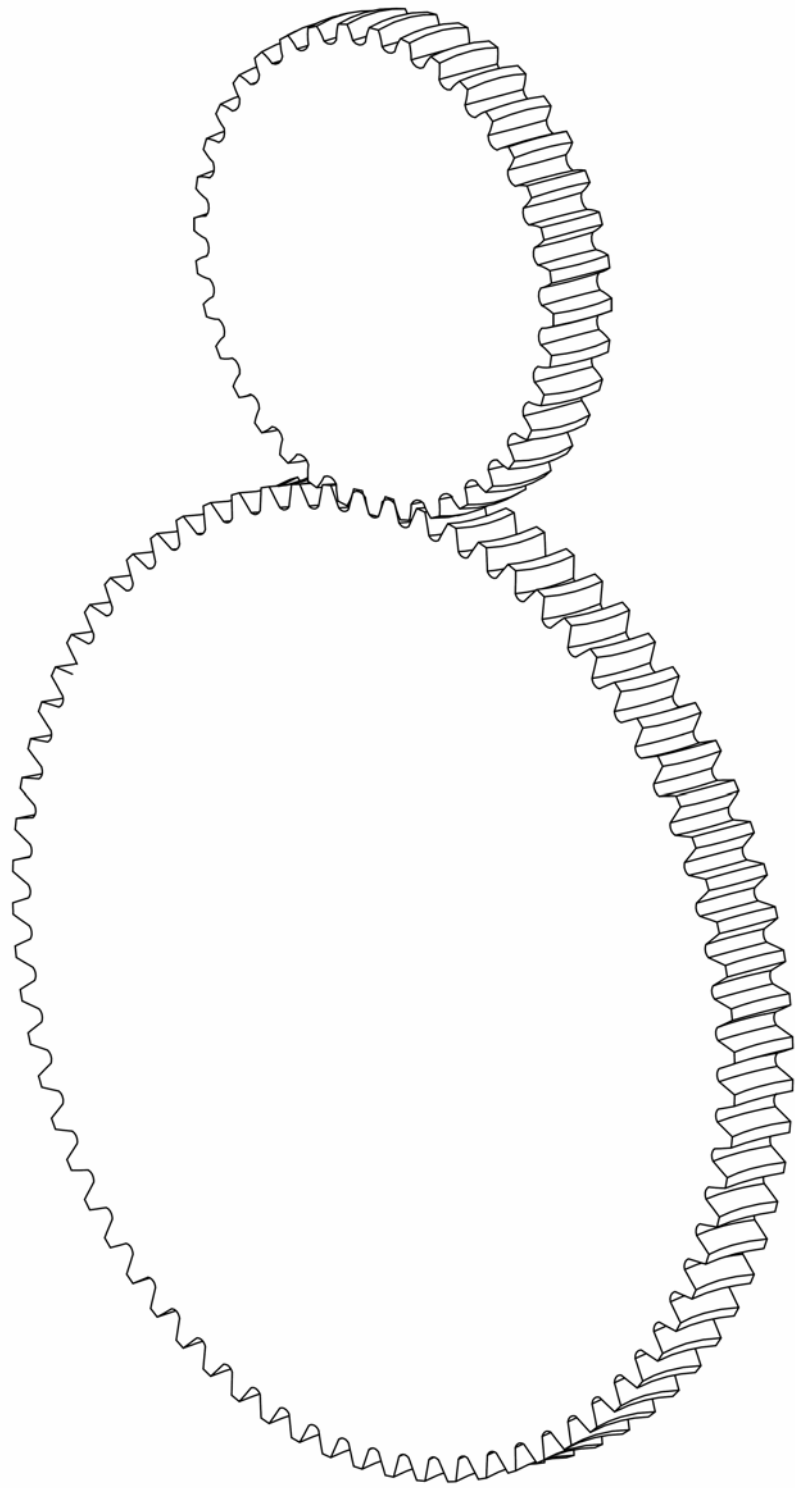


圖 3.8 凸狀球形齒輪與凹狀球形齒輪之配對示意圖

第四章 球形齒輪的齒面接觸分析

4.1 前言

空間齒輪機構的製造和裝配誤差將導致從動件的位置出現誤差，因而在旋轉運動時將會產生齒輪噪音以及振動並可能縮短齒輪的壽命。所謂的位置誤差就是齒輪在理想嚙合狀態下齒輪接觸位置與實際運轉時齒輪機構的接觸位置之差。在製造方面所產生的誤差，可能會由刀具的刀面誤差及刀具滾製齒輪的磨耗、加工機本身的精度、熱變形、靜態幾何誤差、結構動態特性以及進給軸伺服控制動態響應，所產生的齒輪尺寸及形狀誤差，故滾製良好的齒輪對均須於加工機台上進行線上量測補正誤差，使得實際所製造出的齒輪齒面更加接近理想的齒面。在組裝方面的誤差可以根據第三章所推導的齒輪齒面方程式及嚙合方程式進行齒輪之齒面接觸模擬與分析，分析齒輪在組裝時所產生的中心距、水平與垂直軸向之裝配誤差對齒輪組運動誤差(Kinematical Errors)之影響，分析結果可以提供我們在進行組裝齒輪時的對策及管理。

4.2 具運動誤差之齒輪組的座標系轉換

分析齒輪在組裝時所產生的中心距、水平與垂直軸向組裝誤差對傳動誤差之影響，可以根據理想齒輪嚙合狀態下的座標系再加入中心距、水平與垂直軸向之座標系誤差加以模擬，將其座標系藉由座標轉換原理進行座標轉換到一固定座標系進行接觸分析。

茲考慮如圖 4.1 所顯示之兩嚙合齒輪的傳動具有組裝誤差時各座標系間之關係示意圖，其中 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為固定座標系； $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 為小齒輪座標系，並以 Z_1 為旋轉軸； $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 為大齒輪座標系，以 Z_2 為旋轉軸； $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 與 $S_v(X_v, Y_v, Z_v)$ 座標系為輔助座標系，分別表示

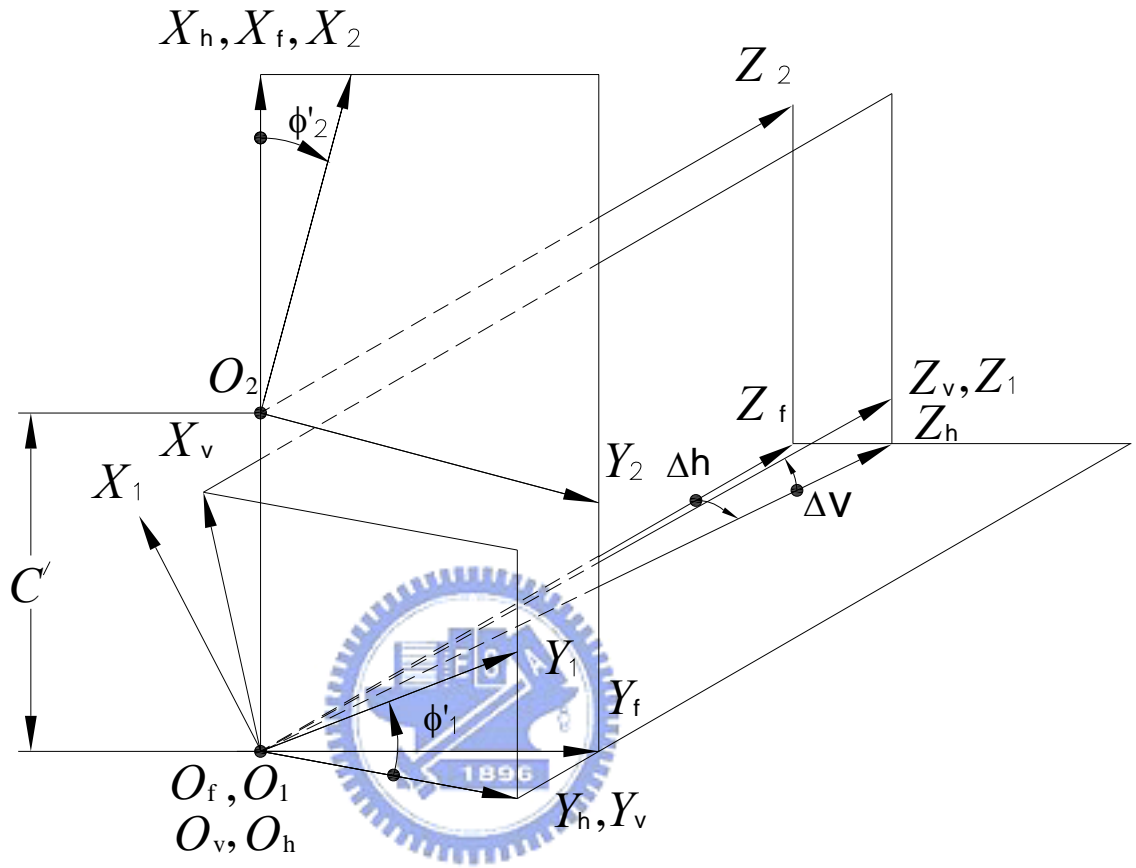


圖 4.1 球形齒輪具有組裝誤差時各座標系間之關係示意圖

齒輪組裝時的水平組裝誤差與垂直組裝誤差座標系； Z_f 軸與 Z_h 軸之夾角 Δh 定義為小齒輪在水平軸向之裝配誤差角度， X_f 軸與 X_v 軸之夾角度 Δv 則定義為小齒輪在垂直軸向之裝配誤差角度， ϕ_2' 與 ϕ_1' 則分別表示大小兩齒輪在裝配後嚙合時的轉動角度，大小齒輪組裝後其中心距 $C'=C+\Delta C$ ，而 ΔC 則為組裝時所產生之中心距誤差。

依據圖 4.1 所示具有組裝誤差之大小齒輪嚙合傳動之座標系，可將小齒輪之齒面位置向量 R_1 及其單位法向量 n_1 ，由小齒輪座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，經由下列之齊次座標轉換矩陣方程式及向量轉換矩陣方程式，轉換到固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ：

小齒輪齒面位置向量 R_1 轉換表示在固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 之軌跡方程式為：

$$R_f^{(1)} = M_{fh} M_{hv} M_{v1} R_1$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1 \cos \phi_1' + y_1 \sin \phi_1') \cos \Delta v + z_1 \sin \Delta v \\ (-x_1 \sin \phi_1' + y_1 \cos \phi_1') \cos \Delta h + [-(x_1 \cos \phi_1' + y_1 \sin \phi_1') \sin \Delta v + z_1 \cos \Delta v] \sin \Delta h \\ -(-x_1 \sin \phi_1' + y_1 \cos \phi_1') \sin \Delta h + [-(x_1 \cos \phi_1' + y_1 \sin \phi_1') \sin \Delta v + z_1 \cos \Delta v] \cos \Delta h \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

而小齒輪之齒面單位法向量 n_1 轉換到固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為：

$$n_f^{(1)} = L_{fh} L_{hv} L_{v1} n_1$$

$$= \begin{bmatrix} (n_{1x} \cos \phi_1' + n_{1y} \sin \phi_1') \cos \Delta v + n_{1z} \sin \Delta v \\ (-n_{1x} \sin \phi_1' + n_{1y} \cos \phi_1') \cos \Delta h + [-(n_{1x} \cos \phi_1' + n_{1y} \sin \phi_1') \sin \Delta v + n_{1z} \cos \Delta v] \sin \Delta h \\ -(-n_{1x} \sin \phi_1' + n_{1y} \cos \phi_1') \sin \Delta h + [-(n_{1x} \cos \phi_1' + n_{1y} \sin \phi_1') \sin \Delta v + n_{1z} \cos \Delta v] \cos \Delta h \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

其中

$$M_{fh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta h & \sin \Delta h & 0 \\ 0 & -\sin \Delta h & \cos \Delta h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta v & 0 & \sin \Delta v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Delta v & 0 & \cos \Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{v1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & \sin \phi_1' & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{fh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta h & \sin \Delta h & 0 \\ 0 & -\sin \Delta h & \cos \Delta h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta v & 0 & \sin \Delta v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Delta v & 0 & \cos \Delta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{v1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & \sin \phi_1' & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理，大齒輪之齒面位置向量 \mathbf{R}_2 轉換表示在固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$

為：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_f^{(2)} &= \mathbf{M}_{f2} \mathbf{R}_2 \\ &= \begin{bmatrix} (x_2 \cos \phi_2' - y_2 \sin \phi_2') + C' \\ x_2 \sin \phi_2' + y_2 \cos \phi_2' \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中

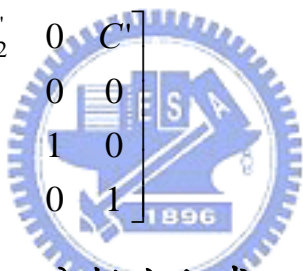
$$\mathbf{M}_{f2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2' & -\sin \phi_2' & 0 & C' \\ \sin \phi_2' & \cos \phi_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = r_1 + r_2 + \Delta C$$

大齒輪單位法向量 n_2 轉換到固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_f^{(2)} &= \mathbf{L}_{f2} \mathbf{n}_2 \\ &= \begin{bmatrix} n_{2x} \cos \phi_2' - n_{2y} \sin \phi_2' \\ n_{2x} \sin \phi_2' + n_{2y} \cos \phi_2' \\ n_{2z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$\mathbf{L}_{f2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2' & -\sin \phi_2' & 0 & C' \\ \sin \phi_2' & \cos \phi_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


4.3 具運動誤差的齒輪之分析方程式

根據第二章所述之基本理論，兩嚙合曲面在嚙合狀態時，其相對速度 $V^{(12)}$ 必指向兩者之共同切線向量 T ，又共同切線向量 T 與共同法向量 N 兩者是相互垂直，兩曲面的共同接觸點 P 上的共同法向量 N 必定通過兩曲面運動之瞬時旋轉中心 I ，因此，相對速度 $V^{(12)}$ 與 \overline{IP} 互相垂直，所以下列之嚙合方程式亦必成立：

$$\frac{X(\phi) - x(\theta)}{N_x^{(\theta)}} = \frac{Y(\phi) - y(\theta)}{N_y^{(\theta)}} = \frac{Z(\phi) - z(\theta)}{N_z^{(\theta)}} \quad (4.5)$$

兩齒輪之齒面相嚙合時，接觸的兩齒面其共同接觸點或線的位置向量及齒面的單位法向量應相同，因此可以下列關係式表示為:

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{R}_f^{(2)} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \mathbf{n}_f^{(2)} \quad (4.7)$$

在三維空間中，上述兩向量式共包含六個純量等式，但是方程式(4.7)為齒面之單位法向量等式，因為 $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ ，故方程式(4.7)實際上只包含了兩個獨立的純量方程式。

方程式(4.1)及(4.3)分別為小齒輪及大齒輪齒面位置表示固定座標在 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 之軌跡方程式，若再與小、大齒輪之嚙合方程式(3.30)及(3.33)聯立，即為小齒輪與大齒輪之齒面方程式表示於 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 固定座標系。

因此方程式(4.6)及(4.7)及(3.33)及(3.30)中，包含了七個獨立的純量方程式，所以在進行齒面接觸分析時，即成為七個方程式解八個未知數： $\theta^{(F)}$ 、 $\theta^{(P)}$ 、 ϕ_1 、 ϕ_1' 、 ϕ_2 、 ϕ_2' 、 ψ_1 及 ψ_2 。若以 ϕ_1' 設定為已知之參數，則就變成了七個方程式解七個未知數，未知數也就可以解出。經由上面的資料可以顯示出大小兩齒輪嚙合時的轉動角度 ϕ_2' 與 ϕ_1' 具有一對應之函數關係，可將之表示為 $\phi_2'(\phi_1')$ 。齒輪實際輸出之轉動角度與理論轉動角度之差值，即稱為齒輪組之運動誤差(Kinematical Errors) [1] [2]，可以下式表示之：

$$\Delta\phi_2(\phi_1') = \phi_2' - \frac{T_1}{T_2} \phi_1' \quad (4.8)$$

其中 ϕ_2' 與 ϕ_1' 為大小兩齒輪嚙合時的轉動角度， T_2 與 T_1 則為大小兩齒輪的齒數。

4.4 接觸分析例題討論

根據 4.2 節與 4.3 節所推導之齒輪對的接觸分析方程式，使用 C 語言及 IMSL 函式庫以建立電腦分析方程式，來模擬齒輪在各種組裝狀態下的接觸情形。在此節將列舉幾個齒輪組裝後可能發生的狀況，以比較齒輪組在各種組裝狀況下，其運動誤差變化情形。例題中所使用的齒輪設計參數，

如表 4.1 所示。

表 4.1 球形齒輪之主要設計參數

齒輪形狀 設計參數	凸狀球形齒輪 A	凹狀球形齒輪 B	凸狀球形齒輪 C
模數 m_n (mm/teeth)	4	4	4
壓力角 α_n (度)	20	20	20
齒數 T_i	36	72	72
節圓半徑 r_i (mm)	72	144	144

例題 1 球形齒輪組在理想裝配狀態下嚙合

大小齒輪嚙合時，假設 Z_f 軸與 Z_h 軸之夾角 $\Delta h=0.0^\circ$ ，亦即大小齒輪之旋轉軸無水平軸向之組裝誤差， X_f 軸與 X_v 軸之夾角 $\Delta V=0.0^\circ$ ，即大小齒輪之旋轉軸於垂直軸向之組裝誤差，而中心距也無組裝誤差 $\Delta C=0.0\text{mm}$ 。若將以上數據代入本章所建構之齒輪齒面接觸分析模擬程式進行分析，凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 嚙合配對分析之結果如表 4.2 所示，而凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 嚙合配對分析之結果如表 4.3 所示。

由表 4.2 及表 4.3 之分析結果顯示， $\phi_1'=2\phi_2'$ 是由於大齒輪的齒數為小齒輪的 2 倍；而 $\theta^{(F)}=\theta^{(P)}$ 則表示圓弧形齒刀所創成之球形齒輪之接觸點，係由齒輪之齒頂逐步移向齒根， $\psi_1=\psi_2=0.000$ 度，亦即表示球形齒輪組的接觸位置是落在齒輪之齒寬的中央截面處。由表中所示其運動誤差(KE)均為零，表示圓弧形滾齒刀所創成之球形齒輪對，在理想裝配狀態下嚙合是沒有運動誤差產生。

表 4.2 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 配對在無裝配誤差狀態下之接觸分析結果

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	18.132	18.132	0.000	0.000	0.000
-4.000	-2.000	18.838	18.838	0.000	0.000	0.000
-3.000	-1.500	19.598	19.598	0.000	0.000	0.000
-2.000	-1.000	20.419	20.419	0.000	0.000	0.000
-1.000	-0.500	21.308	21.308	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	22.275	22.275	0.000	0.000	0.000
1.000	0.500	23.328	23.328	0.000	0.000	0.000
2.000	1.000	24.480	24.480	0.000	0.000	0.000
3.000	1.500	25.743	25.743	0.000	0.000	0.000
4.000	2.000	27.133	27.133	0.000	0.000	0.000
5.000	2.500	28.668	28.668	0.000	0.000	0.000

表 4.3 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在無誤差狀態狀態下之接觸分析結果

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta v=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg)	ϕ_2' (deg)	$\theta^{(F)}$ (deg)	$\theta^{(P)}$ (deg)	ψ_1 (deg)	ψ_2 (deg)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	18.132	18.132	0.000	0.000	0.000
-4.000	-2.000	18.838	18.838	0.000	0.000	0.000
-3.000	-1.500	19.598	19.598	0.000	0.000	0.000
-2.000	-1.000	20.419	20.419	0.000	0.000	0.000
-1.000	-0.500	21.308	21.308	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	22.275	22.275	0.000	0.000	0.000
1.000	0.500	23.328	23.328	0.000	0.000	0.000
2.000	1.000	24.480	24.480	0.000	0.000	0.000
3.000	1.500	25.743	25.743	0.000	0.000	0.000
4.000	2.000	27.133	27.133	0.000	0.000	0.000
5.000	2.500	28.668	28.668	0.000	0.000	0.000

例題 2 球形齒輪組在具有中心距組裝誤差狀態下嚙合

大小齒輪嚙合時，假設與例題一之組裝狀態相同，但具有中心距之組裝誤差。亦即 $\Delta h=0.0^\circ$ 和 $\Delta V=0.0^\circ$ ，旋轉軸沒有水平軸向及垂直軸向之組裝誤差，但中心距之組裝誤差 $\Delta C=0.1\text{mm}$ 。茲將以上數據代入齒面接觸分析程式進行分析，凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 嚙合配對分析之結果如表 4.4 所示，而凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 嚙合配對分析之結果如表 4.5 所示。

表 4.4 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 配對在中心距組裝誤差為 0.1mm 狀態下之接觸分析結果

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.497	18.106	17.924	0.000	0.000	11.596
-4.000	-1.997	18.803	18.613	0.000	0.000	9.661
-3.000	-1.498	19.553	19.355	0.000	0.000	7.559
-2.000	-0.999	20.363	20.156	0.000	0.000	5.267
-1.000	-0.499	21.239	21.022	0.000	0.000	2.758
0.000	0.000	22.189	21.961	0.000	0.000	0.000
1.000	0.499	23.222	22.983	0.000	0.000	-3.045
2.000	0.998	24.349	24.097	0.000	0.000	-6.425
3.000	1.497	25.582	25.315	0.000	0.000	-10.198
4.000	1.996	26.935	26.651	0.000	0.000	-14.434
5.000	2.495	28.425	28.122	0.000	0.000	-19.226

表 4.5 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在中心距組裝誤差為 0.1mm 狀態下之接觸分析結果

組裝狀態: 壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta v=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.497	18.106	17.924	0.000	0.000	11.596
-4.000	-1.997	18.803	18.613	0.000	0.000	9.661
-3.000	-1.498	19.553	19.355	0.000	0.000	7.559
-2.000	-0.999	20.363	20.156	0.000	0.000	5.267
-1.000	-0.499	21.239	21.022	0.000	0.000	2.758
0.000	0.000	22.189	21.961	0.000	0.000	0.000
1.000	0.499	23.222	22.983	0.000	0.000	-3.045
2.000	0.998	24.349	24.097	0.000	0.000	-6.425
3.000	1.497	25.582	25.315	0.000	0.000	-10.198
4.000	1.996	26.935	26.651	0.000	0.000	-14.434
5.000	2.495	28.425	28.122	0.000	0.000	-19.226

由表 4.4 及表 4.5 之齒面接觸分析結果顯示， $\psi_1=\psi_2=0.000$ 度，亦即表示這對球形齒輪組的接觸位置是落在齒輪之齒寬中央截面處；而 $\theta^{(F)} \neq \theta^{(P)}$ 則表示其接觸點齒輪之齒頂逐步移向後齒根；又 $\phi_1' \neq \phi_2'$ 是表示其運動誤差(KE)不為零，亦即表示圓弧形滾齒刀創成之球形齒輪對，在具有中心距組裝誤差下是具有運動誤差。這是由於球形齒輪之齒面不是理想的漸開線，故嚙合齒輪組之中心距誤差會對其運動誤差產生較大的影響，因此，圓弧形球形齒輪在組裝時對於中心距組裝精度要特別注意。

例題 3 凸狀與凹狀球形齒輪組在具有中心距、垂直軸向及水平軸向之組裝誤差狀態下嚙合

本例題將依據表 4.6 所列之球形齒輪設計參數，探討不同壓力角球形齒輪在具有中心距組裝誤差、水平軸向組裝誤差及垂直軸向組裝誤差及混合組裝誤差各種狀態下嚙合，對齒輪組之運動誤差的影響。

表 4.6 球形齒輪之主要設計參數

設計參數 \ 齒輪形狀	凸狀球形齒輪 A			凹狀球形齒輪 B		
模數 m_n (mm/teeth)	4			4		
壓力角 α_n (度)	14.5	20	25	14.5	20	25
齒數 T_i	36			72		
節圓半徑 r_i (mm)	72			144		

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.7 至 4.9 及圖 4.2 所示。由分析之結果可以很清楚的看出，球形齒輪在具有水平軸向裝配誤差時， $\psi_1 \neq \psi_2 \neq 0$ 度，亦即其齒輪接觸位置將會偏離齒寬之中央截面處。當球形齒輪組只具有水平裝配誤差時，其齒面接觸位置將會是在兩嚙合齒面的同一側，亦即 ψ_1 和 ψ_2 會同時為正值或同為負值。又齒輪組若具有水平軸向之裝配誤差時，會隨著齒輪壓力角的增加，而使得球形齒輪組的運動誤差減小。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.10 至 4.12 及圖 4.3 所示。由分析結果顯示，球形齒輪在具有垂直軸向裝配誤差時，其齒面接觸位置將從兩

嚙合齒面的同一側變換到另一側，而齒輪壓力角大小對於垂直軸向裝配誤差所造成的運動誤差較不敏感，亦即球形齒輪對於垂直軸向之裝配誤差的容許度較大。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向及垂直軸向組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.13 至 4.15 及圖 4.4 所示。由分析結果顯示，當水平軸向組裝誤差與垂直軸向組裝誤差同時存在時，因為球形齒輪對於垂直軸向組裝誤差的容許度較大，以及壓力角大小對水平軸向組裝誤差與垂直軸向組裝誤差的影響為相反，而使得齒輪組整體的運動誤差反而會小幅的下降。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較大之中心距 0.1mm、水平軸向及垂直軸向之組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.16 至 4.18 及圖 4.5 所示。由分析結果顯示，中心距組裝誤差對於齒輪組的影響是很大的。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距 0.05mm、水平軸向及垂直軸向之組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.19 至 4.21 及圖 4.6 所示。由分析結果顯示，假設於齒輪對中心距組裝時施加一預加力量，以縮短其中心距時，則齒輪對之運動誤差會縮小，此分析結果對於組裝實務上有所助益。

表 4.7 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(1)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.498	13.406	13.239	-4.152	-2.085	7.201
-4.000	-1.998	13.905	13.744	-3.995	-2.002	5.768
-3.000	-1.499	14.445	14.289	-3.836	-1.919	4.331
-2.000	-0.999	15.030	14.880	-3.676	-1.835	2.891
-1.000	-0.500	15.667	15.523	-3.515	-1.751	1.447
0.000	0.000	16.362	16.224	-3.353	-1.665	0.000
1.000	0.500	17.123	16.992	-3.189	-1.580	-1.449
2.000	0.999	17.960	17.835	-3.025	-1.494	-2.899
3.000	1.499	18.884	18.766	-2.859	-1.407	-4.350
4.000	1.998	19.909	19.797	-2.693	-1.321	-5.800
5.000	2.498	21.051	20.945	-2.526	-1.234	-7.249

表 4.8 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(2)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.498	18.264	18.173	-3.030	-1.525	5.616
-4.000	-1.999	18.960	18.872	-2.906	-1.458	4.490
-3.000	-1.499	19.710	19.626	-2.780	-1.392	3.365
-2.000	-0.999	20.522	20.441	-2.655	-1.325	2.241
-1.000	-0.500	21.401	21.324	-2.529	-1.259	1.119
0.000	0.000	22.358	22.285	-2.403	-1.192	0.000
1.000	0.500	23.401	23.332	-2.277	-1.125	-1.116
2.000	0.999	24.543	24.477	-2.150	-1.058	-2.228
3.000	1.499	25.796	25.734	-2.024	-0.992	-3.334
4.000	1.999	27.176	27.117	-1.897	-0.925	-4.434
5.000	2.498	28.701	28.647	-1.771	-0.859	-5.525

表 4.9 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(3)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.5^\circ$ 、 $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg)	ϕ_2' (deg)	$\theta^{(F)}$ (deg)	$\theta^{(P)}$ (deg)	ψ_1 (deg)	ψ_2 (deg)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.499	22.761	22.702	-2.394	-1.206	4.692
-4.000	-1.999	23.630	23.573	-2.290	-1.150	3.746
-3.000	-1.499	24.564	24.511	-2.185	-1.094	2.803
-2.000	-0.999	25.572	25.521	-2.081	-1.039	1.864
-1.000	-0.500	26.662	26.613	-1.977	-0.983	0.929
0.000	0.000	27.842	27.795	-1.872	-0.927	0.000
1.000	0.500	29.123	29.079	-1.768	-0.872	-0.923
2.000	0.999	30.517	30.476	-1.664	-0.817	-1.839
3.000	1.499	32.039	32.000	-1.560	-0.762	-2.747
4.000	1.999	33.702	33.666	-1.457	-0.708	-3.645
5.000	2.499	35.527	35.493	-1.353	-0.653	-4.530

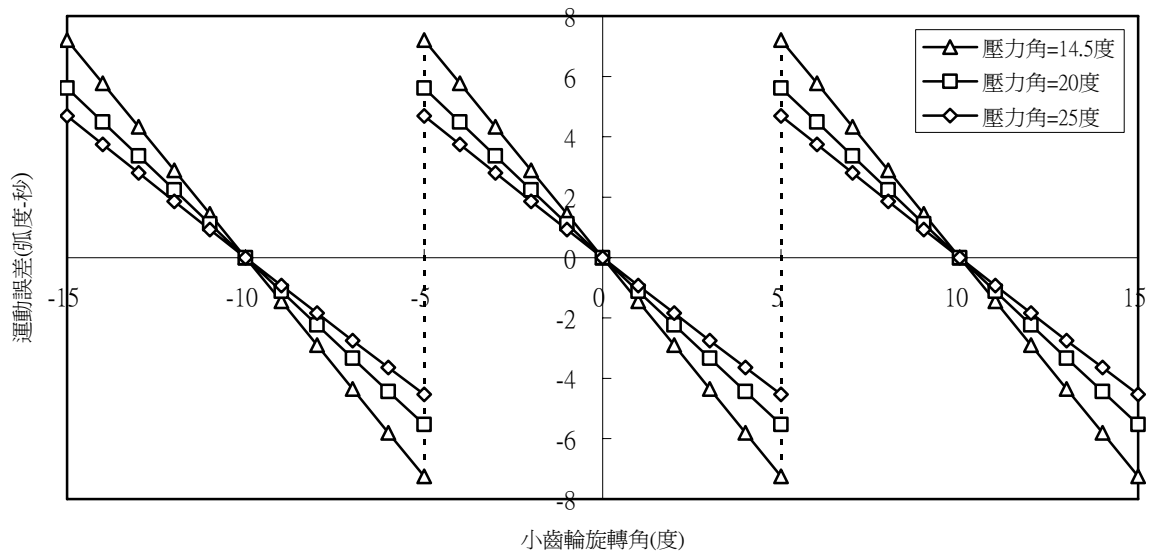


圖 4.2 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果

表 4.10 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(4)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	13.183	13.185	2.002	0.010	0.347
-4.000	-2.000	13.699	13.700	1.996	0.004	0.298
-3.000	-1.500	14.255	14.255	1.989	-0.004	0.241
-2.000	-1.000	14.857	14.857	1.982	-0.011	0.173
-1.000	-0.500	15.511	15.510	1.974	-0.020	0.094
0.000	0.000	16.224	16.222	1.965	-0.030	0.000
1.000	0.500	17.003	17.000	1.955	-0.040	-0.111
2.000	1.000	17.858	17.854	1.944	-0.051	-0.242
3.000	1.500	18.801	18.795	1.932	-0.064	-0.398
4.000	2.000	19.844	19.836	1.918	-0.078	-0.585
5.000	2.500	21.003	20.993	1.903	-0.093	-0.811

表 4.11 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果 (5)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	18.177	18.179	2.016	0.020	0.654
-4.000	-2.000	18.883	18.884	2.007	0.011	0.560
-3.000	-1.500	19.643	19.644	1.997	0.001	0.450
-2.000	-1.000	20.465	20.464	1.986	-0.010	0.323
-1.000	-0.500	21.355	21.353	1.975	-0.022	0.174
0.000	0.000	22.321	22.318	1.962	-0.034	0.000
1.000	0.500	23.374	23.370	1.949	-0.048	-0.204
2.000	1.000	24.525	24.519	1.934	-0.063	-0.444
3.000	1.500	25.786	25.778	1.918	-0.080	-0.727
4.000	2.000	27.174	27.164	1.900	-0.098	-1.063
5.000	2.500	28.706	28.693	1.881	-0.117	-1.464

表 4.12 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(6)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.0^\circ$ 、 $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	22.727	22.729	2.024	0.027	1.000
-4.000	-2.000	23.603	23.604	2.013	0.016	0.854
-3.000	-1.500	24.544	24.544	2.001	0.003	0.685
-2.000	-1.000	25.558	25.557	1.988	-0.010	0.490
-1.000	-0.500	26.653	26.651	1.974	-0.024	0.263
0.000	0.000	27.839	27.835	1.959	-0.039	0.000
1.000	0.500	29.125	29.120	1.943	-0.055	-0.307
2.000	1.000	30.523	30.516	1.925	-0.073	-0.666
3.000	1.500	32.047	32.038	1.907	-0.092	-1.086
4.000	2.000	33.713	33.702	1.887	-0.112	-1.581
5.000	2.499	35.538	35.524	1.865	-0.133	-2.166

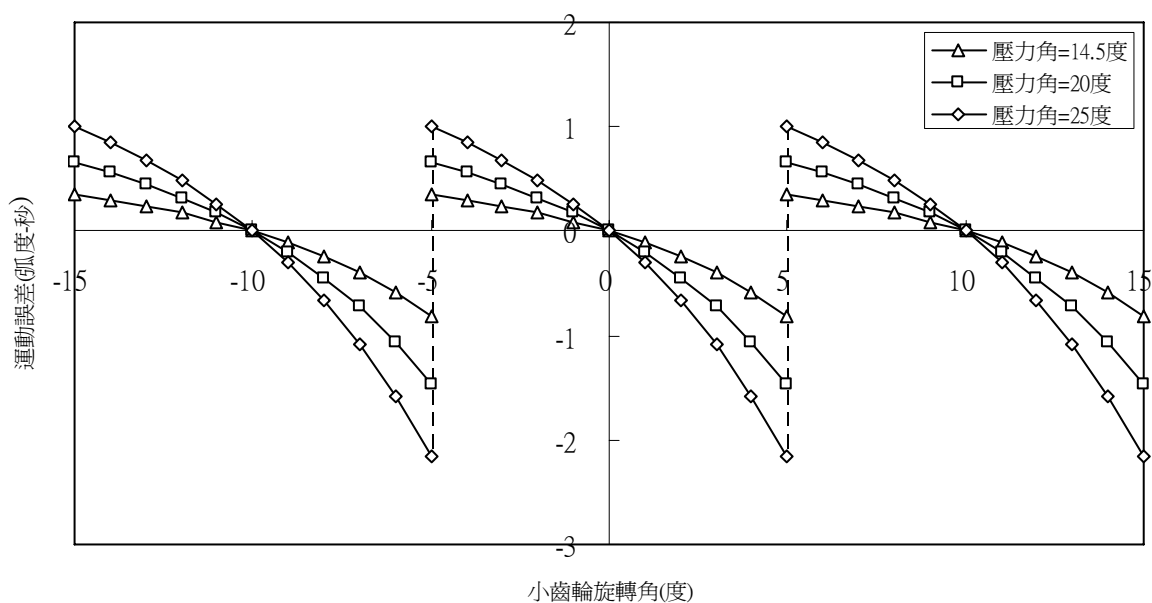


圖 4.3 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果

表 4.13 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果 (7)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.498	13.261	13.091	-2.171	-2.086	6.235
-4.000	-1.999	13.763	13.600	-2.019	-2.009	4.981
-3.000	-1.499	14.307	14.149	-1.866	-1.933	3.730
-2.000	-0.999	14.896	14.745	-1.713	-1.856	2.482
-1.000	-0.500	15.538	15.393	-1.558	-1.779	1.239
0.000	0.000	16.238	16.100	-1.404	-1.703	0.000
1.000	0.500	17.005	16.874	-1.249	-1.627	-1.233
2.000	0.999	17.848	17.724	-1.093	-1.552	-2.459
3.000	1.499	18.779	18.661	-0.938	-1.477	-3.679
4.000	1.999	19.811	19.700	-0.784	-1.403	-4.892
5.000	2.498	20.962	20.857	-0.630	-1.330	-6.100

表 4.14 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(8)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.499	18.175	18.082	-1.019	-1.506	4.519
-4.000	-1.999	18.874	18.786	-0.903	-1.449	3.604
-3.000	-1.499	19.629	19.544	-0.787	-1.393	2.695
-2.000	-1.000	20.445	20.364	-0.672	-1.337	1.791
-1.000	-0.500	21.330	21.253	-0.557	-1.281	0.893
0.000	0.000	22.292	22.218	-0.443	-1.227	0.000
1.000	0.500	23.340	23.271	-0.329	-1.174	-0.890
2.000	1.000	24.488	24.422	-0.217	-1.122	-1.778
3.000	1.499	25.747	25.684	-0.106	-1.071	-2.668
4.000	1.999	27.133	27.073	0.003	-1.022	-3.564
5.000	2.499	28.664	28.607	0.111	-0.975	-4.472

表 4.15 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(9)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.5^\circ$ 、 $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.499	22.704	22.645	-0.370	-1.179	3.598
-4.000	-1.999	23.576	23.520	-0.277	-1.134	2.876
-3.000	-1.499	24.515	24.461	-0.184	-1.090	2.156
-2.000	-1.000	25.528	25.476	-0.093	-1.048	1.439
-1.000	-0.500	26.621	26.572	-0.002	-1.006	0.721
0.000	0.000	27.806	27.759	0.088	-0.966	0.000
1.000	0.500	29.091	29.046	0.176	-0.926	-0.727
2.000	1.000	30.490	30.447	0.263	-0.889	-1.467
3.000	1.499	32.016	31.974	0.348	-0.853	-2.225
4.000	1.999	33.683	33.643	0.432	-0.818	-3.010
5.000	2.499	35.511	35.471	0.514	-0.786	-3.837

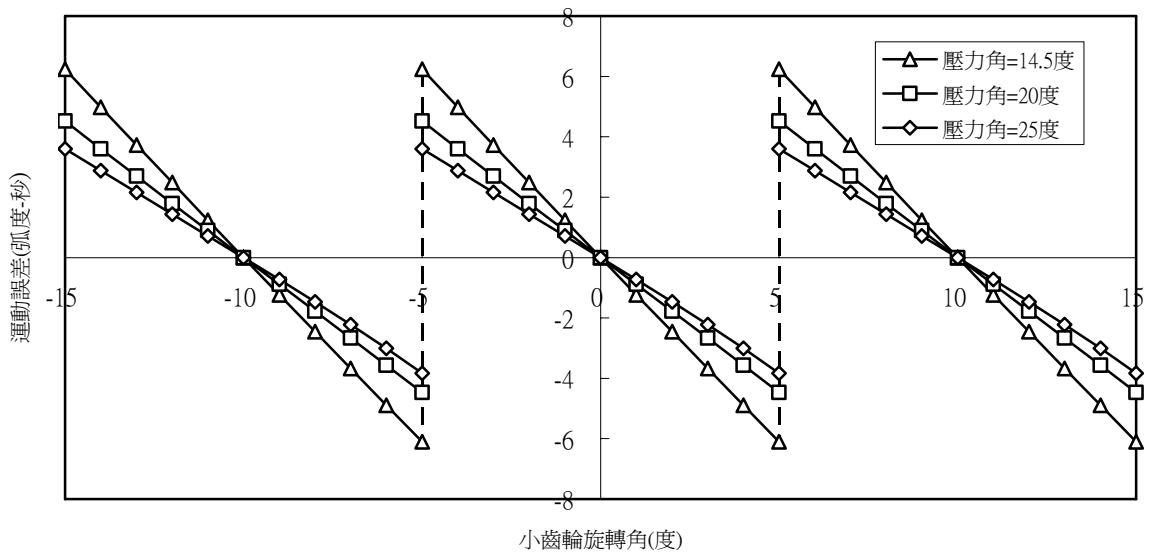


圖 4.4 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果

表 4.16 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向
 裝配誤差狀態下之接觸分析結果(10)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.496	13.256	12.916	-2.122	-2.061	13.961
-4.000	-1.997	13.754	13.413	-1.975	-1.987	11.423
-3.000	-1.498	14.292	13.949	-1.827	-1.913	8.773
-2.000	-0.998	14.875	14.529	-1.679	-1.839	5.998
-1.000	-0.499	15.508	15.159	-1.530	-1.765	3.080
0.000	0.000	16.198	15.844	-1.381	-1.692	0.000
1.000	0.499	16.952	16.594	-1.232	-1.618	-3.267
2.000	0.998	17.780	17.415	-1.082	-1.545	-6.750
3.000	1.497	18.690	18.318	-0.933	-1.473	-10.486
4.000	1.996	19.698	19.316	-0.784	-1.402	-14.520
5.000	2.495	20.816	20.423	-0.636	-1.332	-18.911

表 4.17 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向
 裝配誤差狀態下之接觸分析結果(11)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.496	18.148	17.876	-1.004	-1.498	15.993
-4.000	-1.996	18.840	18.563	-0.891	-1.443	13.170
-3.000	-1.497	19.585	19.304	-0.779	-1.388	10.184
-2.000	-0.998	20.390	20.103	-0.666	-1.333	7.012
-1.000	-0.499	21.261	20.968	-0.555	-1.280	3.629
0.000	0.000	22.206	21.906	-0.444	-1.227	0.000
1.000	0.499	23.235	22.927	-0.334	-1.175	-3.914
2.000	0.998	24.358	24.040	-0.225	-1.125	-8.162
3.000	1.496	25.587	25.257	-0.117	-1.075	-12.804
4.000	1.995	26.936	26.593	-0.011	-1.028	-17.918
5.000	2.493	28.422	28.062	0.094	-0.982	-23.598

表 4.18 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直軸向
 裝配誤差狀態下之接觸分析結果(12)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.5^\circ$ 、 $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.495	22.652	22.406	-0.368	-1.177	18.944
-4.000	-1.996	23.514	23.262	-0.277	-1.134	15.681
-3.000	-1.497	24.440	24.182	-0.187	-1.091	12.192
-2.000	-0.998	25.437	25.171	-0.097	-1.049	8.444
-1.000	-0.499	26.512	26.238	-0.009	-1.009	4.396
0.000	0.000	27.675	27.391	0.078	-0.969	0.000
1.000	0.499	28.934	28.640	0.165	-0.931	-4.803
2.000	0.997	30.301	29.994	0.249	-0.894	-10.086
3.000	1.496	31.789	31.466	0.333	-0.859	-15.941
4.000	1.994	33.409	33.070	0.414	-0.825	-22.481
5.000	2.492	35.179	34.820	0.494	-0.793	-29.854

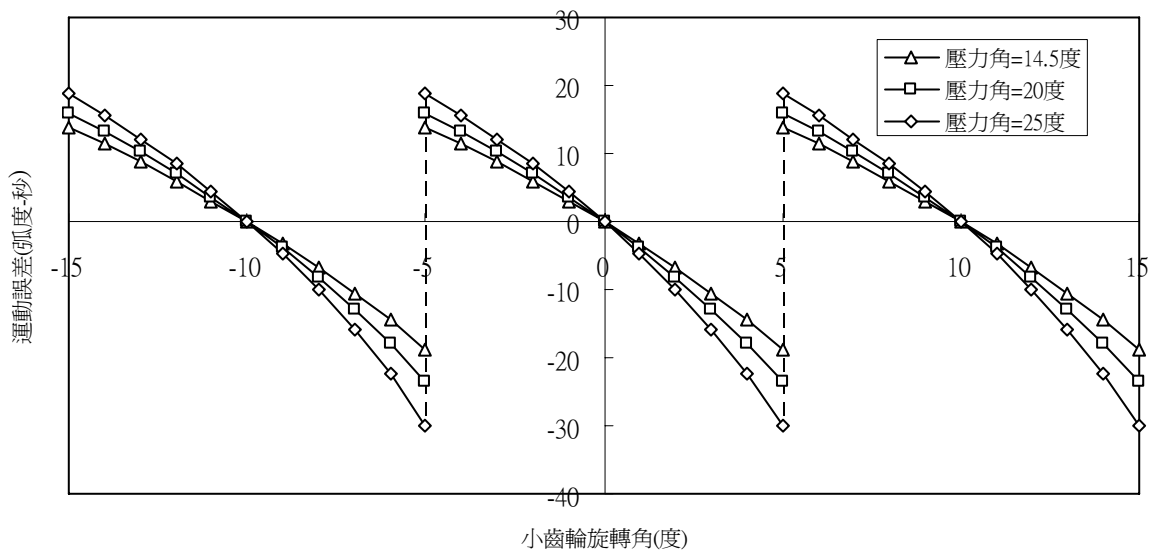


圖 4.5 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有中心距、水平及垂直
 軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果

表 4.19 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(13)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=-0.05\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.499	13.264	13.180	-2.196	-2.098	2.280
-4.000	-2.000	13.768	13.695	-2.041	-2.020	1.683
-3.000	-1.500	14.315	14.251	-1.886	-1.942	1.147
-2.000	-1.000	14.908	14.855	-1.729	-1.864	0.681
-1.000	-0.500	15.553	15.513	-1.572	-1.786	0.294
0.000	0.000	16.259	16.230	-1.414	-1.709	0.000
1.000	0.500	17.032	17.016	-1.257	-1.631	-0.188
2.000	1.000	17.884	17.881	-1.099	-1.554	-0.254
3.000	1.500	18.826	18.837	-0.941	-1.478	-0.176
4.000	2.000	19.871	19.897	-0.783	-1.403	0.069
5.000	2.500	21.038	21.080	-0.626	-1.329	0.512

表 4.20 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(14)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=-0.05\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	18.189	18.187	-1.027	-1.510	-1.345
-4.000	-2.000	18.893	18.899	-0.909	-1.452	-1.288
-3.000	-1.500	19.652	19.666	-0.791	-1.395	-1.138
-2.000	-1.000	20.474	20.497	-0.674	-1.338	-0.882
-1.000	-0.500	21.366	21.397	-0.558	-1.282	-0.509
0.000	0.000	22.336	22.377	-0.442	-1.227	0.000
1.000	0.500	23.395	23.446	-0.327	-1.173	0.663
2.000	1.000	24.555	24.616	-0.213	-1.120	1.503
3.000	1.501	25.829	25.902	-0.100	-1.069	2.550
4.000	2.001	27.235	27.319	0.011	-1.020	3.837
5.000	2.502	28.791	28.887	0.120	-0.972	5.408

表 4.21 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(15)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=-0.05\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.5^\circ$ 、 $\Delta V=2.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.501	22.730	22.765	-0.371	-1.179	-4.250
-4.000	-2.001	23.609	23.651	-0.276	-1.134	-3.678
-3.000	-1.501	24.554	24.603	-0.183	-1.090	-2.984
-2.000	-1.001	25.574	25.631	-0.090	-1.047	-2.152
-1.000	-0.500	26.677	26.742	0.002	-1.005	-1.165
0.000	0.000	27.873	27.946	0.093	-0.964	0.000
1.000	0.500	29.172	29.254	0.182	-0.924	1.368
2.000	1.001	30.588	30.678	0.270	-0.886	2.972
3.000	1.501	32.133	32.234	0.356	-0.850	4.851
4.000	2.002	33.825	33.937	0.441	-0.815	7.054
5.000	2.503	35.683	35.806	0.524	-0.782	9.644

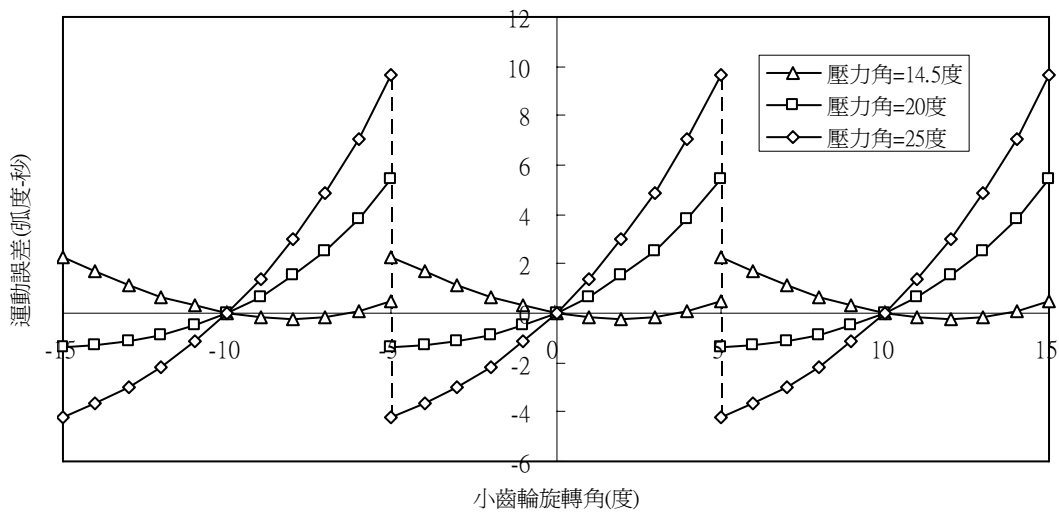


圖 4.6 凸狀球形齒輪 A 與凹狀球形齒輪 B 在具有較小之中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果

例題 4 兩個凸狀球形齒輪組在具有中心距、垂直軸向及水平軸向之裝配誤差狀態下嚙合

本例題將依據表 4.22 所列之兩凸狀球形齒輪之設計參數，探討不同壓力角球形齒輪在具有中心距組裝誤差、水平軸向組裝誤差及垂直軸向組裝誤差及混合組裝誤差各種狀態下嚙合，對齒輪組之運動誤差的影響。

表 4.22 兩個凸狀球形齒輪之主要設計參數

設計參數 \ 齒輪形狀	凸狀球形齒輪 A			凸狀球形齒輪 C		
模數 m_n (mm/tooth)	4			4		
壓力角 α_n (度)	14.5	20	25	14.5	20	25
齒數 T_i	36			72		
節圓半徑 r_i (mm)	72			144		

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 在具有水平軸向組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.23 至 4.25 及圖 4.7 所示。由分析之結果顯示，此對球形齒輪之齒面其接觸位置將會偏離齒寬之中央截面處，亦即 $\psi_1 \neq \psi_2 \neq 0$ 度。當凸狀球形齒輪組只具有水平組裝誤差時，其齒面接觸位置將會是在兩嚙合齒面的同一側，亦即 ψ_1 和 ψ_2 會同為正值或同時為負值，此現象與凸狀及凹狀球形齒輪配對時相反。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 在具有垂直軸向組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.26 至 4.28 及圖 4.8 所示。由分析之結果顯示，兩凸狀配對之球形齒輪組在垂直軸向組裝誤差時，其齒面接觸位置並未從兩嚙合齒面的同一側變換到另一側，而且齒輪壓力角大

小對於垂直軸向組裝誤差所造成的運度誤差較不敏感，同時兩凸狀配對之球形齒輪對於垂直軸向組裝誤差所造成的運度誤差也較小。

不同壓力角之凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 在具有中心距、水平及垂直軸向組裝誤差狀態下配對嚙合，其接觸分析結果如表 4.29 至 4.31 及圖 4.9 所示。由分析之結果顯示，由於兩凸狀配對的球形齒輪對在具有中心距組裝誤差、水平組裝誤差及垂直組裝誤差的交互影響下，齒輪組對於壓力角大小的敏感度變化較明顯，當壓力角較小的情況下，齒輪組的運動誤差明顯的降低。

表 4.23 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(1)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.502	13.153	13.093	1.436	0.707	-6.442
-4.000	-2.001	13.664	13.607	1.377	0.682	-5.155
-3.000	-1.501	14.217	14.162	1.319	0.657	-3.867
-2.000	-1.001	14.815	14.763	1.260	0.632	-2.579
-1.000	-0.500	15.466	15.415	1.202	0.607	-1.290
0.000	0.000	16.174	16.126	1.144	0.582	0.000
1.000	0.500	16.950	16.904	1.085	0.557	1.290
2.000	1.001	17.801	17.758	1.027	0.531	2.581
3.000	1.501	18.740	18.699	0.969	0.506	3.873
4.000	2.001	19.780	19.741	0.911	0.481	5.165
5.000	2.502	20.937	20.901	0.852	0.455	6.457

表 4.24 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(2)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.501	18.135	18.104	1.025	0.503	-4.705
-4.000	-2.001	18.839	18.809	0.981	0.485	-3.764
-3.000	-1.501	19.597	19.569	0.938	0.467	-2.824
-2.000	-1.001	20.417	20.390	0.895	0.449	-1.883
-1.000	-0.500	21.305	21.279	0.851	0.431	-0.942
0.000	0.000	22.270	22.245	0.808	0.413	0.000
1.000	0.500	23.322	23.298	0.765	0.395	0.942
2.000	1.001	24.471	24.449	0.722	0.377	1.884
3.000	1.501	25.733	25.712	0.679	0.359	2.827
4.000	2.001	27.121	27.101	0.636	0.341	3.770
5.000	2.501	28.655	28.636	0.593	0.323	4.715

表 4.25 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(3)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.0^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.501	22.684	22.664	0.804	0.393	-3.798
-4.000	-2.001	23.558	23.539	0.768	0.379	-3.039
-3.000	-1.501	24.499	24.481	0.733	0.365	-2.280
-2.000	-1.000	25.512	25.495	0.697	0.351	-1.520
-1.000	-0.500	26.607	26.591	0.662	0.336	-0.760
0.000	0.000	27.793	27.777	0.627	0.322	0.000
1.000	0.500	29.079	29.064	0.592	0.308	0.761
2.000	1.000	30.479	30.465	0.557	0.293	1.522
3.000	1.501	32.005	31.992	0.522	0.279	2.284
4.000	2.001	33.674	33.662	0.487	0.264	3.047
5.000	2.501	35.503	35.492	0.452	0.249	3.810

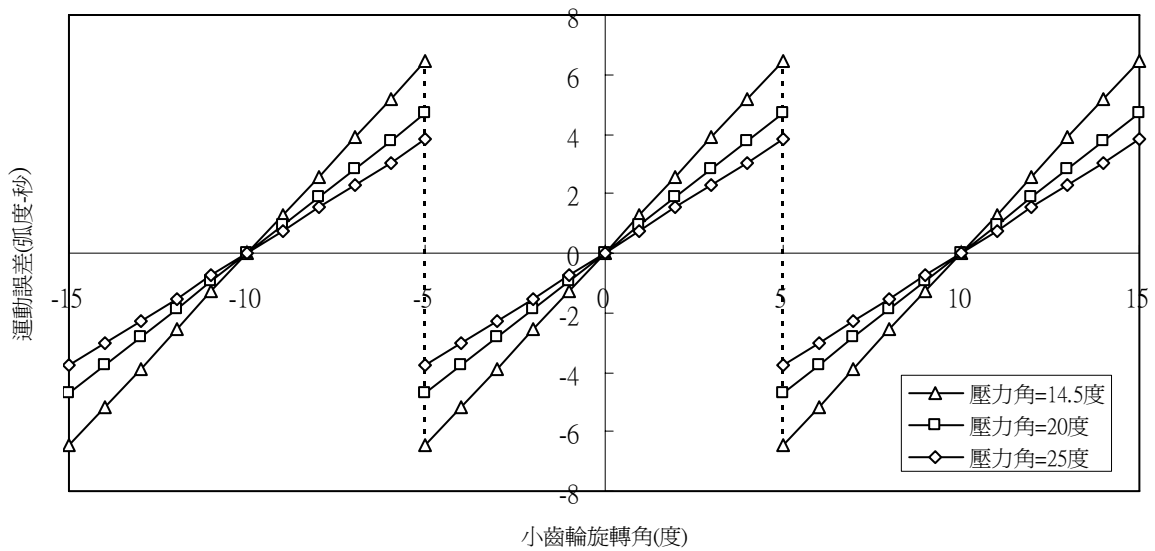


圖 4.7 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有水平軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果



表 4.26 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果 (4)

組裝狀態: 壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ 、 $\Delta h=0.0^\circ$ 、 $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	13.135	13.122	-0.168	-0.332	0.614
-4.000	-2.000	13.649	13.635	-0.168	-0.332	0.512
-3.000	-1.500	14.204	14.189	-0.167	-0.333	0.401
-2.000	-1.000	14.804	14.789	-0.166	-0.334	0.279
-1.000	-0.500	15.456	15.441	-0.166	-0.334	0.146
0.000	0.000	16.167	16.151	-0.165	-0.335	0.000
1.000	0.500	16.944	16.927	-0.164	-0.336	-0.162
2.000	1.000	17.798	17.780	-0.163	-0.337	-0.342
3.000	1.500	18.738	18.719	-0.162	-0.338	-0.543
4.000	2.000	19.779	19.759	-0.161	-0.339	-0.769
5.000	2.500	20.937	20.915	-0.159	-0.341	-1.025

表 4.27 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(5)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	18.130	18.116	-0.169	-0.331	0.900
-4.000	-2.000	18.834	18.820	-0.168	-0.332	0.752
-3.000	-1.500	19.593	19.579	-0.167	-0.333	0.589
-2.000	-1.000	20.414	20.398	-0.166	-0.334	0.411
-1.000	-0.500	21.302	21.286	-0.165	-0.335	0.216
0.000	0.000	22.267	22.251	-0.164	-0.336	0.000
1.000	0.500	23.319	23.302	-0.163	-0.337	-0.240
2.000	1.000	24.469	24.450	-0.162	-0.338	-0.507
3.000	1.500	25.730	25.710	-0.160	-0.340	-0.807
4.000	2.000	27.117	27.096	-0.159	-0.341	-1.147
5.000	2.500	28.649	28.626	-0.157	-0.343	-1.534

表 4.28 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(6)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.0\text{mm}$ ， $\Delta h=0.0^\circ$ ， $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.500	22.681	22.667	-0.169	-0.331	1.205
-4.000	-2.000	23.555	23.541	-0.168	-0.332	1.007
-3.000	-1.500	24.496	24.481	-0.167	-0.333	0.791
-2.000	-1.000	25.509	25.494	-0.166	-0.334	0.553
-1.000	-0.500	26.604	26.587	-0.165	-0.335	0.291
0.000	0.000	27.789	27.771	-0.164	-0.336	0.000
1.000	0.500	29.074	29.056	-0.162	-0.338	-0.324
2.000	1.000	30.473	30.453	-0.161	-0.339	-0.688
3.000	1.500	31.997	31.976	-0.159	-0.341	-1.098
4.000	2.000	33.664	33.641	-0.158	-0.342	-1.565
5.000	2.499	35.489	35.465	-0.156	-0.344	-2.100

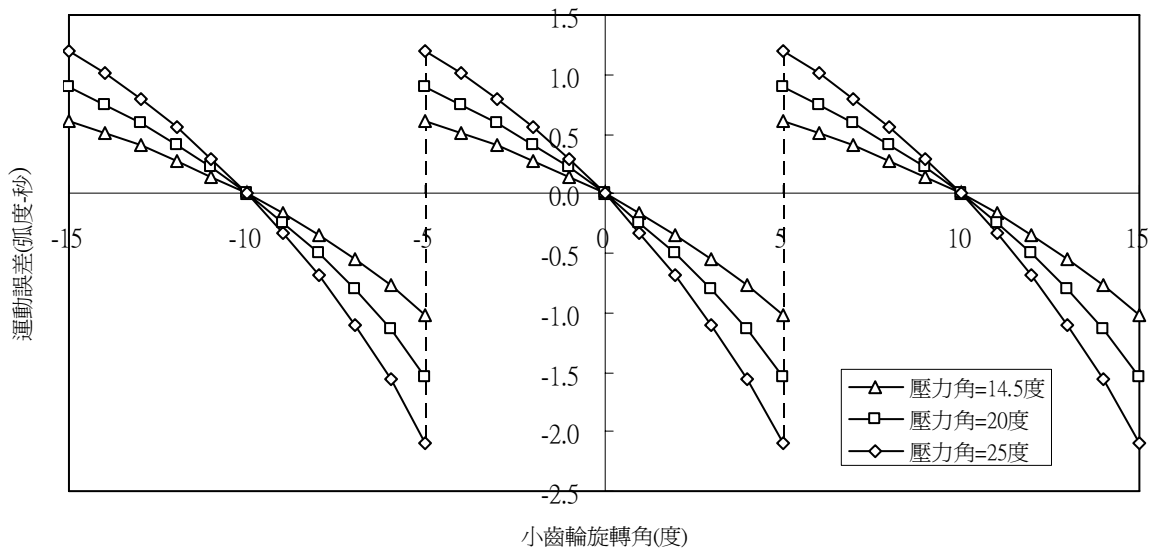


圖 4.8 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果



表 4.29 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(7)

組裝狀態:壓力角=14.5°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.499	13.152	12.958	1.270	0.377	2.109
-4.000	-1.999	13.660	13.461	1.212	0.351	1.961
-3.000	-1.500	14.208	14.003	1.155	0.326	1.694
-2.000	-1.000	14.801	14.589	1.098	0.301	1.291
-1.000	-0.500	15.444	15.224	1.041	0.275	0.734
0.000	0.000	16.144	15.916	0.984	0.249	0.000
1.000	0.500	16.908	16.670	0.927	0.224	-0.937
2.000	0.999	17.745	17.497	0.871	0.198	-2.110
3.000	1.499	18.666	18.406	0.814	0.172	-3.559
4.000	1.999	19.683	19.408	0.758	0.146	-5.332
5.000	2.498	20.811	20.520	0.702	0.119	-7.490

表 4.30 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(8)

組裝狀態:壓力角=20.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.498	18.114	17.928	0.859	0.173	7.681
-4.000	-1.998	18.811	18.618	0.817	0.155	6.556
-3.000	-1.499	19.561	19.361	0.775	0.136	5.251
-2.000	-0.999	20.370	20.162	0.732	0.118	3.744
-1.000	-0.499	21.246	21.028	0.691	0.099	2.005
0.000	0.000	22.196	21.968	0.649	0.080	0.000
1.000	0.499	23.229	22.990	0.607	0.061	-2.312
2.000	0.999	24.356	24.104	0.566	0.042	-4.983
3.000	1.498	25.590	25.323	0.525	0.023	-8.074
4.000	1.997	26.943	26.660	0.484	0.004	-11.663
5.000	2.496	28.432	28.131	0.443	-0.016	-15.846

表 4.31 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果(9)

組裝狀態:壓力角=25.0°、 $\Delta C=0.1\text{mm}$ ， $\Delta h=0.5^\circ$ ， $\Delta V=0.5^\circ$						
ϕ_1' (deg.)	ϕ_2' (deg.)	$\theta^{(F)}$ (deg.)	$\theta^{(P)}$ (deg.)	ψ_1 (deg.)	ψ_2 (deg.)	KE (arc-sec.)
-5.000	-2.496	22.640	22.451	0.638	0.064	12.663
-4.000	-1.997	23.504	23.308	0.603	0.049	10.695
-3.000	-1.498	24.433	24.227	0.569	0.034	8.482
-2.000	-0.998	25.432	25.217	0.535	0.019	5.991
-1.000	-0.499	26.509	26.284	0.501	0.004	3.180
0.000	0.000	27.674	27.437	0.468	-0.012	0.000
1.000	0.499	28.935	28.686	0.434	-0.027	-3.609
2.000	0.998	30.305	30.040	0.401	-0.043	-7.720
3.000	1.497	31.794	31.513	0.368	-0.059	-12.426
4.000	1.995	33.417	33.118	0.335	-0.075	-17.839
5.000	2.493	35.189	34.868	0.303	-0.091	-24.107

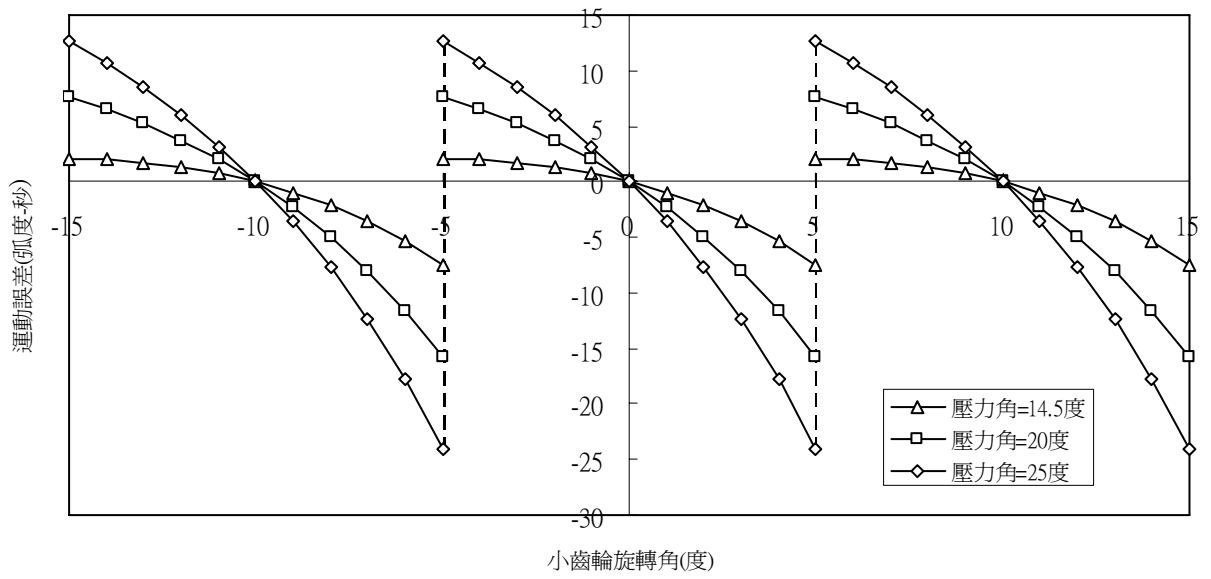


圖 4.9 凸狀球形齒輪 A 與凸狀球形齒輪 C 配對在具有中心距、水平及垂直軸向裝配誤差狀態下之接觸分析結果



第五章 結論及未來展望

5.1 結論

本論文探討圓弧形滾齒刀創成球形齒輪，也提出以具圓弧形曲線狀齒條刀來模擬創成球形齒輪，並推導其齒面數學模式，同時也針對此球形齒輪進行齒輪之齒面接觸分析與運動誤差分析。經由本研究之各項模擬與分析，茲獲得球形齒輪以下之幾項結論：

1. 依照軌跡法使用具圓弧形剖面之曲線狀齒條刀可創成球形齒輪之齒面，在理論上球形齒輪為一規則之曲面，但其創成之齒面的剖面並非一般之漸開線而是圓弧形。因此，球形齒輪對若具有中心距之組裝誤差在嚙合時將會產生運動誤差。
2. 圓弧形球形齒輪組之接觸為點接觸，同時，在理想組裝狀態下嚙合，其接觸點將落在齒輪齒寬之中央截面上。
3. 凸狀球形齒輪與凹狀球形齒輪配對嚙合時，對於垂直軸向之組裝誤差的容許度較大，此乃因其兩嚙合齒輪之齒面的曲率中心是在齒面共同切平面之同側。而兩凸狀球形齒輪配對嚙合時，雖然其兩嚙合齒面之曲率中心是在齒面共同切平面之兩側，但對於垂直軸向之組裝誤差的容許度也較大，故可接受較大的垂直軸向組裝誤差，此為球形齒輪之特點。
4. 當凸狀球形齒輪配對凹狀球形齒輪嚙合時，凹狀球形齒輪之球形半徑一定要小於凸狀球形齒輪之球形半徑，否則兩齒面會互相干涉。
5. 凸狀球形齒輪與凹狀球形齒輪配對嚙合時，中心距組裝誤差對於齒輪組的運動誤差影響很大，若能將中心距在組裝時，在不造成齒輪干涉的情況下，可設定為微量之減少，則齒輪組之運動誤差可修正在較小的範圍內。

5.2 未來展望

本論文已探討圓弧形滾齒刀創成球形齒輪，也提出以具圓弧形曲線狀齒條刀來模擬創成球形齒輪，並推導其齒面數學模式，同時也針對此球形齒輪進行齒輪之齒面接觸分析與運動誤差分析，未來仍可對此型球形齒輪進行下列的分析與研究。

1. 球形齒輪接觸分析，探討接觸齒印之大小與位置。以便找尋最佳之接觸齒印的齒條刀參數。
2. 實際創成球形齒輪並進行實驗驗證，以驗證球形齒輪根據理論所創成的理想齒形與實際齒形的差異。



參考文獻

- [1] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C., 1989.
- [2] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [3] Litvin, F.L. and A.Fuentes, Gear Geometry and Applied Theory, Second Edition, Cambridge University Press, 2004.
- [4] 蔡忠杓，陳炤彰，陶恕，鄧武宗，馮展華，「漸開線螺旋齒輪數學模式之推導」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月。
- [5] 蔡忠杓，馮展華，鄧武宗，陳炤彰，陶恕，「漸開線形螺旋齒輪之電腦輔助模擬接觸分析」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月。
- [6] 楊義雄譯(山崎隆原著)，「改變齒形並具特色之圓錐形齒輪及球形齒輪」，機械月刊，民國八十年七月。
- [7] 山崎隆，「改變齒形並具特色之圓錐形齒輪及球形齒輪」，機械設計(日本)，第34卷第13期，53~60頁，1990年10月。
- [8] Yang, S. C. , "Mathematical Model of a Ring-Involutes-Teeth Spherical Gear with a Double-Degree of Freedom" , Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol.20, 2002, pp.865-870.
- [9] Yang, S. C. , "A geometric model of a spherical gear with a double-degree of freedom" , Journal of Material Processing Technology, Vol.123, 2002, pp.219-224.

- [10] 張信良，「電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬」，國立交通大學機械工程學系，博士論文，1996年6月。
- [11] 趙立碁，「球形齒輪之數學模式及接觸分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，2005年6月。

