

## 第二章 文獻探討

本章主要內容在討論國內外對傳統實體教具(physical manipulatives)、虛擬教具(virtual manipulatives)的相關研究，以及探索目前網際網路上虛擬教具發展的狀況，更實地分析現行各出版商所編製的數學教科書中所使用的教具類別，作為研究的理論基礎。

### 第一節 傳統實體教具 (Physical manipulatives)

什麼是傳統實體教具？傳統實體教具是可以被拿起、旋轉、重新排列也可以被收集的真實物件(Perl, 1990)。傳統實體教具有操作簡便的特性，長久以來一直是小學教師用來輔助教學的重要工具。這些實體工具允許教師和學生自由的放置、旋轉或視需要來重新排列，幫助學生藉由具體物的操作來了解抽象性的概念。有些時候，教具還可以有效的提升學生的學習興趣，使得學習的過程更加專注。

傳統的實體教具可以分為兩大類：平面的和立體的；它們都是實體的物件，看得到也觸摸得到。

平面的教具常見的有：圖卡、字卡、圖表等等。這一類的教具對低年級的學生特別有用，尤其是數學啓蒙階段，教師需要一連串的鋪陳數與量的概念，給學生許許多多情境式的例題，讓學生透過圖片圖卡的計數來建構數與量的概念。例如：教師無法實際拿出 10 部大卡車，因此大多以卡車的圖卡來呈現這個命題。每一位任教於小學低年級的老師幾乎都收藏了數量可觀的平面圖卡。

立體的教具種類更多，常用於數學課的有方瓦、古氏積木、花片、各種立體的模型、數版、釘版，大型的三角版、圓規等等。這一類的教具提供學生更多樣的操作性，不但可以排列，還可以旋轉、堆疊等，可以幫助學生學習更複雜的概念。例如教授“長方體的體積=長 $\times$ 寬 $\times$ 高”時，教師往往指引學生堆疊立體的古氏積木，讓學生探究、發現長方體總體積和長、寬、高之間的關係。

傳統實體教具已經被證實對教師教學是有正面幫助的。Parham (1983)曾經對 64 個學生的成就測驗做過小型的統計研究，發現使用教具學習的學生她們的成就測驗分數顯著高於沒有使用教具的學生。Suydam 和 Higgins 在 1977 年重新對教具的使用與否再一次研究，判定適當的使用教具確實比不使用教具更可以提高學生在數學方面的學習成就。然而也有研究發現：傳統教具必須使用得當，才能有效幫助學習。Reys (1974)建議使用教具時只要指引學生方向，而不應直接告訴學生該如何操作；應允許學生試誤並鼓舞學生自己思考，而不應勉強學生倉卒作出抽象的陳述。

雖然傳統實體教具被證實在正確的使用下可以有效的幫助教學，但也伴隨著一些問題。Toney (1968)發現孩童在自己使用教具時，多半是進行與實際學習工作(task)無關的遊戲。換句話說，如果沒有教師的有效引導，教具通常會變成玩具。Char (1989)指出不同的學生需要不同的幫助(鷹架)，單一類型的教具無法適用於每一個小孩。因此除了教具本身的好壞之外，更需要教師的專業能力(選擇教具的能力與引導教學的能力)才能提升教具的實質效益。此外，以研究者在學校服務的經驗，一般老師面臨的共同困境是：現有的教具資源太少、無法取得真正想用的教具，以及使用教具教學所產生的班級秩序管理問題、教具收納問題等等，都有待克服。

## 第二節 虛擬教具 (Virtual manipulatives)

近年來電腦軟體技術日新月異，動態影像的顯示技術也大幅提升，加上網際網路的普及，使得許多數學教師開始嘗試著使用新的科技來幫助數學教學，於是有了虛擬教具的產生。虛擬教具可以看作是一套電腦軟體(程式)，用來呈現許多傳統教具可以呈現甚至無法呈現的概念，藉以幫助學生建構數學的抽象概念的學習工具。虛擬教具是利用電腦技術產生的數位影像，看得到但無法實際觸摸，不過實際運用時卻比可觸摸的實體教具來得更有彈性。

Spicer (2000)將網際網路上的虛擬教具分為兩大類：一類是靜態的虛擬教具(static visual representations of concrete manipulatives)；另一類是動態的虛擬教具(dynamic visual representations of concrete manipulatives)。靜態的虛擬教具實質上就是將傳統的圖像投射在投影布幕，或是繪製於黑板，學生可以移動、翻轉、旋轉真正的教具，然而卻無法對靜態的虛擬影像進行操作，因此 Moyer (2002)認為靜態的虛擬圖像並非真正的虛擬教具。動態的虛擬教具實質上是一個物體(object)，它是藉由電腦軟體技術所繪製出來的立體影像。我們可以透過鍵盤、滑鼠，對它像對實體教具一般進行移動、翻轉、旋轉等操作，甚至於實體教具無法複製、放大、縮小等限制，虛擬教具都可以辦到。

Izydorczak (2003) 整理出虛擬教具的八大優點：

1. 虛擬教具可以監控學習活動。
2. 虛擬教具比實體教具更有擴張性。例如虛擬教具可以表現比 1/100 更細微的分數概念，而實體教具則受限於物理的特性，無法隨需要而轉變。
3. 虛擬教具能呈現出比實體教具更細微的概念。例如 Hands-On Math 網站中所呈現的位值概念，當由 10 個 1 的積木轉換為 1 個 10 的大積木時，會讓學生留下非常深刻的印象。

4. 虛擬教具比實體教具更易於操作。例如學生操作拼圖或七巧板時，往往因疏忽而破壞已經完成的部分成果，但是當學生使用虛擬教具時，它可以拼得更好、更精準(透過軟體設計)，而且不會因為不小心而弄亂已經完成的部分，因此可以更專心的進行所需要的操弄。
5. 虛擬教具比實體教具更適合用於大團體的教學。實體教具有一定的大小，在大團體中往往讓距離遠的學生看不清楚。虛擬教具可以透過投影機投射於大尺寸的畫面，甚至同時使用多個螢幕，非常適合大團體的教學。
6. 有些虛擬教具透過輔助說明的連結，可以更清楚的表徵數學符號和程序。
7. 購買實體教具往往有經費的限制，而虛擬教具可以解決經費不足的問題。軟體只要一份，就可以提供多人同時使用，而且目前這些虛擬教具多半是免費使用的。
8. 虛擬教具比傳統的實體教具所產生的班級管理問題較少。

虛擬教具雖然有眾多的優點，但到目前為止，教室中使用虛擬教具的教學研究仍十分有限，一個可能的原因是教師欠缺使用虛擬教具從事數學教學的知能 (Reimer & Moyer, 2005)。最近兩篇研究報告的出現，為使用虛擬教具學習數學提供了一些實證研究結果。



Moyer, Niezgodna & Stanley(2005)以兩個行動研究探討使用虛擬教具學習數學的效果。其一是探討幼稚園兒童的類型製造活動，研究對象為 18 位上全日班的幼稚園兒童，其中 12 位在家中說其它語言，且多數兒童分屬不同的種族文化。研究的時程為三天，其中第一天使用具體教具，第二天用虛擬教具，第三天用紙筆畫出類型。研究者將類型的創作區分為重覆型(A B A B . . .)及成長型(A, A B, A B C, . . . . .)，研究目的在了解三種不同的表徵方式(類型積木、虛擬教具及紙筆)的使用如何影響學生類型創作的變化性及複雜性。研究結果顯示兒童多數產生的類型為 AB、ABB、ABC 及 ABCD 等重覆型類型，且三天中每個兒童產生類型的變化不大。在創作的類型數方面，第一天平均為 2.7 個，第二天平均為 3.5 個，第三天平均為 2.7 個；每個類型使用不同的積木數則為第一天的平均 2.9 個，第二天的平均 3.3 個及第三天的平均 2.8 個。這個研究結果顯示，使用虛擬教具時，兒童表現出較多的創作類型，且每個類型所使用的積木數也較多，因此全部使用的積木數也較多。五位研究觀察者也注意到，使用虛擬教具時兒童創作出的類型較多元及有變化，例如：在觀察的幾個特殊的類型中(疊積木、創作新形狀、上下類型、拼圖類型、成長類型)，三天出現的次數分別是第一天的 14 人次，第二天的 24 人次及第三天的 4 人次。因此這個行動研究肯定使用虛擬教具確能提供兒童創作類型的學習機會。

Moyer 等人的另一個研究則是探討二年級兒童使用虛擬十進位積木的成效。這個行動研究的研究對象為 19 位二年級兒童，其中 15 位在家中說其它語言，且多數兒童分屬不同的種族文化。研究的時程為兩天，第一天使用虛擬教具，第二天用紙筆畫出解題結果。其研究的主要目的是了解使用虛擬教具後，兒童如何表示及說明其解決問題的過程，特別是兒童如何解釋 10 個 1 變成 1 個 10 的過程。研究過程中，他們發現兒童確實能透過虛擬教具的視覺印象掌握十位數及個位數的位值概念，兒童在使用虛擬教具後的解題策略也趨向一致(多為利用位值及算式)，原在第一天所使用的數數方法已不覆見。

在這兩個行動研究中，兩位老師都在使用虛擬教具前，先使用具體教具進行教學概念，虛擬教具在教學過程中扮演表徵抽象概念的三種表徵(具體物、圖形及符號)的橋樑，尤其這兩個研究發現，對以學習英語為第二外語的兒童而言，虛擬教具提供其表達概念了解及學習的機會。

Reimer 及 Moyer(2005)研究使用虛擬教具教學，以了解 19 位三年級學生學習分數概念的效果。在兩個星期中使用虛擬教具學習分數單元，研究者收集學生在實驗教學前後的概念知識、程序計算技能，並以面談及態度問卷調查學生的反應。研究結果顯示，學生在實驗教學後的概念知識測驗結果顯著高於實驗教學前的施測結果( $t=2.05, * p<.05$ )，但在程序計算技能測驗方面的表現則未有顯著的差異，研究者認為這可能和前測時，學生的測驗表現即很高分有關。實驗教學後，學生的概念知識成績及程序計算技能成績有很顯著的相關。面談及態度問卷調查結果顯示，學生認為使用虛擬教具(1)可提供其立即的回饋，故可以習得更多的分數概念；(2)比使用紙筆更快且容易；(3)可使學生更喜歡學習數學。

但上述這些研究結果可能會存在一些偏見，主要是因為這個實驗教學的老師有豐富的經驗並有信心使用這些教具，因此這些研究結果只能反應在該情形下。

此外，有一些研究認為使用虛擬教具的教學效果並不一定比傳統的實體教具好。Nute (1997)曾經對 241 個四、五、六年級學生學習圖形(shapes)的課程做過研究，他將學生分為七組，其中三組可以觀看實體教具、虛擬教具以及觀看兩種教具；另外三組可以操作實體教具、虛擬教具以及操作兩種型態的教具，最後一組為控制組，經過 20 分鐘的課程之後，以 ANOVA 變異數分析，並未發現各組有何不同。Drickey (2000) 對三個六年級的班級進行另一項空間推理的教學研究。一個班使用實體教具教學，一個班使用「虛擬教具圖書館」(National Library of Virtual Manipulatives, NLVM)網站開發的虛擬教具；另一個班級僅採用傳統的講述教學，課程結束經比對先後測之後，發現三組並沒有顯著的差異。

換個角度來看，Oison (1988) 研究發現結合實體教具與虛擬教具(同時使用)的組別在問題解學的課程上比只用單一類別教具的組別表現得更為卓越。至此研究者得到一個初步的結論：虛擬教具擁有許多優點，但是不會完全取代實體教具，而是提供教師更多元的選擇來因應多元的學生個體。

### 第三節 虛擬教具發展現況

虛擬教具是個人電腦和網際網路普及之後才開始發展的新型態教具，隨著 World Wide Web 蓬勃發展，我們可以在網路上找到許多國內外研究單位或個人開發的虛擬教具，他們將這些教具放在網站裡面，分享給想利用的人。有些使用者會提供改進的意見，讓研發人員有機會修正原先的錯誤或改進概念呈現的方式，也使得這些教具愈來愈完善。以下將列舉一些網路上較具代表性的網站，由這些站台提供的虛擬教具，我們可以對虛擬教具的發展現況有更深一層的了解。

#### 1. 國外網站：

(1). [www.visualfractions.com](http://www.visualfractions.com)

這個站台專注於分數概念的呈現，從認識分數(透過數線或等分圓)、等值分數、比較分數大小到分數的四則運算等，都有相關的練習工具，適合小學中高年級的學生。運用的技術是 Java Applet，不過此站台的互動性並不高，只能以鍵盤輸入來核對使用者的認知是否正確。

(2). [www.netrover.com/~kingskid/](http://www.netrover.com/~kingskid/) (Room 108)

這是一個商業網站，設有 Teacher Store 販售教學相關的書籍、工具，同時中也免費提供許多互動的虛擬教具供教師、學童使用。其中和數學學習相關的部分頗多，內容包含奇偶數的認識、加減法、認識時鐘等等，適合國小低、中年級的數學教學。不過此站台並未對數學概念作有系統的分類，因此內容顯得雜亂而缺乏系統。運用的技術除了 Java Applet 之外，有一少部分是用 Flash 開發的教具。本站已經有一些元件可以拖曳、移動，具有簡單的操作功能。

(3). [www.ies.co.jp/math/java/index.html](http://www.ies.co.jp/math/java/index.html)

日本 IES (International Education Software) 公司於 1996 年由三位數學教育工作者所建立，主要業務為開發教育軟體。網站上使用 Java Applet 開發數百個用互動式教學工具，內容涵蓋微積分、三角學、線性變換和複數等等，適合高等學校以上的學生使用。

(4). [www.frontiernet.net/~imaging/](http://www.frontiernet.net/~imaging/)

Paul Flavin 以 Java Applet 開發一系列的 3D 視覺工具，讓使用者可以任意拖曳翻轉 3D 立體的物件，具有高度的互動性，對於立體幾何、微積分等高階數學的教學提供很好的視覺工具，適合高中大學以上的學生。

(5). [nlvm.usu.edu/en/nav/index.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/index.html)

美國猶他州立大學(Utah State University)所發展的『虛擬教具圖書館』(NLVM)網站，提供許許多多 Java Applet 開發的數學工具。內容分為數與運算、代數、幾何、測量及資料分析與機率等五主題，學習的年級涵蓋幼稚園到 12 年級(國中三年級)，是相當有規模的學習資料庫。此站 2005 年出版虛擬教具 CD，讓教師們可以離線(網路)使用。

(6). [www.nctm.org/standards](http://www.nctm.org/standards)

美國數學教師協會(NCTM)網站，其中 NCTM's Standards 的 Electronic Examples 提供了精采的 Java Applet 教具。除了和上項 NLVM 劃分的五大主題之外，還增加了問題解決、證明、連結和表徵(representation)等，內容更為多元。本站也同樣提供適合幼稚園到 12 年級的虛擬工具。去年開始本站必須付費才能使用，但全球的數學教師可以註冊成為臨時會員，享有 90 天的免費鑑賞期。

2. 國內網站：

(1). [www.mathland.idv.tw](http://www.mathland.idv.tw) 昌爸工作坊

李信昌老師的個人網站，數學相關的教學資源豐富，內容包含數學故事、數學遊戲、生活中的數學、數學試題、數學討論等等，還提供一部分幾何繪圖板(Geometer's Sketchpad, GSP)以及 Flash 製作的教學工具，GSP 部分多為圖說證明，互動性較為不足。李老師是國中教師，因此本站的數學資源即是以國中的數學課程內容為主軸。

(2). [yll.loxa.edu.tw/](http://yll.loxa.edu.tw/) 李映良的GSP專題網站

李映良老師的個人網站，提供相當完整的 GSP 教學及李老師的個人作品，內容偏重於國中幾何及碎形的研究。李老師對 GSP 的研究非常經熟，有相當多精采的範例。此外本站的數學討論區功能強大，使用者可以在線上輸入方程式或以 Flash 的塗鴉板表達自己的想法，透過網路和其他人討論數學。

(3). [easytry.tyc.edu.tw/homepage.php?id=2644](http://easytry.tyc.edu.tw/homepage.php?id=2644) 國中集合達人

邢維禮、高世良兩位老師的著作「國中集合動動動」的網路版本。內容以 GSP 解說國中階段的平面幾何例題證明，使用者被要求一步一步的按照既定的按鈕操作，較缺乏趣味性。

(4). [www.nehs.hc.edu.tw/~ylyen/](http://www.nehs.hc.edu.tw/~ylyen/) 老顏的家

本站主要以 GSP 及 JAVAGSP 設計，探討高中幾何數學，內容包括函數圖形、三角函數圖形、圓錐曲線及動態幾何證明。

(5). [www.math.ntnu.edu.tw/%7Ejcchuan/demo/test.html](http://www.math.ntnu.edu.tw/%7Ejcchuan/demo/test.html)

清華大學全任重教授的課程網站，以 GSP、虛擬實境(Virtual Reality Modeling Language, VRML)、Cabri Java Applets 等軟體為開發工具，探討大學的數學課題，全教授在 Cabri 3D 有獨到的設計能力，將以往難以呈現的立體幾何圖表現得清晰易懂，還可以任意的縮放、翻轉，讓使用者可以從任一個角度看 3D 的物體，突破了以往對立體幾何的教學方式。

(6). [flashmath.idv.st/](http://flashmath.idv.st/) 數學小玩意

李俊儀、黃俊榮兩位老師以 Flash 為開發工具，設計了許多有趣的數學遊戲及虛擬教具，內容包括算術、代數、幾何、座標幾何、幾何作圖等國中小範疇的虛擬工具，是少數提供適用於較低年級數學教學的優質網站。

以上僅列出國內比較符合VM精神的站台，其他諸如：單維彰、許志農、陳創義、游森棚等教授的網站都非常精采，但都以大學高等數學為取向，與本研究較無相關，在此不一一介紹。

綜觀而言，國外相當重視虛擬教具的開發，有大學、教師協會等大型學術單位全力發展以及專業的設計人員(包含教師)，因此架構完整，內容豐富。支援的課程涵蓋幼稚園到 12 年級，重視基礎教育，而且每一個虛擬教具都提供說明文件及教學指導，數學教師相當容易學習並且實際運用於教學。反觀國內對虛擬教具的研究以單打獨鬥者(在職教師)為主，缺少系統性的開發計畫；課程內容以國高中階段居多，而且大都偏重在以 GSP 為主的幾何數學，對於國小階段基礎教育的關注程度遠遠落後於國外。希望國內也能有大型的學術機構投入研發，相信對國內的數學教育會有實質的幫助。



#### 第四節 現行教科書的教具使用分析

現行九年一貫課程綱要實施要點中明定：「能力指標的訂定，以該階段或分年結束時，學生應具備的數學能力為考量。教師應依據能力指標及其詮釋，規劃課程、教案或依照教科書進行教學。」同時對教科書的編撰提出三個要點：

1. 教科書的編寫，應配合課程綱要之基本理念、課程目標與能力指標，以協助教師教學、家長輔導與學生（較高年級）自學為目標。
2. 教科書的編寫，應注意整體結構的有機結合，在題材的呈現上，反映出各數學概念的內在連結。並且也應注意在取材上，能與其他數學主題、日常生活或其他領域的應用，作自然的連結。
3. 教科書的編寫，應注意文字的使用，配合學生的閱讀年齡。

目前坊間各家教科書均以此為規範，編訂符合課程綱要的教材，供國民小學的老師評比後選用。然而依研究者實際參與教科書評選的經驗，教師多半注重書籍印刷、文字內容是否語意清楚，並且關心課程的難易度及出版商所能提供的資源(包含實體教具、評量試題等)，鮮少教師注意到教科書中到底使用到哪些教具以及各個版本之間教具的選用的差異。本研究的目的是在研發輔助國小一、二年級數學教學的虛擬教具，故以目前常用於國小數學教學的教科書對數概念教學所使用的教具類別進行歸納分析，作為研發虛擬教具的參考。研究分析整理如表 1。

表 1 坊間數學教科書教具使用類別

	康軒版	南一版	翰林版	牛頓版	部編版
第一冊 一年級上學期	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 數字卡 撲克牌	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 十格板 心算卡 色球	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 手指頭 新台幣	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 心算卡	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 十格板 新台幣
第二冊 一年級下學期	情境圖 圖卡 花片 平面古氏積木 古氏積木 百數板 位值板 射飛鏢	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 十格板 位值板 百數板 新台幣 心算卡	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 百數板 位值板 數字卡 新台幣	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 位值板 畫記板 新台幣 心算卡 骰子	情境圖 圖卡 古氏積木 位值板 百數板(部分) 畫記板 位值板 新台幣
第三冊 二年級上學期	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 位值板 骰子 撲克牌 新台幣	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 位值板 色紙摺紙	情境圖 圖卡 古氏積木 位值板 新台幣	情境圖 圖卡 花片 古氏積木 位值板 新台幣	圖卡 百數板(部分) 位值板 古氏積木 乘法表
第四冊 二年級下學期	* 情境圖 圖卡 花片 平面古氏積木 古氏積木 乘法板 位值板 新台幣	* 情境圖 圖卡 位值板 古氏積木 花片 心算卡 新台幣 乘法表	* 情境圖 圖卡 平面古氏積木 乘法表	**	**

\* 為依照 89 暫行綱要編定的課本。

\*\* 牛頓版及部編版(國立教育研究院編)依照 92 年正式綱要編訂，目前尚無第四冊教科書。



雖然各家教科書在內容編排，單元設計雖然各有特色，但是在教具選用上大同小異，不外乎下列幾種：

1. 情境圖：以大幅圖畫供學生在圖畫中計數各樣人物或是配合情境佈題(如菜市場)，提升學生解題的樂趣。
2. 圖卡：使用最多的教具。包含食物、飲料、文具、花草樹木、人物等等，和學生的生活經驗貼近。圖卡大都用來呈現數量。
3. 花片：解說計算時使用。
4. 古氏積木(數棒)：加減法計算時幾乎都用來幫助學生計數，或呈現進退位的概念。有時也使用平面式的古氏積木，很容易比較出數的大小。
5. 位值版：介紹位值概念、加減計算時必定使用的教具。
6. 百數版：認識 100 以內的數及倍數時，經常用到的教具。有時百格並用，有時只取其中一部分，例如 1 至 80 或 50 至 100 的格版。
7. 新台幣：這是課程綱要中指定一定要認識的錢幣。
8. 心算卡：讓學生精熟計算的練習工具。
9. 乘法表：學生學會乘法是累加的概念之後，加快背誦九九乘法的表列工具。有時單一出現(如 3 的乘法)，有時列出完整的九九乘法表。

Moyer (2002)認為真正的虛擬教具有：改變的可能性(Potential for alteration)、表徵間的連結(Link symbolic and iconic notation)、無限提供(Unlimited materials)以及清除容易(Easy clean up)等四個特性。本研究研發的虛擬教具「萬用揭示版」所提供的教具元件即是以當前教科書中最常使用的實體教具為藍本，加以數位化、元件化，使這些虛擬教具元件不但保有實體教具的效能，甚至超越實體教具的限制，呈現出更清楚的數學概念。例如實體的十格版是無法移動格子中的點，轉變成虛擬教具之後，每一個點都可以自由搬移(改變的可能性)，可以傳神的表達「減」的概念(表徵間的連結)。又例如傳統的百數版不僅體積龐大不易保存，重複繪製也要花費許多時間；虛擬教具中的百數版不但不佔空間，使用時還可以自由調整數板的大小和上面的數字，更可以無限制的取用多個數板(無限提供)，分別作不同的設定來配合教學，不用時立即丟棄也不心疼(清除容易)。

本章對傳統實體教具、虛擬教具的相關研究、網際網路上虛擬教具發展的狀況，以及各家數學教科書(國小一、二年級)所使用的教具類別作一番探討，作為研發萬用揭示板的理論基礎。