

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

使用平面加速規及磁場感測器之姿態估測器

Orientation Estimation Using

Coplanar Accelerometers and Magnetic Sensors

研究生：高忠福

指導教授：陳宗麟 教授

中華民國九十五年七月

使用平面加速規及磁場感測器之姿態估測器

Orientation Estimation Using  
Coplanar Accelerometers and Magnetic Sensors

研究生：高忠福

Student: Chung-Fu Kao

指導教授：陳宗麟 博士

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen



A thesis  
Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Mechanical Engineering  
July 2006  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年七月

# 國立交通大學

## 論文口試委員會審定書

本校 機械工程 學系碩士班 高忠福 君

所提論文(中文) 使用平面加速規及磁場感測器之姿態估測器

(英文) Orientation Estimation Using Coplanar  
Accelerometers and Magnetic Sensors

合於碩士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員：

林清文

傅武雄

指導教授：

傅武雄

系主任：

傅武雄

教授

中華民國 95 年 7 月 26 日

# 使用平面加速規及磁場感測器之姿態估測器

研究生：高忠福

指導教授：陳宗麟 博士

國立交通大學機械工程學系

## 摘要

傳統上主要有以下三種方法獲得物體在 3 維空間的姿態：(1)利用 3 軸陀螺儀量測物體的角速度，經過一次積分可獲得物體姿態角。(2)使用 3 軸加速規及 3 軸磁場感測器，量測物體所受的重力及磁場強度，經由計算可獲得物體的姿態。(3)使用 3 軸陀螺儀、3 軸加速規及 3 軸磁場感測器配合卡爾曼估測理論求得最佳的姿態估測。以上的 3 種方法皆有其優缺點及限制。在方法(1)中，因為經由一次積分運算而造成誤差的累積。在方法(2)中，感測器雜訊會降低或干擾姿態量測的精確度。而方法(3)中，利用估測器計算可獲得比前述(1)(2)法中更精確的姿態，不過卻比方法(2)多裝置 3 軸陀螺儀。

在本論文中，我們提出新式的方法使用平面式純加速規慣性感測單元(coplanar gyro-free IMU)以及磁場感測器來獲得物體的姿態。平面式純加速規慣性感測單元有別於一般純加速規慣性感測單元(gyro-free IMU)，所有感測元件皆在同一個平面上，無需複雜 3 維空間的放置及對準，並且可取代昂貴的陀螺儀。並由最後模擬的結果，論文中所提方法的姿態估測精度介於上述法(2)及法(3)。此外，在論文中經由觀測性矩陣的分析，此系統只使用 6 顆單軸加速規及 2 軸的磁場感測器，即可估測出物體的姿態。

# Orientation Estimation Using Coplanar Accelerometers and Magnetic Sensors

Student: Chung-Fu Kao

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

## Abstract

Typically, there are three ways to measure the attitude of an objection in 3D space, which are (1) 3-axes gyroscopes and a subsequent integral operation, (2) 3-axes linear accelerometers and 3-axes magnetic sensors, (3) 3-axes linear accelerometers, 3-axes gyroscopes and 3-axes magnetic sensors. There are problems and constrains in each approach. Particularly, the first approach suffers from the error accumulation, the second approach suffers from the sensing accuracy and the third approach achieves the best performance among all at by employing expensive gyroscopes components.

In this thesis, we present a novel approach using coplanar gyro-free IMU accompanied with magnetic sensors for the attitude measurement. The coplanar gyro-free IMU has the advantages that all the employed sensing devices are situated in the same plane. Furthermore, it measures angular rates without expensive gyro components. Simulation results indicated that we can obtain 3 orientation angles with the measurement accuracy in between the second approach and third approach mentioned above. Moreover, results also suggest that it is possible to use 6 linear accelerometers and 2-axes magnetic sensors to obtain 3 orientation angles with some prior information assumed.

## 致 謝

本論文得以順利完成，首先要感謝我的指導教授在這兩年來的悉心督促及指導。在與老師的互動中，不但學習到專業的知識與進行研究所需的態度，也瞭解到如何掌握問題核心與審慎分析的能力。在此獻上誠摯的謝意與敬意。

感謝實驗室的同學、學長及學弟，使我的碩士生涯充滿了甜美的回憶。

最後要感謝父親、母親及哥哥給予的支持使我能專心於課業及研究。



# 目 錄

中文摘要	I
Abstract	II
致謝	III
目錄	IV
表目錄	VI
圖目錄	VII
第一章 緒論	1
1-1 研究動機與文獻回顧	1
1-2 論文架構	2
第二章 姿態表示法與平面式之純加速規慣性量測單元	3
2-1 座標系統	3
2-1.1 地心地固座標系	3
2-1.2 導航座標系	3
2-1.3 附體座標系	4
2-2 座標轉換	4
2-2.1 側滾角( $\phi$ )	4
2-2.2 俯仰角( $\theta$ )	5
2-2.3 航向角( $\Psi$ )	6
2-3 姿態表示法	6
2-3.1 尤拉角法	6
2-3.2 四元數法	8
2-4 慣性導航基礎理論	10
2-5 平面式之純加速規慣性量測單元	11
第三章 卡爾曼估測器設計	17
3-1 卡爾曼估測器	17

3-1.1	擴增卡爾曼估測器	17
3-1.2	疊代擴增卡爾曼估測器	19
3-2	姿態量測方程式	20
3-2.1	四元數間接量測法	21
3-2.2	四元數直接量測法	27
3-3	決定擴增卡爾曼估測器參數	31
第四章	模擬及討論	33
4-1	三軸旋轉運動	33
4-1.1	間接量測法	34
4-1.2	直接量測法	41
4-2	俯仰角為 90 時的旋轉運動	52
4-3	靜止運動	55
4-3.1	間接量測法	55
4-3.2	直接量測法	64
4-4	間接量測法及直接量測法的優缺點比較	73
4-5	平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測 及陀螺儀姿態估測之比較	73
第五章	結論及未來計劃	76
5-1	結論	76
5-2	未來計劃	76
	參考文獻	77



## 表 目 錄

表(2.1) 加速規配置位置 -----	14
表(4.1) 慣性感測器的偏差及雜訊 -----	33
表(4.2) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時角速度誤差標準差 -----	40
表(4.3) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時四元數誤差標準差 -----	41
表(4.4) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差 -----	42
表(4.5) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時角速度誤差標準差 -----	49
表(4.6) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時四元數誤差標準差 -----	50
表(4.7) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差 -----	51
表(4.8) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時角速度誤差標準差 -----	61
表(4.9) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時四元數誤差標準差 -----	62
表(4.10) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差 -----	63
表(4.11) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時角速度誤差標準差 -----	70
表(4.12) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時四元數誤差標準差 -----	71
表(4.13) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差 -----	72
表(4.14) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測與陀螺儀姿態估測的比較 -----	74
表(4.15) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測器穩態時的標準差 -----	74

## 圖 目 錄

圖(2.1) ECEF 及 NED 座標系	4
圖(2.2) 附體座標系	4
圖(2.3) 側滾角之示意圖及座標	5
圖(2.4) 俯仰角之示意圖及座標	5
圖(2.5) 航向角之示意圖及座標	6
圖(2.6) 尤拉定理	8
圖(2.7) 固裝式慣性導航訊號流程圖	11
圖(2.8) 立方體 IMU 及平面式 IMU	12
圖(2.9) 固定座標及附體座標	13
圖(2.10) 加速規配置圖	14
圖(3.1) EKF 流程圖	18
圖(3.2) IKF 流程圖	20
圖(3.3) 導航座標與重力方向及磁場方向的關係	21
圖(3.4) 間接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器以四元數法的奇異值	23
圖(3.5) 間接量測法：3 軸加速規 3 軸磁場感測器單範性以四元數法的奇異值	24
圖(3.6) 間接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器以尤拉角法的奇異值	25
圖(3.7) 間接量測法：3 軸加速規、單範性量測方程式以四元數法的奇異值	26
圖(3.8) 間接量測法：3 軸加速規以尤拉角法的奇異值	26
圖(3.9) 直接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器的奇異值	28
圖(3.10) 直接量測法：y、z 軸加速規，x、y 軸磁場感測器的奇異值	28
圖(3.11) 直接量測法：只有 3 軸加速規的奇異值	29
圖(3.12) 直接量測法的加速規配置圖	29
圖(4.1) 間接量測法訊號流程	34
圖(4.2) 間接量測法：3 軸運動之 A1~A3y 加速規訊號	35
圖(4.3) 間接量測法：3 軸運動之 A4~A6 加速規訊號	35

圖(4.4) 間接量測法：3 軸運動之 $M_x \sim M_z$ 磁場感測器訊號	36
圖(4.5) 間接量測法：3 軸運動之 $z_1 \sim z_3$	36
圖(4.6) 間接量測法：3 軸運動之角速度估測值	37
圖(4.7) 間接量測法：3 軸運動之角速度誤差值	37
圖(4.8) 間接量測法：3 軸運動之四元數估測值	38
圖(4.9) 間接量測法：3 軸運動之四元數誤差值	38
圖(4.10) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角估測值	39
圖(4.11) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差值	39
圖(4.12) 間接量測法：3 軸運動之角速度誤差標準差	40
圖(4.13) 間接量測法：3 軸運動之四元數誤差標準差	41
圖(4.14) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差標準差	42
圖(4.15) 直接量測法訊號流程	43
圖(4.16) 直接量測法：3 軸運動之 $A_1 \sim A_3$ 加速規訊號	44
圖(4.17) 直接量測法：3 軸運動之 $A_4 \sim A_6$ 加速規訊號	44
圖(4.18) 直接量測法：3 軸運動之 $M_x$ 、 $M_y$ 磁場感測器訊號	45
圖(4.19) 直接量測法：3 軸運動之 $z_1 \sim z_4$ 訊號	45
圖(4.20) 直接量測法：3 軸運動之角速度估測值	46
圖(4.21) 直接量測法：3 軸運動之角速度誤差值	46
圖(4.22) 直接量測法：3 軸運動之四元數估測值	47
圖(4.23) 直接量測法：3 軸運動之四元數誤差值	47
圖(4.24) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角估測值	48
圖(4.25) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差值	48
圖(4.26) 直接量測法：3 軸運動之角速度誤差標準差	49
圖(4.27) 直接量測法：3 軸運動之四元數誤差標準差	50
圖(4.28) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差標準差	51
圖(4.29) 間接量測法：俯仰角為 90 度時之四元素估測值	53

圖(4.30) 間接量測法：俯仰角為 90 度時之尤拉角估測值	53
圖(4.31) 直接量測法：俯仰角為 90 度時之四元數估測值	54
圖(4.32) 直接量測法：俯仰角為 90 度時之尤拉角估測值	54
圖(4.33) 間接量測法：靜止運動時之 A1~A3y 加速規量測值	56
圖(4.34) 間接量測法：靜止運動時之 A4~A6 加速規量測值	56
圖(4.35) 間接量測法：靜止運動時之 Mx~Mz 磁場感測器量測值	57
圖(4.36) 間接量測法：靜止運動時之 z1~z3 磁場感測器量測值	57
圖(4.37) 間接量測法：靜止運動時之角速度估測值	58
圖(4.38) 間接量測法：靜止運動時之角速度誤差值	58
圖(4.39) 間接量測法：靜止運動時之四元數估測值	59
圖(4.40) 間接量測法：靜止運動時之四元數誤差值	59
圖(4.41) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角估測值	60
圖(4.42) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差值	60
圖(4.43) 間接量測法：靜止運動時之角速度誤差標準差	61
圖(4.44) 間接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差	62
圖(4.45) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差標準差	63
圖(4.46) 直接量測法：靜止運動時之 A1~A3y 加速規量測值	65
圖(4.47) 直接量測法：靜止運動時之 A4~A6 加速規量測值	65
圖(4.48) 直接量測法：靜止運動時之 Mx、My 磁場感測器量測值	66
圖(4.49) 直接量測法：靜止運動時之 z1~z4 量測值	66
圖(4.50) 直接量測法：靜止運動時之角速度估測值	67
圖(4.51) 直接量測法：靜止運動時之角速度誤差值	67
圖(4.52) 直接量測法：靜止運動時之四元數估測值	68
圖(4.53) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差值	68
圖(4.54) 直接量測法：靜止運動時之尤拉角估測值	69
圖(4.55) 直接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差值	69

圖(4.56) 直接量測法：靜止運動時之角速度誤差標準差 -----	70
圖(4.57) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差 -----	71
圖(4.58) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差 -----	72
圖(4.59) 陀螺儀姿態估測器訊號流程 -----	74
圖(4.60) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測與陀螺儀姿態估測的比較 -----	75



# 第一章 緒論

## 1-1 研究動機與文獻回顧

即時且精確的物體姿態(attitude)追蹤裝置，廣泛應用於機器人、航太、潛水艇、汽車工業及虛擬實境(Virtual reality)等等。而多數運動追蹤技術已經應用於虛擬實境，包括了磁場追蹤裝置、光學追蹤系統，超音波追蹤系統和慣性追蹤系統。

在慣性追蹤系統中藉著慣性量測單元，如加速規、陀螺儀等，來量測載具的加速度及角速度。慣性量測單元會因為偏差(bias)及雜訊而造成訊號的積分漂移(drift)。因此需要一些額外感測器來抑制積分漂移，如傾角感測器(tilt sensor)、磁場感測器(Magnetic Sensor)等等。因此可用傾角感測器(tilt sensor)來避免陀螺儀在側滾角( $\phi$ )及俯仰角( $\theta$ )的漂移，在本論文中以加速規來代替傾角感測器(tilt sensor)，因為加速度規不僅可以量測物體的加速度，也可量測地球的重力方向，故可求得物體的傾角量。以及使用磁場感測器(Magnetic Sensor)來抑制陀螺儀在航向角( $\Psi$ )的積分漂移。

目前已有許多種的估測方式及原理已被發展出來，由 Tatsuya Harada[2]、Bachmann[3] 及 Andrew Wilson[4]等皆是利用磁場感測器、陀螺儀及加速規放置於運動物體上，整合卡爾曼估測器，來獲得姿態的估測。本論文以[5]所提出的平面式之純加速規慣性量測單元(coplanar gyro-free inertial measurement unit)來估測物體的角速度，而此理論在文獻[17]已經由實驗獲得初步的結論。

姿態估測問題，即是算出姿態矩陣，此矩陣代表載具附體座標系相對於導航座標系的旋轉關係。數學上有多種的姿態表示法，有方向餘弦法、尤拉角法、四元數法。方向餘弦法具有 9 個變數，故需較多的計算時間，因此在導航系統中較為少用。尤拉角法只需 3 個變數即可描述載具附體座標系相對於導航座標系的關係，但此法的會有奇異性的發生，故使用時要避開奇異點。而四元數法需要 4 個變數但卻能有效的避開尤拉角所產

生的奇異點，而且適用於數值運算，故本論文中姿態的表示法是以四元數法為主。本論文只使用加速規及磁場感測器這兩種元件，配合卡爾曼估測器就能成功的估測出物體的姿態，由於減少了陀螺儀，故本論文所提出的架構在商業用途中更具有競爭力。

## 1-2 論文架構

本文共分為五章，第一章為緒論，介紹論文主要內容、文獻回顧及論文架構。第二章為姿態表示法與平面式之純加速規慣性量測單元，主要介紹座標轉換原理、尤拉角及四元數的姿態表示法及平面式之純加速規慣性量測單元的理論及原理。第三章為設計卡爾曼估測器，內容主要為介紹卡爾曼估測器的基本原理，以及分析間接量測法和直接量測法的觀測性(observerable)，最後並決定估測器所需的參數。第四章模擬及討論，利用 MATLAB 跑出模擬的結果，討論間接量測法及直接量測法的優缺點，接著比較螺陀儀姿態估測及平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測這兩者之間的估測精度。第五章結論及未來計劃，對本論文的所使用的方法給予總整理，並提出未來可能的研究方向。





## 第二章 姿態表示法與平面式之純加速規慣性量測單元

### 2-1 座標系統

在導航與定位的過程中，除了仰賴外來的輔助取得觀測量外，往往需要進行一些數學的計算以推論出正確的航向與位置。而本節將介紹不同的座標系及座標系的轉換。

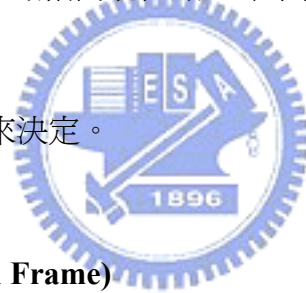
#### 2-1.1 地心地固座標系(Earth Centered Earth Fixed Frame, ECEF)

也稱為傳統地面座標系(Convention Terrestrial Reference System ,CTRS)，是以地心為原點但其三個軸相對於地球卻是固定的，因此是隨著地球旋轉。其三軸與原點規定如下  
原點：位於地球的質量中心。

X 軸：通過格林威治之天文子午圈，即通為經度的零度。

Z 軸：為地球的自轉軸，由原點指向北極點，即平行於 CIO(Conventional International Origin)之平均北極。

Y 軸：由右手座標系  $Z \times X$  來決定。



#### 2-1.2 導航座標系(Navigation Frame)

這組座標系通常用於導航使用，它可以直接提供導航者方位、航向等等訊息。而軸向定義如下。

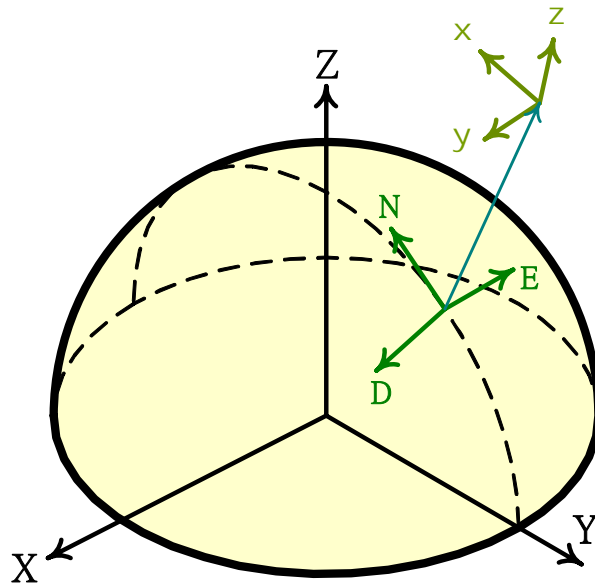
原點：定義為導航者所處的位置。

N 軸：指向地理北方。

D 軸：指向地心，即平行地球的重力方向。

E 軸：由右手座標系  $D \times N$  來決定，故指向東方。因此也簡稱為 NED 座標系。

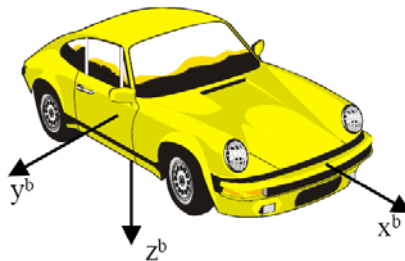




圖(2.1) ECEF 及 NED 座標系

### 2-1.3 附體座標系(Body frame)

它是一組正交座標系，軸向定義通常對準於載具(vehicle)前方－右側方－下方，而原點位於載具的重心，如圖所示。



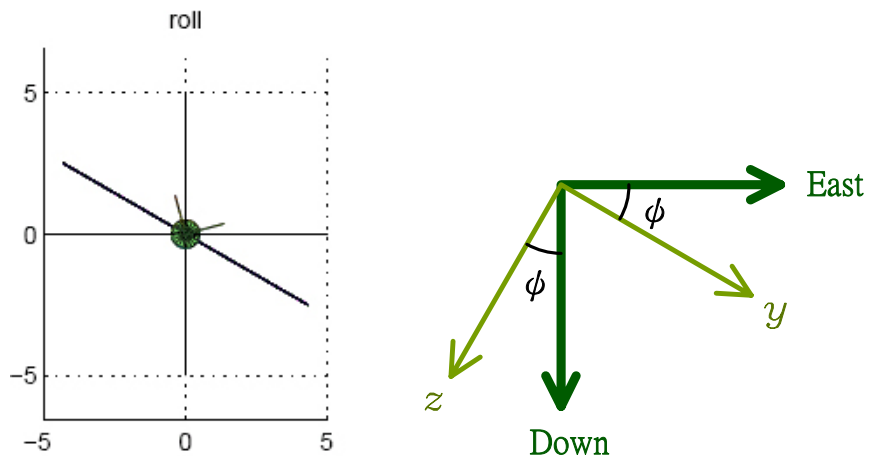
圖(2.2) 附體座標系

## 2-2 座標轉換

前述之地心地固座標系、導航座標系、附體座標系，在定向及導航都有其用途，因此有必要探討同一點在不同座標系統表示間關係。關於物體的三種不同的旋轉方式，分別是側滾角(Roll)、俯仰角(Pitch)及航向角(Yaw)，並由這三種不同的角度來求得附體座標與導航座標之關係。

### 2-2.1 側滾角( $\phi$ )

在航空學中側滾角表示為機翼的上/下的旋轉，也等效於對附體座標的  $x$  軸來旋轉。如圖(2.3)所示



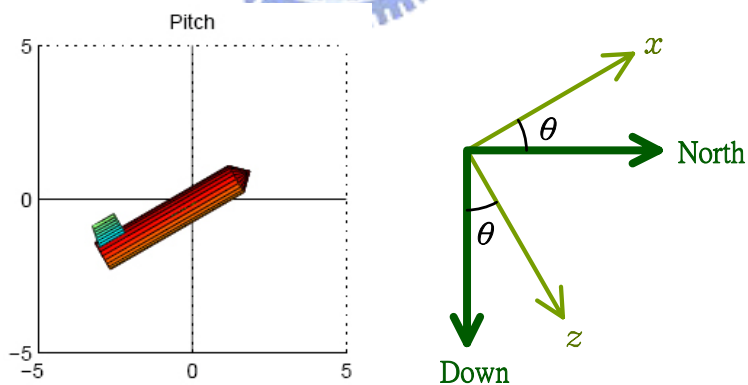
圖(2.3) 側滾角之示意圖及座標

若以數學表示

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(x, \phi) \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \quad R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

### 2-2.2 俯仰角( $\theta$ )

在航空學中俯仰角表示為機鼻的上/下的旋轉，也等於對附體座標的 y 軸來旋轉。如下圖(2.4)所示



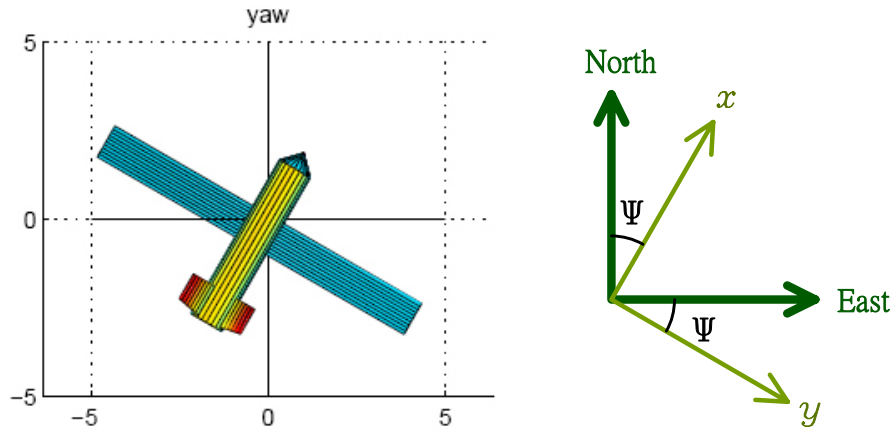
圖(2.4) 俯仰角之示意圖及座標

若以數學表示

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(y, \theta) \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \quad R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2-2.3 航向角( $\Psi$ )

在航空學中航向角表示為機鼻的左/右的旋轉，也等於對附體座標的  $z$  軸來旋轉。如下圖(2.5)所示



圖(2.5) 航向角之示意圖及座標

若以數學表示

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(z, \psi) \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \quad R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2-3 姿態表示法

數學上有多種的姿態表示法，有方向餘弦法、尤拉角法、四元數法。因為本論法主要以四元數法為主，尤拉角法為輔，因此本節主要介紹四元數法及尤拉角法，有關於更詳細的姿態表示法可參閱文獻[9][10][11][12][18][19][20]。

#### 2-3.1 尤拉角法 (Euler angle)

以尤拉角為姿態表示，其變數只有三個而且互相獨立。若以前述三個旋轉角度，依前後次序旋轉航向角(Yaw)、俯仰角(Pitch)及側滾角(Roll)則可獲得附體座標與導航座標的轉換矩陣。

$$\begin{aligned} C_n^b &= R(x, \phi) R(y, \theta) R(z, \psi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$C_n^b$  表示為導航座標(Navigation frame)轉換至附體座標(Body frame)之轉換矩陣，為了確保尤拉角之唯一性，故要求

$$-\pi \leq \psi \leq \pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

因此，附體座標與導航座標之關係如下所示：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_n^b \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

因為  $C_n^b$  為一個單位正交矩陣，故具有下列之性質。

$$(C_n^b)^T = (C_n^b)^{-1} \quad (2.6)$$

$$\det(C_n^b) = I \quad (2.7)$$

由以上可知，若我們已知道三個尤拉角的角度，即可獲得  $C_n^b$  矩陣。並且可利用  $C_n^b$  可以求得由附體座標的角速度可以轉換至尤拉角的角速度，因為我們已知轉換矩陣是由  $R(x, \phi)R(y, \theta)R(z, \Psi)$  的順序所組成，故

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(x, \phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(x, \phi)R(y, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

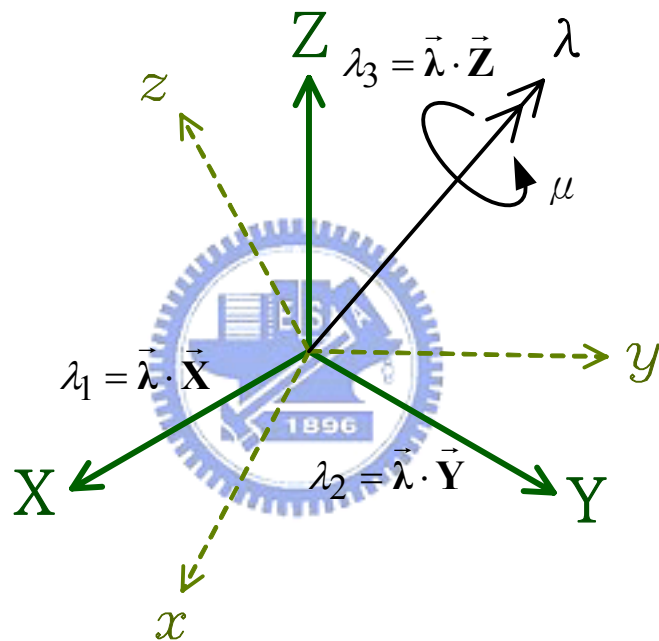
觀察上式可發現當俯仰(Pitch)角為  $\pm 90^\circ$  時，也就是載具垂直向上或垂直向下飛行，其轉換矩陣會發生奇異性。故利用此方程式來計算姿態的轉換矩陣時俯仰角(Pitch)

會有所限制。

### 2-3.2 四元數法 (Quaternion)

由於用尤拉角來表示的姿態轉換矩陣會有奇異性問題，因此使用四元數姿態的表示式，可避免此問題。在介紹四元數法之前先介紹尤拉定理，其定義為：

剛體繞固定點旋轉的運動，可表示為繞某一根通過該固定點之軸線 $(\vec{\lambda})$ 旋轉一個角度 $(\mu)$ 的運動。如圖(2.6)所示：



圖(2.6) 尤拉定理

若以單位向量 $\lambda$ 為轉軸，將座標系(XYZ)對其旋轉一角度 $\mu$ 則可得座標 $(xyz)$ ，因此轉換矩陣 $C$ 以 $\lambda$ 及 $\mu$ 表示為：

$$C(\lambda, \mu)_n^b = \cos \mu \cdot I_3 + (1 - \cos \mu) \lambda \lambda^T - \sin \mu \cdot \lambda^\times \quad (2.10)$$

其中  $\lambda^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 \sim \lambda_3$ 為轉軸 $\lambda$ 投影至XYZ座標的分量， $\mu$ 為繞 $\lambda$ 軸旋轉的角度。

我們可令四元數向量爲

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \vec{q} + q_4 \\ &= \vec{i}q_1 + \vec{j}q_2 + \vec{k}q_3 + q_4\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}q_1 &= \lambda_1 \sin(\mu/2) \\ q_2 &= \lambda_2 \sin(\mu/2) \\ q_3 &= \lambda_3 \sin(\mu/2) \\ q_4 &= \cos(\mu/2)\end{aligned}\quad (2.12)$$

因爲四元數並不具有四個自由度因此必須滿足單範的性質限制(normalization constraint)

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (2.13)$$

因此轉換矩陣如下所示

$$C_n^b = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_4 + q_2q_3) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(-q_1q_4 + q_2q_3) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

可由(2.4)(2.14)式可獲得四元數與尤拉角之關係

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1} \left( \frac{2(q_1q_4 + q_2q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right) \\ \theta &= \sin^{-1} (2(q_2q_4 - q_1q_3)) \\ \psi &= \tan^{-1} \left( \frac{2(q_1q_2 + q_3q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \right)\end{aligned}\quad (2.15)$$

若姿態連續變化時，則四元數滿足(2.16)的微分方程式

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_{4 \times 1} &= \frac{1}{2\|\mathbf{q}\|} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\|\mathbf{q}\|} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad , \|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^T}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

比較於尤拉角而言四元數有以下的優點：

- 四元數可適用於任意的姿態角，不會有奇異點發生。
- 四元數的值均介於+/-1 之間，非常適合數值計算。

因此本論文是以四元數來描敘物體的姿態。



## 2-4 慣性導航基礎理論

以加速規及陀螺儀等慣性感測元件為測量工具的導航技術稱為慣性導航，慣性導航系統(Inertial Navigation System)簡稱 INS，具備有下列的優點：

- 高精確度。
- 自給自足(Self-contained)。
- 自主性(autonomous)：不需依賴其他系統。
- 被動性(passive)：不主動發射電磁波。
- 無法用電子反制(unjammable)。

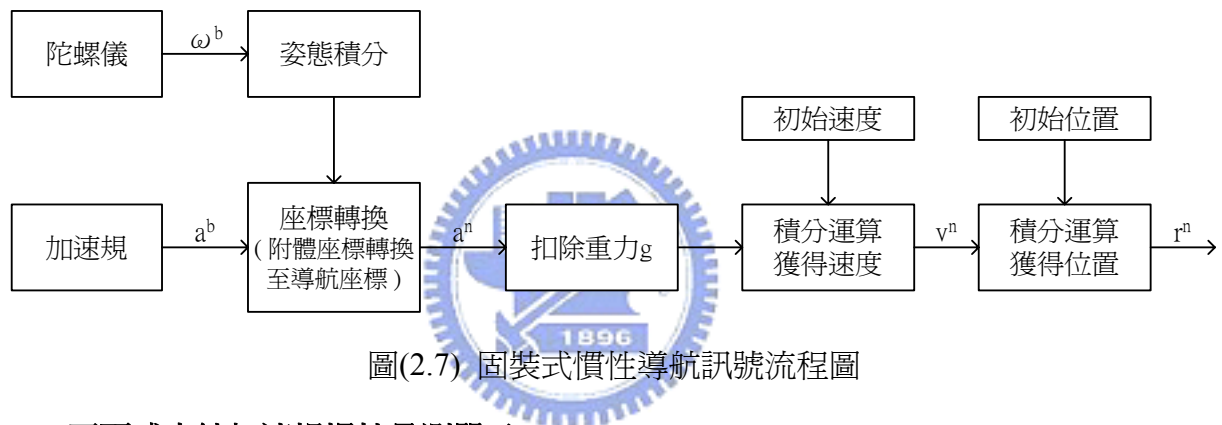
INS 可以提供以下列資訊

- 飛行器在空間中的位置。
- 相對於地表的速率(ground speed)。
- 提供運動體的姿態訊資訊，如尤拉角或四元數。

最原始的慣性導航系統是使用環架平台式(gimbaled platform)，此型式利用陀螺儀的

輸出訊號做回授，使得平台隨時與地表水平，所以在平台上的加速規可直接量得運動體的加速度，因此連續積分兩次即可獲得飛機的位置。而機身與平台間所夾之角度，即為飛機的姿態角。

而近幾年來有另一種型式的慣性導航系統稱之為固裝式系統(strap-down system)，此種方法是把陀螺儀和加速規直接裝置在機身上，因此減少了平台環架機構。姿態角由機體上量得的角速度做一次積分獲得，而由於固裝式系統的加速規會受重力加速度的影響，可由此刻的姿態角來獲得導航座標與附體座標的關係來扣除加速規所受的重力影響，扣除重力影響的加速規輸出即為運動體的運動加速度，因此連續積分兩次即可獲得位置的資訊。而本論文是使用固裝式的慣性導航方法，其訊號流程圖如圖(2.7)所示。

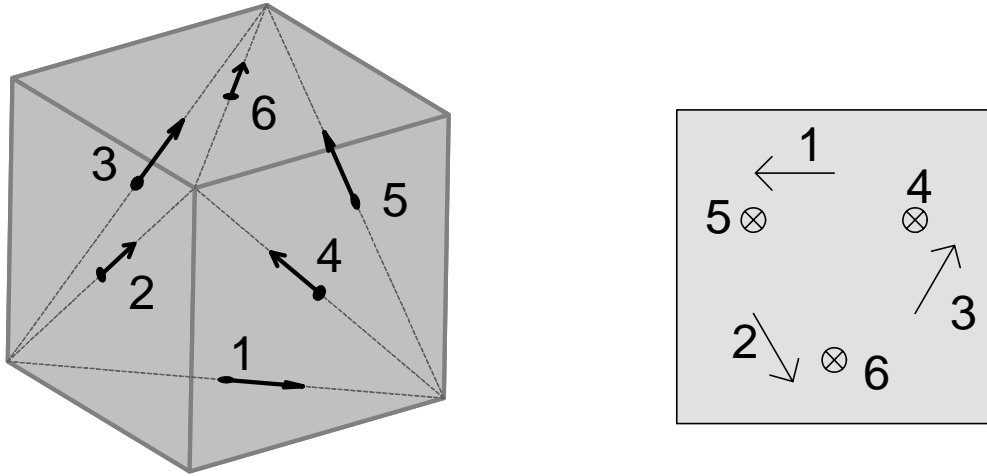


## 2-5 平面式之純加速規慣性量測單元

一般而言，慣性導航系統(Inertial Navigation System)使用加速規量測線性加速度，陀螺儀量測角速度。但是利用多組加速規透過適當擺置方式，可取代陀螺儀而求得載具姿態運動[5][6][7][8][16]。我們可利用剛體運動學原理，具有角速度或角加速度之剛體，於剛體上之不同位置有不同的加速度，量得剛體上不同位置之相對加速度，可估測載具之角速度和角加速度，積分後可得載具姿態。

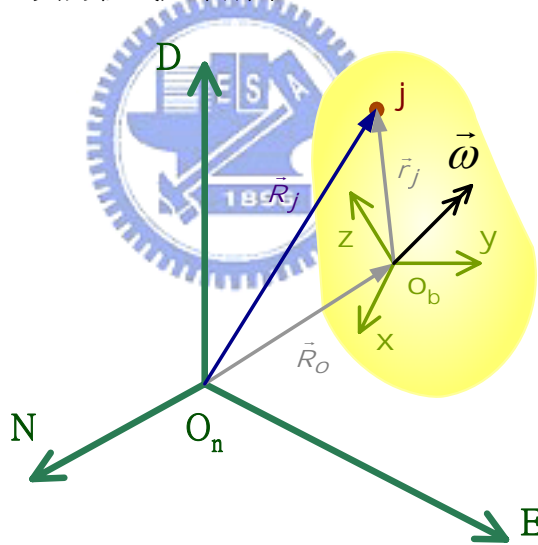
要描述一個載具在空間運動方式，需要此載具在空間的線性加速度及角速度。此篇論文主要使用平面式之純加速規慣性量測單元來獲得物體線性加速度及角速度[5]，此種裝置有別於一般的純加速規慣性量測單元，傳統式的純加速規慣性量測單元需要較複雜的三維空間的放置及對準，而此裝置只需要考慮二維空間的對準如圖(2.8)。由於是平面式之裝置，更有助於未來使用微機電製造技術把平面慣性量測單元量產化。





圖(2.8) 立方體 IMU 及平面式 IMU

根據剛體運動學，一個質點在空間中的運動，其加速度可用固定座標及運動座標之關係來表示，其中本篇論文是以導航座標(Navigation frame)為固定座標，而附體座標(body frame)為運動座標，其方程式如下所示：



圖(2.9) 固定座標及附體座標

$${}^n\ddot{\mathbf{R}}_j = {}^n\ddot{\mathbf{R}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_j + \ddot{\mathbf{r}}_j \quad (2.17)$$

${}^n\ddot{\mathbf{R}}_j$  : j 點相對於導航座標(navigation frame)的加速度。

${}^n\ddot{\mathbf{R}}_o$  :  $O_b$ 相對於 $O_n$ 之加速度。

$\boldsymbol{\omega}$  : 附體座標系相對於導航座標之角速度。

$\dot{\boldsymbol{\omega}}$  : 附體座標系相對於導航座標之角加速度。

$\dot{\vec{r}}$  : j點相對於附體座標原點 $O_b$ 之速度。

$\ddot{\vec{r}}$  : j點相對於附體座標原點 $O_b$ 之加速度。

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$  : 科氏加速度(Coriolis acceleration)

其中  $\vec{r}_j$  在附體座標上為一固定常數，因此  $\dot{\vec{r}}_j = \ddot{\vec{r}}_j = 0$ ，故在附體座標上 j 點的加速度為

$${}^b\ddot{\vec{R}}_j = {}^b\ddot{\vec{R}}_o + {}^b\dot{\vec{\omega}} \times {}^b\vec{r}_j + {}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_j) \quad (2.18)$$

再由座標轉換關係可獲得 j 點在導航座標上的加速度

$${}^n\ddot{\vec{R}}_j = {}^n\ddot{\vec{R}}_o + C_b^n ({}^b\dot{\vec{\omega}} \times {}^b\vec{r}_j) + C_b^n ({}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_j)) \quad (2.19)$$

若把加速規放置於j點，考慮加速規會量測到運動體的線性加速度 $F_o$ 及重力加速度 $g$ ，

故有以下的關係式

$${}^b\ddot{\vec{R}}_o = {}^b\vec{F}_o + {}^b\vec{g}_o$$

因此放置於 j 點的加速規其感測方向為  $\vec{\eta}_j$ ，其量測值為

$$\begin{aligned} A_j &= {}^n\ddot{\vec{R}}_j \cdot {}^n\vec{\eta}_j = {}^b\ddot{\vec{R}}_j \cdot {}^b\vec{\eta}_j \\ &= ({}^b\vec{F}_o + {}^b\vec{g}_o + {}^b\dot{\vec{\omega}} \times {}^b\vec{r}_j + {}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_j)) \cdot {}^b\vec{\eta}_j \\ &= \begin{bmatrix} ({}^b\vec{r}_j \times {}^b\vec{\eta}_j)^T & {}^b\vec{\eta}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^b\dot{\vec{\omega}} \\ {}^b\vec{F}_o + {}^b\vec{g}_o \end{bmatrix} + {}^b\vec{\eta}_j^T ({}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_j)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

若在一個運動物體上擺放各種不同位置、不同感測方向的加速規，則每個加速規的輸出可以寫成下式

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} {}^b\dot{\vec{\omega}} \\ {}^b\vec{F}_o + {}^b\vec{g}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^b\vec{\eta}_1^T \cdot ({}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_1)) \\ \vdots \\ {}^b\vec{\eta}_j^T \cdot ({}^b\vec{\omega} \times ({}^b\vec{\omega} \times {}^b\vec{r}_j)) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$J = \begin{bmatrix} ({}^b\vec{r}_1 \times {}^b\vec{\eta}_1)^T & {}^b\vec{\eta}_1 \\ \vdots & \vdots \\ ({}^b\vec{r}_j \times {}^b\vec{\eta}_j)^T & {}^b\vec{\eta}_j \end{bmatrix}_{j \times 6}$$

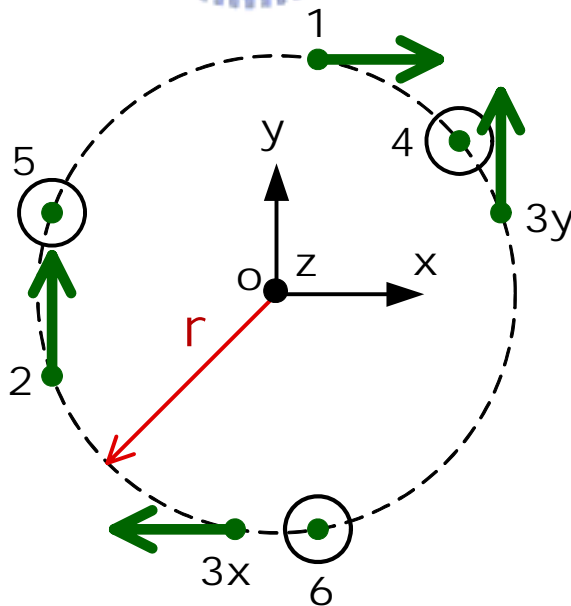
如果  $J$  是可逆的(invertible)，則可求得運動物體的微分方程式與各個不同位置的加速規量測的關係，如下所示

$$\begin{bmatrix} {}^b \dot{\omega} \\ {}^b F_o + {}^b g_o \end{bmatrix}_{6 \times 1} = J^{-1} \times \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^b \eta_1^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_1)) \\ \vdots \\ {}^b \eta_j^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_j)) \end{bmatrix} \right) \quad (2.22)$$

加速規經由適當配置如表(2.1)

加速規編號	加速規的位置 ${}^b r_j(x,y,z)$	感測方向 ${}^b \eta_j(x,y,z)$
1	$r [\cos(4\pi/9) \quad \sin(4\pi/9) \quad 0]$	$[\cos(17\pi/18) \sin(17\pi/18) \quad 0]$
2	$r [\cos(10\pi/9) \quad \sin(10\pi/9) \quad 0]$	$[\cos(-7\pi/18) \sin(-7\pi/18) \quad 0]$
3x	$r [\cos(-5\pi/9) \quad \sin(-5\pi/9) \quad 0]$	$[\cos(-\pi) \quad \sin(-\pi) \quad 0]$
3y	$r [\cos(\pi/9) \quad \sin(\pi/9) \quad 0]$	$[\cos(\pi/2) \quad \sin(\pi/2) \quad 0]$
4	$r [\cos(2\pi/9) \quad \sin(2\pi/9) \quad 0]$	$[0 \quad 0 \quad 1]$
5	$r [\cos(8\pi/9) \quad \sin(8\pi/9) \quad 0]$	$[0 \quad 0 \quad 1]$
6	$r [\cos(14\pi/9) \quad \sin(14\pi/9) \quad 0]$	$[0 \quad 0 \quad 1]$

表(2.1) 加速規配置位置



圖(2.10) 加速規配置圖

因此可由(2.12)獲得有關於運動體的角加速度。

$$[{}^b \dot{\omega}]_{3 \times 1} = J^{-1}(1:3,:) \times \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_{3x} \\ \vdots \\ A_6 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} {}^b \eta_1^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_1)) \\ {}^b \eta_2^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_2)) \\ {}^b \eta_{3x}^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_{3x})) \\ \vdots \\ {}^b \eta_6^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_6)) \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (2.23)$$

接著也可求得運動體的線性加速度

$$[F_o + g_o]_{3 \times 1} = J^{-1}(4:6,:) \times \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_{3x} \\ \vdots \\ A_6 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} {}^b \eta_1^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_1)) \\ {}^b \eta_2^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_2)) \\ {}^b \eta_{3x}^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_{3x})) \\ \vdots \\ {}^b \eta_6^T \cdot ({}^b \omega \times ({}^b \omega \times {}^b r_6)) \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (2.24)$$

$$= \left[ \begin{array}{c} 0.5A_1 - 0.5A_{3x} \\ f(A_1, A_2, A_{3x}, \omega_x^2 + \omega_z^2, \omega_y^2 + \omega_z^2, \omega_x \omega_y) \\ (A_6 \sin(\theta_4 - \theta_5) - A_3 \sin(\theta_4 - \theta_6) + A_4 \sin(\theta_5 - \theta_6)) \\ (\cos(\theta_6)(-\sin(\theta_4) + \sin(\theta_5)) + \cos(\theta_5)(\sin(\theta_4) - \sin(\theta_6)) + \cos(\theta_4)(-\sin(\theta_5) + \sin(\theta_6))) \end{array} \right]$$

其中J爲

$$J = \begin{bmatrix} ({}^b r_1 \times {}^b \eta_1)^T & {}^b \eta_1 \\ ({}^b r_2 \times {}^b \eta_2)^T & {}^b \eta_2 \\ ({}^b r_{3x} \times {}^b \eta_{3x})^T & {}^b \eta_{3x} \\ \vdots & \vdots \\ ({}^b r_6 \times {}^b \eta_6)^T & {}^b \eta_6 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

觀察上式(2.24)，由於 $F_{oy} + g_{oy}$ 含有角速度 $\omega$ 項，爲了把角速度項去除故多加上一個加速規爲 $A_{3y}$ ，因此方程式可改寫爲

$$[F_o + g_o]_{3 \times 1} = \left[ \begin{array}{c} 0.5A_1 - 0.5A_{3x} \\ 0.5A_2 + 0.5A_{3y} \\ (A_6 \sin(\theta_4 - \theta_5) - A_3 \sin(\theta_4 - \theta_6) + A_4 \sin(\theta_5 - \theta_6)) \\ (\cos(\theta_6)(-\sin(\theta_4) + \sin(\theta_5)) + \cos(\theta_5)(\sin(\theta_4) - \sin(\theta_6)) + \cos(\theta_4)(-\sin(\theta_5) + \sin(\theta_6))) \end{array} \right] \quad (2.25)$$

在姿態估測時只有純旋轉運動，故令物體的線性加速度爲零，即  $F_o = 0$ ，因此可量

得物體在旋轉時所受的重力加速度如(2.26)式

$$[g_o]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0.5A_1 - 0.5A_{3,x} \\ 0.5A_2 + 0.5A_{3,y} \\ \frac{(A_6 \sin(\theta_4 - \theta_5) - A_5 \sin(\theta_4 - \theta_6) + A_4 \sin(\theta_5 - \theta_6))}{(\cos(\theta_6)(-\sin(\theta_4) + \sin(\theta_5)) + \cos(\theta_5)(\sin(\theta_4) - \sin(\theta_6)) + \cos(\theta_4)(-\sin(\theta_5) + \sin(\theta_6)))} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

因此由本節所推導的(2.23)(2.26)式將在設計卡爾曼估測器時使用到。



## 第三章 卡爾曼估測器設計

### 3-1 卡爾曼估測器

於 1960 年，由 R.E. Kalman 所發表一篇著名的論文中，利用遞迴(recursive)來解決離散資料的線性濾波問題。由於此時電腦數值計算正蓬勃的發展，因此卡爾曼估測器在控制與導航系統領域中被大量的研究及應用。

卡爾曼估測器是一種最佳化的估測器，它可以間接從不準確及不確定的量測值來獲得系統的狀態變數，尤其對於雜訊來源為高斯雜訊時，卡爾曼估測器可以得到最小化的均方誤差(mean square error)。

#### 3-1.1 擴增卡爾曼估測器(Extended Kalman Filter, EKF)

由於卡爾曼估測器只適用於線性的系統，由於此論文的系統為非線性系統，對於非線性的系統需線性化才能使用，因此對於被線性化的卡爾曼估測器又稱為擴增卡爾曼估測器(Extended Kalman Filter, EKF)。

考慮以下的非線性系統


$$\begin{aligned} \text{state equation: } x_{k+1} &= f(k, x_k, u_k) + n_k & n: \text{state\_noise} \\ \text{measurement equation: } z_k &= h(k, x_k) + v_k & v: \text{measurement\_noise} \end{aligned} \quad (3.1)$$

擴增卡爾曼估測器包括兩個主要的步驟，其中一個步驟為”狀態的預測”，也就是從這此刻的狀態及輸入來估測下一刻時間的狀態。

*Predict equations*

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^- &= f(k, \hat{x}_k, u_k) \\ P_{k+1}^- &= A_k P_k A_k^T + Q_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

另一個步驟為“狀態的修正”，利用量測值來修正前一個步驟所預測的狀態，以獲得較佳估測值。

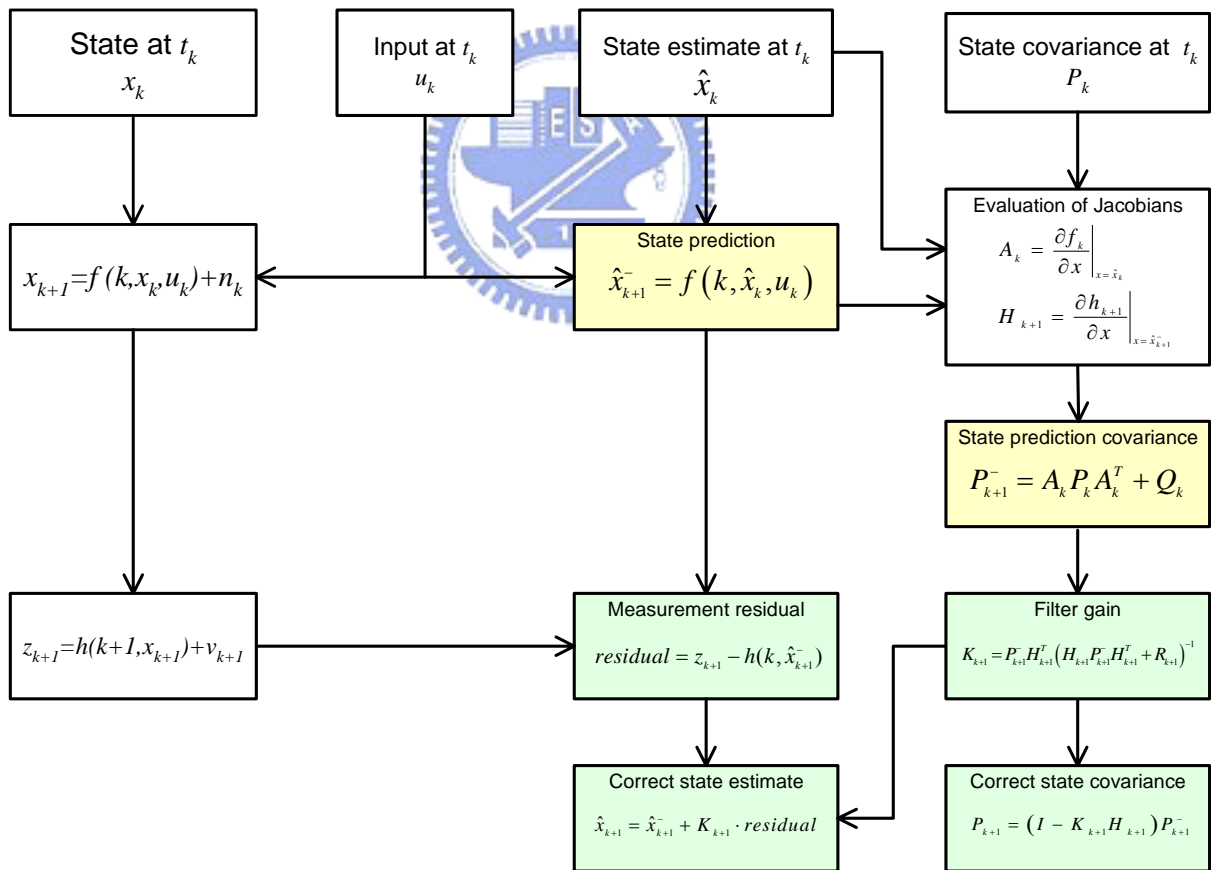
Correct equations

$$\begin{aligned}
 K_{k+1} &= P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \\
 P_{k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- \\
 \text{residual} &= z_{k+1} - h(k, \hat{x}_{k+1}^-) \\
 \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} \cdot \text{residual}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

其中 A、H 矩陣求得如下所示：

$$\begin{aligned}
 A_k &= \left. \frac{\partial f_k}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \\
 H_{k+1} &= \left. \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1}^-}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

因此 EKF 流程圖如下所示：



圖(3.1) EKF 流程圖

### 3-1.2 疊代擴增卡爾曼估測器(Iterative Extended Kalman filter, IKF)

擴增卡爾曼估測器使用線性化的狀態方程式及量測方程式，實際上使用一階線性化的狀態方程式來預估狀態已產生了一些誤差。因此利用新的估測值來重覆的代入“狀態修正”方程式中，故可改善 EKF 的估測的精準度。

$$H_{k+1}^i = \left. \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1}^i} \quad (3.5)$$

$$P_{k+1}^i = P_{k+1}^- - P_{k+1}^- H_{k+1}^{i'} (H_{k+1}^i P_{k+1}^- H_{k+1}^{i'} + R_{k+1}^{-1}) H_{k+1}^i P_{k+1}^- \quad (3.6)$$

$$\hat{x}_{k+1}^{i+1} = \hat{x}_{k+1}^i + P_{k+1}^i H_{k+1}^{i'} R_{k+1}^{-1} [z_{k+1} - h(k+1, \hat{x}_{k+1}^i)] - P_{k+1}^i P_{k+1}^{-1} \cdot (\hat{x}_{k+1}^i - \hat{x}_{k+1}^-) \quad (3.7)$$

$i$  為疊代次數，由第 0 次疊代開始計算，其中第  $i=0$  為(3.8)式

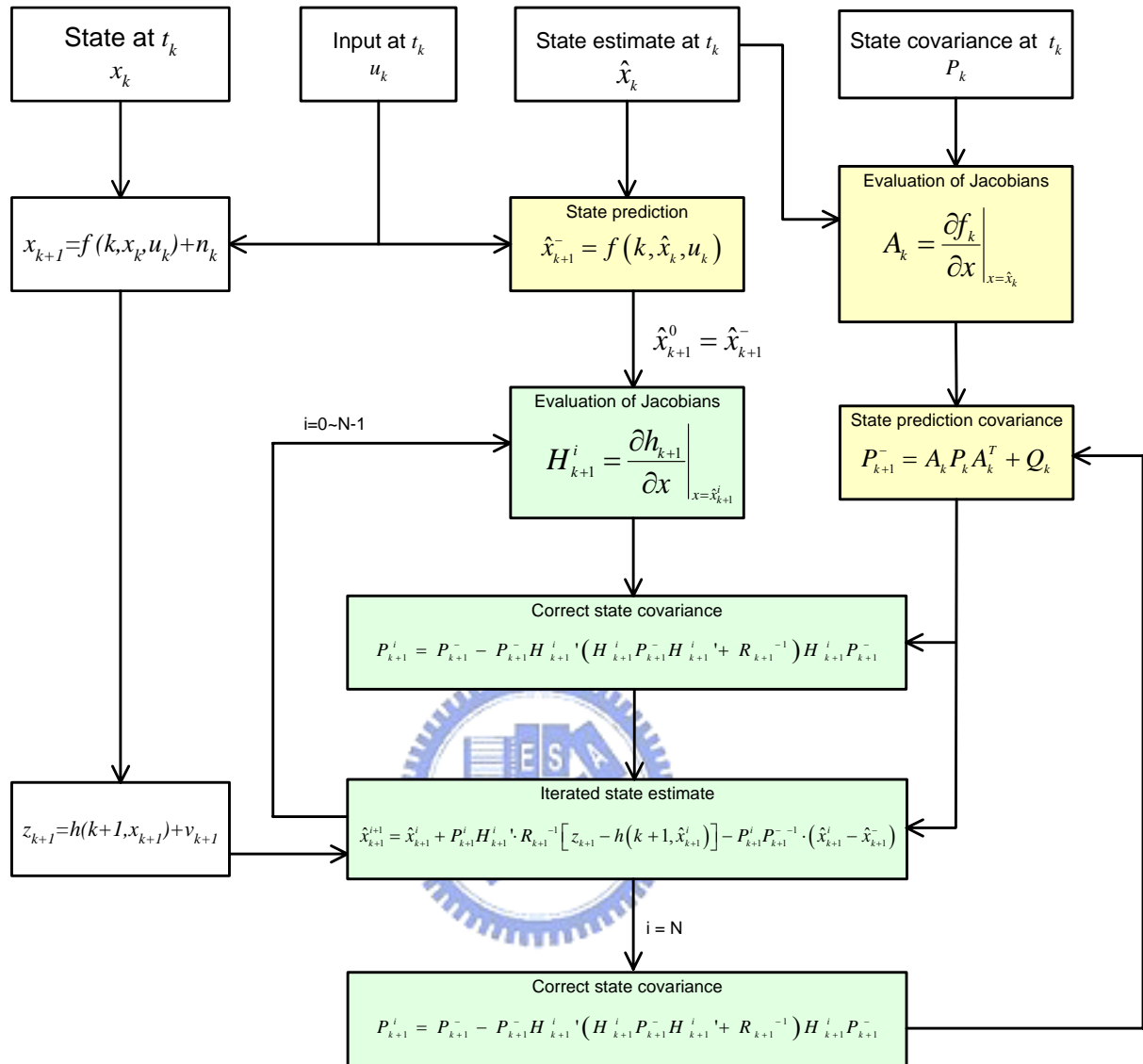
$$\hat{x}_{k+1}^0 = \hat{x}_{k+1}^- \quad (3.8)$$

由(3.8)式代入(3.7)的最後一項，故可得第 1 次疊代的狀態估測  $\hat{x}_{k+1}^1$ ，與 EKF 比較，因此疊代 1 次的計算與 EKF 相同。





疊代擴增卡爾曼估測器運算流程如下



圖(3.2) IKF 流程圖

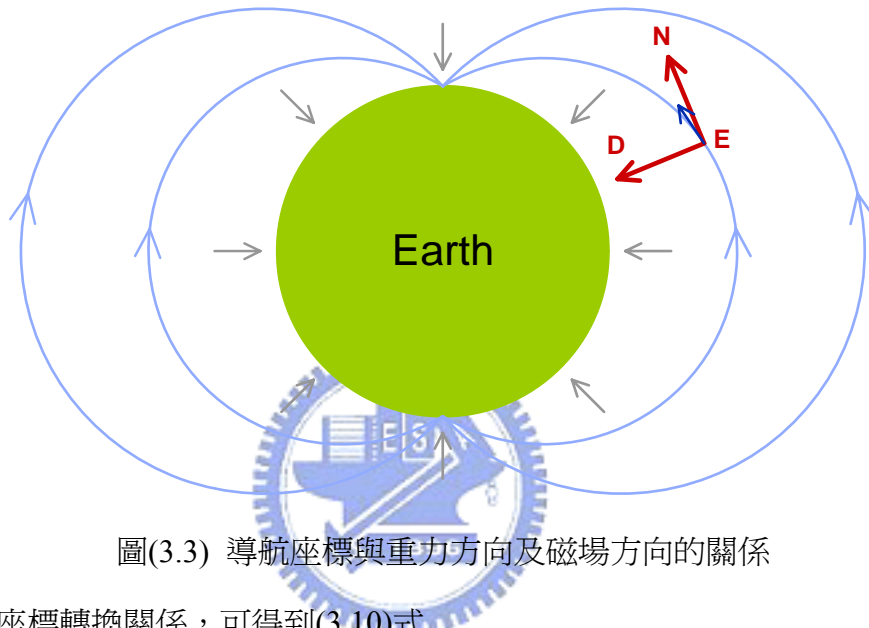
### 3-2 姿態量測方程式

由 2-3.2 及 2-5 節我們可獲得平面式之純加速規慣性量測單元的角速度微分方程式 (2.23) 及姿態連續變化的微分方程式 (2.16)，可由以上這兩組方程式積分來獲得運動物體的姿態。不幸的，由於所量測的角速度皆是帶有雜訊的訊號，因此在做積分運算時，姿態會隨著時間而產生訊號的漂移現象。為了解決積分漂移現象，本論文使用 EKF 來解決此一問題。由 EKF 演算法則可知，它需要一組量測方程式來做為估測狀態的依據，因此本節要介紹如何獲得有關於姿態的量測方程式。

### 3-2.1 四元數間接量測法

尤拉角可由加速規及磁場感測器來量測獲得[2]，因此藉由尤拉角來與四元數的關係由(2.15)式可間接獲得四元數的量測方程式。由下式(3.9)，我們可知在導航座標 (navigation frame) 上的重力方向及磁場方向，如圖(3.3)所示。

$$\begin{aligned} {}^n \mathbf{g} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \\ {}^n \mathbf{m} &= [a \quad 0 \quad b]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$



圖(3.3) 導航座標與重力方向及磁場方向的關係

由(2.4)式的座標轉換關係，可得到(3.10)式

$${}^b \mathbf{g} = C_n^b \cdot {}^n \mathbf{g} = [-\sin(\theta) \quad \sin(\phi)\cos(\theta) \quad \cos(\phi)\cos(\theta)]^T \quad (3.10)$$

其中 ${}^b \mathbf{g}$ 為物體在附體座標上所受的重力加速度，可由平面式之純加速規慣性量測單元獲得即利用(2.26)求得。再由四元數與尤拉角的關係(2.15)式可獲得以下的量測方程式。

$${}^b g_x = -\sin(\theta) = -2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \quad (3.11)$$

$$\frac{{}^b g_y}{{}^b g_z} = \tan(\phi) = \frac{2(q_1 q_4 + q_2 q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \quad (3.12)$$

接著，要求得航向角( $\Psi$ )必須要在平面式之純加速規慣性量測單元上加裝一個三軸磁場感測器(Magnetic Sensor)，因此可量測物體所受的磁場強度 ${}^b \mathbf{m}$ ，再由座標轉換關係可得(3.13)式。

$${}^b \mathbf{m} = R(x, \phi) R(y, \theta) R(z, \psi) {}^n \mathbf{m} \quad (3.13)$$

因爲俯仰角( $\theta$ )和側滾角( $\phi$ )可由(3.11)(3.12)式獲得，故把  $R(y, \theta)$  及  $R(x, \phi)$  移項，可得下式之關係

$$\begin{aligned} R(z, \psi) {}^n \mathbf{m} &= R(y, \theta)^T R(x, \phi)^T {}^b \mathbf{m} \\ &= [a \cos(\psi) \quad -a \sin(\psi) \quad b]^T \\ &= V \end{aligned} \quad (3.14)$$

觀察  $V$  向量，可獲得航向角與四元數的關係，如下所示：

$$\frac{V(2)}{V(1)} = -\tan(\psi) = \frac{-2(q_1 q_2 + q_3 q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \quad (3.15)$$

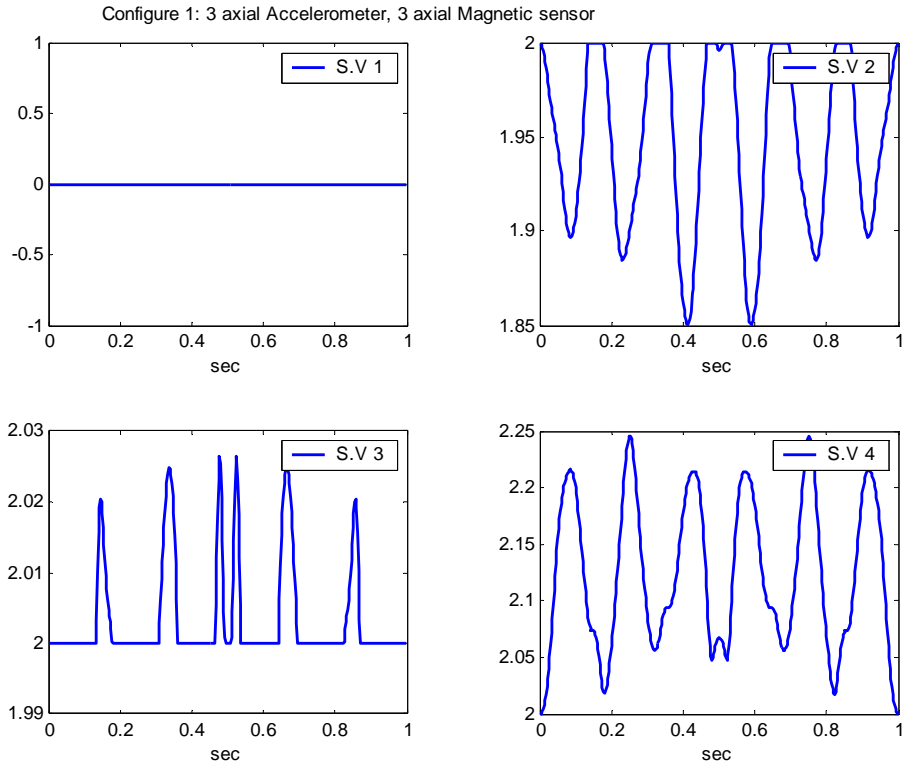
因此量測方程式整理如下

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(q_1 q_2 + q_3 q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \\ -2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \\ \frac{2(q_1 q_4 + q_2 q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

在動態系統中，可由觀測性矩陣(Observability matrix)的秩數(rank)和觀測性矩陣所對應的奇異值(singular value)可用來判斷此系統估測器設計的可行性。因此可由(3.17)式獲得觀測性矩陣即

$$W_o = \nabla [z \quad \dot{z} \quad \dots] \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial q_j} \quad j = 1 \sim 4 \quad (3.17)$$

因此觀測性矩陣的秩數至少要爲 4 或 4 個奇異值皆不會爲零，估測器才能收斂至正確值。因此我們用電腦計算間接量測法奇異值隨著時間的變化，圖(3.4)可發現當利用 3 軸加速規及 3 軸磁場感測器時，其中某一個奇異值皆爲零，此時估測器設計可能會失敗。

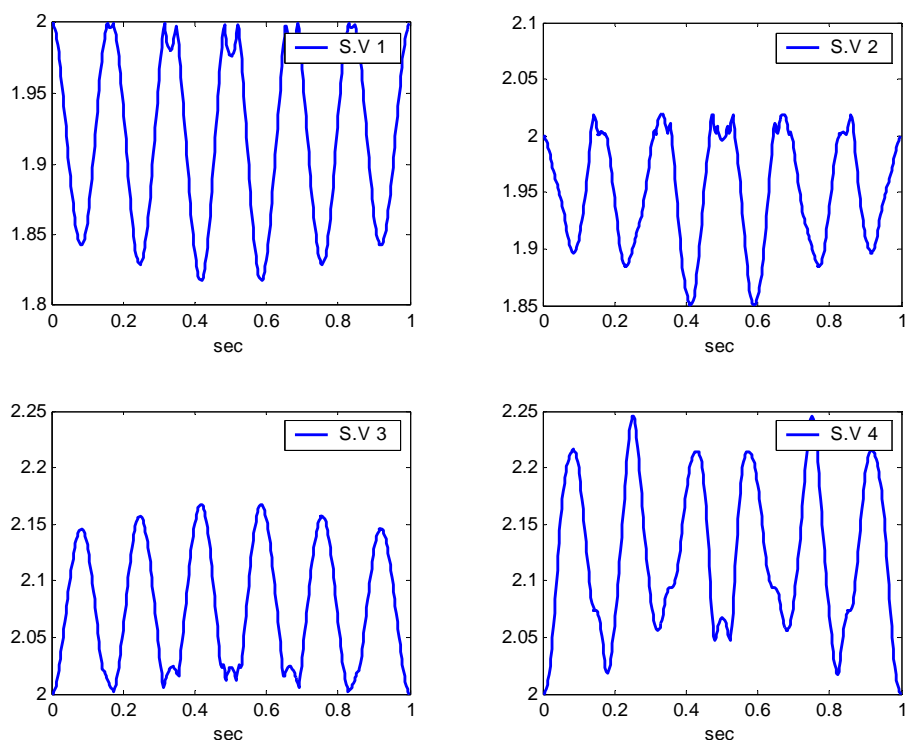


圖(3.4) 間接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器以四元數法的奇異值

不過，由 2-3.2 節可知四元數並不具有四個自由度因此必須滿足單範的性質限制，因此使用間接量測法來獲得觀察性矩陣必須再加上單範性限制的量測方程式，故(3.16) 改寫為下式(3.18)，此時的奇異值隨時間的變化如圖(3.5)，故可保證估測器設計成功。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(q_1q_2 + q_3q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \\ -2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ \frac{2(q_1q_4 + q_2q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

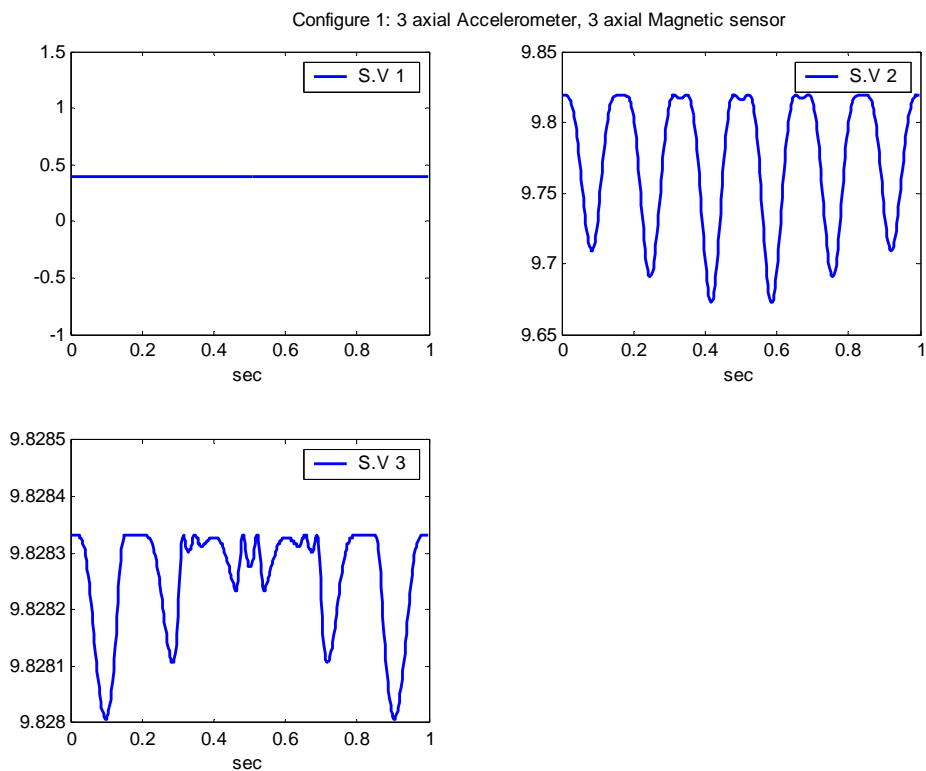
Configure 1: 3 axial Accelerometer, 3 axial Magnetic sensor, normalization constraint.



圖(3.5) 間接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器、單範性以四元數法的奇異值

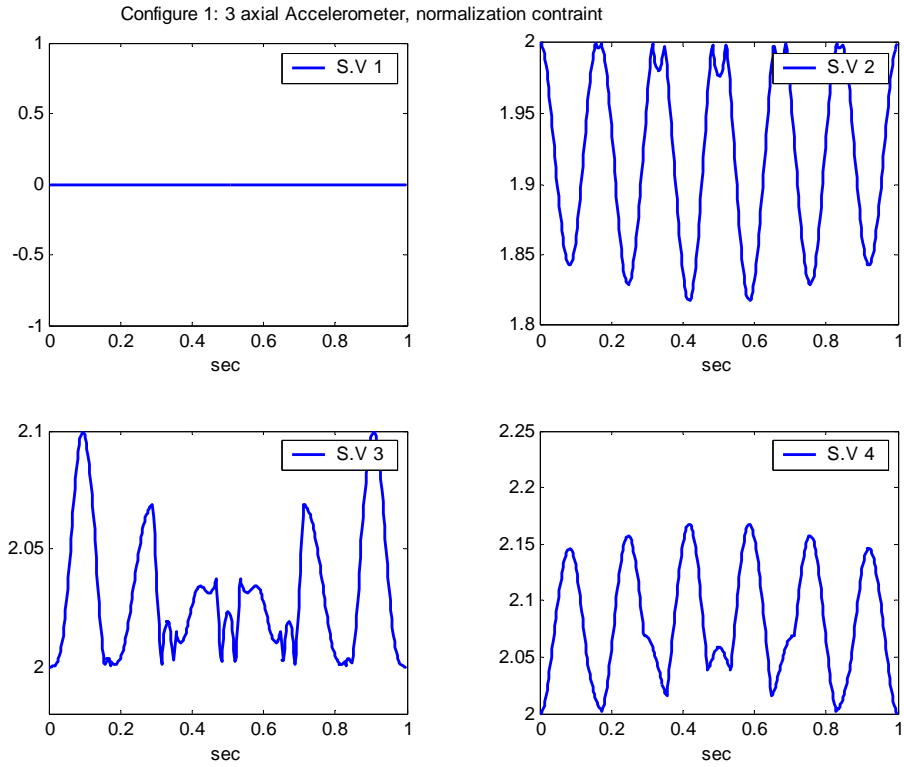
或者間接量測法以尤拉角的觀點來看，由於間接量測法是由尤拉角轉換而來，因此間接量測法可直接用尤拉角來表示，故此時奇異值隨時間的變化如圖(3.6)。我們可發現奇異值皆不為零，故估測器可估測至正確值。

因此在間接量測法中，如果以四元數來表示時，必須再加上單範性限制的量測方程式所求的觀察性矩陣才為正確的，這是由於四元數並不具有四個自由度的關係。

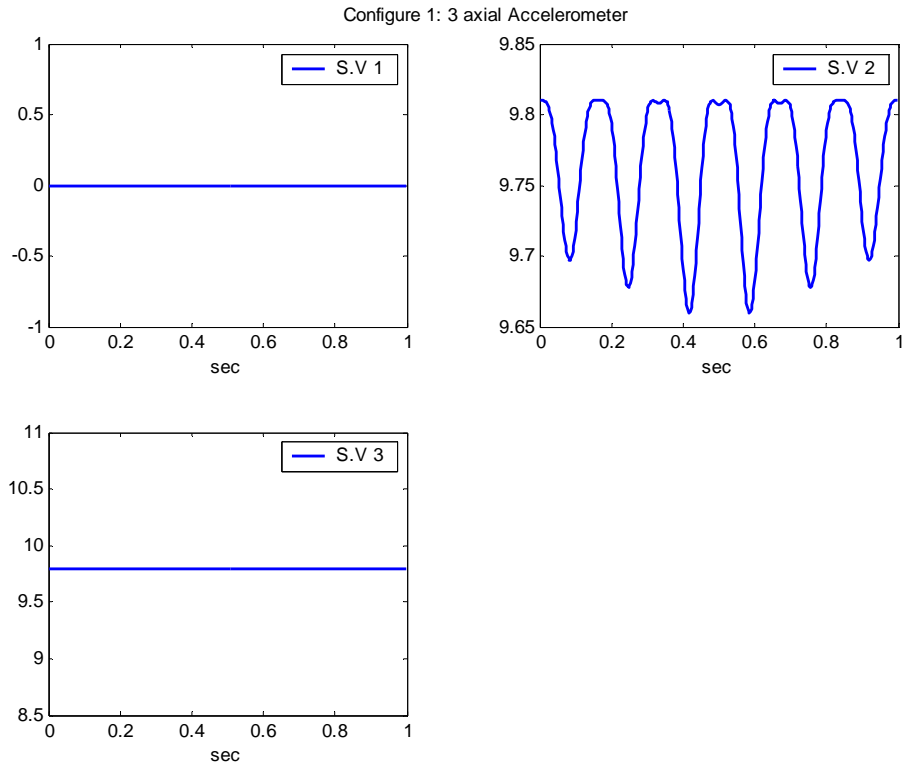


圖(3.6) 間接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器以尤拉角法的奇異值

接下來的模擬是爲了測試是否可減少加速規或磁場感測器而估測器也能成功的估測出正確值，因此可由圖(3.7)及(3.8)爲缺少磁場感測器時的奇異值。圖(3.7)是以四元數法表示時奇異值有 1 個爲零，而圖(3.8)是以尤拉角表示時，也有 1 個奇異值爲零。因此利用間接量測法時不可省略 3 軸磁場感測器，所以加速規配置如圖(2.10)及表(2.1)。



圖(3.7) 間接量測法：3 軸加速規、單範性量測方程式以四元數法的奇異值



圖(3.8) 間接量測法：3 軸加速規以尤拉角法的奇異值

### 3-2.2 四元數直接量測法

若令此刻位置在導航座標上的磁場向量為已知。因此可在平面式之純加速規慣性量測單元裝上三軸磁場感測器可獲得(3.19)

$$\begin{bmatrix} b_{m_x} \\ b_{m_y} \\ b_{m_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_4 + q_2q_3) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(-q_1q_4 + q_2q_3) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

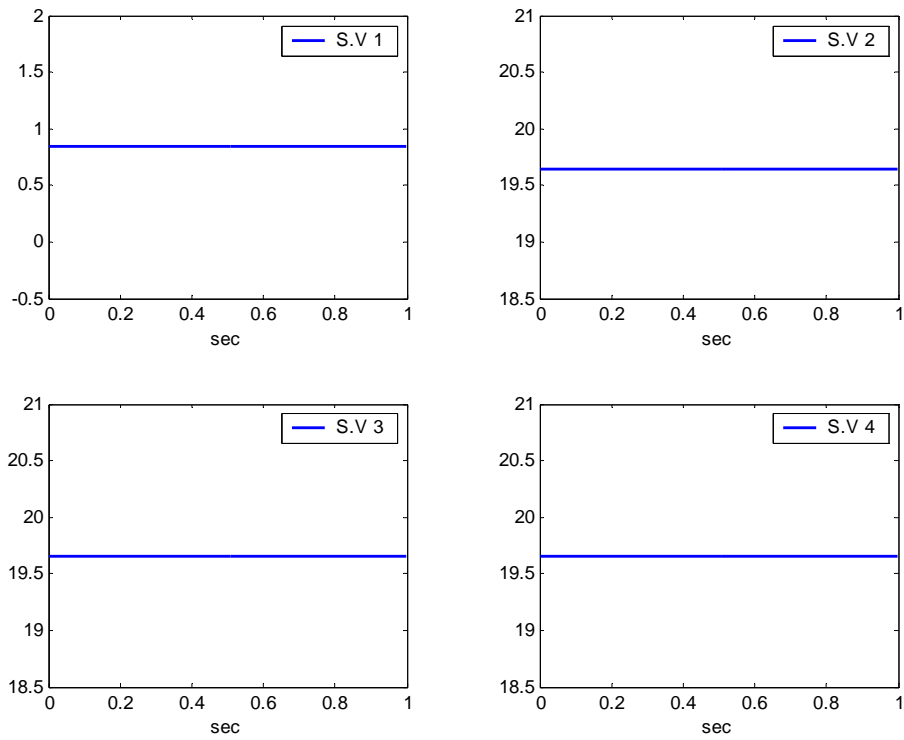
接著由加速規量測物體所受的重力值可獲得以下關係(3.20)

$$\begin{bmatrix} b_{g_x} \\ b_{g_y} \\ b_{g_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_4 + q_2q_3) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(-q_1q_4 + q_2q_3) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

利用觀察性矩陣的奇異值，來試著找出是否可省略某些感測器。圖(3.9)為裝上 3 軸加速規及 3 軸磁場感測器時的奇異值全部皆不為零，故此時系統為可觀測(observerable)。接著把x軸的加速規及z軸的磁場感測器省略，由圖(3.10)可發現此刻的奇異值皆不為零，故此時系統仍然可觀察。最後把磁場感測器省略，由圖(3.11)可發現有一個奇異值為零，故此時系統為不可觀察(unobservable)。因此本節結論，使用直接量測法時，可以省略A<sub>3x</sub>加速規及z軸的磁場感測器。故加速規配置變更設計如圖(3.12)所示。

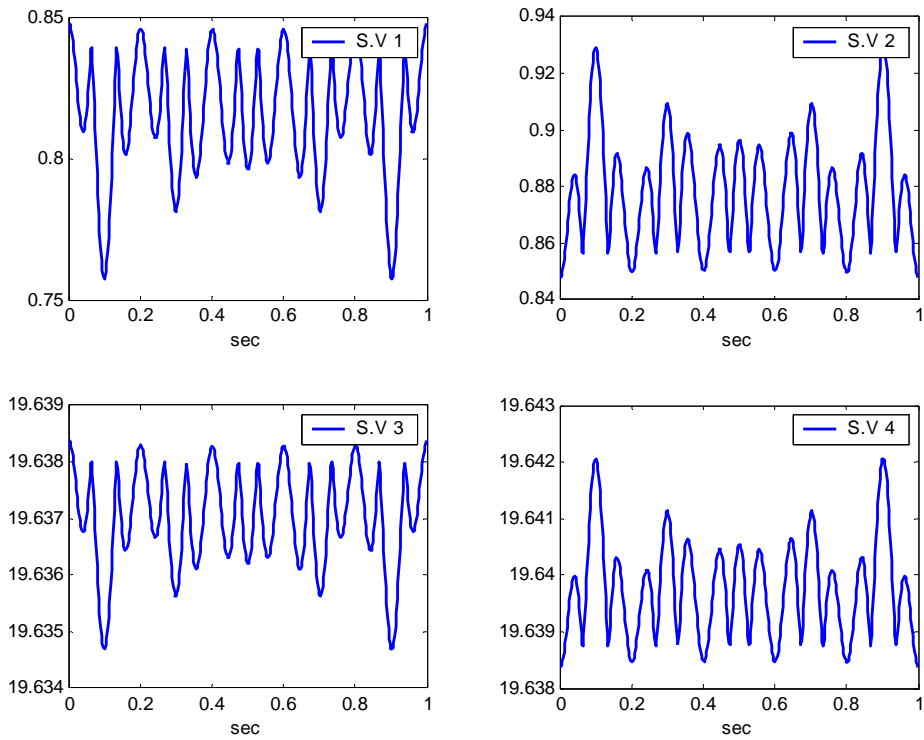


Configure 2: 3 axial Accelerometer and 3 axial Magnetic sensor

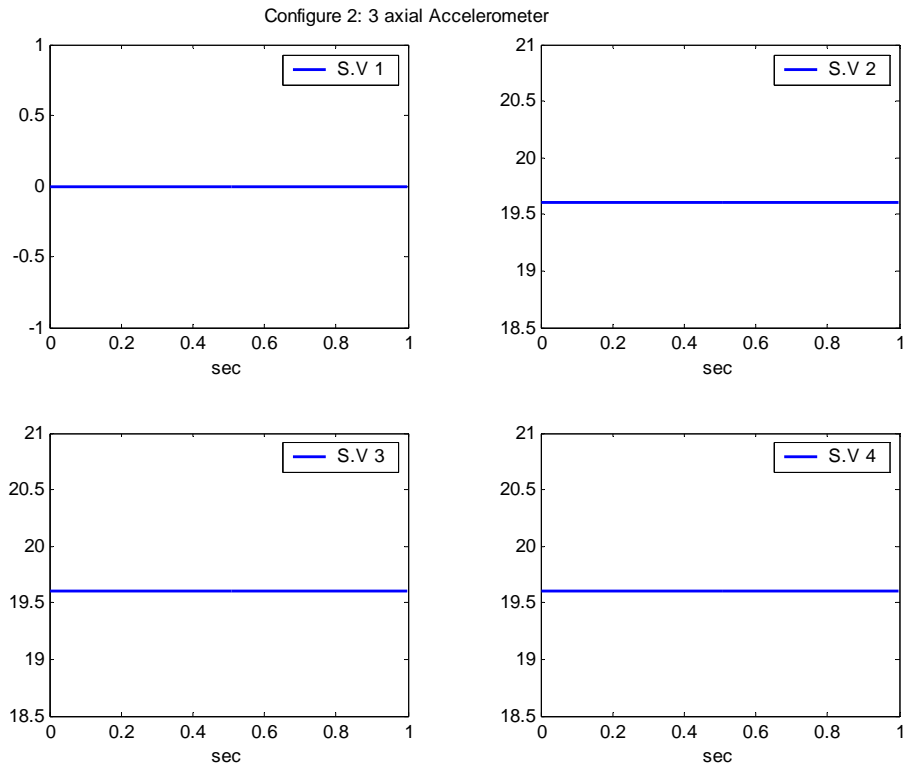


圖(3.9) 直接量測法：3 軸加速規、3 軸磁場感測器的奇異值

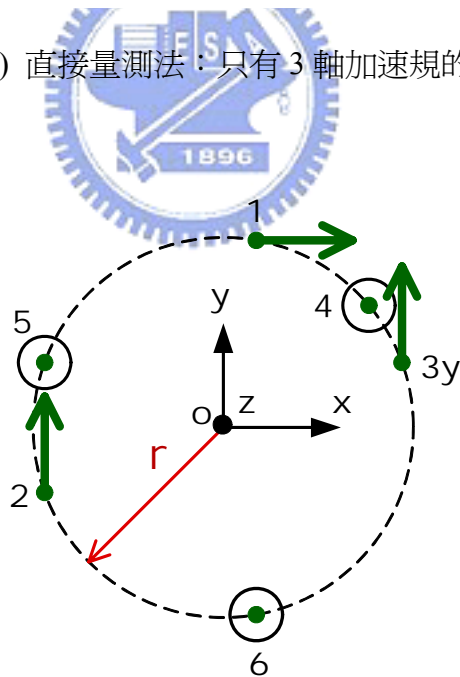
Configure 2: y z axial Accelerometer and x y axial Magnetic sensor



圖(3.10) 直接量測法：y、z 軸加速規，x、y 軸磁場感測器的奇異值



圖(3.11) 直接量測法：只有 3 軸加速規的奇異值



圖(3.12) 直接量測法的加速規配置

把微分方程式(2.16)、(2.23)及量測方程式(3.16)(3.19)(3.20)整理如下所示：

$$\begin{bmatrix} {}^b\dot{\omega}_{3 \times 1} \\ \dot{q}_{4 \times 1} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \left[ \begin{array}{c} J^{-1}(1:3,:) \times \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_{3y} \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_{3y} \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^b\eta_1^T \cdot ({}^b\omega \times ({}^b\omega \times {}^b r_1)) \\ {}^b\eta_2^T \cdot ({}^b\omega \times ({}^b\omega \times {}^b r_2)) \\ {}^b\eta_{3y}^T \cdot ({}^b\omega \times ({}^b\omega \times {}^b r_{3y})) \\ \vdots \\ {}^b\eta_6^T \cdot ({}^b\omega \times ({}^b\omega \times {}^b r_6)) \end{bmatrix} \right) \\ \frac{1}{2\|q\|} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \cdot {}^b\omega_{3 \times 1} \end{array} \right]_{7 \times 1} \quad (3.21)$$

其中 J 為

$$J = \begin{bmatrix} ({}^b r_1 \times {}^b \eta_1)^T & {}^b \eta_1 \\ ({}^b r_2 \times {}^b \eta_2)^T & {}^b \eta_2 \\ ({}^b r_{3y} \times {}^b \eta_{3y})^T & {}^b \eta_{3y} \\ \vdots & \vdots \\ ({}^b r_6 \times {}^b \eta_6)^T & {}^b \eta_6 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$



量測方程式的分為二個部分

● 四元數間接量測法

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(q_1 q_2 + q_3 q_4)}{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \\ \frac{-2(q_2 q_4 - q_1 q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \frac{2(q_1 q_4 + q_2 q_3)}{q_4^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

● 四元數直接量測法

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) + b(2q_1q_3 - 2q_2q_4) \\ a(2q_1q_2 - 2q_3q_4) + b(2q_1q_4 + 2q_2q_3) \\ (2q_1q_4 + 2q_2q_3)g \\ (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

其中  $n$  為狀態雜訊， $v$  為量測雜訊。

### 3-3 決定擴增卡爾曼估測器參數

因為狀態雜訊  $n$  及量測雜訊  $v$ ，皆為高斯雜訊(Gaussian noise)，因此

$$\begin{aligned} n &= N(0, \sigma_n^2) \\ v &= N(0, \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

把(3.21)式做離散化，如下所示

$$\begin{bmatrix} \omega_{3 \times 1}(k+1) \\ q_{4 \times 1}(k+1) \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \omega_{3 \times 1}(k) \\ q_{4 \times 1}(k) \end{bmatrix}_{7 \times 1} + \Delta \left[ \begin{array}{l} J^{-1}(1:3,:) \times \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \eta_1^T \cdot (\omega \times (\omega \times r_1)) \\ \vdots \\ \eta_6^T \cdot (\omega \times (\omega \times r_6)) \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2\|q\|} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \cdot \omega_{3 \times 1} \end{array} \right]_{7 \times 1} + \Delta \left[ \begin{array}{l} J^{-1}(1:3,:) \times \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix} \\ 0_{4 \times 1} \end{array} \right]_{7 \times 1} \quad (3.25)$$

$\Delta$  為取樣周期，由令上式的最後一項為

$$N = \Delta \begin{bmatrix} J^{-1}(1:3,:) \times \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_6 \end{bmatrix} \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}_{7 \times 1} \quad (3.26)$$

因此狀態雜訊的協方差矩陣(state noise covariance matrix)Q 為

$$Q_k = E[NN^T] = \Delta^2 \begin{bmatrix} J^{-1} \cdot E[nn^T] \cdot (J^{-1})^T_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{7 \times 7} \quad (3.27)$$

由間接量測法(3.21)及直接量測法(3.22)的最後一項可直接求得量測雜訊的協方差矩陣 (measurement noise covariance matrix) $R_k$

$$R_k = E[vv^T] \quad (3.28)$$

把求得的離散的狀態方程式(3.25)、量測方程式(3.22)(3.23)、狀態雜訊協方差矩陣 (process noise covariance )(3.27) 及量測雜訊協方差矩陣 (measurement noise covariance)(3.28)代入圖(3.1)擴增卡爾曼估測器流程圖及圖(3.2)疊代卡爾曼估測器流程圖，以求得最佳的狀態估測。



## 第四章 模擬及討論

爲了驗證前述之理論，故用 MATLAB 進行模擬，令取樣頻率爲 400HZ，利用電腦產生包含高斯分布的隨機雜訊，其平均值爲零，給予加速規的雜訊標準差爲  $0.1\text{m/sec}^2$ ，而磁場感測器雜訊標準差  $0.01\text{gauss}$ ，並設計各種運動方式來瞭解演算法之特性。

Sensor Parameter	Unit	INS Quality		
		High	Medium	Low
Accelerometer bias	$\mu\text{g}$	$\leq 50$	200-500	$\geq 1000$
Gyro bias	deg/hour	$\leq 0.01$	0.1~1.0	$\geq 10$
Accelerometer white noise	$(\mu\text{g})^2/\text{Hz}$	$\leq 100$	~2500	>2500
Gyro white noise	$(\text{deg/s})^2/\text{Hz}$	$\leq 10^{-9}$	~ $10^{-6}$	> $10^{-6}$

表(4.1) 慣性感測器的偏差及雜訊

### 4-1 三軸旋轉運動

輸入  $\omega_x \sim \omega_z$  角速度皆爲弦波訊號，其訊號如下

$$\omega_x = 1.0966 \times \sin(2\pi f \cdot t)$$

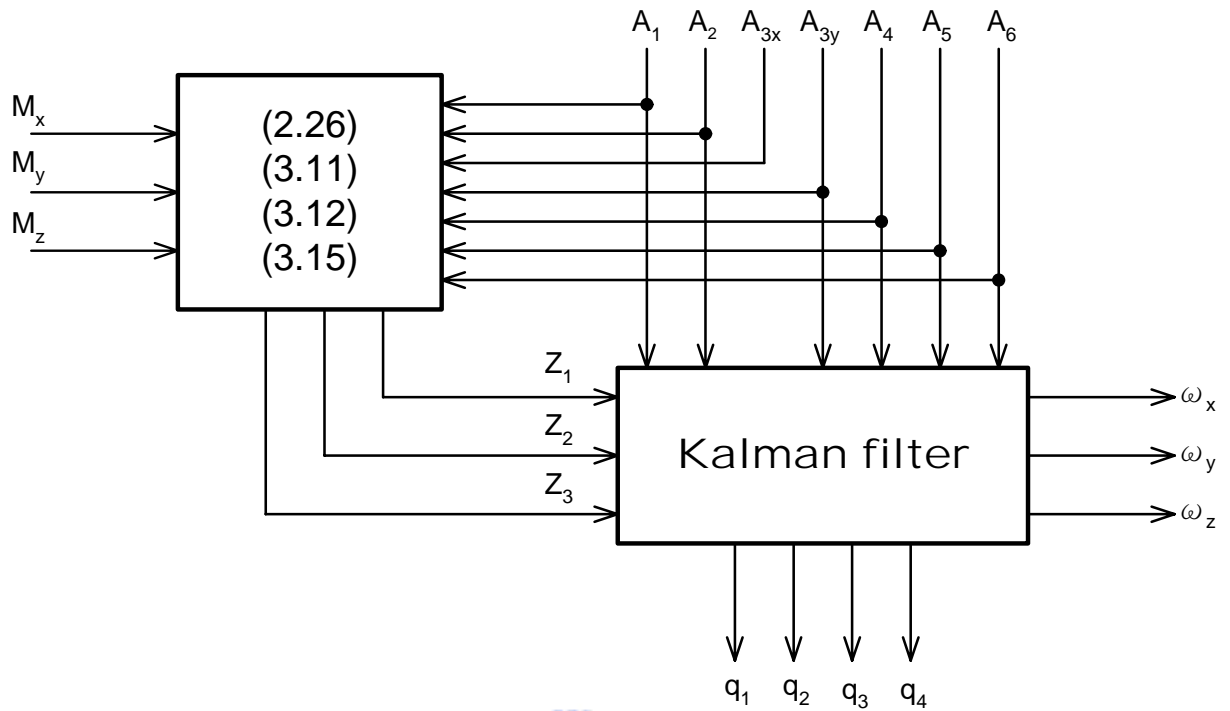
$$\omega_y = 2.1932 \times \sin(2\pi f \cdot t)$$

$$\omega_z = 2.1932 \times \sin(2\pi f \cdot t)$$

$$f = 2$$

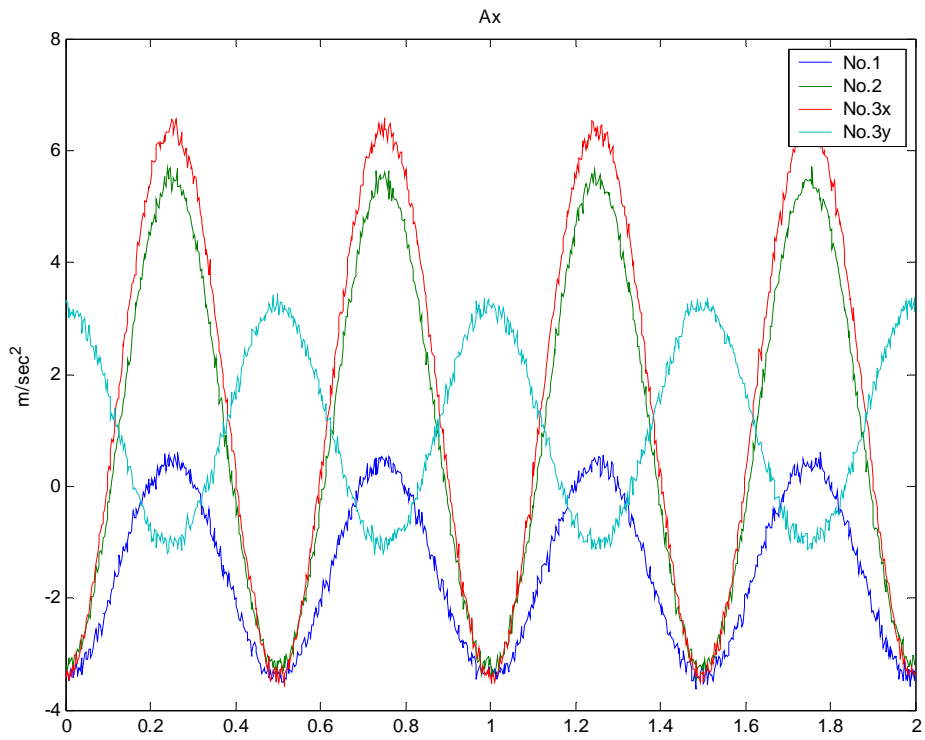
$$t = 0 \sim 2\text{sec}$$

### 4-1.1 間接量測法

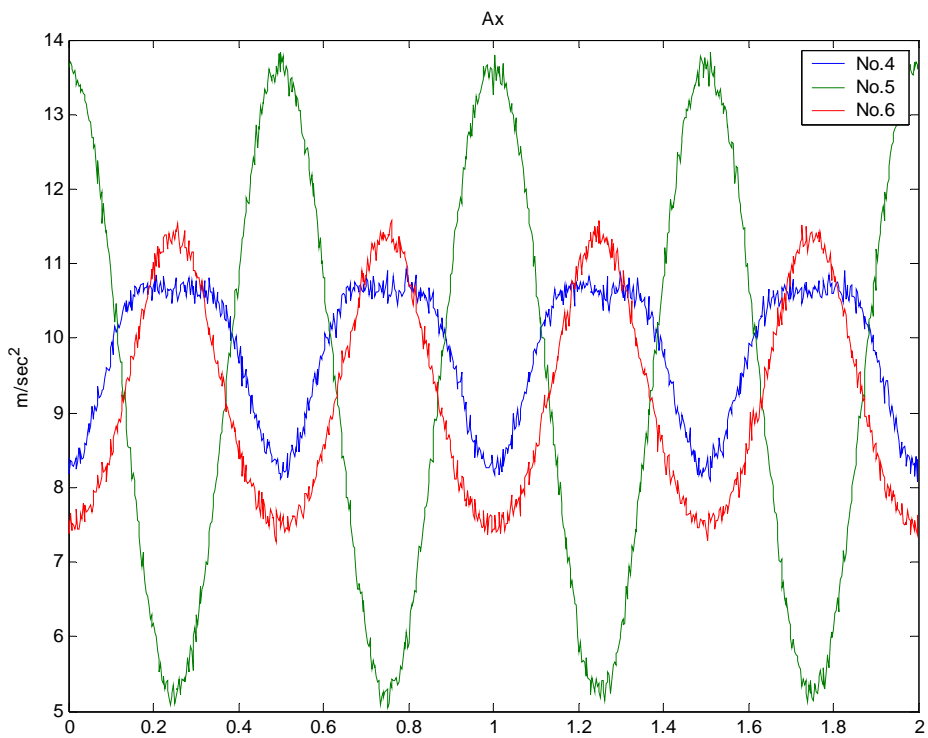


圖(4.1) 間接量測法訊號流程

輸入各軸的角速度，故可得 $A_1 \sim A_6$ 加速規的輸出訊號如圖(4.2)、圖(4.3)及磁場感測器所量測的訊號如圖(4.4)。利用公式(2.26)(3.11)(3.12)(3.15)計算之後所得的量測值如圖(4.5)，依序對照方程式的 $Z_1 \sim Z_3$ 。把以上所獲得的資訊如圖(4.1)代入擴增卡爾曼估測器及疊代卡爾曼估測器運算法，因此可獲得 $\omega_x \sim \omega_z$ 角速度的估測值以及四元素 $q_1 \sim q_4$ 的估測值，其模擬結果如圖(4.6)(4.8)，誤差的收斂情形的如圖(4.7)(4.9)。因為尤拉角比四元數而言較有物理意義，故利用公式(2.15)把所估測的四元素轉換成尤拉角如圖(4.10)。在圖(4.10)中淺藍色的'x'為使用加速規及磁場感測器所直接量得的尤拉角，因此由圖(4.10)中，可發現利用擴增卡爾曼估測器及疊代卡爾曼估測器所估測姿態的確實減少了量測雜訊的影響。圖(4.12)(4.13)(4.14)為角速度及姿態的誤差標準差(state error standard deviation)收斂情況，表(4.2)(4.3)(4.4)為經過 2 秒時估測器所計算的誤差標準差，可知IKF收斂精度比EKF來的好一點。

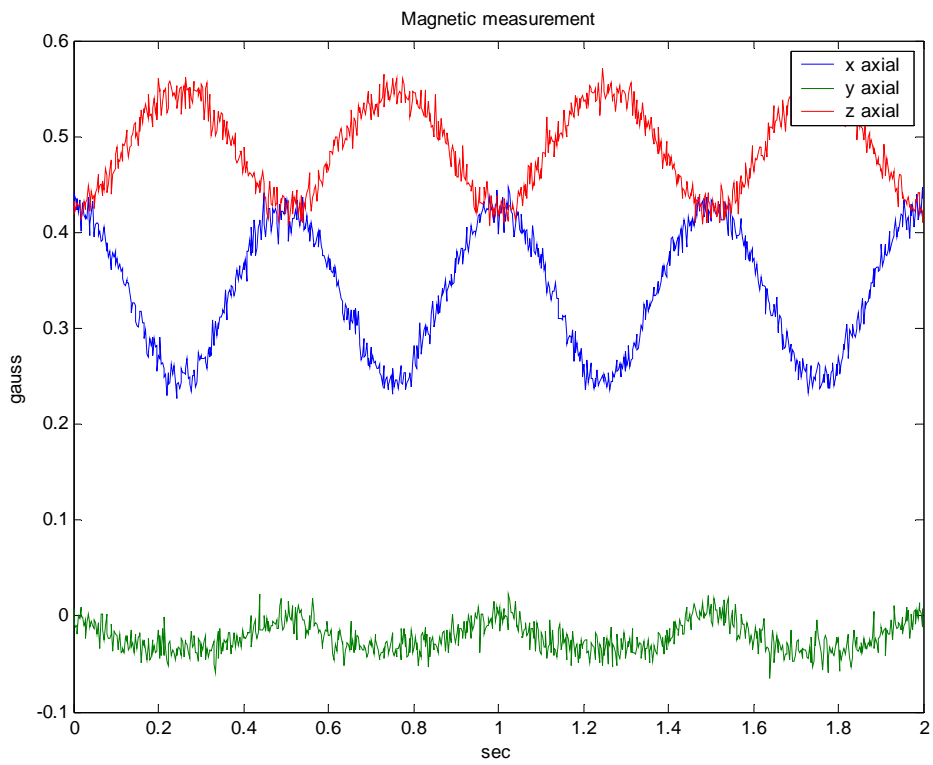


圖(4.2) 間接量測法：3 軸運動之 A1~A3y 加速規訊號

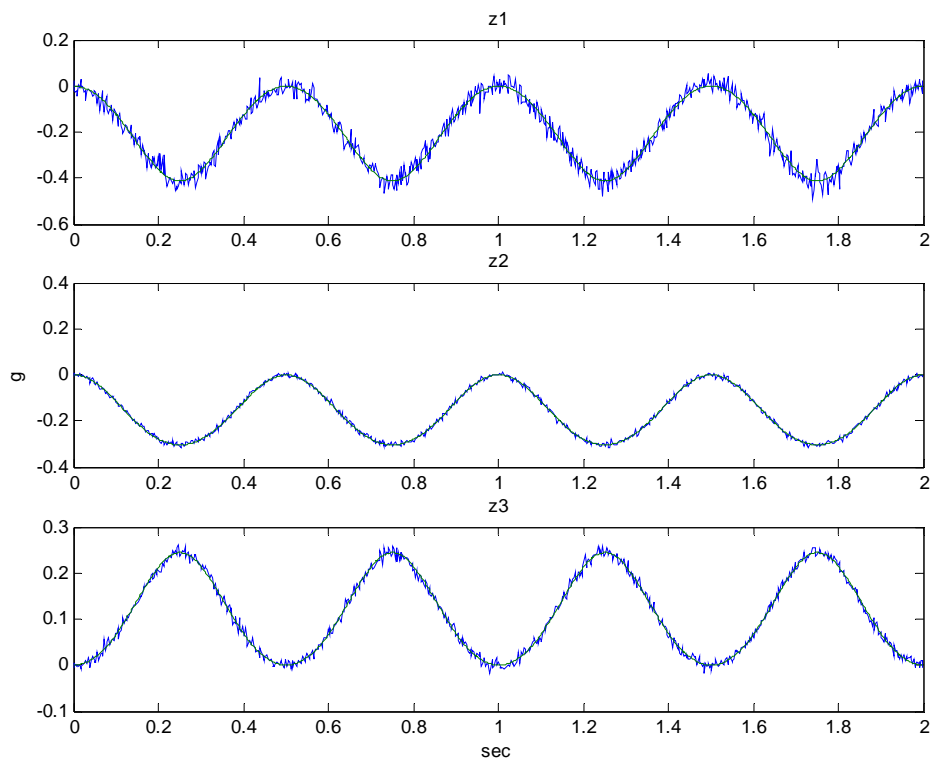


圖(4.3) 間接量測法：3 軸運動之 A4~A6 加速規訊號

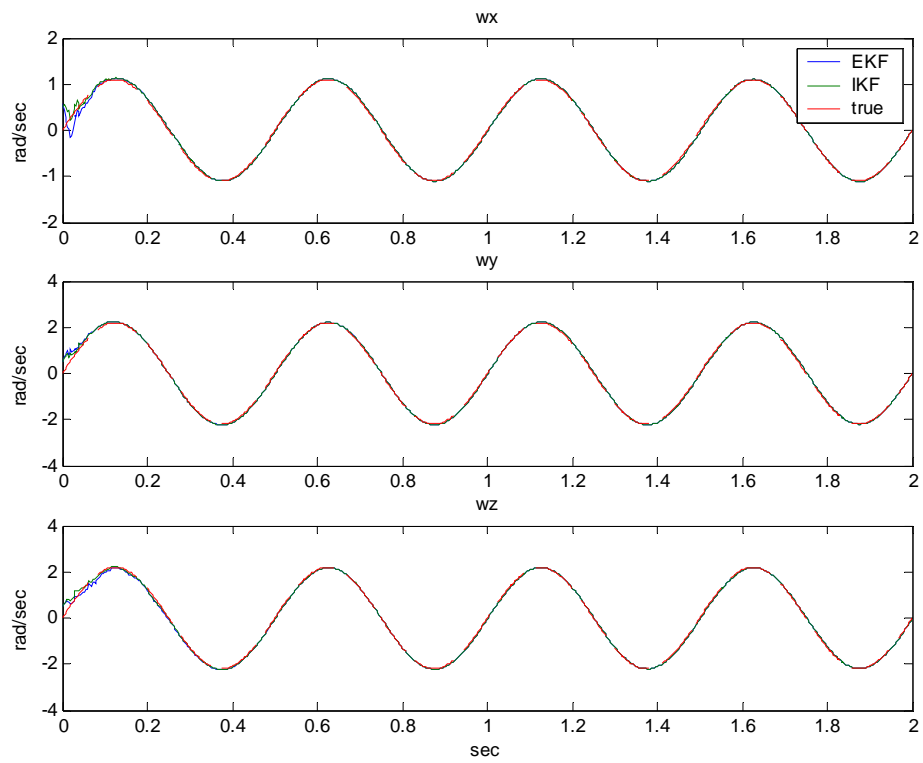




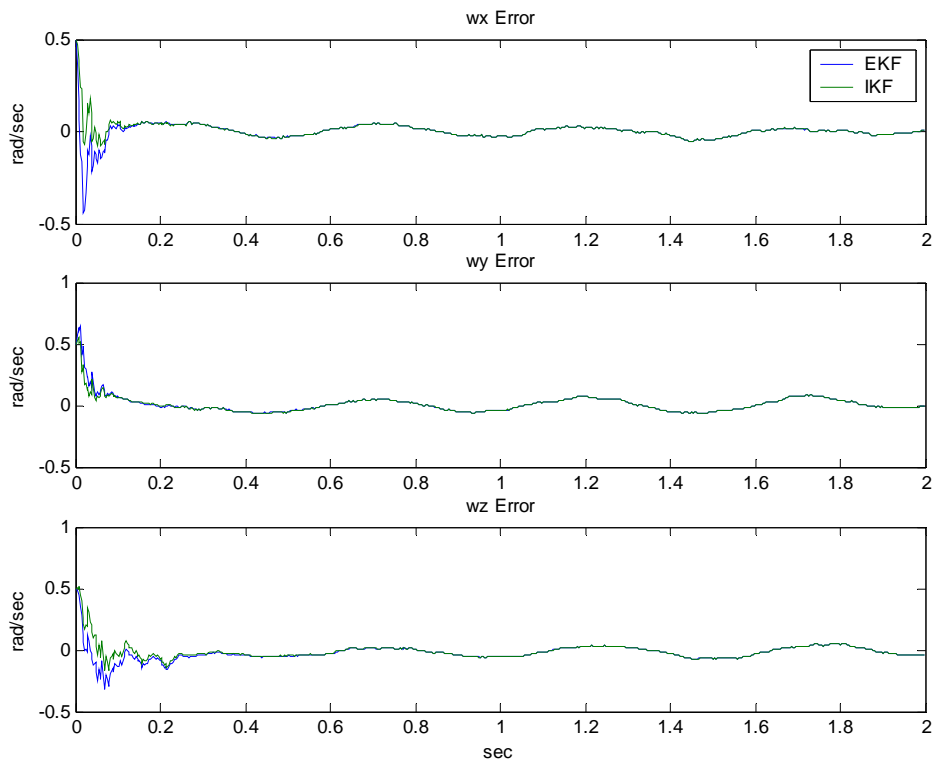
圖(4.4) 間接量測法：3 軸運動之  $M_x \sim M_z$  磁場感測器訊號



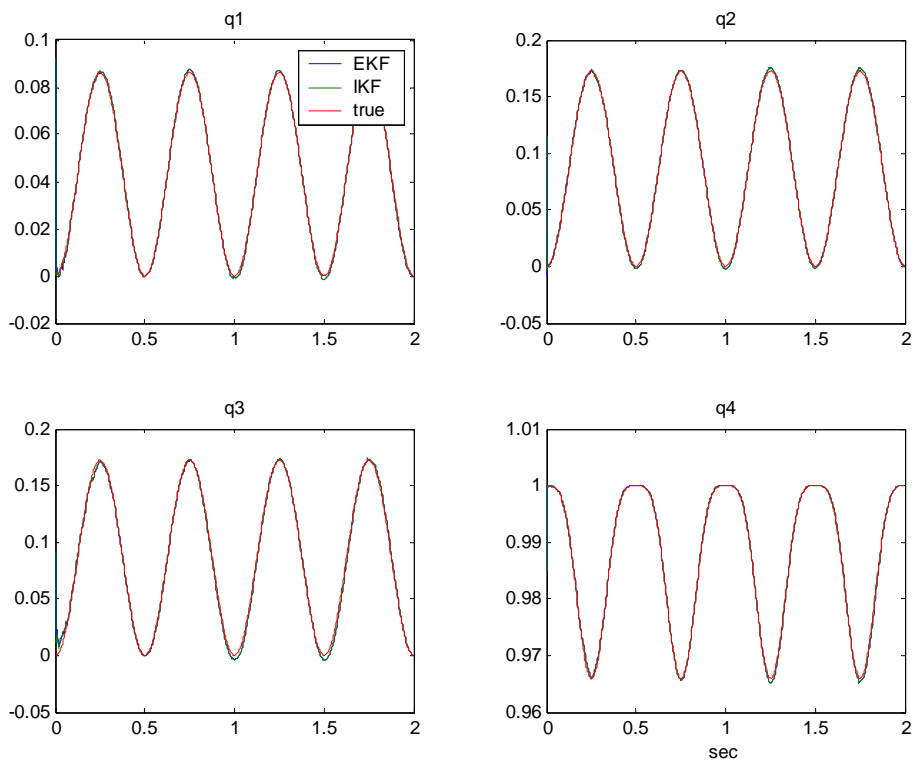
圖(4.5) 間接量測法：3 軸運動之  $z_1 \sim z_3$



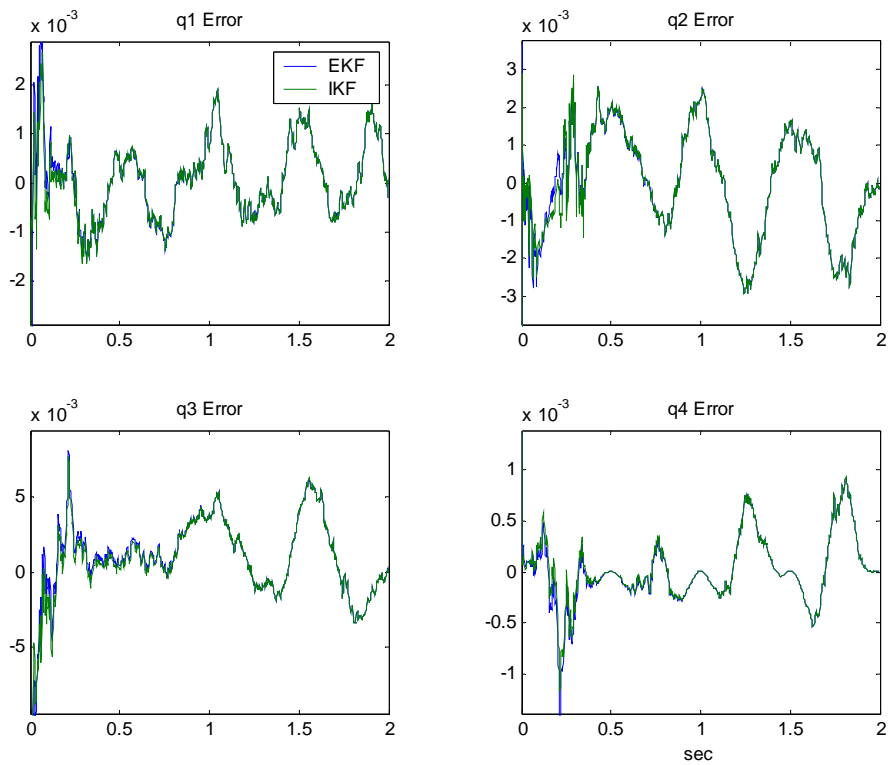
圖(4.6) 間接量測法：3 軸運動之角速度估測值



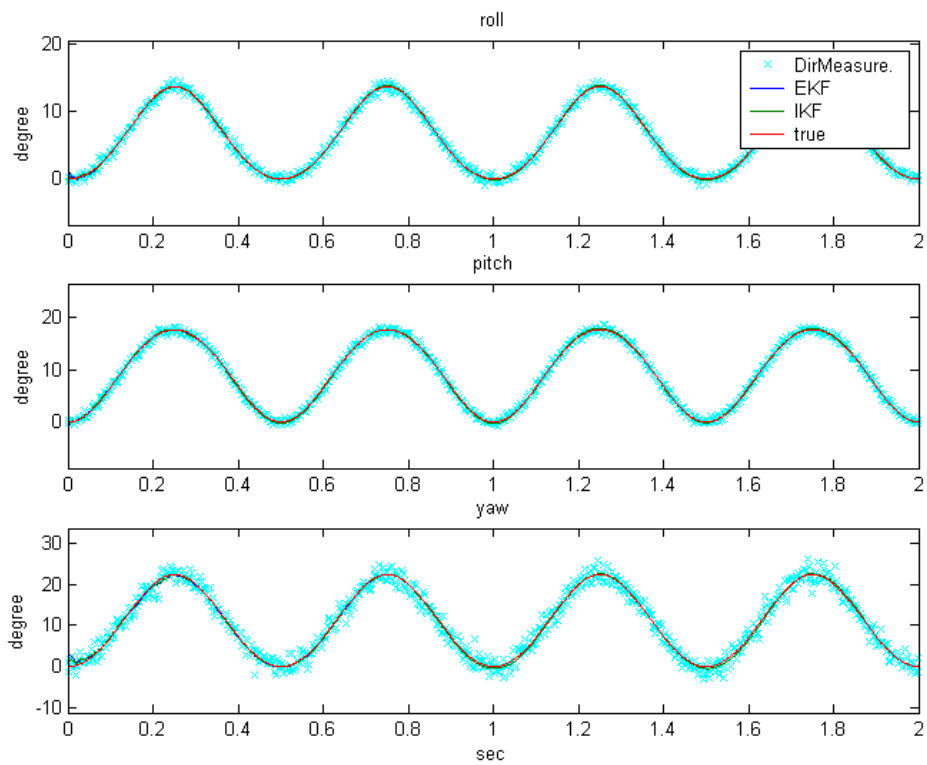
圖(4.7) 間接量測法：3 軸運動之角速度誤差值



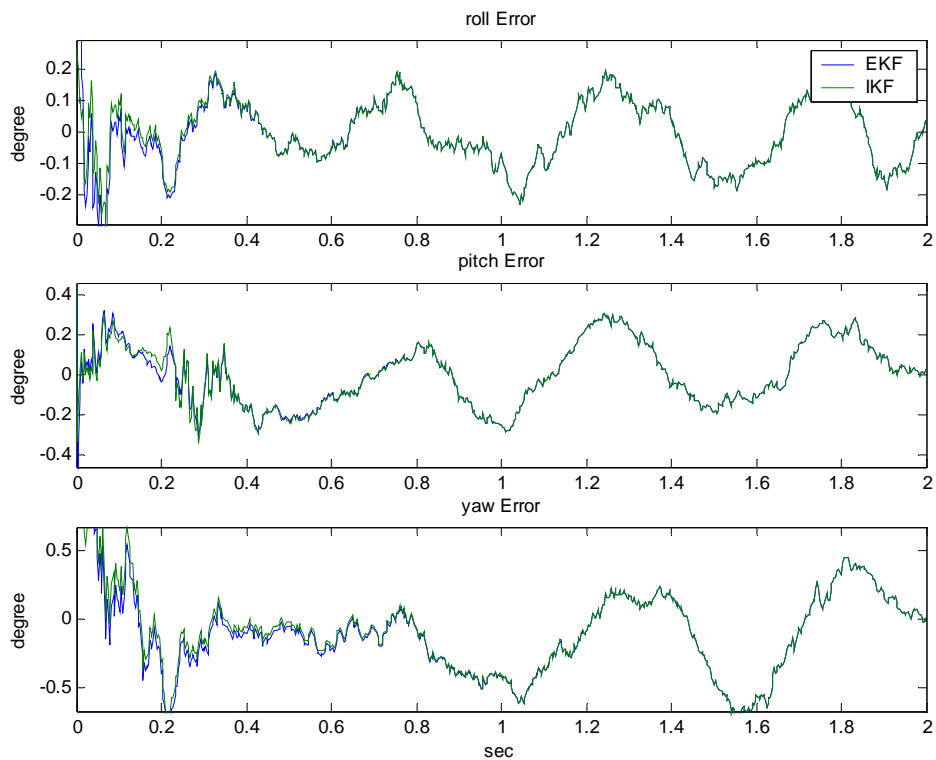
圖(4.8) 間接量測法：3 軸運動之四元數估測值



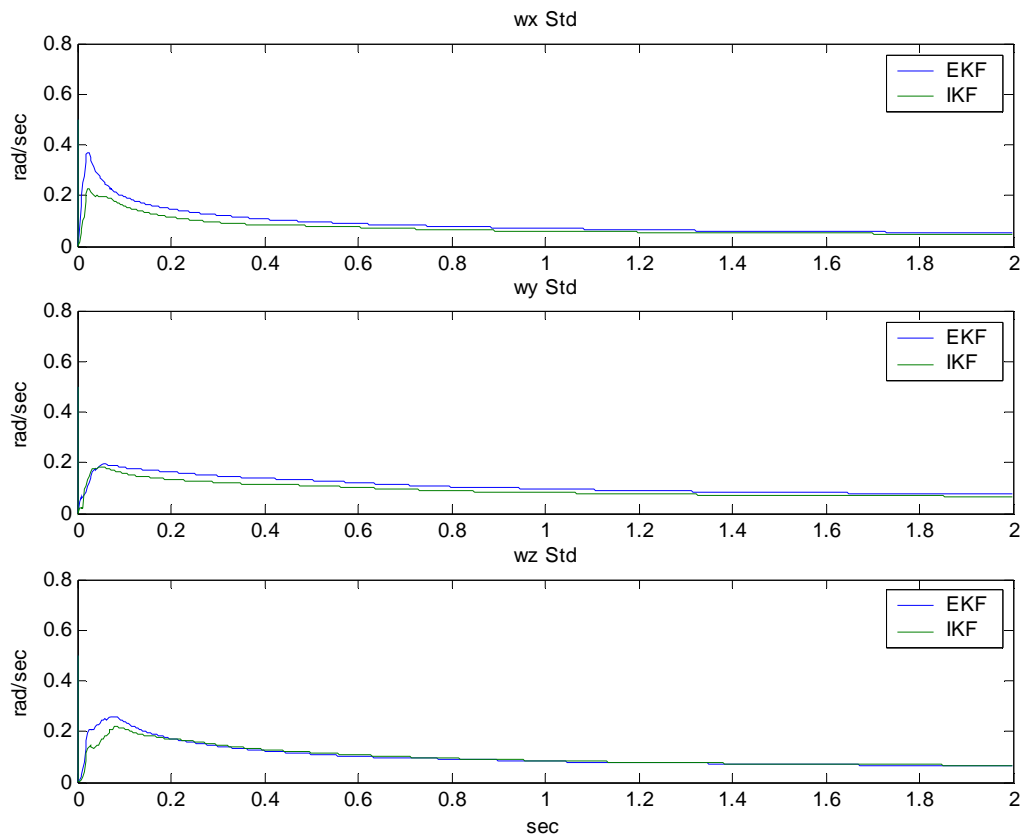
圖(4.9) 間接量測法：3 軸運動之四元數誤差值



圖(4.10) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角估測值



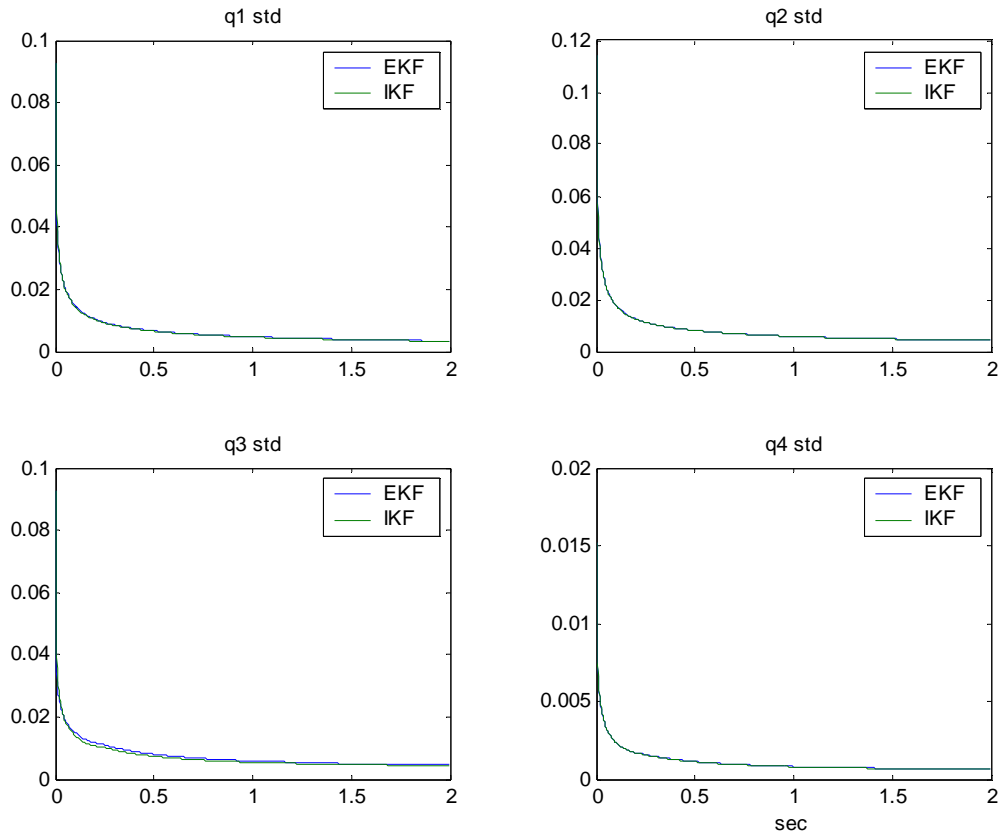
圖(4.11) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差值



圖(4.12) 間接量測法：3 軸運動之角速度誤差標準差

	$\omega_x$ (rad/sec)	$\omega_y$ (rad/sec)	$\omega_z$ (rad/sec)
EKF	0.0534215	0.0603691	0.0825561
IKF	0.0530846	0.0679526	0.0816686

表(4.2) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時角速度誤差標準差

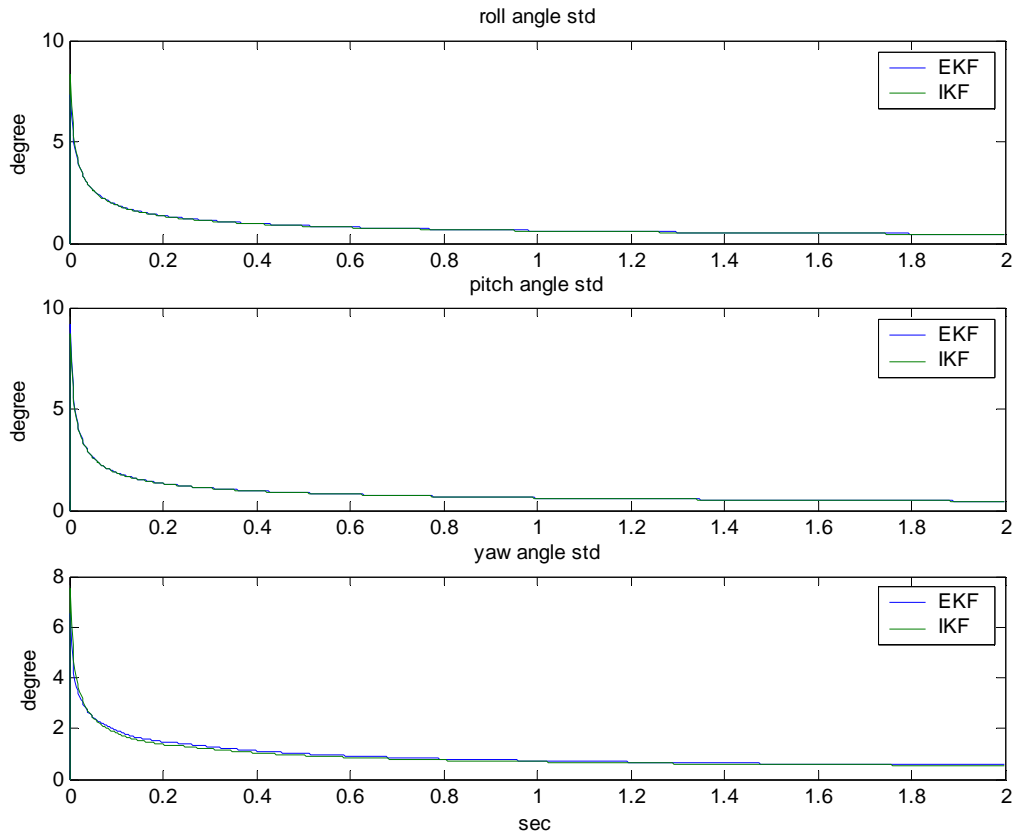


圖(4.13) 間接量測法：3 軸運動之四元數誤差標準差



	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
EKF	0.00179418	0.00118782	0.00319378	0.000548506
IKF	0.00177664	0.00117169	0.00317014	0.000540283

表(4.3) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時四元數誤差標準差



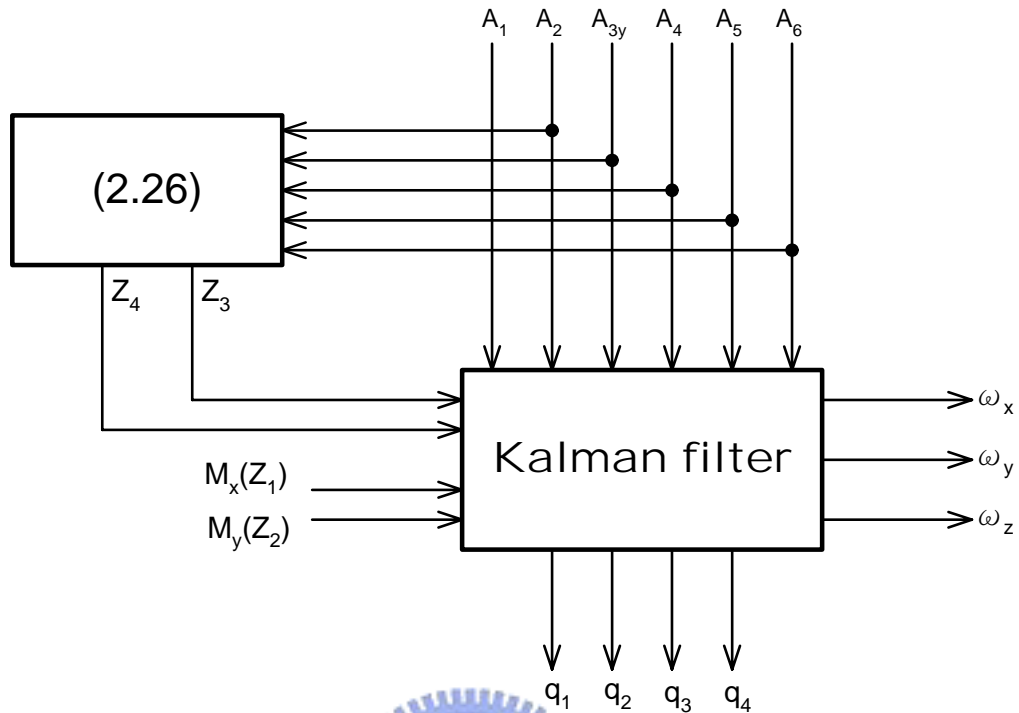
圖(4.14) 間接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差標準差



	Roll (degree)	Pitch (degree)	Yaw (degree)
EKF	0.193084	0.135928	0.358407
IKF	0.192943	0.133034	0.355625

表(4.4) 間接量測法：3 軸運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差

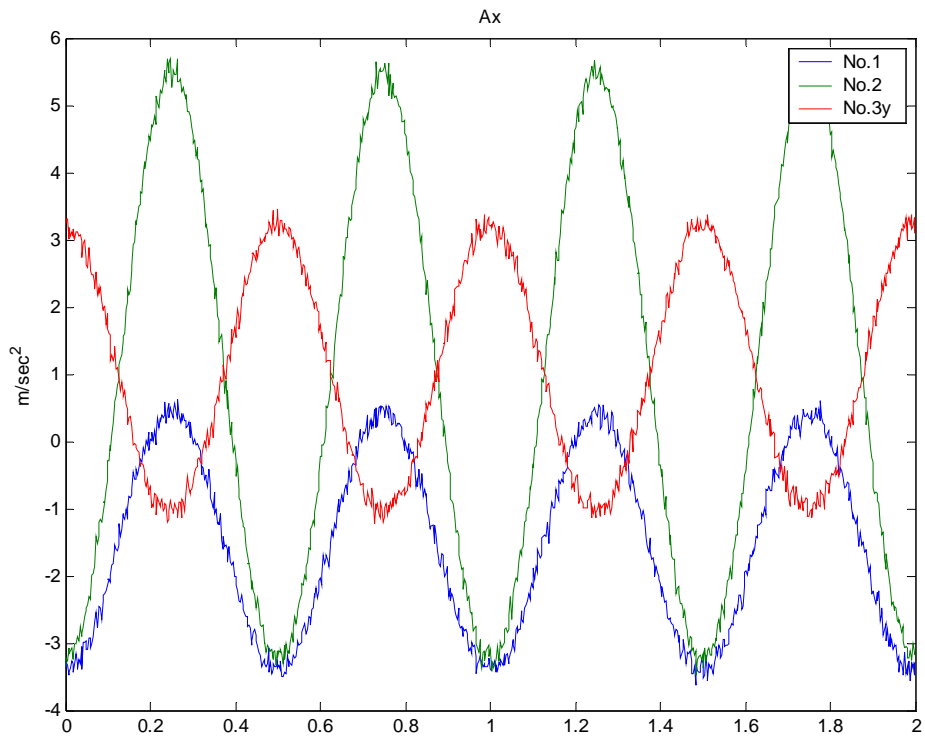
#### 4-1.2 直接量測法



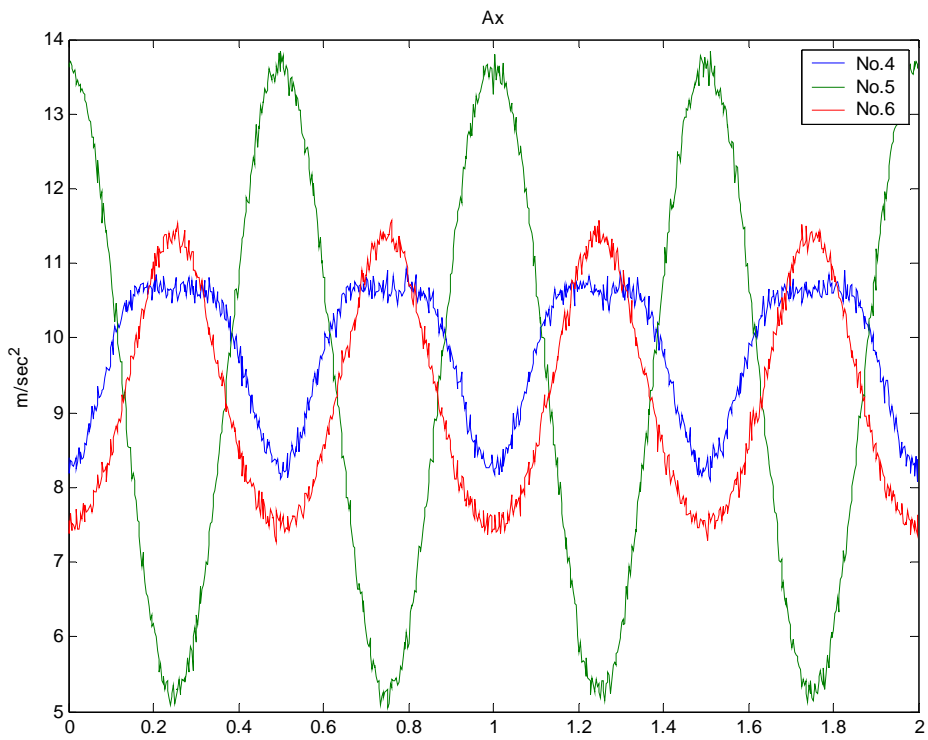
圖(4.15) 直接量測法訊號流程

如 3-2.2 節所述，使用直接量測法可把  $A_{3x}$  加速規移除，利用  $A_2 \sim A_6$  加速規所量測的值經由(2.26)式計算可以獲得  $Z_3$ 、 $Z_4$  的值。在磁場感測器方面，也移除  $z$  軸感測器，而此時在物體上所測量到的  $x$  軸及  $y$  軸的磁場強度直接輸入卡爾曼估測器的運算法中，其訊號流程如圖(4.15)。圖(4.16)(4.17)(4.18)，為加速規及磁場感測器量測的值。由加速規  $A_2 \sim A_6$  及磁場感測器  $M_x$ 、 $M_y$  因此可得到  $Z_1 \sim Z_4$  如圖(4.19)。代入擴增卡爾曼估測器及疊代卡爾曼估測器運算法，因此可獲得  $\omega_x \sim \omega_z$  角速度的估測值以及姿態估測值，其模擬結果如圖(4.20)(4.22)(4.24)，誤差的收斂情形的如圖(4.21)(4.23)(4.25)。在圖(4.24)中淺藍色的 'x' 為使用加速規及磁場感測器直接量得的尤拉角，因此由圖(4.24)中，可發現利用擴增卡爾曼估測器及疊代卡爾曼估測器所估測姿態的確實減少了量測雜訊的影響。圖(4.26)(4.27)(4.28)為角速度及姿態的誤差標準差收斂情況，表(4.5)(4.6)(4.7)為經過 2 秒時估測器所計算的誤差標準差，可知 IKF 收斂精度比 EKF 來的好一點。

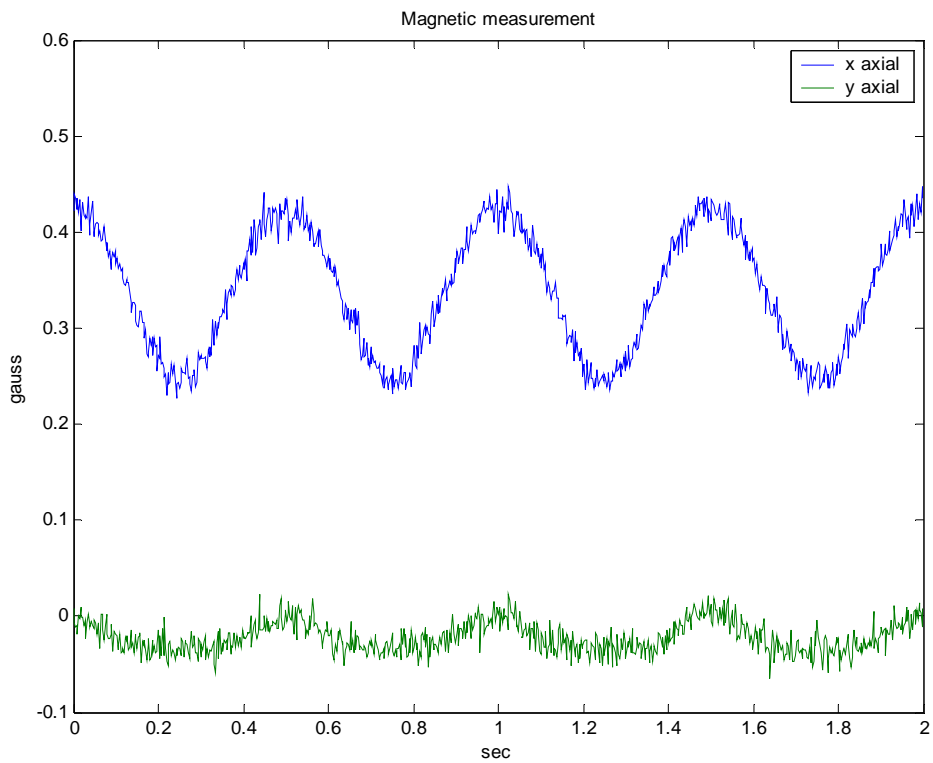




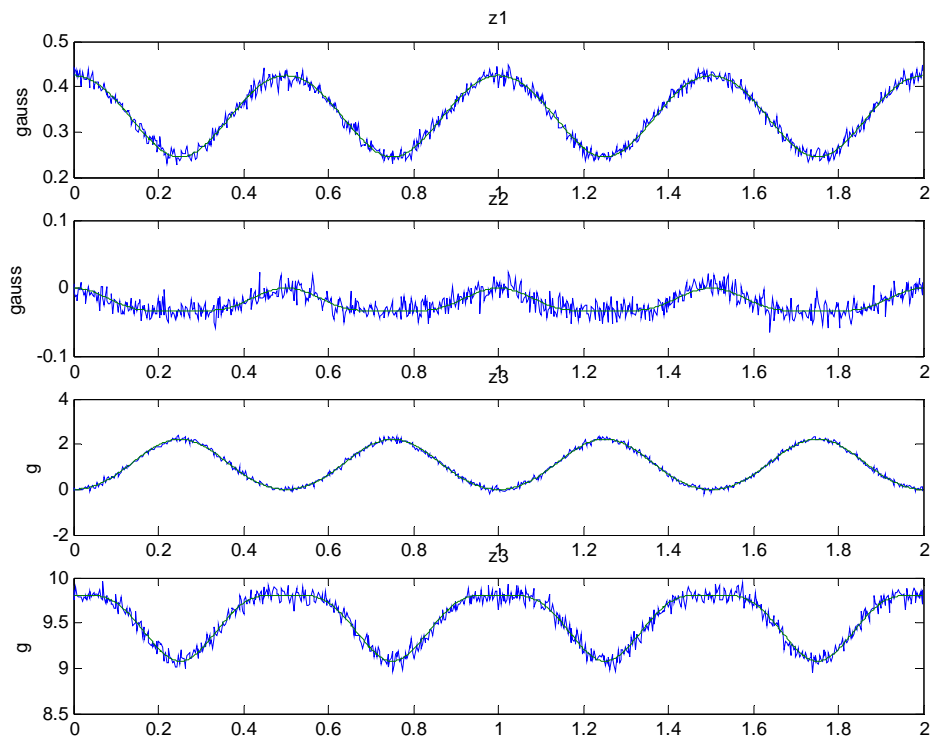
圖(4.16) 直接量測法：3 軸運動之 A1~A3y 加速規訊號



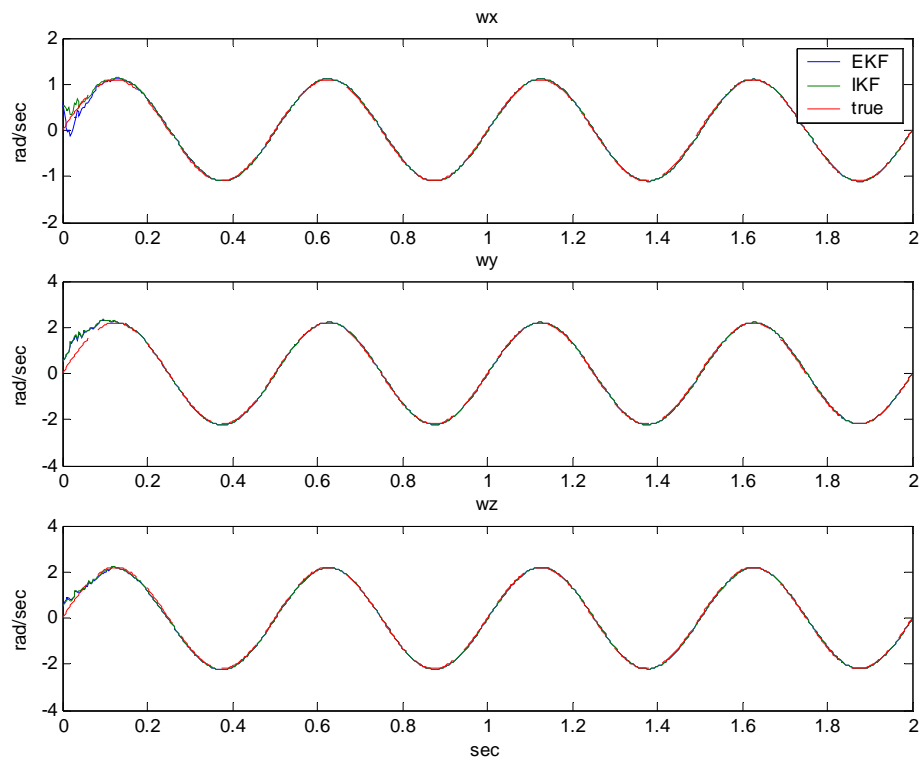
圖(4.17) 直接量測法：3 軸運動之 A4~A6 加速規訊號



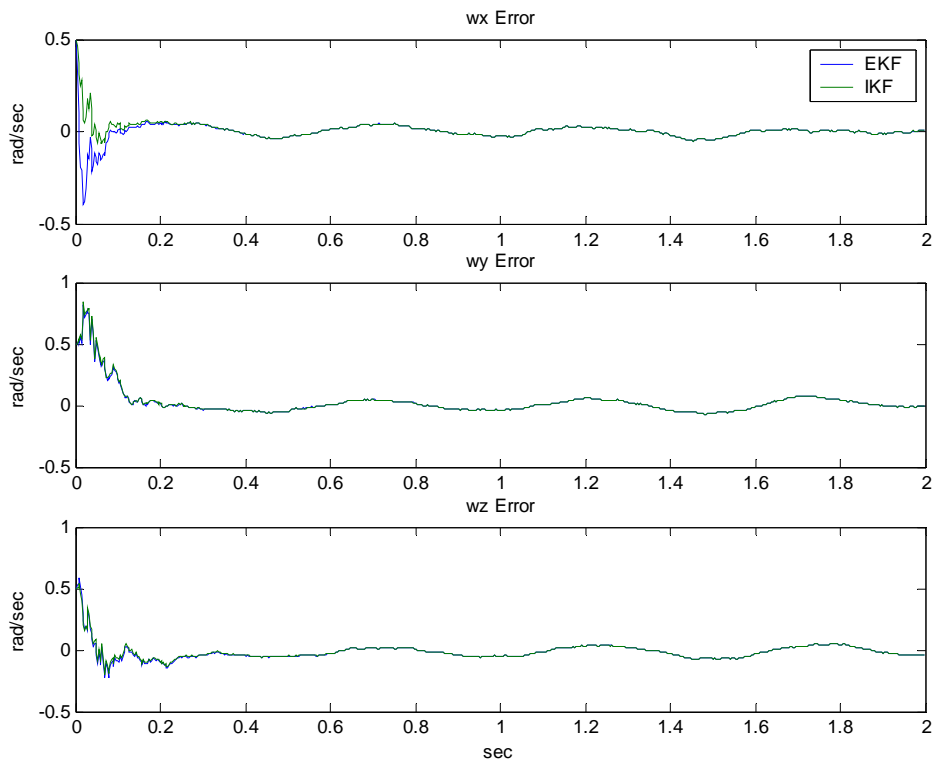
圖(4.18) 直接量測法：3 軸運動之  $M_x$ 、 $M_y$  磁場感測器訊號



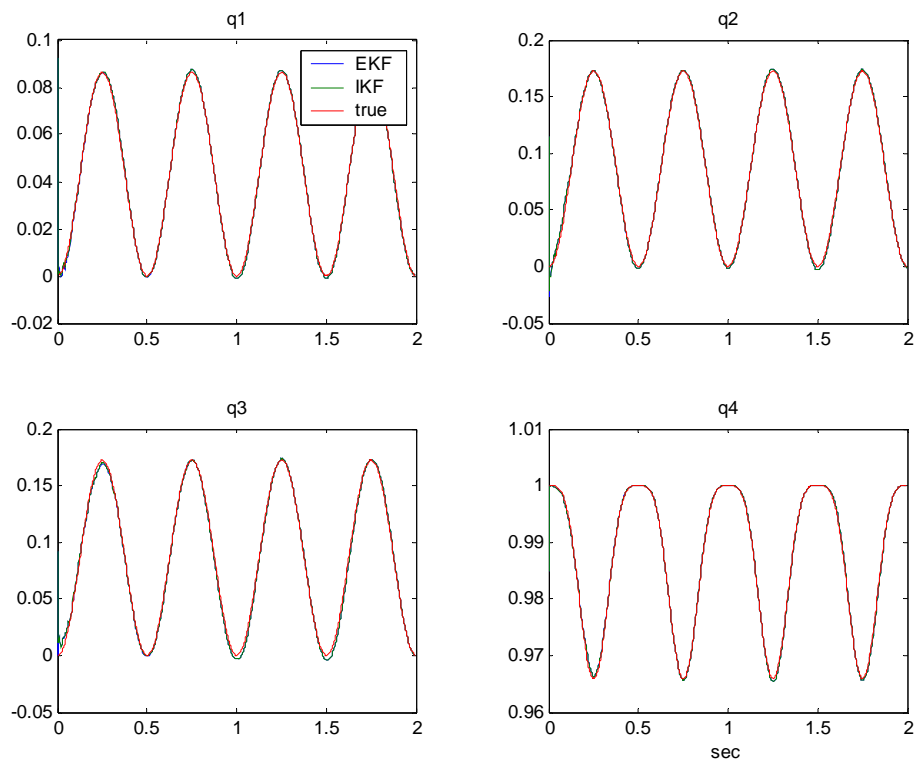
圖(4.19) 直接量測法：3 軸運動之  $z_1 \sim z_4$  訊號



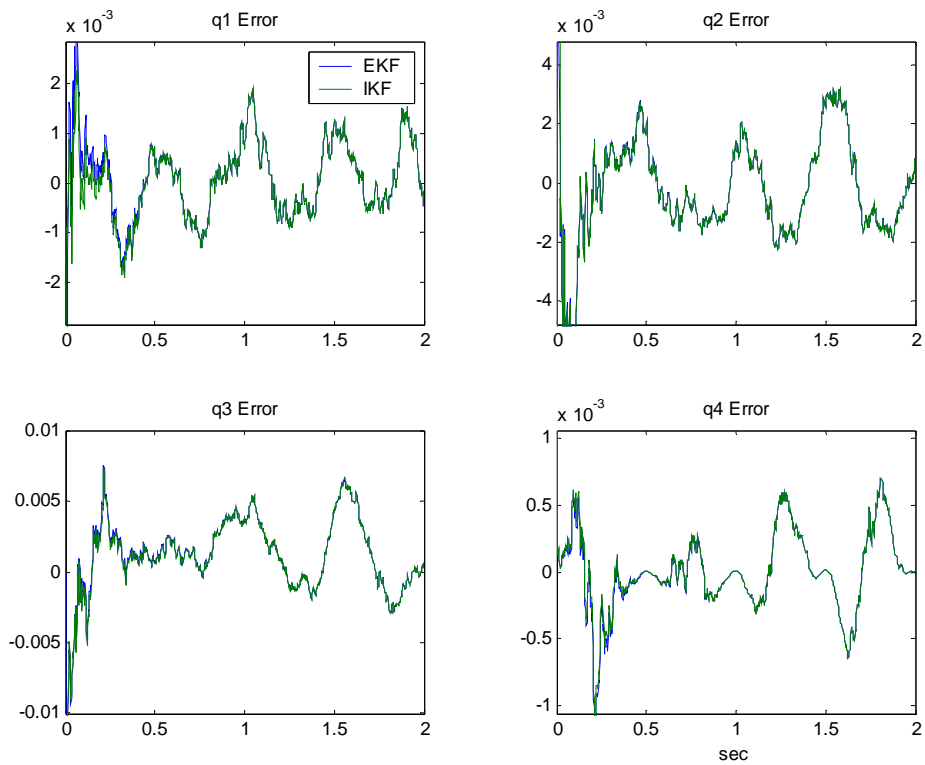
圖(4.20) 直接量測法：3 軸運動之角速度估測值



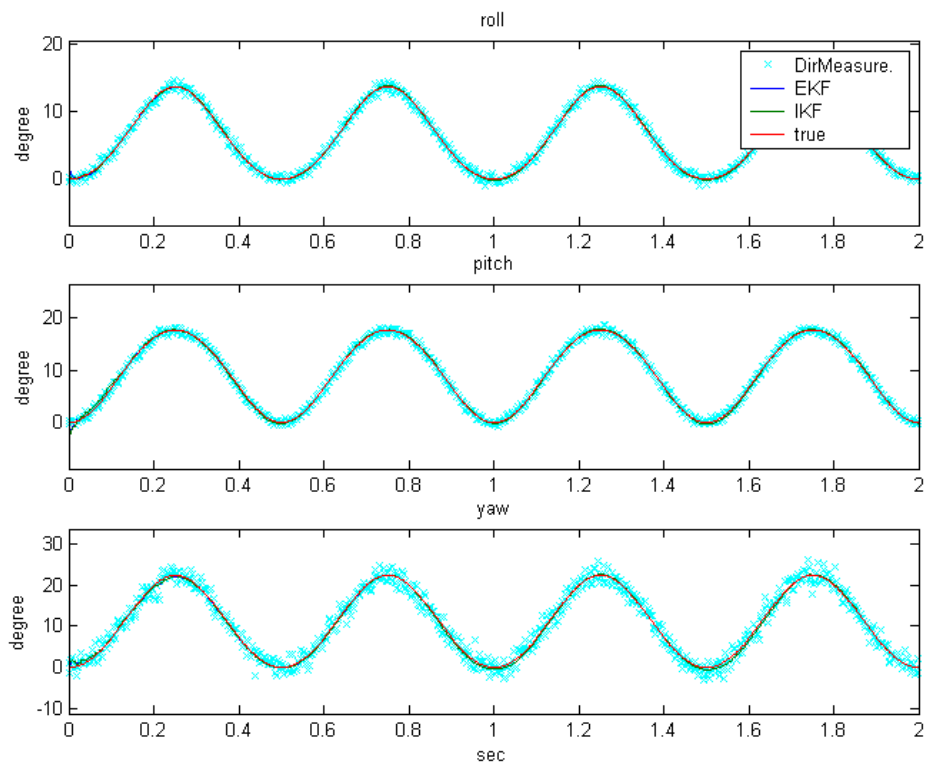
圖(4.21) 直接量測法：3 軸運動之角速度誤差值



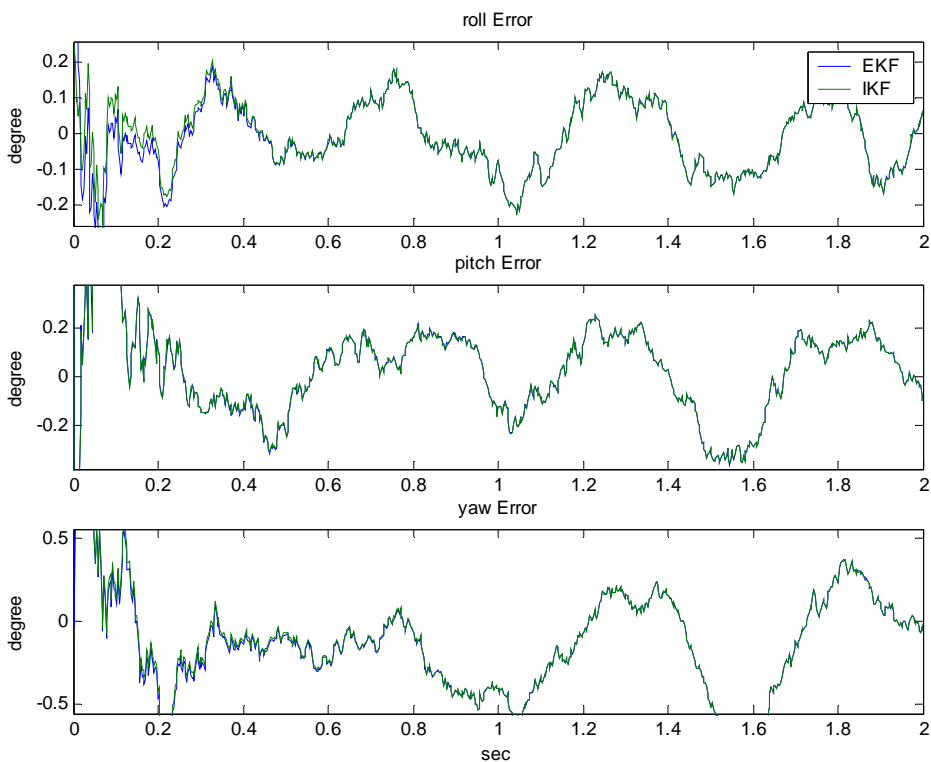
圖(4.22) 直接量測法：3 軸運動之四元數估測值



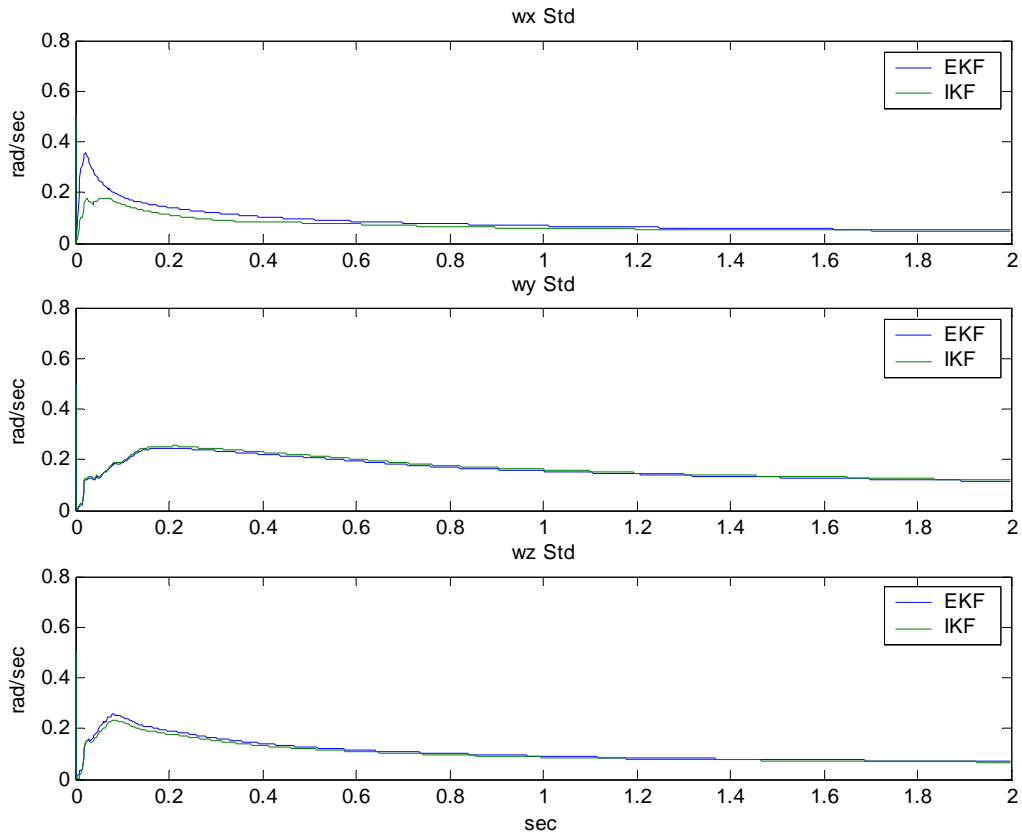
圖(4.23) 直接量測法：3 軸運動之四元數誤差值



圖(4.24) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角估測值



圖(4.25) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差值

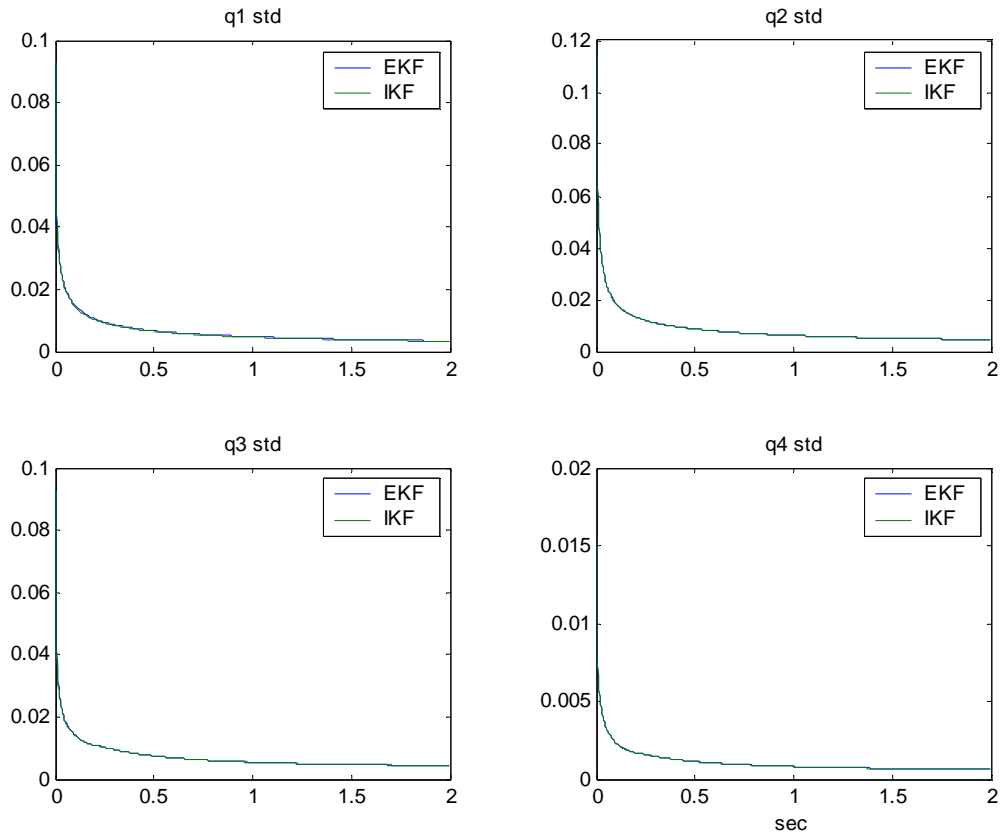


圖(4.26) 直接量測法：3 軸運動之角速度誤差標準差



	$\omega_x$ (rad/sec)	$\omega_y$ (rad/sec)	$\omega_z$ (rad/sec)
EKF	0.0543299	0.069509	0.0785577
IKF	0.0549644	0.0730245	0.0790014

表(4.5) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時角速度誤差標準差

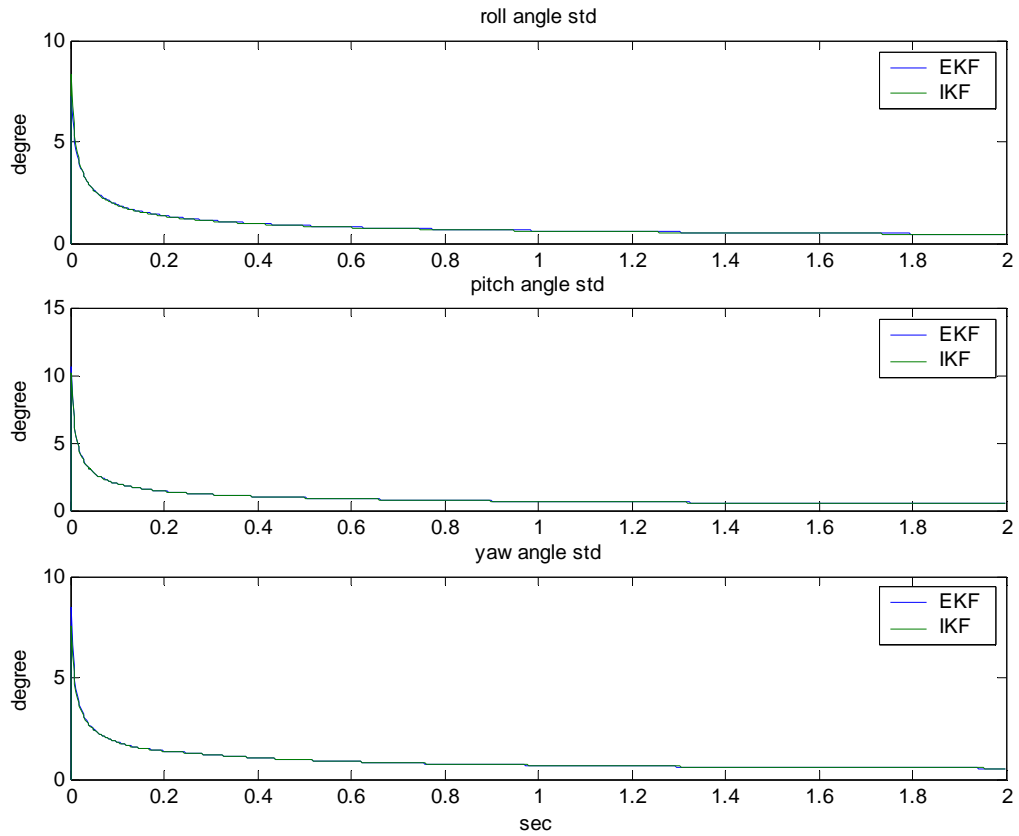


圖(4.27) 直接量測法：3 軸運動之四元數誤差標準差



	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
EKF	0.00182298	0.00154747	0.00296722	0.000509682
IKF	0.00183037	0.00156135	0.00297157	0.000510061

表(4.6) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時四元數誤差標準差



圖(4.28) 直接量測法：3 軸運動之尤拉角誤差標準差



	Roll (degree)	Pitch (degree)	Yaw (degree)
EKF	0.194311	0.180333	0.335605
IKF	0.194922	0.18275	0.336073

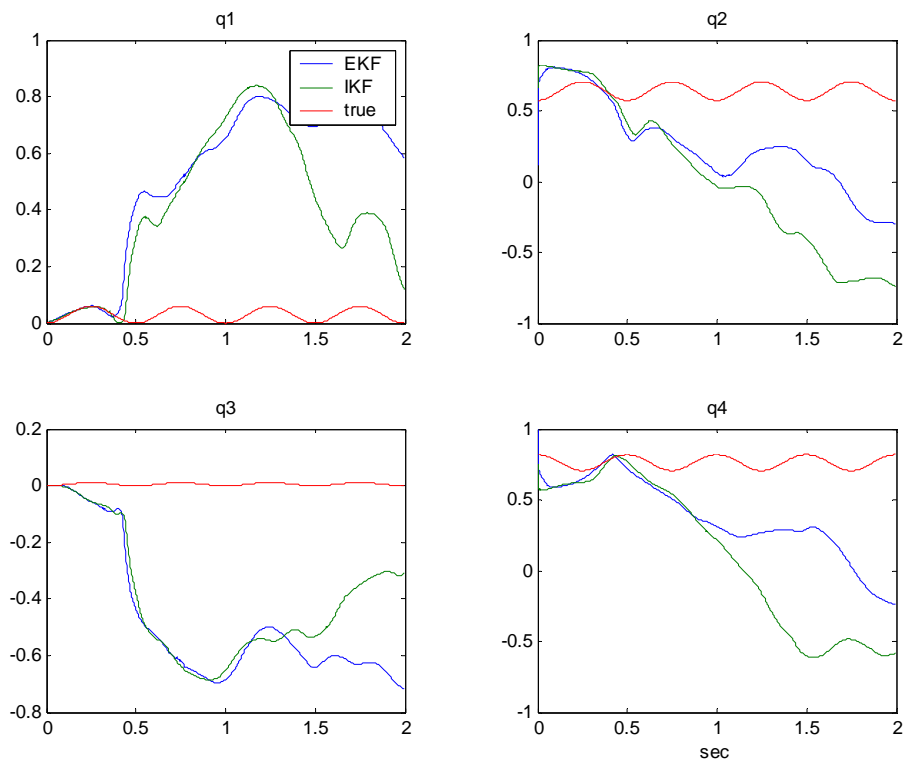
表(4.7) 直接量測法：3 軸運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差



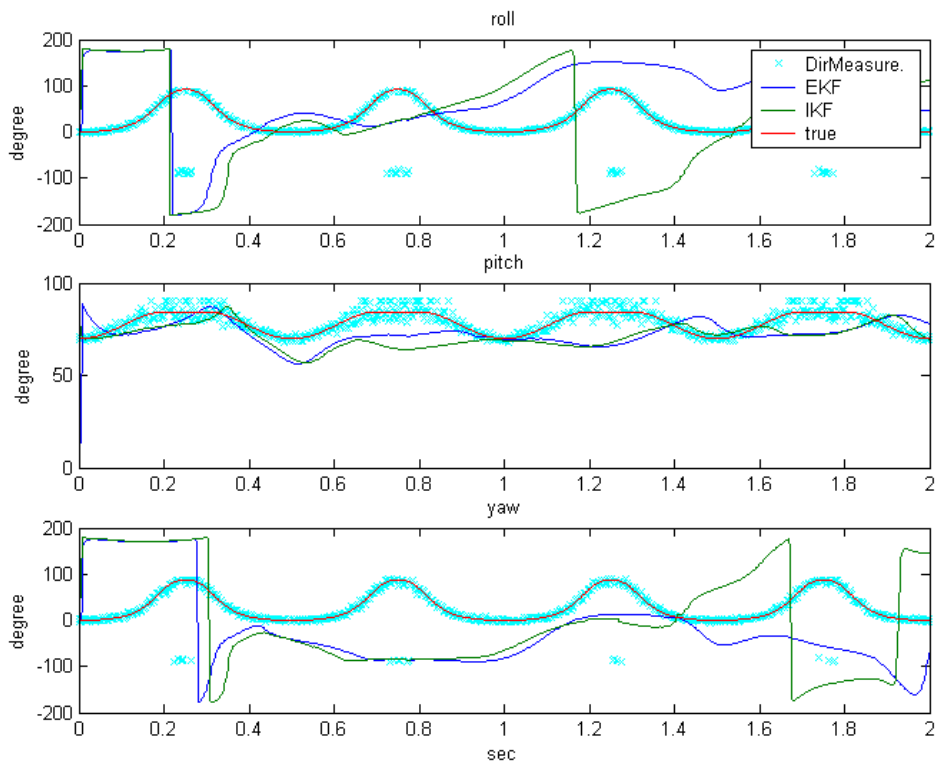
## 4-2 俯仰角為 90 時的旋轉運動

由 2-3.1 節曾提及當俯仰角(pitch angle)為 90 度時，姿態以尤拉角表示時則會有發散的現象。間接量測法利用加速規及磁場感器的整合量測出尤拉角的量再轉換至四元數，因此發散的現象會在此方法中出現。如圖(4.29)(4.30)為模擬運動體在俯仰角 90 度附近旋轉，則此時的姿態估測失敗。在本論文的所提出的第二個方法直接量測法中，利用感測器直接量測四元數，由於四元數的優點就是不會有奇異點的問題，因此在直接量測法中狀態估測器可以正常的運作，如圖(4.31)(4.32)為模擬運動體在俯仰角 90 度附近旋轉。

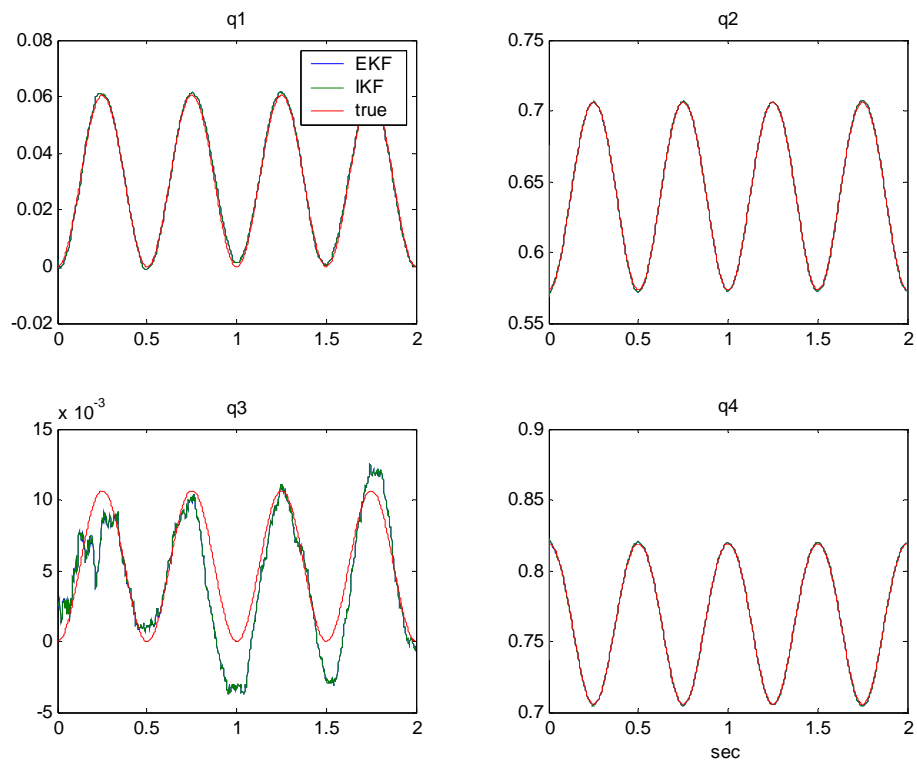




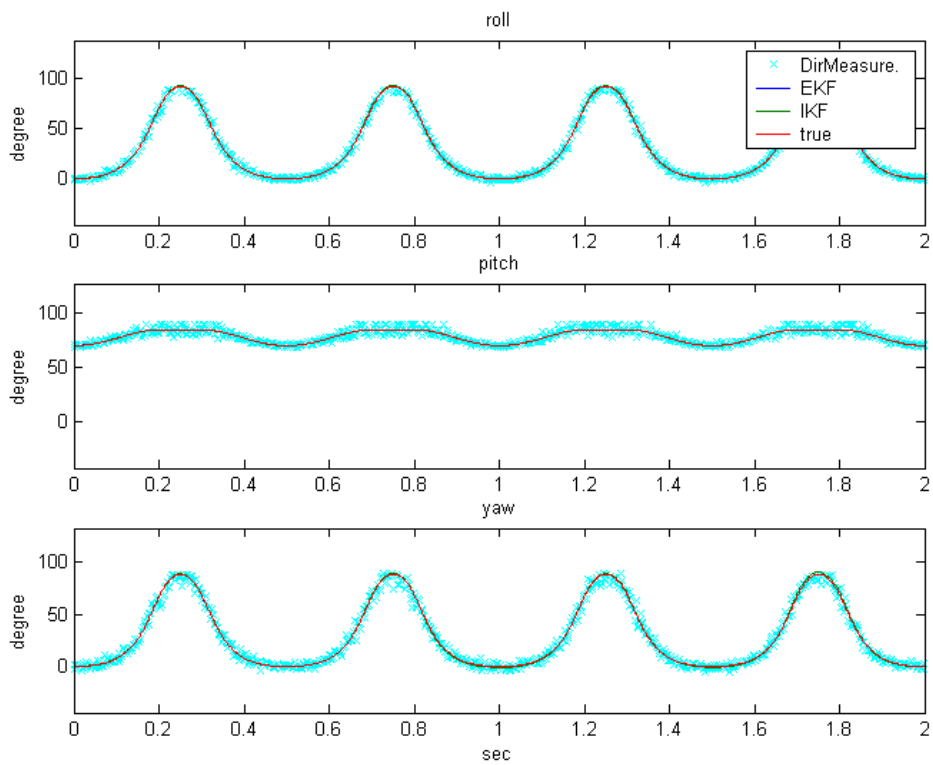
圖(4.29) 間接量測法：俯仰角為 90 度時之四元數估測值



圖(4.30) 間接量測法：俯仰角為 90 度時之尤拉角估測值



圖(4.31) 直接量測法：俯仰角為 90 度時之四元數估測值



圖(4.32) 直接量測法：俯仰角為 90 度時之尤拉角估測值

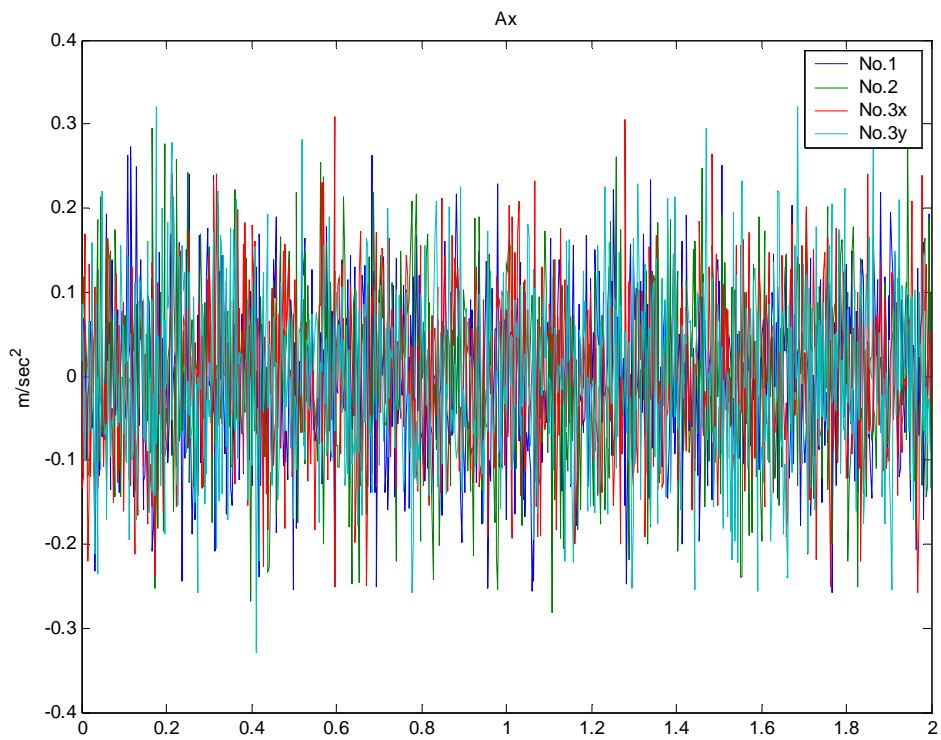
### 4-3 靜止運動

由 4-1 節已測試估測器 3 軸旋運動下能成功估測出物體姿態，再進一步測試估測器在靜止狀態下的穩定性。由本節中的模擬可知演算法在靜止運動時也能正常的運作，並無飄移及發散的現象。

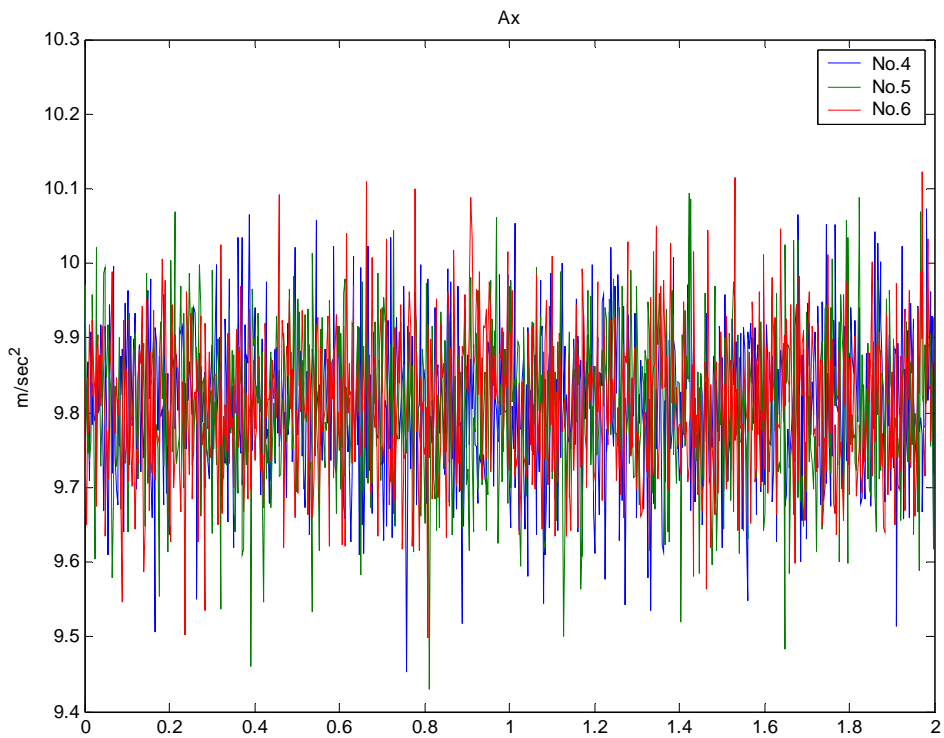
#### 4-3.1 間接量測法

圖(4.33)(4.34)(4.35)為模擬靜止時加速規及磁場感測器所量測的值，圖(4.36)為  $Z1\sim Z3$  的量測值，因此代入卡爾曼濾器故可得角速度估測值如圖(4.37)、姿態估測值如圖(4.39)(4.41)，圖(4.38)(4.40)(4.42)為誤差隨著時間的變化，圖(4.43)(4.44)(4.45)為誤差標準差收斂情形，表(4.8)(4.9)(4.10)為經過 2 秒時誤差標準差的值。

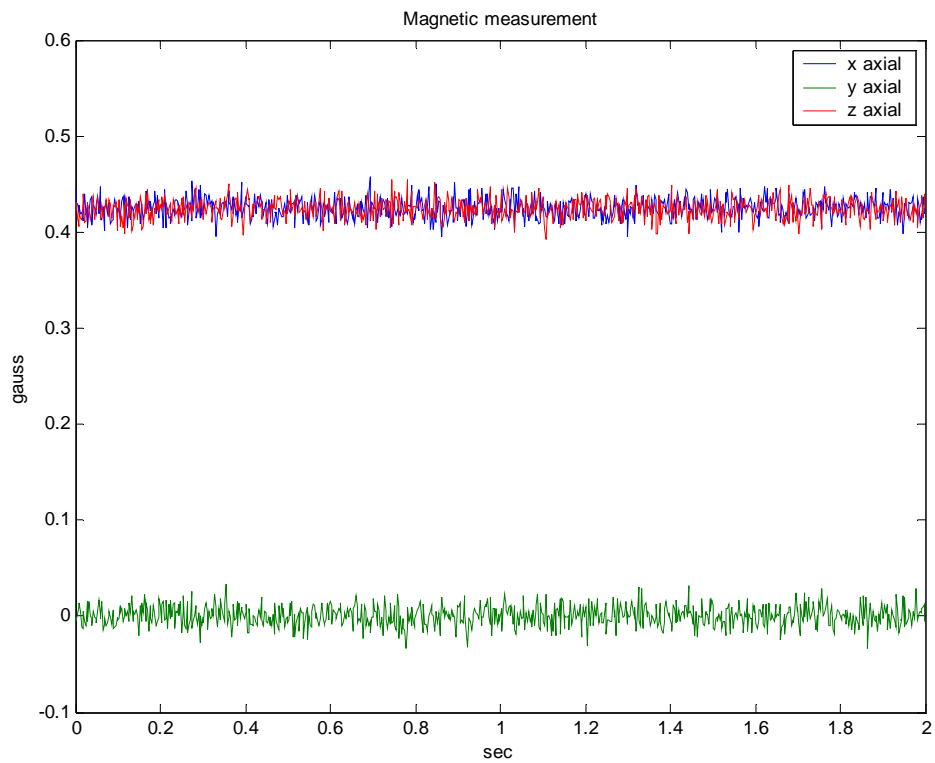




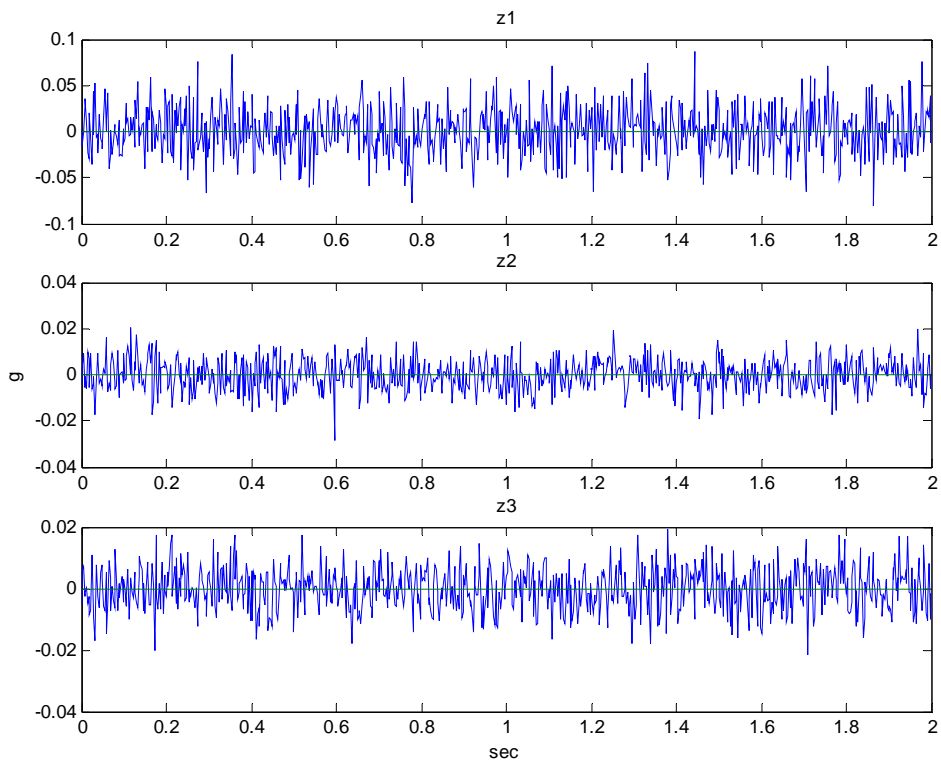
圖(4.33) 間接量測法：靜止運動時之 A1~A3y 加速規量測值



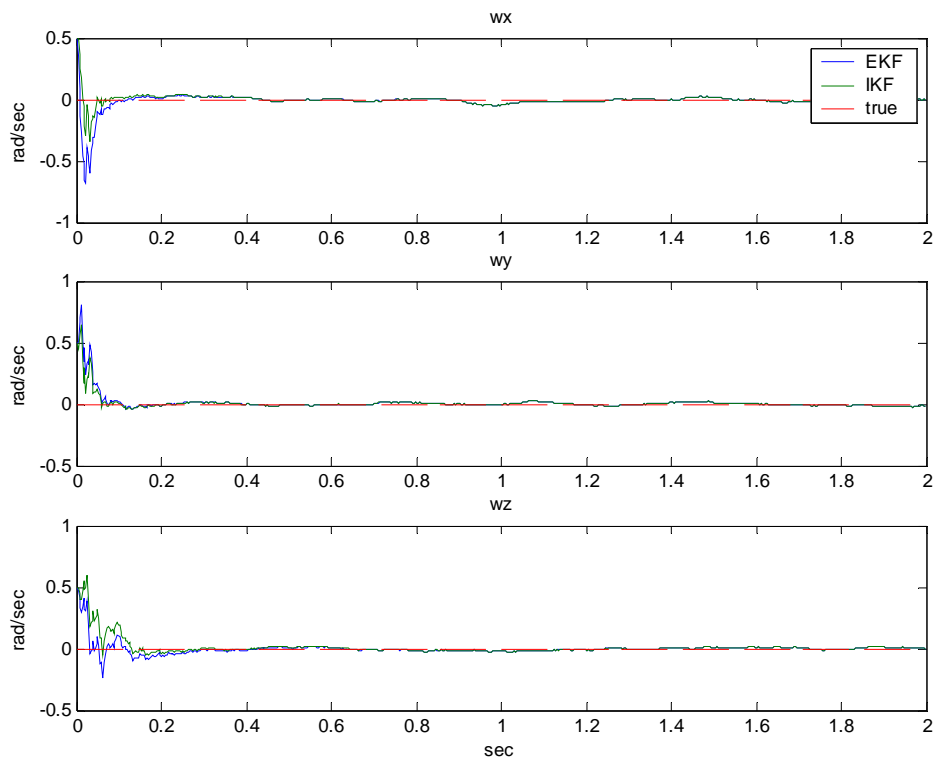
圖(4.34) 間接量測法：靜止運動時之 A4~A6 加速規量測值



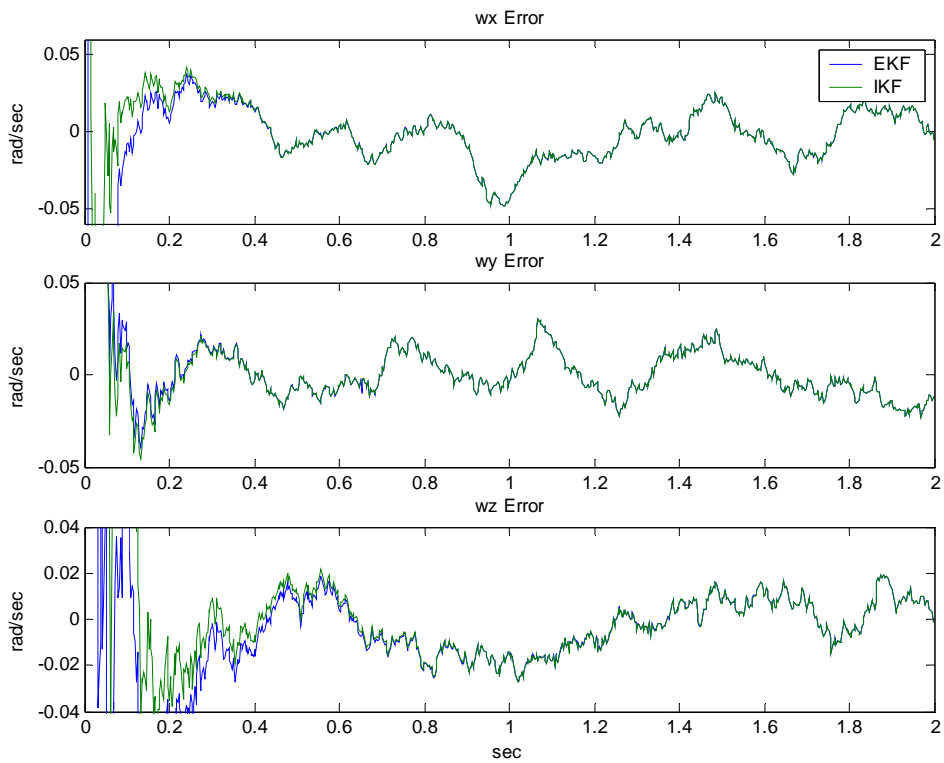
圖(4.35) 間接量測法：靜止運動時之  $M_x \sim M_z$  磁場感測器量測值



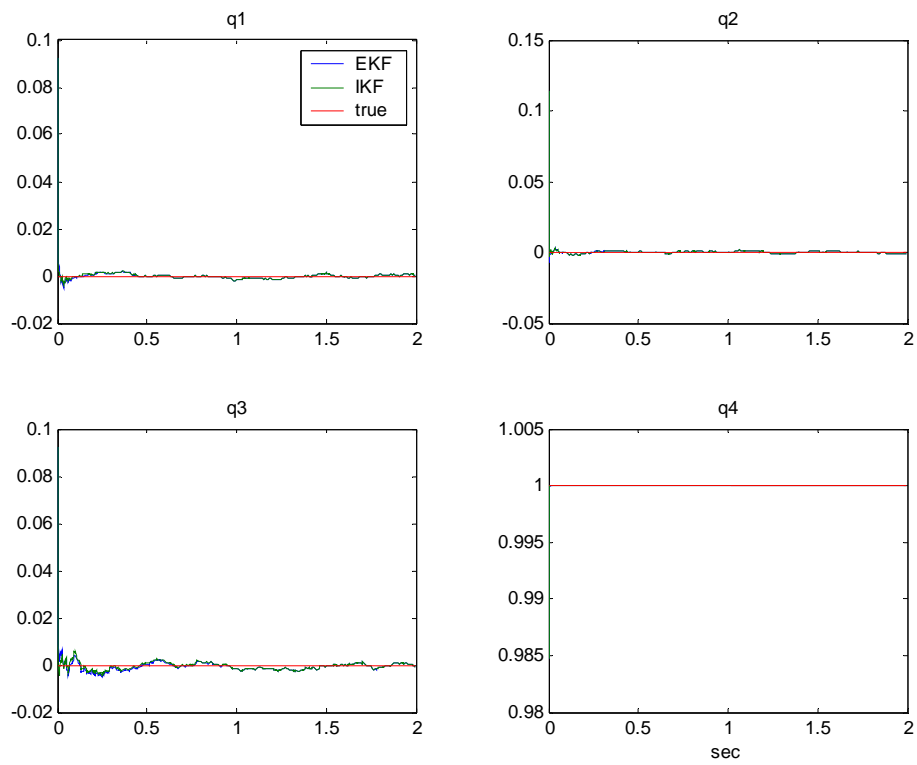
圖(4.36) 間接量測法：靜止運動時之  $z_1 \sim z_3$  磁場感測器量測值



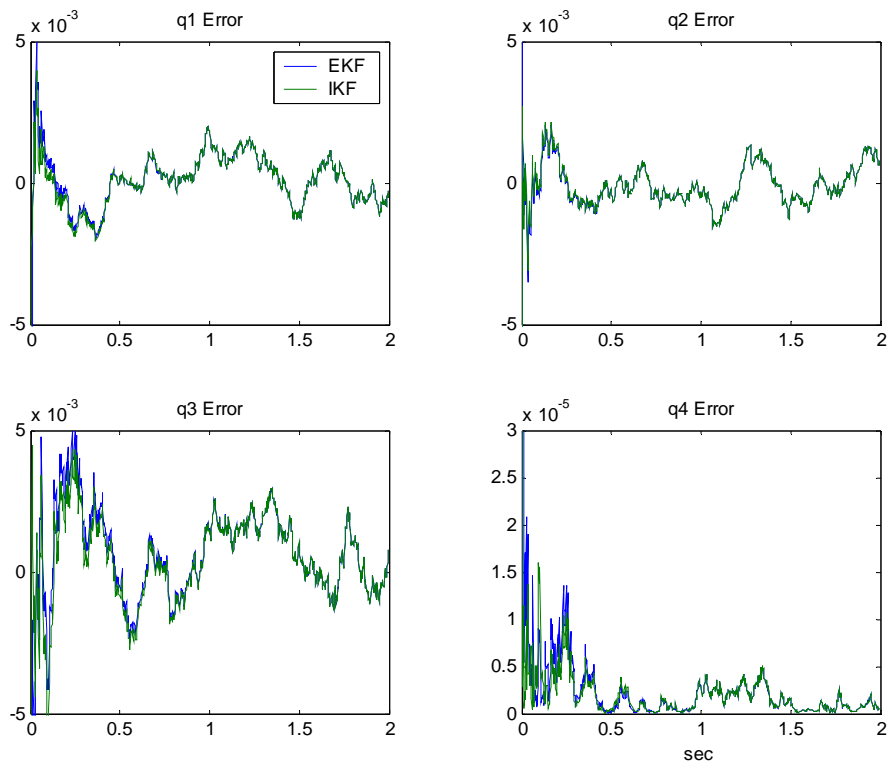
圖(4.37) 間接量測法：靜止運動時之角速度估測值



圖(4.38) 間接量測法：靜止運動時之角速度誤差值

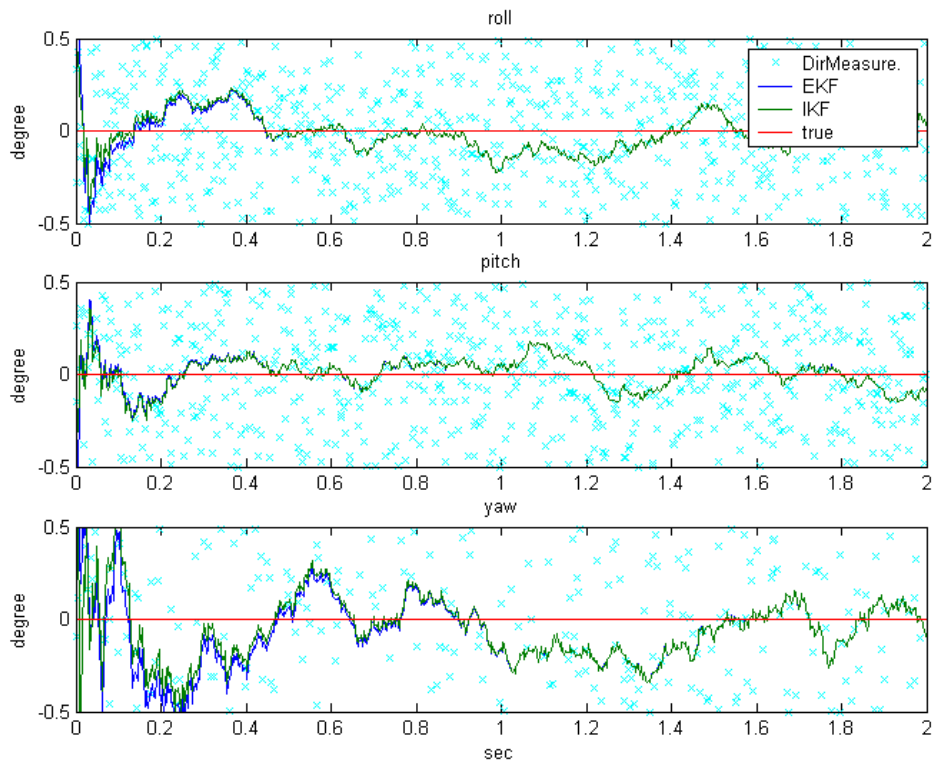


圖(4.39) 間接量測法：靜止運動時之四元數估測值

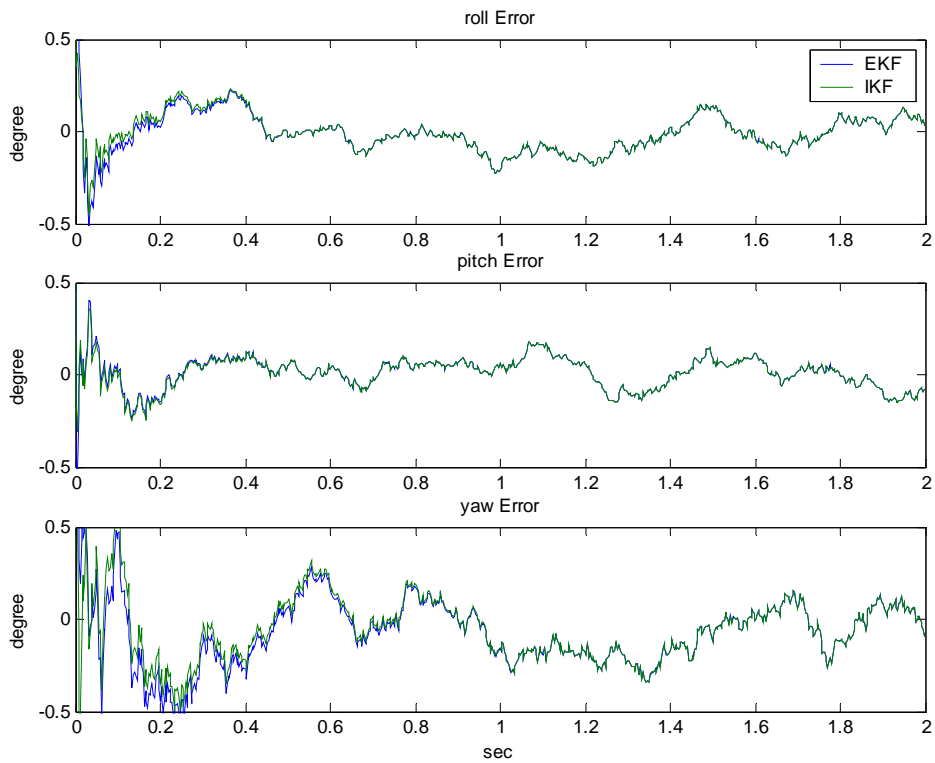


圖(4.40) 間接量測法：靜止運動時之四元數誤差值

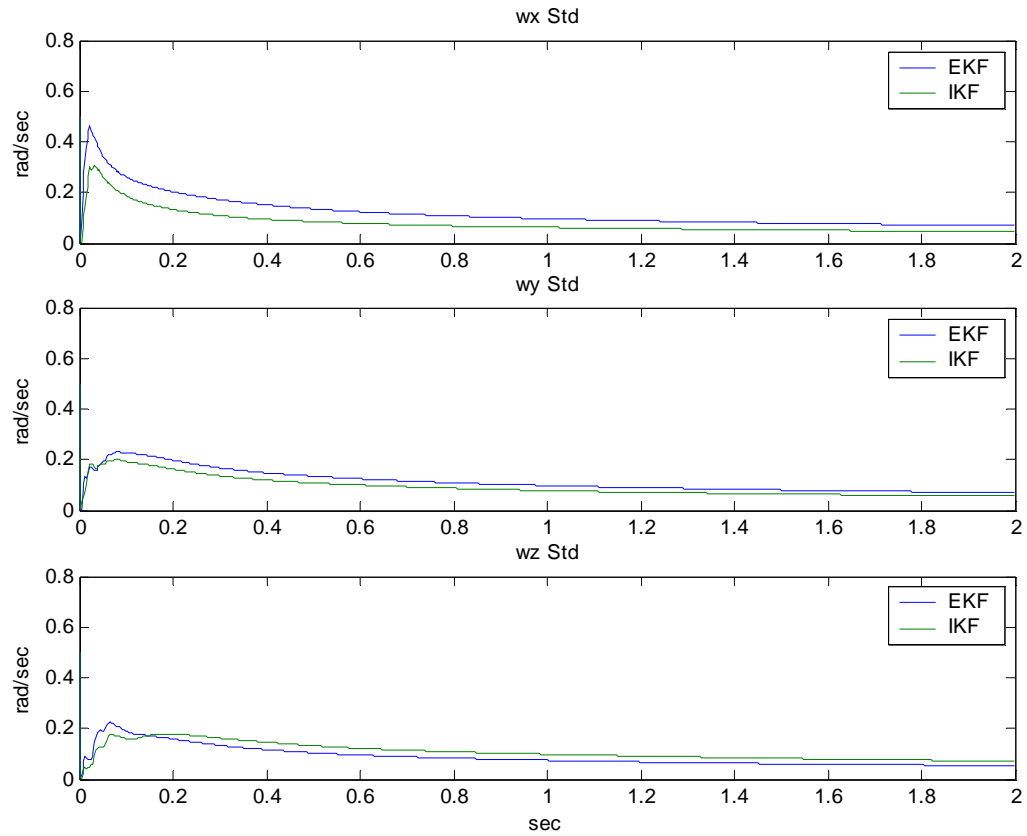




圖(4.41) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角估測值



圖(4.42) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差值

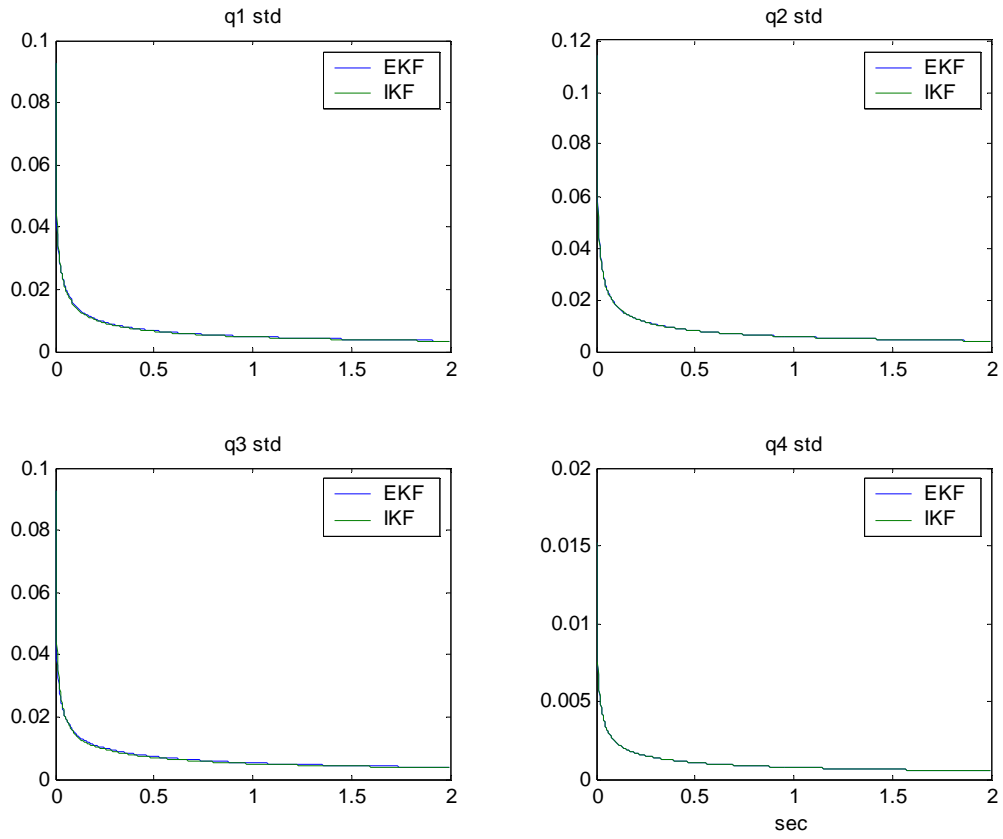


圖(4.43) 間接量測法：靜止運動時之角速度誤差標準差



	$\omega_x$ (rad/sec)	$\omega_y$ (rad/sec)	$\omega_z$ (rad/sec)
EKF	0.0489364	0.0526945	0.0699814
IKF	0.0493237	0.0602448	0.0696266

表(4.8) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時角速度誤差標準差

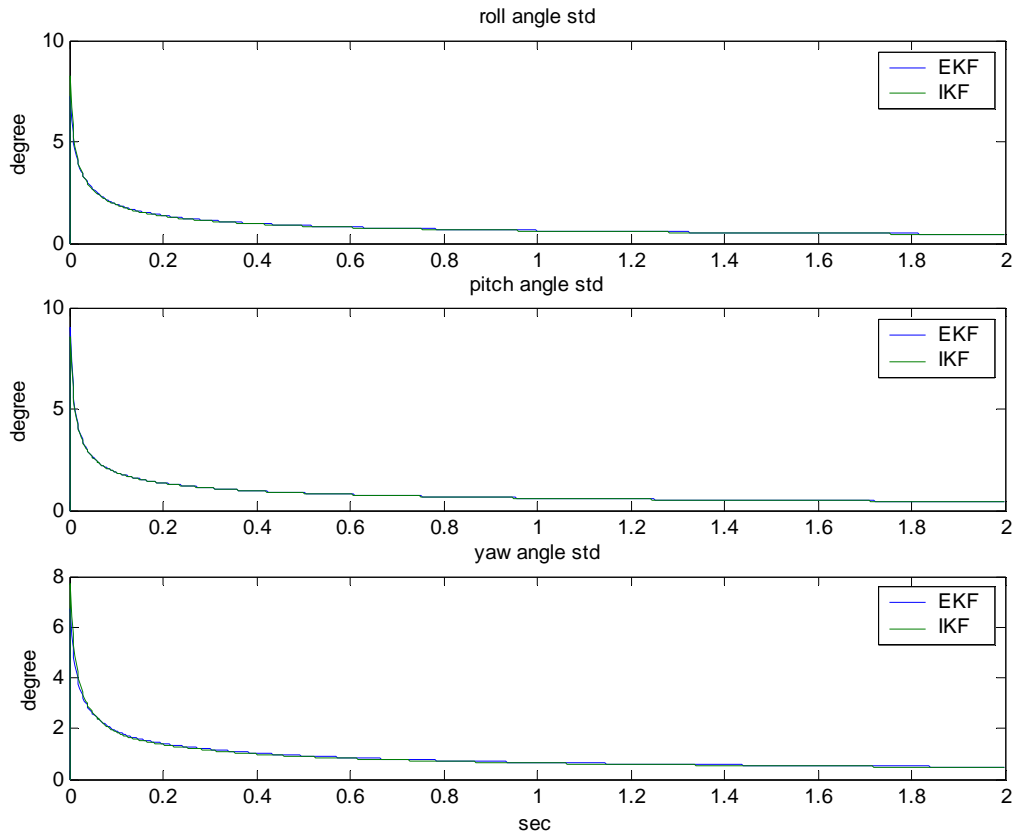


圖(4.44) 間接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差



	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
EKF	0.00167559	0.0009566	0.00297959	0.00030126
IKF	0.00167858	0.000961408	0.00297664	0.000298442

表(4.9) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時四元數誤差標準差



圖(4.45) 間接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差標準差



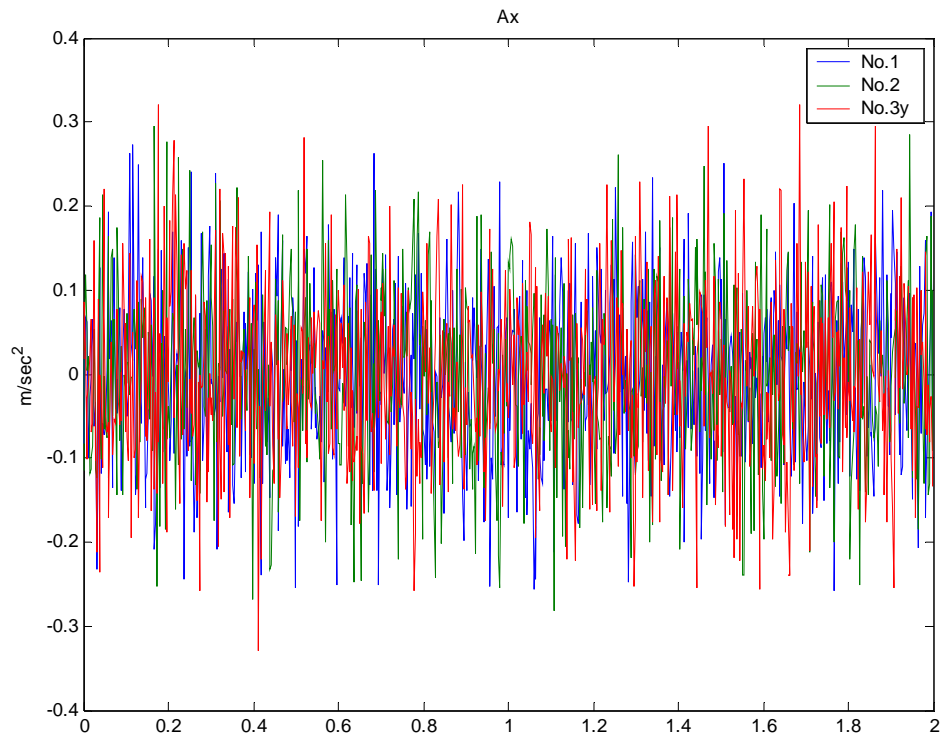
	Roll (degree)	Pitch (degree)	Yaw (degree)
EKF	0.175456	0.112958	0.32696
IKF	0.175755	0.113943	0.326444

表(4.10) 間接量測法：靜止運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差

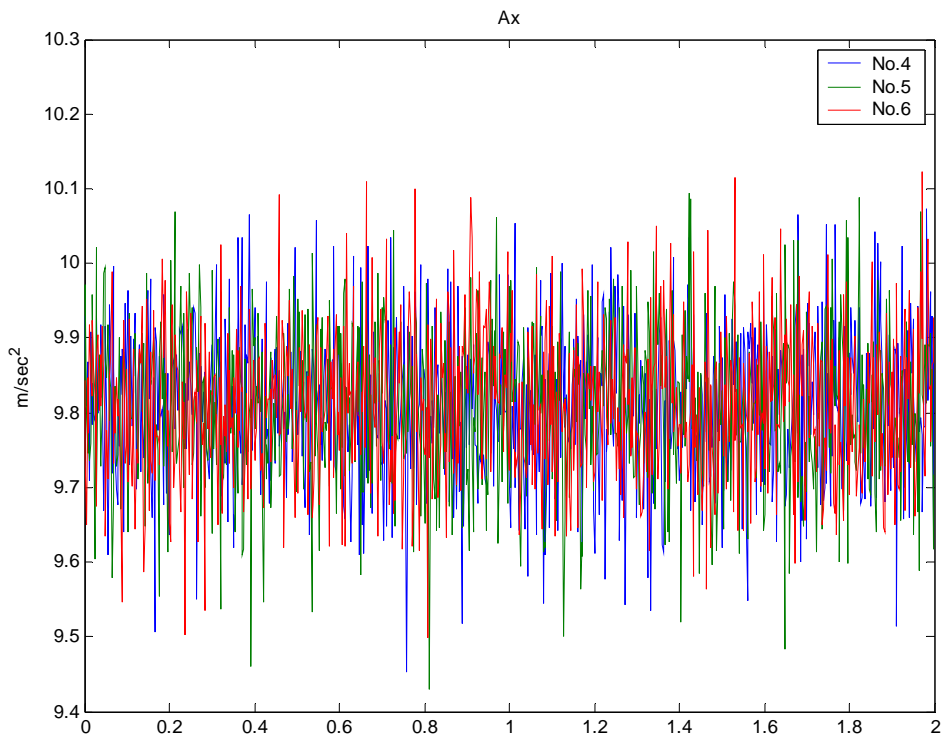
### 4-3.2 直接量測法

圖(4.46)(4.47)(4.48)為模擬靜止時加速規及磁場感測器所量測的值， $Z_1$ 、 $Z_2$  由磁場感測器直接獲得， $Z_3$  及  $Z_4$  由方程式(2.26)計算出估測器所需的量測值，因此如圖(4.49)所示。故把  $Z_1\sim Z_4$  代入卡爾曼濾器故可得角速度估測值如圖(4.50)、姿態估測值如圖(4.52)(4.54)，圖(4.51)(4.53)(4.55)為誤差隨著時間的變化，圖(4.56)(4.57)(4.58)為誤差標準差收斂情形，表(4.11)(4.12)(4.13)為經過 2 秒時誤差標準差的值。

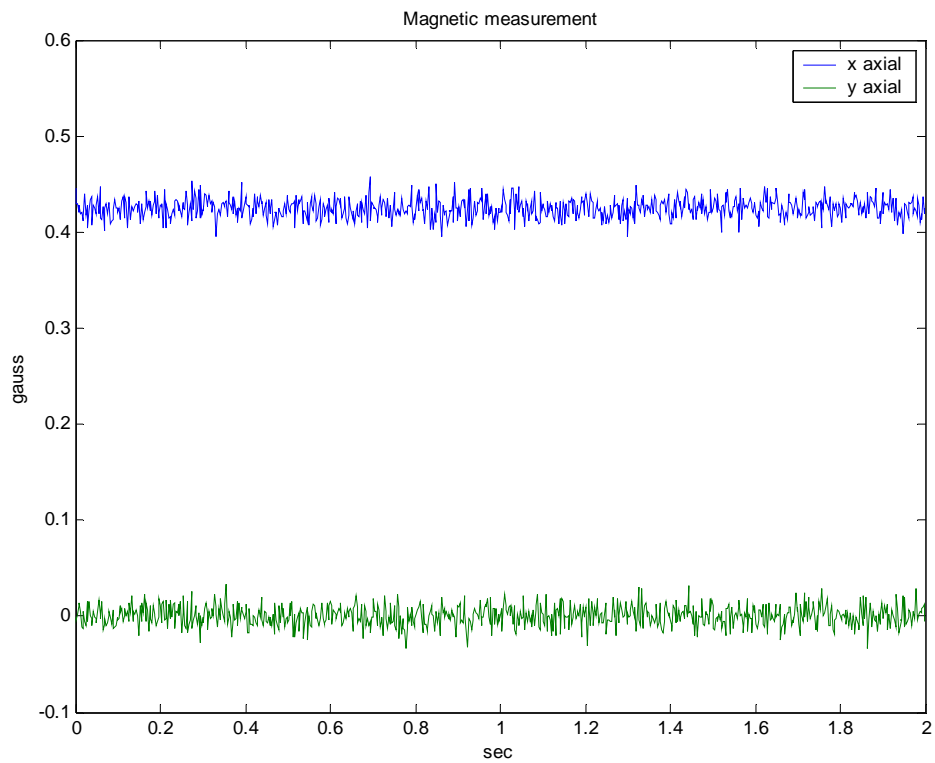




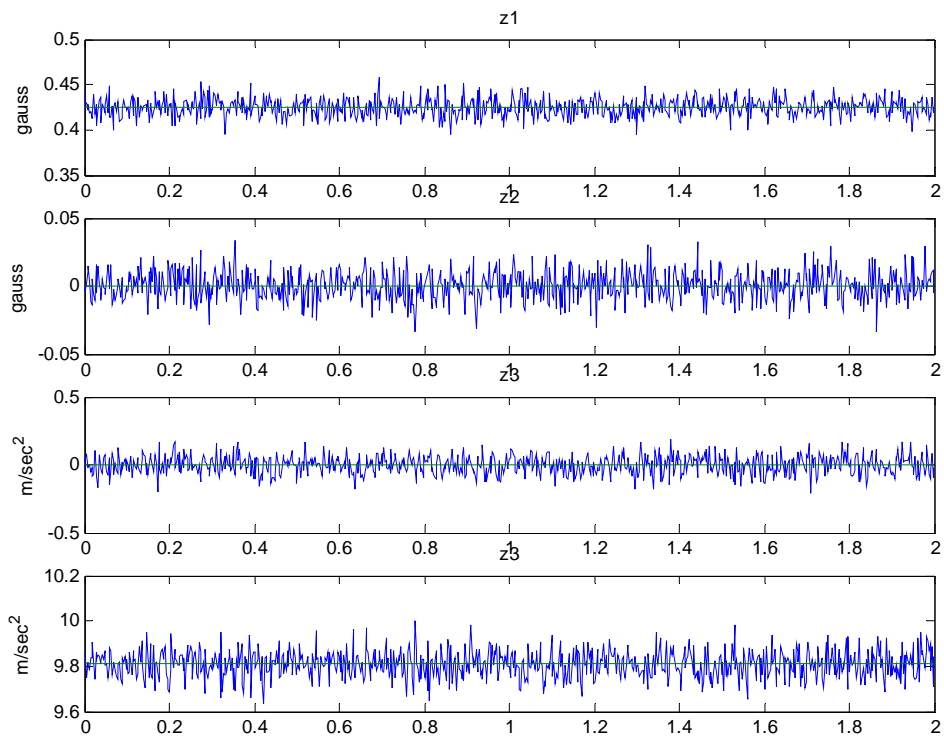
圖(4.46) 直接量測法：靜止運動時之 A1~A3y 加速規量測值



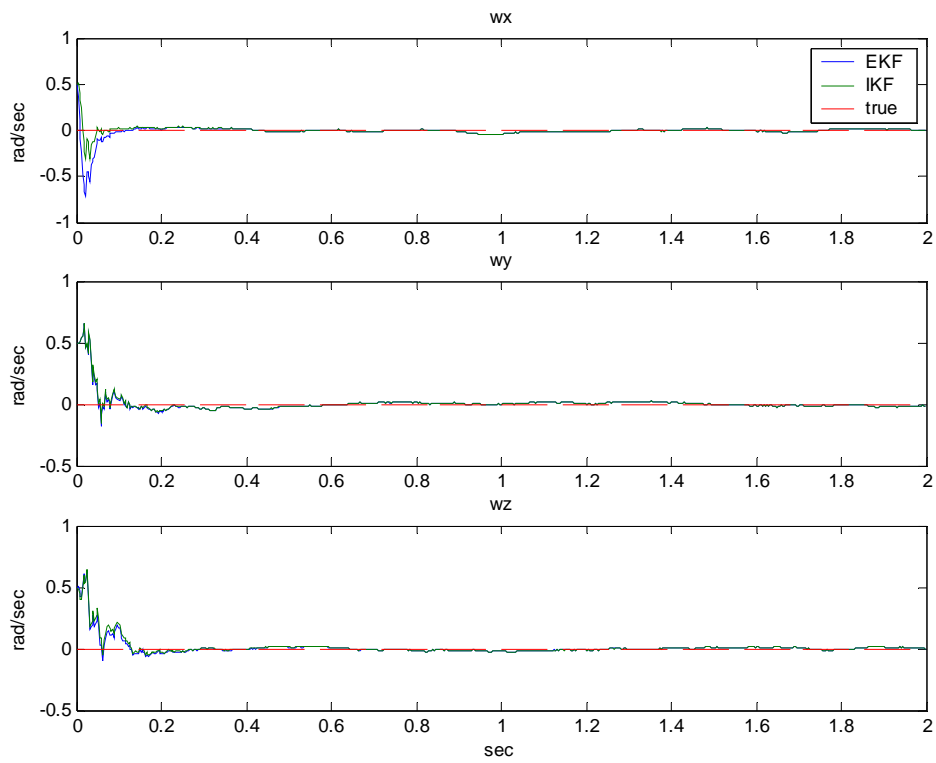
圖(4.47) 直接量測法：靜止運動時之 A4~A6 加速規量測值



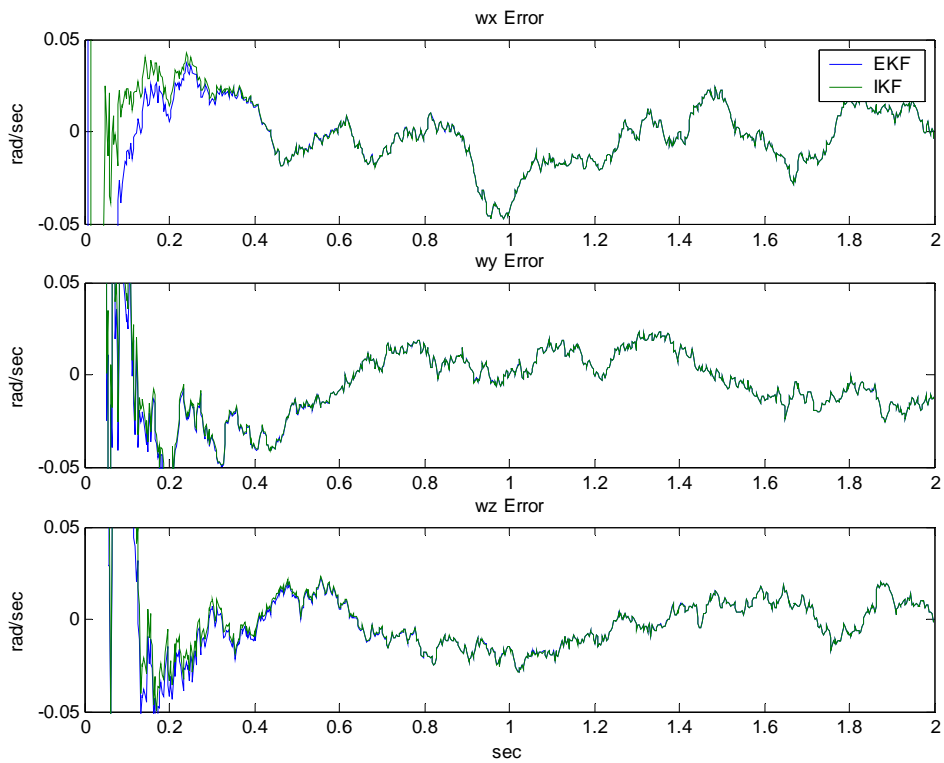
圖(4.48) 直接量測法：靜止運動時之  $M_x$ 、 $M_y$  磁場感測器量測值



圖(4.49) 直接量測法：靜止運動時之  $z_1 \sim z_4$  量測值

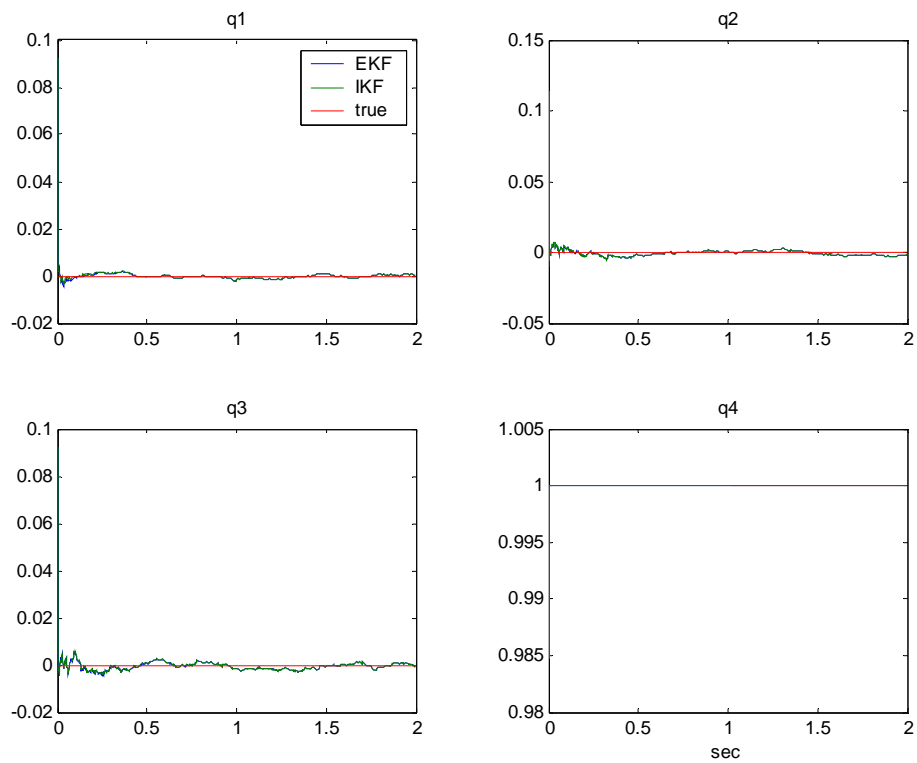


圖(4.50) 直接量測法：靜止運動時之角速度估測值

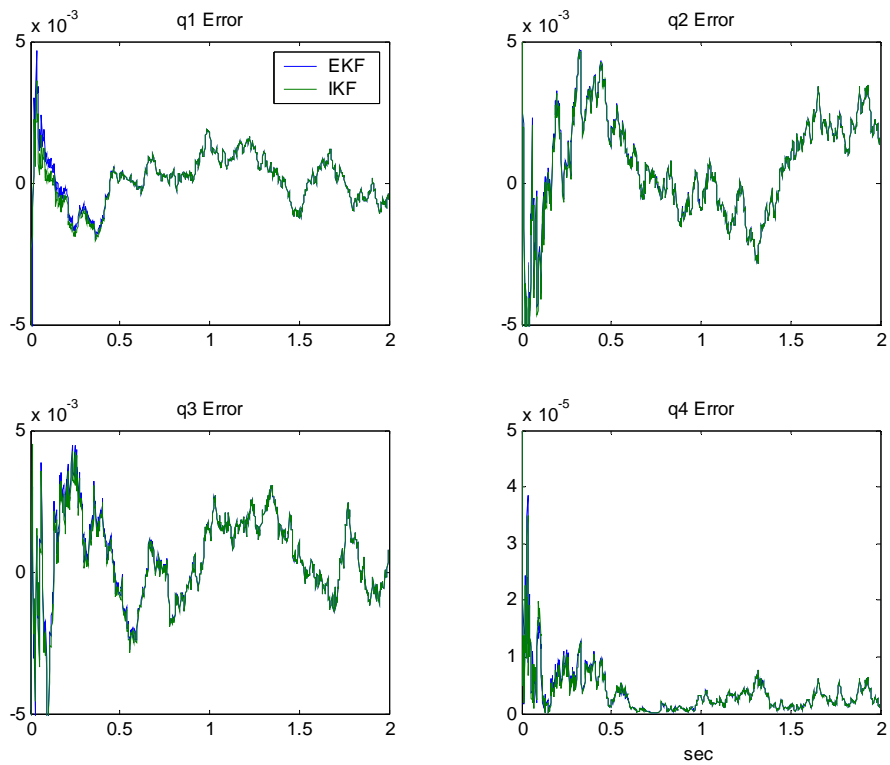


圖(4.51) 直接量測法：靜止運動時之角速度誤差值

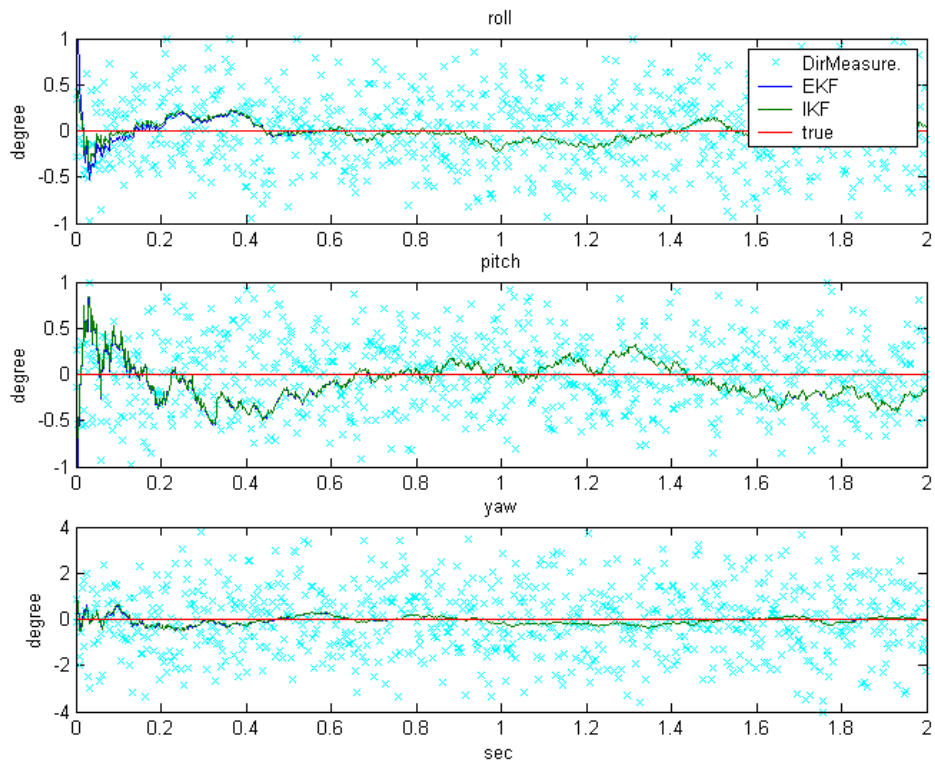




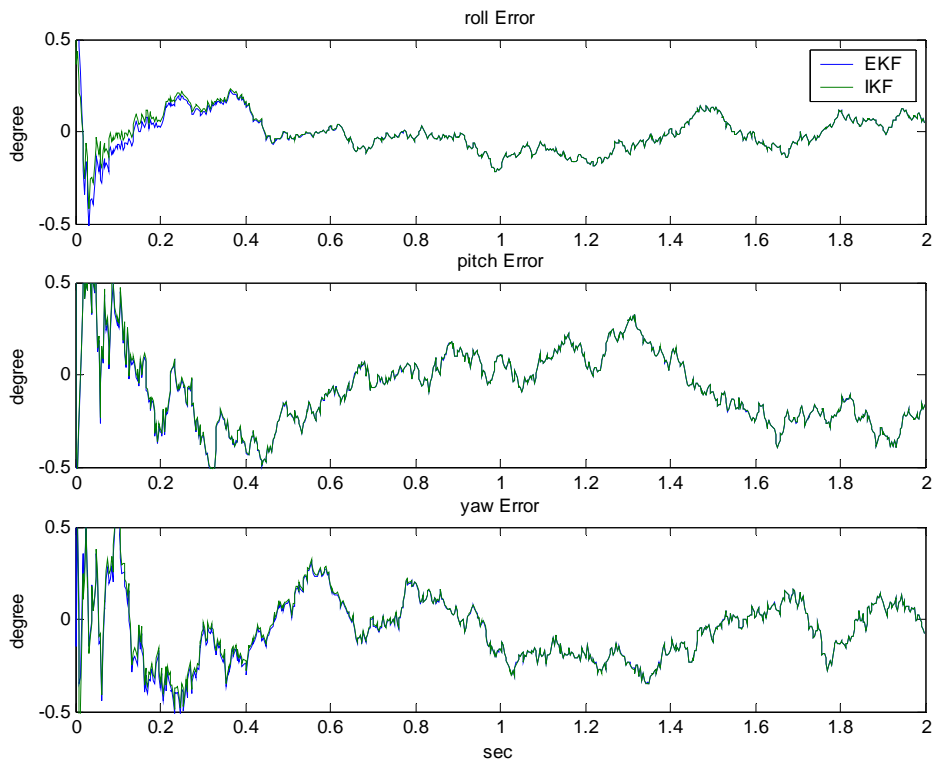
圖(4.52) 直接量測法：靜止運動時之四元數估測值



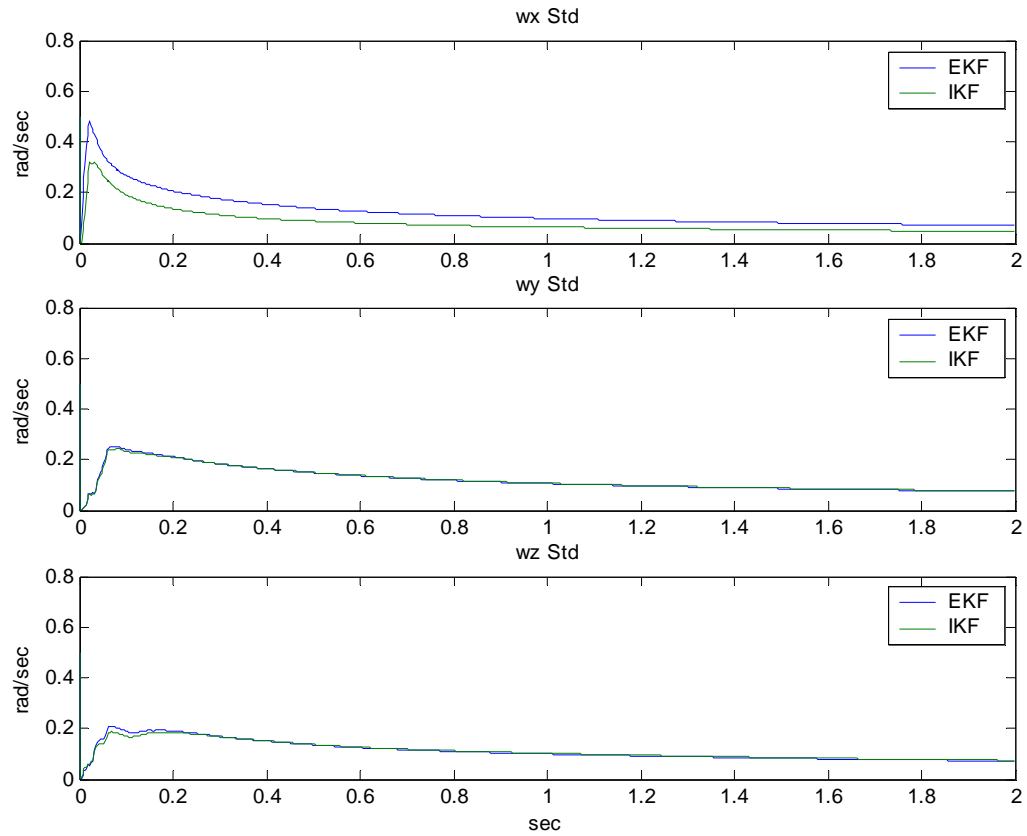
圖(4.53) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差值



圖(4.54) 直接量測法：靜止運動時之尤拉角估測值



圖(4.55) 直接量測法：靜止運動時之尤拉角誤差值

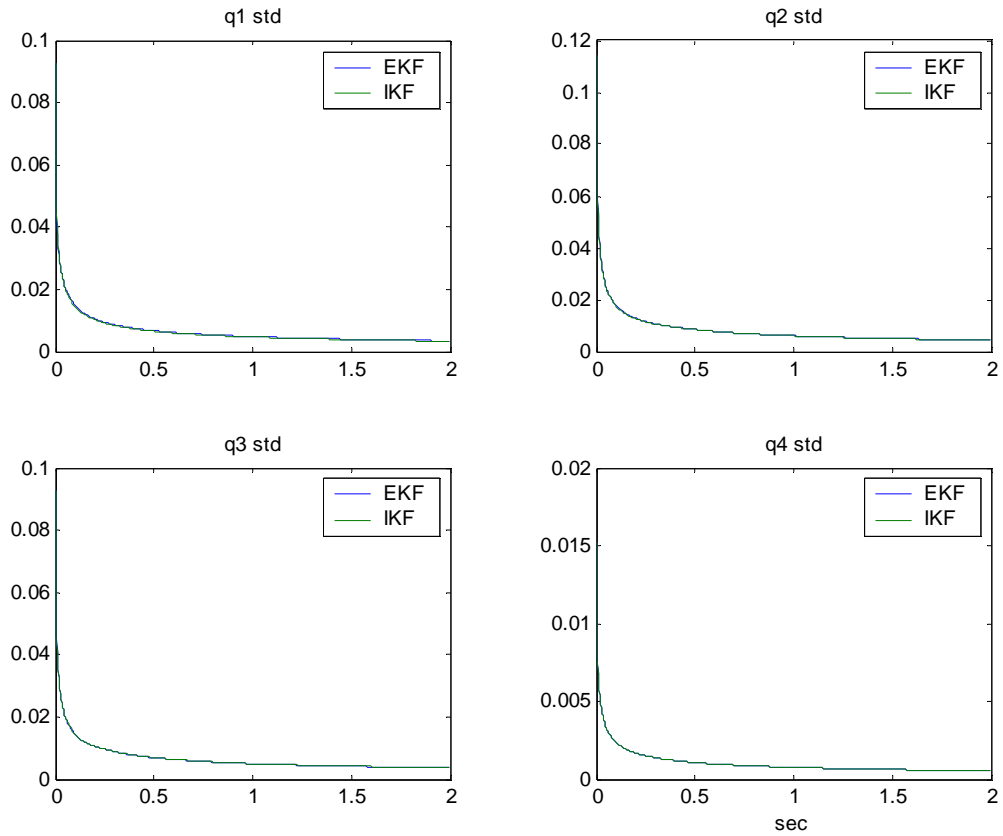


圖(4.56) 直接量測法：靜止運動時之角速度誤差標準差



	$\omega_x$ (rad/sec)	$\omega_y$ (rad/sec)	$\omega_z$ (rad/sec)
EKF	0.0504285	0.0636494	0.0722155
IKF	0.0511206	0.0672784	0.0726071

表(4.11) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時角速度誤差標準差

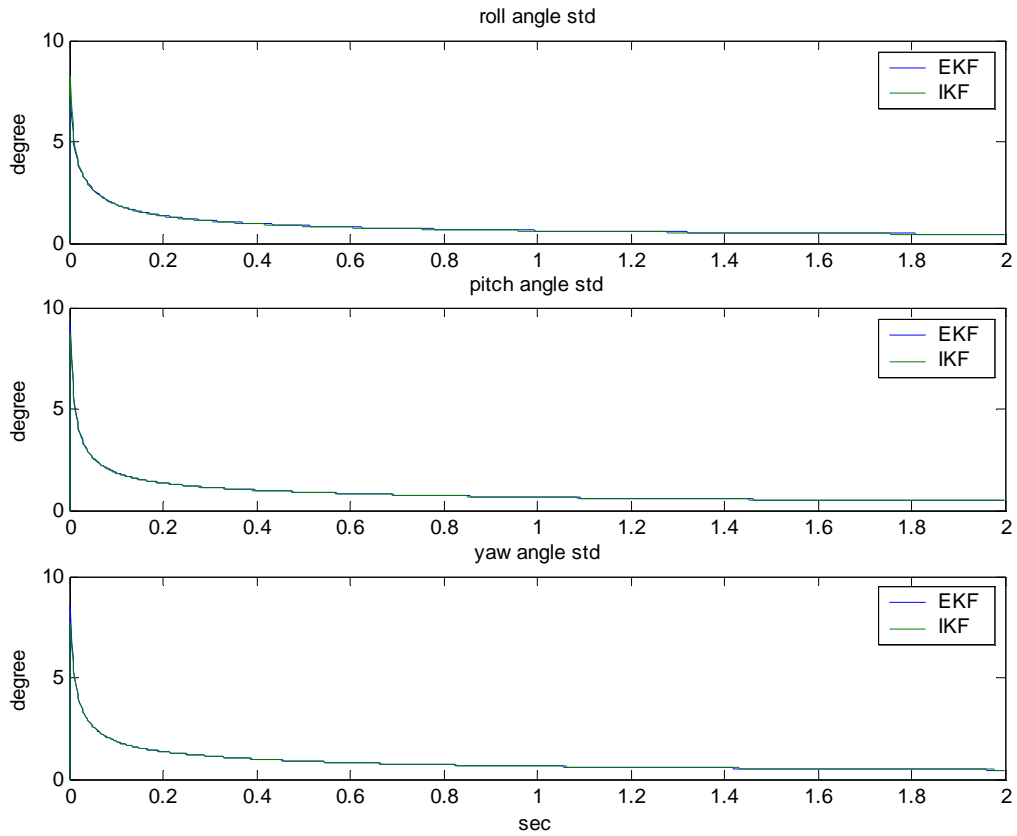


圖(4.57) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差



	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>
EKF	0.00172898	0.00146212	0.00298883	0.000298423
IKF	0.00173872	0.00147368	0.00299294	0.000297954

表(4.12) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時四元數誤差標準差



圖(4.58) 直接量測法：靜止運動時之四元數誤差標準差



	Roll (degree)	Pitch (degree)	Yaw (degree)
EKF	0.173629	0.180776	0.327432
IKF	0.174406	0.182882	0.327851

表(4.13) 直接量測法：靜止運動經過 2 秒時尤拉角誤差標準差

#### 4-4 間接量測法及直接量測法的優缺點比較

直接量測法有 4 條量測方程式而間接量測法只有 3 條量測方程式，因此間接量測法電腦運算所耗的時間會比直接量測法來的少一點。在估測精度上，此兩法之估測精度差異不大，可參考表(4.8)(4.9)(4.10)(4.11)(4.12)(4.13)。

間接量測法需要 7 個加速度規及 3 軸磁場感測器，而直接量測只需 6 個加速規 2 軸磁場感測器，因此在實際應用上直接量測法較為經濟。

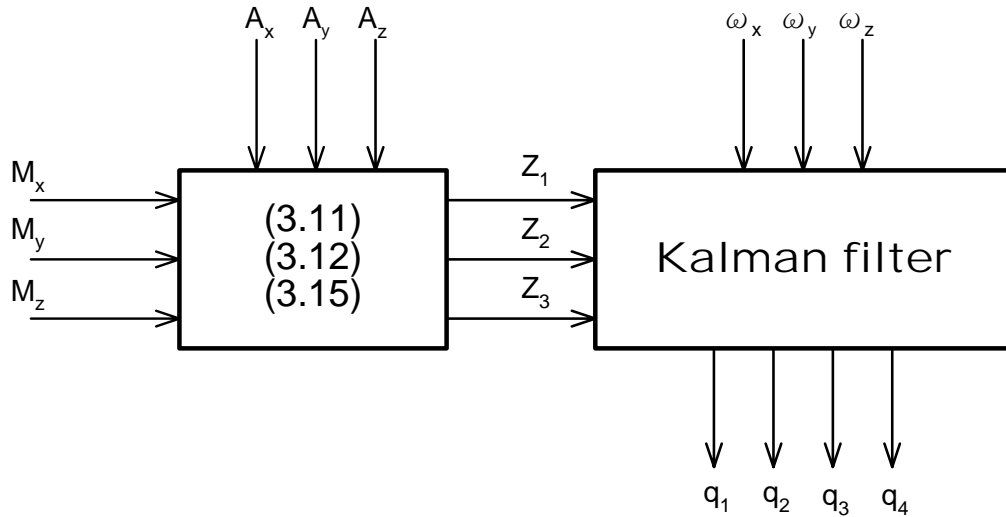
間接量測法為量測尤拉角轉換至四元數值，所以當俯仰角(pitch angle)為 90 度時使用此方法估測器會運算失敗。而直接量測法則無此問題，在俯仰角為 90 度時估測器仍可正常的運作。

由於直接量測法需已知目前位置的磁場向量，因此在使用上只能固定位置，若當目前位置變更時，使用前需重新校正此時的磁場向量。而間接量測法則無校正的問題，此法在應用時可在地球上的任意位置使用。



#### 4-5 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測及陀螺儀姿態估測之比較

在傳統的姿態估測中，皆以陀螺儀、加速規及磁場感測器為主要元件。在參考文獻[2][3][4]就是利用前敘的三種感測元件來完成姿態的估測。為了比較本論文之方法與傳統的姿態估測，故參考[2]所提出方法來模擬比較兩者的差異。其陀螺儀姿態估測器架構如圖(4.59)，其中卡爾曼估測器的狀態方程為(2.16)式，量測方程式為(2.15)式。



圖(4.59) 陀螺儀姿態估測器訊號流程

故模擬結果如表(4.14)(4.15)及圖(4.60)，由表(4.14)當陀螺儀的量測雜訊標準差為 0.2 rad/sec 時，其估測精度大約與本論文所提方法相同，陀螺儀的雜訊愈大其估測效能愈差，圖(4.60)為表(4.14)的直線圖。表(4.15)本論文的所提出的方法所估測到角速度的標準差。

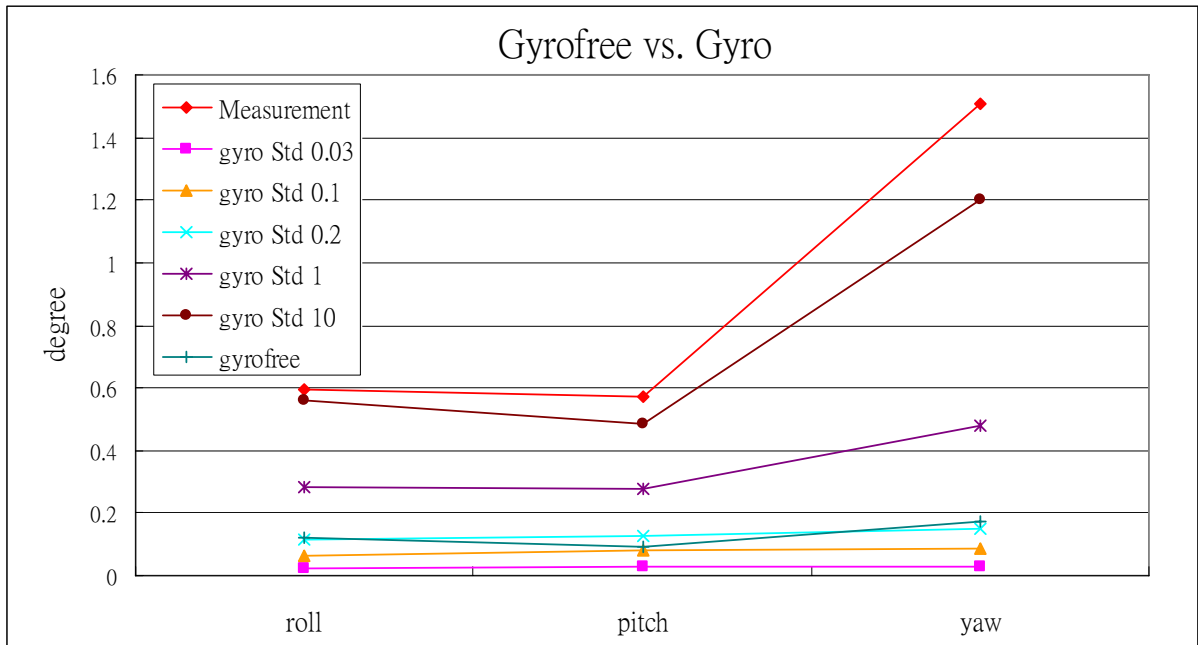


	Noise (rad/sec)	Roll(degree)	Pitch(degree)	Yaw(degree)
Measurement	-----	0.59409	0.569463	1.50727
gyro	gyro Std 0.03	0.02492	0.029246	0.027
	gyro Std 0.1	0.06606	0.078879	0.08434
	gyro Std 0.2	0.11333	0.128593	0.15245
	gyro Std 1	0.28082	0.279052	0.47802
	gyro Std 10	0.56266	0.485279	1.20272
gyrofree	-----	0.12035	0.090792	0.1716

表(4.14) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測與陀螺儀姿態估測的比較

	$\omega_x$ (rad/sec)	$\omega_y$ (rad/sec)	$\omega_z$ (rad/sec)
gyrofree	0.0249928	0.0346422	0.0333314

表(4.15) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測器穩態時的標準差



圖(4.60) 平面式之純加速規慣性量測單元姿態估測與陀螺儀姿態估測的比較





## 第五章 結論及未來計劃

### 5-1 結論

本論文使用平面式之純加速規慣性量測單元及磁場感測器，並設計卡爾曼估測器成功的發展出三自由度的姿態估測器，並抑制積分漂移及降低量測雜訊的影響。由於使用平面式之純加速規慣性量測單元，比較參考文獻[1][2][3][4]本論文成功的減少陀螺儀的使用，在商業用途中更具有競爭力。在參考文獻[3]中是使用了 3 軸陀螺儀、3 軸加速規及 3 軸磁場感測器，在本論文利用觀測性矩陣的方法在直接量測法中成功的移除 x 軸加速規及 z 軸的磁場感測器，因此在感測器的使用數量上減少了許多。本論文在姿態表示法是以四元數法為主，因此在直接量測法中可解決了姿態矩陣奇異性的問題。以本論文所提出的方法，在商業用途上更適用於頭戴式顯示器(head-mounted displays)或手部的指向裝置。



### 5-2 未來計劃

1. 建立實驗架構，來驗證本論文所提出的方法之可行性及效能。
2. 修改演算法則，使得在線性加速度的情況下也能正確的估測物體的姿態。
3. 磁場向量易受到磁性金屬影響而變形，爲了擴大姿態估測器的使用環境故需針對磁場的變形做補償。

## 參 考 文 獻

- [1] Eric Foxlin, Michel Harrington and Yury Altshuler, “Miniature 6-DOF inertial system for tracking HMDs”, *Helmet and Head-Mounted Displays III*, Vol.3362,1998
- [2] Tatsuya Harada, Hiroto Uchino, Taketoshi Mori and Tomomasa Sato, “Portable Orientation Estimation Device Based on Accelerometers, Magnetometers and Gyroscope Sensors for Sensor Network”, *IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent System*, pp.191-196, 2003
- [3] João Luís Marins, Xiaoping Yun, Eric R.Bachmann, Robert B.McGhee, and Michael J.Zyda, “An Extended Kalman Filter for Quaterion-Based Orientation Estimatoin Using MARG Sensors”, *Proceedings of 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp.2003-2011, 2001
- [4] Andrew Wilson, Steven Shafer, “XWand: UI for Intelligent Spaces”, 2003
- [5] Tsung-Lin Chen and Sungsu Park, “MEMS SoC: observer-based coplanar gyro-free inertial measurement unit”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, pp.1664-1673, 2005
- [6] A. J. Padgaonkar, K. W. Krieger, A. I. King, “Measurement of Angular Acceleration of Rigid Body Using Linear Accelerometers”, *Journal of Applied Mechanics*, pp.552-556, 1975
- [7] Joseph Genin, Juehui Hong, Wei Xu, ”Accelerometer Placement for Angular Velocity Determination”, *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, pp.474-477, 1997
- [8] Bruno Zappa, Giovanni Legnani, Anton J. van den Bogert, Riccardo Adamini, “On the Number and Placement of Accelerometers for Angular Velocity and Acceleration Determination”, *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, pp.552-554, 2001

- [9] Sven Rönnbäck, “Development of a INS/GPS navigation loop for an UAV”, Luleå University of Technology, Department of Computer Science and Electrical Engineering, M.S. Thesis, pp.01-80, 2000
- [10] Vikas Kumar N., “Integration of Inertial Navigation System and Global Positioning System Using Kalman Filtering”, Indian Institute of Technology, Department of Aerospace Engineering, pp.20-33 , 2004
- [11] Greg Welch and Gary Bishop, An Introduction to the Kalman Filter, 2004
- [12] Chobotov Vladimir A, Spacecraft attitude dynamics and control, Krieger Publishing Company , 1991
- [13] Robert Grover Brown and Patrick Y.C. Hwang., Introduction to random signals and applied Kalman filtering /with Matlab exercises and solutions, John Wiley & Sons, 1997
- [14] Grewal Mohinder S. and Andrews Angus P., Kalman filtering: theory and practice using MATLAB, John Wiley & Sons , 2001
- [15] Yaakov Bar-Shalom, Xiao-Rong Li, Estimation with applications to tracking and navigation, John Wiley & Sons , 2001
- [16] 周聖雄, 加速規判定載具三維姿態估測法, 台灣大學應用力學研究所碩士論文, 2002
- [17] 陳奕龍, 以估測器為基礎之平面式純加速規慣性量測單元, 交通大學機械工程研究所碩士論文, 2005
- [18] 莊智清, 黃國興, 電子導航, 全華書局, 2001
- [19] 楊憲東, 自動飛行控制原理與實務, 全華書局, 2002
- [20] 林清一, 數位航空電子系統, 全華書局, 2004