

國立交通大學
光電工程研究所

碩士論文

以布魯斯特角入射法量測透明物質的二維折
射率分佈及其成像

Measurement of the Refractive Index Distribution
of a Transparent Material and its Image with
Brewster Angle Incidence

研究生：謝鴻志

指導教授：蘇德欽

中華民國 九十五年 六 月

以布魯斯特角入射法量測透明物質的二維折射率分佈及其 成像

學生：謝鴻志

指導教授：蘇德欽 教授

國立交通大學光電工程研究所

摘要

在此利用布魯斯特角入射法，藉由強度方式以及相位方式，來得到待測透明物體在二維空間中的折射率二維分佈。在強度量測方面，將雷射光擴束後經過起偏鏡使雷射光成為 p 偏光，並使 p 偏光以空氣-玻璃及空氣-嬰兒油的布魯斯特角入射至待測物上，以 CCD 相機接收反射光，利用所得到的影像及菲涅耳方程式，可以計算出蓋玻片下或水面上待測物的折射率分佈的情形，最後藉由色度圖表示各種不同的折射率，可以得到一透明物質的擬色像。另外，為了提高在布魯斯特角下量測的解析度，又提出了利用相位的方式來量測透明物質的二維折射率分佈。首先，一線性偏振光經過四分之一波片之後，會成為一個左右旋光的旋光光源，接著當光線經待測物反射並通過檢偏板之後，根據菲涅耳方程式與瓊斯計算法可推導出其相位會隨著入射角而變化。當入射的角度為某一特定折射率的布魯斯特角時，干涉光的相位差為零；而非此特定折射率的物質的反射光相位差則不為零，利用此特性，我們可以推導出待測物折射率與相位差之間的關係。本研究與傳統方法比較，對待測物不具破壞性，並具有操作簡單、精確、迅速以及方便等優點。

Measurement of the Refractive Index Distribution of a Transparent Material and its Image with Brewster Angle Incidence

Student: Hung-Chi Hsieh

Advisor: Prof. Der-Chin Su

Institute of Electro-Optical Engineering
National Chiao-Tung University

Abstract

We propose two techniques to evaluate the two-dimensional refractive index distribution of a material, as a collimated-light is incident at Brewster's angle being corresponding to a special refractive index and a CCD camera detects the reflected light. One is an intensity-based technique and the other is a phase-based technique. In the intensity-based technique, a p-polarized light is used. So only the intensity of the special refractive index becomes zero and the refractive index distribution can be obtained by instituting the intensity into Fresnel's equations. On the other hand, a circularly polarized light is introduced into a phase-shifting common-path interferometer in the phase-based technique. An electro-optic modulator is used as a phase-shifter and an analyzer is located before the CCD camera to extract the interference components. The phase being corresponding to the special refractive index is zero and a two-dimensional phase distribution can be evaluated. Then, substituting these data into unique equations derived from Fresnel's equations, the two-dimensional refractive index distribution can be obtained. For clearness, both these two results are represented in pseudo-color. Comparing with the traditional methods, these techniques have two advantages, that is, they are suitable for two-dimensional measurements and they can make the transparent material to be visible without additional dyes or fluorescent materials.

誌 謝

首先我要感謝我的指導教授蘇德欽教授，在我碩士班面臨重大困難時，對我伸出援手幫了我一把，使我能夠順利完成本篇論文。在蘇老師指導的過程中，讓我體會做研究是快樂的，而不是一種痛苦的負擔，並且在為學與待人處事的態度上，潛移默化使我著實獲益良多。

感謝全像實驗室的每個成員，簡志成學長、謝博任學長以及陳彥良學長、楊惠婷學妹，謝謝大家給予我精神上以及實質上的支持與幫助。在此我要特別感謝簡志成學長這一年來不管是研究上或是生活上的事給我許多的建議與幫助。也特別感謝謝博任學長，在生活上、體育上給我許多的幫忙與指導。

感謝我的母親及三位姐姐，從小給我良好的教育，使我能夠無慮的向升學之路邁進，謝謝你們對我完全的支持、鼓勵與栽培。感謝女友孟芳在我最徬徨時陪在我身邊加油打氣。感謝江爸爸、江媽媽及江小妹給我的幫助與建議。最後，將此篇論文獻給我最親愛的父親與母親。



目 次

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
第一章 序論	1
第二章 介面的反射	3
2.1 引言	3
2.2 反射光及透射光強度與折射率的關係	3
2.2.1 電場垂直於入射平面	3
2.2.2 電場平行於入射平面	5
2.2.3 布魯斯特角	7
2.3 反射光及透射光的相位與折射率的關係	8
2.4 布魯斯特角的應用	10
2.5 小結	10
第三章 以強度方式測量折射率分佈及成像	11
3.1 引言	11
3.2 原理	11
3.2.1 待測物分類	11
3.2.2 反射光的強度	13
3.3 實驗與結果	16
3.3.1 量測系統架構與架設	16
3.3.2 實驗參數	21
3.3.3 樣品 A 結果	21
3.3.4 樣品 B 結果	24
3.4 討論	24
3.5 小結	29
第四章 以相位方式測量折射率分佈及成像	30
4.1 引言	30
4.2 實驗原理	30
4.2.1 旋光干涉術原理	30
4.2.2 p 偏光與 s 偏光間的相位差	33

4.2.3	四步驟移相法	35
4.2.4	使用電光晶體調制器移相	35
4.3	實驗與結果	36
4.4	討論	41
4.5	小結	43
第五章 結論		44
參考資料		46



圖目錄

圖 2.1	電場垂直入射及其反射光、透射光關係圖	3
圖 2.2	電場平行入射及其反射光、透射光關係圖	6
圖 2.3	p 偏光振幅反射係數與入射角的關係圖	8
圖 3.1	待測物結構樣品 A	12
圖 3.2	待測物結構樣品 B	12
圖 3.3	p 偏光在樣品 A 的反射情形	13
圖 3.4	樣品 A 反射光強度與透明物體折射率的關係	14
圖 3.5	樣品 B 入射光、反射光與透射光關係圖	17
圖 3.6	樣品 B 反射光強度與透明物體折射率的關係	17
圖 3.7	實驗裝置圖	18
圖 3.8	水平入射時入射光與反射光關係	20
圖 3.9	反射光與反射面鏡的關係圖	20
圖 3.10	樣品 A 在日光燈下樣品圖形	22
圖 3.11	混合 p 偏光與 s 偏光入射所得樣品 A 的結果	22
圖 3.12	p 偏光入射樣品 A 所得的結果	23
圖 3.13	樣品 A 的二維折射率分佈圖	23
圖 3.14	樣品 B 在日光燈下樣品圖形	25
圖 3.15	混合 p 偏光與 s 偏光入射樣品 B 的結果	25
圖 3.16	p 偏光入射的結果	26
圖 3.17	樣品 B 二維折射率分佈圖	26
圖 3.18	樣品 A 反射光強度變化與折射率變化關係	28
圖 3.19	樣品 B 反射光強度變化與折射率變化關係	29
圖 4.1	相位量測實驗架構圖	31
圖 4.2	光入射至空氣-待測物界面示意圖	34

圖 4.3	使用電光晶體調器的移相結構圖	36
圖 4.4	電光晶體結構圖	37
圖 4.5	電光調制晶體移相(a)0 (b) $\pi/2$ (c) π (d) $3\pi/2$ 時所得到的干涉條紋	38
圖 4.6	干涉信號相位差二維分佈圖	39
圖 4.7	待測物折射率二維分佈圖	40
圖 4.8	偏振旋轉示意圖	42
圖 4.9	不同折射率與解析度關係圖	43



表目錄

表 5.1 強度量測比較表

45



第一章 序論

近年來由於生物產業的蓬勃發展，需要許多檢測技術，其中利用光學量測方法結合影像的量測技術，因為擁有非侵入性以及非接觸性的成像方式，因此在醫學以及生理學上的應用已有很長的歷史。此外，如何分辨不同種類的透明生物組織，正確快速的辨識其形狀以及構造，對於研究在溶液中的不同透明生物組織，是非常需要的。一般而言，傳統的檢驗方式要分辨不同的組織需要經過染色，或是必須使用掃描的方式來達到目的，這些方式不是耗時就是會破壞組織本身的結構，如何能夠提供一個快速、方便和不破壞透明生物組織的檢測，是我們的課題。

從許多的文獻[1,2]可以得知觀看透明生物組織的外型以及結構是相當重要，但是一般常見的生物體都常含有大量的水分，折射率與水相近，以至於不容易從水中分辨出來，所以以往許多觀看透明生物組織的成像方法，時常受制於影像的對比度不高，不然就是使用染色法來觀看，但是卻會造成生物組織受到污染。因此為了改善這些問題，有許多新的方法被提出來[3]，1981年，D. Axelrod等人[4]是使用接近全反射臨界角造成的螢光現象來觀看生物組織。但是如果利用螢光的方式，則必須加入染料，那麼加入的染料會污染生物體組織；使用掃描的方式[5,6,7]又過於耗時；而在1991年時S. Henon等人[8]提出了利用p偏光以布魯斯特角入射至待測面上，來觀察水面上的單層物質。所以本研究中分別提出利用量測p偏光反射光強度，以及量測反射光中s偏光與p偏光相位的方式來得到待測透明物體的二維折射率分佈，把生物體的外形跟結構從水中分辨出來，最後將得到的折射率二維分佈以色彩的方式表現，使透明待測物體成一pseudo-color像。

此方法具有不污染生物體、快速量測的優點，我們設定p偏光的入射角在布魯斯特角時進行量測水中透明物質的外形和結構，利用在p偏光以及布魯斯特角的特性，不同折射率的物質造成反射光強度的不同與相位差的不同的性質。布魯斯特角[8,9]以及光的干涉已經是一個非常有歷史的現象，理論已經非常成熟，也

經過許多人的驗證，我們結合布魯斯特角以及旋光干涉術，來做生物組織的折射率分佈檢測，此項方式不會破壞生物組織，加上是利用光學的方式來檢測，所以不需要加上染色或是經過化學反應；且使用 CCD 直接取出二維影像做處理，可以省去掃描所需要的時間，故可以達到實用上的要求。

本論文除了此章之外，其餘各章內容簡述如下：

第二章：界面的反射

本章介紹光通過界面時，其反射光與透射光的強度及相位與介質折射率的關係為何。並且推導布魯斯特角與介質折射率之間的關係，最後說明其可能的應用。

第三章：以強度方式測量折射率分佈及成像

本章介紹如何利用反射光強度的方式，來量測得知透明物體的二維折射率分佈並使其成像。說明此方法的理論、模擬；待測物的分類、實驗架構、實驗結果，最後討論其誤差。

第四章：以相位方式量測折射率分佈及成像

本章說明利用共光程干涉以及旋光的方式引入相位差，利用此方法，我們可以測得透明物體的折射率分佈。在本章中說明其原理、實驗架構、結果，最後討論其誤差。

第五章：結論

將本篇論文作個總結，並說明其優點以及應用，並討論未來的發展可行性。

第二章 界面的反射

2.1 引言

在本章中說明光通過兩折射率不同的界面時，反射光與透射光的振幅反射與透射係數以及相位與折射率的關係，並且推導出布魯斯特角的理論，並敘述其可能的應用。

2.2 反射光及透射光強度與折射率的關係

本小節中我們考慮兩種情況：第一是電場分量垂直於入射平面(s 偏光)；第二是電場分量平行於入射平面(p 偏光)。

2.2.1 電場垂直於入射平面

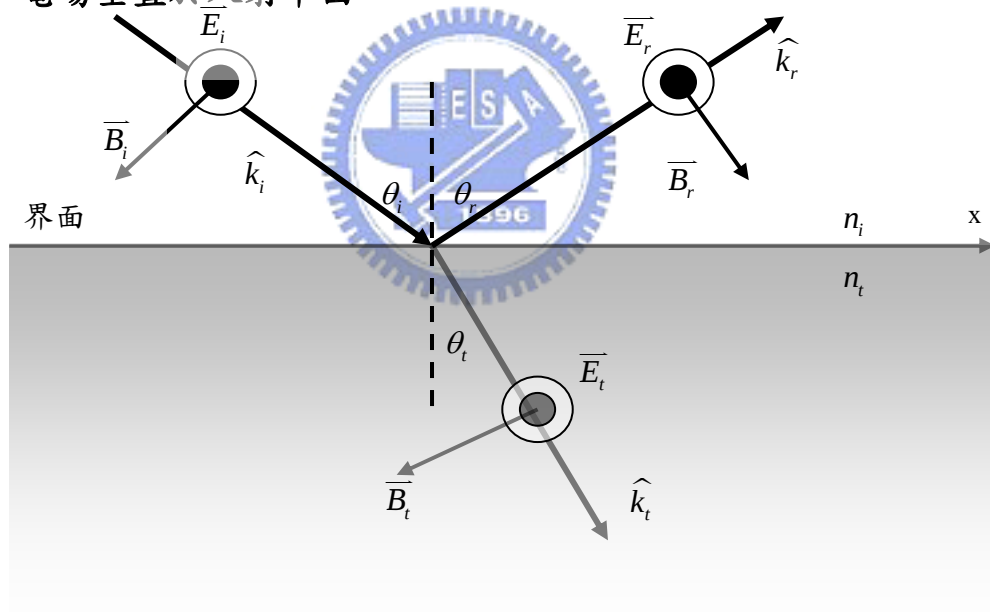


圖 2.1 電場垂直入射及其反射光、透射光關係圖

如圖 2.1 所示，圖中沿著界面的水平方向定為 x 方向，而垂直界面的法線方向定為 y 方向。假設電場 $\vec{E}$ 是垂直入射平面，而磁場 $\vec{B}$ 是平行入射平面。圖中 $\vec{E}_i$ ， $\vec{E}_r$ 及 $\vec{E}_t$ 表

示入射光電場向量，反射光電場向量及透射光電場向量；而 $\overline{B}_i$ ， $\overline{B}_r$ 及 $\overline{B}_t$ 分別表示入射光磁場向量，反射光磁場向量及透射光磁場向量；而 $\hat{k}_i$ ， $\hat{k}_r$ 及 $\hat{k}_t$ 是入射光，反射光及透射光的行進方向的單位位向量； n_i 與 n_t 分別表示入射介質及透射介質的折射率； θ_i ， θ_r 及 θ_t 分別表示入射角，反射角及折射角。由電磁波理論可得知[10] $E = vB$ ，其中 v 是電磁波傳遞的速度，所以我們可得

$$\hat{k} \times \overline{E} = v \overline{B} , \quad (2.1)$$

$$\hat{k} \cdot \overline{E} = 0 , \quad (2.2)$$

利用電場的平行分量在界面處連續的邊界條件[11]，我們可得

$$\overline{E}_{0i} + \overline{E}_{0r} = \overline{E}_{0t} , \quad (2.3)$$

其中下標 0 表示在 $y=0$ 即界面的地方。其次利用 $\overline{B}/\mu$ 在界面處是連續的邊界條件[12]，我們可得

$$-\frac{B_{0i}}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_{0r}}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{B_{0t}}{\mu_t} \cos \theta_t , \quad (2.4)$$

又由(2.1)式可得

$$B_{oi} = \frac{E_{oi}}{v_{oi}} , \quad (2.5a)$$

$$B_{or} = \frac{E_{or}}{v_{or}} , \quad (2.5b)$$

$$\text{及 } B_{ot} = \frac{E_{ot}}{v_{ot}} , \quad (2.5c)$$

由於入射與反射是同一介質，故 $v_{oi} = v_{or}$ ；各介質中的速度等於光速除以折射率[13]；且由反射定律可知 $\theta_i = \theta_r$ ，所以(2.4)式可以寫為

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{oi} - E_{or}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{ot} \cos \theta_t , \quad (2.6)$$

再由(2.3)式及(2.6)式，我們可以推得電場垂直入射面入射時，其振幅反射係數 r_s 與振幅透射係數 t_s 為

$$r_s = \left(\frac{E_{0r}}{E_{oi}} \right)_\perp = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}, \quad (2.7a)$$

$$t_s = \left(\frac{E_{0t}}{E_{oi}} \right)_\perp = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}, \quad (2.7b)$$

其中，下標 $\perp$ 表示電場垂直入射平面。通常假設我們所感興趣的物質是非磁性物質，所以 $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$ ，則

$$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (2.8a)$$

$$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (2.8b)$$



在此我們以下標 s 表示與入射面垂直，下文提到的電場若是與入射平面垂直，則以 s 偏光稱之。則我們可以得到 s 偏光其反射率 R_s 及透射率 T_s 的大小分別為

$$R_s = |r_s|^2 = \left[\frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \right]^2, \quad (2.9)$$

$$T_s = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) |t_s|^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) \left[\frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \right]^2, \quad (2.10)$$

2.2.2 電場平行於入射平面

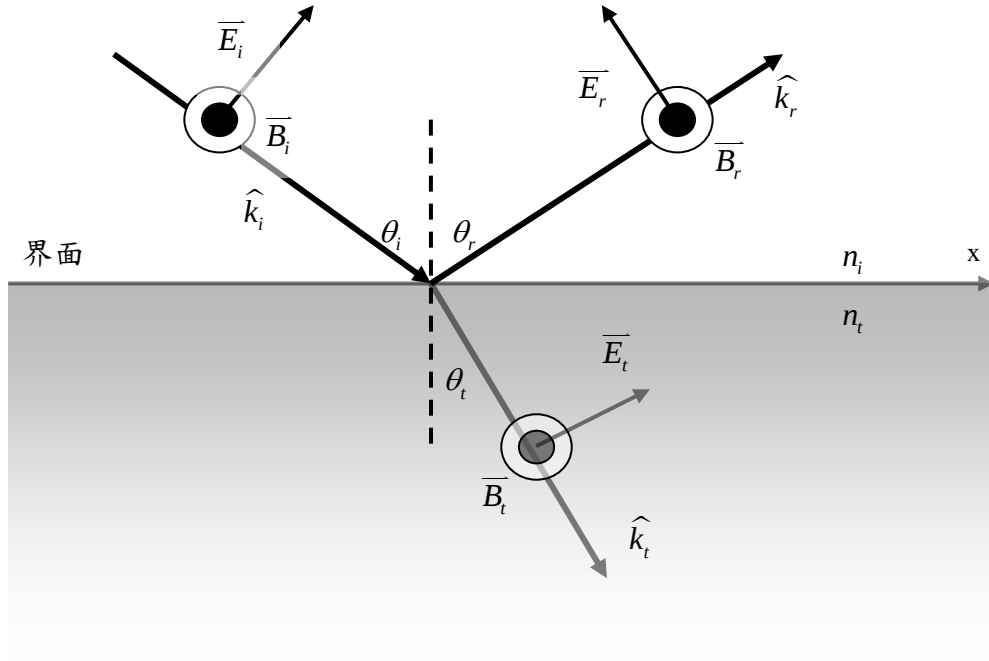


圖 2.2 電場平行入射及其反射光、透射光關係圖

考慮圖 2.2，圖中的符號與圖 2.1 中所使用的符號一樣，不同的是圖 2.2 為入射光電場方向與入射平面平行。相同地，我們利用平行界面的電場分量是連續的邊界條件，可得

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t, \quad (2.11)$$

利用平行界面的磁場分量是連續的邊界條件以及(2.5)式，可得

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r v_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t v_t} E_{0t}, \quad (2.12)$$

由(2.11)式及(2.12)式的聯立方程式，可以解得平行入射平面入射的電場，其振幅反射係數 r_p 及振幅穿透係數 t_p 為

$$r_p = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i}, \quad (2.13a)$$

$$t_p = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i}, \quad (2.13b)$$

式中下標 $\parallel$ 表示電場是平行入射平面，而下標 p 則表示與入射面平行，下文凡提到電場與入射平面平行者，皆以 p 偏光稱之。若假設入射介質與透射介質為非磁性物質，則(2.13)式變為

$$r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, \quad (2.14a)$$

$$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, \quad (2.14b)$$

則我們可以得到 p 偏光其反射率 R_p 及透射率 T_p 的大小分別為

$$R_p = |r_p|^2 = \left[\frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \right]^2, \quad (2.15)$$

$$T_p = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) |t_p|^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) \left[\frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \right]^2. \quad (2.16)$$

2.2.3 布魯斯特角

根據 Snell's law 可得知 $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ ，將其與(2.14a)式結合，我們可得 p 偏光振幅反射係數的另一種表示法

$$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad (2.17)$$

在(2.17)式中，分母是 $\tan(\theta_i + \theta_t)$ ，即當 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 時， r_p 的值會趨於無窮大，從而 $r_p = 0$ 。

這時的入射角就是布魯斯特角 θ_B 。將 $\theta_i = \theta_B$ ，以及 $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_B$ 代入 Snell's law，則我們

可以得到布魯斯特角的運算式

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_t}{n_i} \right). \quad (2.18)$$

若以水面為例，則 $n_i = 1$ ， $n_t = 1.33$ ；此時 p 偏光的振幅反射係數的絕對值 $|r_p|$ 及入射角 θ_i 的關係如圖 2.3 所示。當入射角 θ_i 漸漸變大時，我們發現 $|r_p|$ 會漸漸變小至零，然後才變大。我們將反射係數為零時的入射角稱為布魯斯特角 θ_B ，由(2.5)式我們可知 $\theta_B = 53.06^\circ$ 。

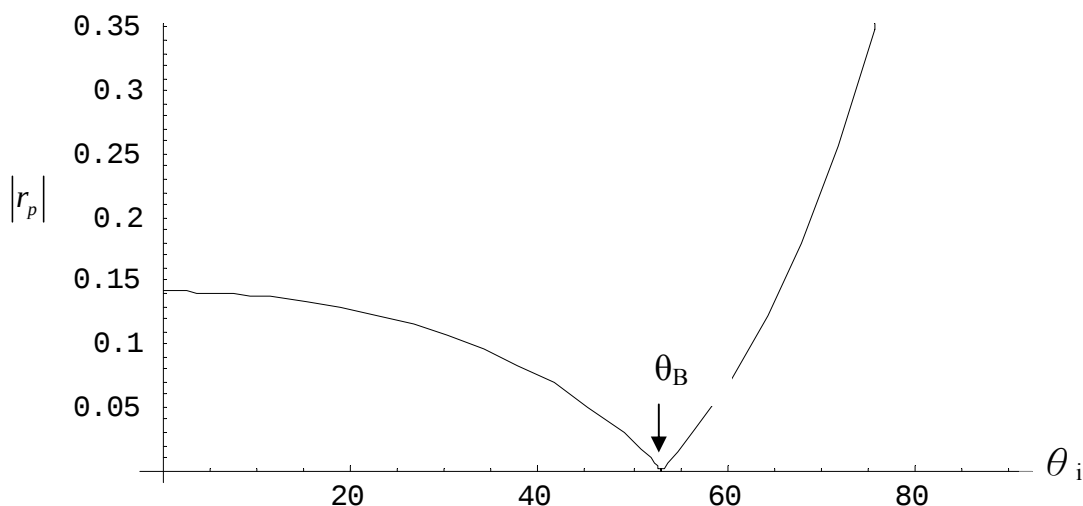


圖 2.3 p 偏光振幅反射係數與入射角的關係圖

2.3 反射光及透射光的相位與折射率的關係

根據 Snell's law 我們可知

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t, \quad (2.19)$$

由(2.19)式我們可以得到折射角的餘弦值

$$\cos^2 \theta_t = 1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \right)^2 \sin^2 \theta_i, \quad (2.20)$$

但是為了滿足(2.8a)式，所以我們在計算根號時必須取負號，則

$$\begin{aligned}
\cos \theta_t &= -\sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t}\right) \sin^2 \theta_i} \\
&= -i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right) \sin^2 \theta_i - 1} ,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

將(2.21)式代入(2.8a)式，則可得

$$r_s = \frac{\cos \theta_i - i \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)}}{\cos \theta_i + i \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)}} = e^{i\phi_s} , \tag{2.22}$$

其中 ϕ_s 是 s 偏光反射後產生的相位移，由於

$$e^{i\phi_s} = \cos \phi_s + i \sin \phi_s , \tag{2.23}$$

根據(2.22)式與(2.23)式，我們可得 s 偏光反射後產生的相位移為

$$\phi_s = -2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)}}{\cos \theta_i} \right) . \tag{2.24}$$

同理，將(2.21)式代入(2.14a)式，我們可得

$$r_p = \frac{\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 \cos \theta_i - i \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}}{\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 \cos \theta_i + i \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}} = e^{i\phi_p} , \tag{2.25}$$

其中 ϕ_p 是 p 偏光反射後所引入的相位移。所以我們亦可得到

$$\phi_p = -2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}}{\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 \cos \theta_i} \right) . \tag{2.26}$$

綜合以上，當入射光反射後 s 偏光與 p 偏光都會引入一個額外的相位移，此相位移跟光密與光疏介質的折射率比有關係，在不同的入射角之下也會有不同的相位移，更與

光的偏振態有關。所以我們可以由(2.24)式與(2.26)式來計算出 p 偏光與 s 偏光之間的相位差為

$$\phi = \phi_s - \phi_p = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i} \right)^2}}{\tan \theta_i \sin \theta_i} \right), \quad (2.27)$$

2.4 布魯斯特角的應用

p 偏光以布魯斯特角入射有個非常重要的特性，即反射光強度趨近零。利用此特性，可以用來量測待測物體的折射率。假設有一未知折射率的待測物，放置於已知折射率的水、載玻片等上，我們可以事先計算好空氣-水的布魯斯特角或是空氣-載玻片的布魯斯特角，如此水與空氣的界面或載玻片與空氣的界面便沒有反射光的產生，反射光是來自待測物體，再利用 Fresnel's equation，可以求得反射光強度對折射率的關係，進而求出待測物體的折射率。



2.4 小結

在本章說明 p 偏光與 s 偏光在界面反射及透射的情形，並推導其振幅反射係數及振幅透射係數與折射率的關係。利用這些關係，我們推導出 p 偏光入射時，在布魯斯特角時，其反射率為零，並導出布魯斯特角的一般式。隨後說明 p 偏光與 s 偏光反射時所產生的相位移。最後介紹了布魯斯特角的應用。

第三章 以強度方式測量折射率分佈及成像

3.1 引言

由於透明生物體的折射率不是唯一值，通常是在平面上形成二維分佈，此分佈是因為生物體裡面有不同的組織與結構所造成的，因此在本章中我們利用 p 偏光以各種不同界面的布魯斯特角入射來消除界面的反射光，並且利用反射光強度的不同，以得到透明物體和水混和物的二維折射率分佈。本章將討論如何利用強度方式來得到透明物體的二維折射率分佈，內容包括各種不同待測物結構介紹；強度量測的實驗原理及其模擬與實驗架構、結果，最後討論其誤差。

3.2 原理

本節中會詳細介紹待測物的分類，及對某界面的布魯斯特角入射下，各種不同的待測物其反射光強度與折射率之間的關係。



3.2.1 待測物分類

生物學家在量測檢體時，經常將檢體放在蓋玻片與載玻片中間觀察，或是放在水面上觀察。本論文研究主要的目的即利用光以布魯斯特角入射的方式，來觀察透明物體並使其成像，為了達到此一目的，我們在樣品結構的選擇上與生物學家觀察檢體時的樣品結構相同，第一，將待測的透明物體放在水面上；第二，將待測的透明物體放在蓋玻片與載玻片中間。此外，在以強度方式測量時，為了提高影像的對比度，我們使用布魯斯特角入射以消除界面不必要的反射光。下文將詳細說明之。

基於以上理由，為了探討 p 偏光以布魯斯特角(Brewster angle)入射時，反射光的強度與折射率之間的關係，我們將待測物體的結構做兩種不同的變化。首先是將待測的透明物體在空氣與水的界面上，如圖 3.1 所示，後文通稱此結構為樣品 A；第二則是將待測的透明物體夾在蓋玻片與載玻片之間，以符合量測生物標本時的結構，如圖 3.2 所示，後文通稱此結構為樣品 B。以下分別討論各種不同樣品結構對反射率的影響。

空氣 $n_0=1$

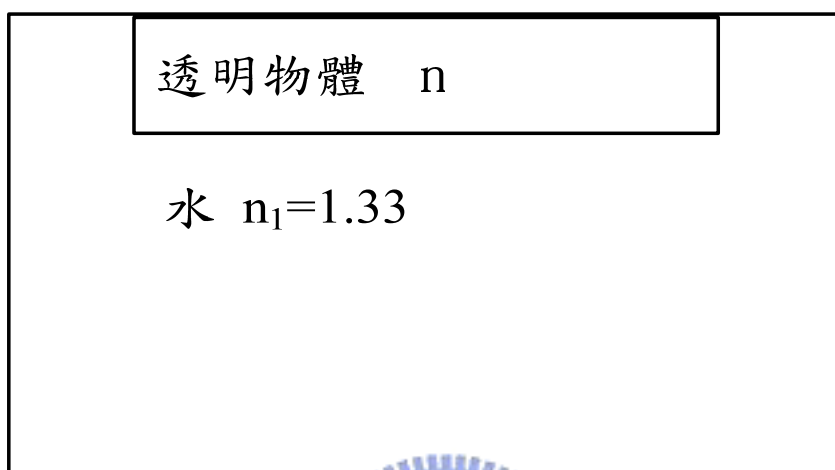


圖 3.1 待測物結構樣品 A



空氣 $n_0=1$

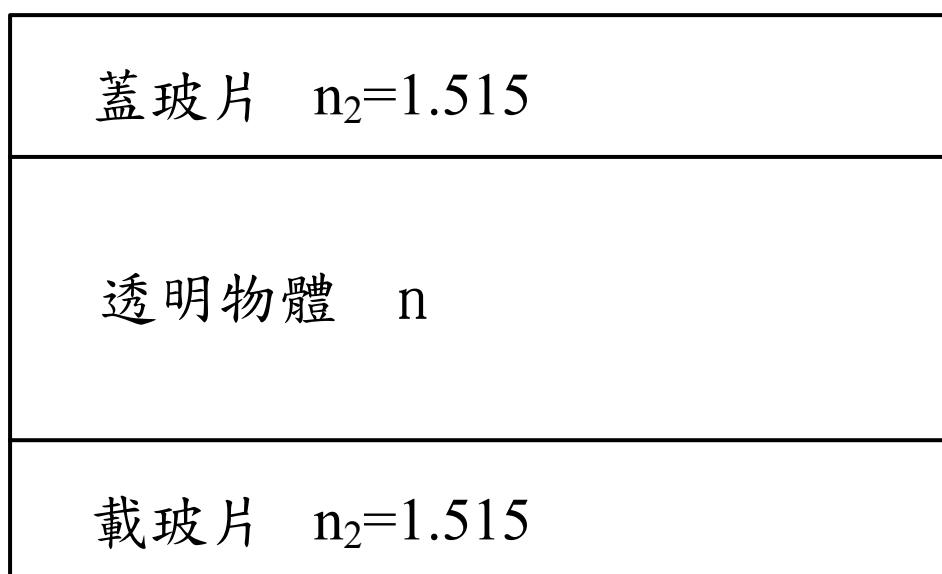


圖 3.2 待測物結構樣品 B

3.2.2 反射光的強度

(a) 樣品 A

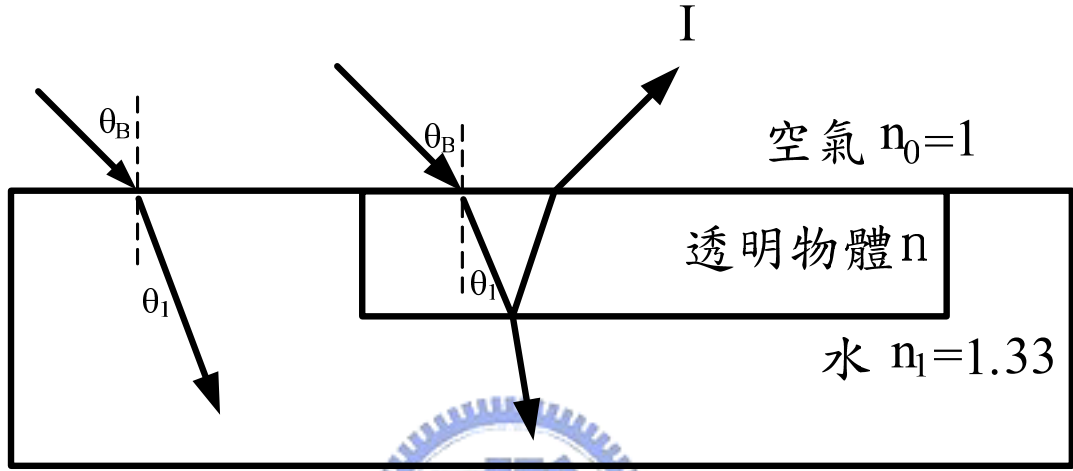


圖 3.3 p 偏光在樣品 A 的反射情形

考慮如圖 3.1 的樣品結構。我們將 p 偏光以空氣-透明物體的布魯斯特角入射，可以預期的是，透明物體第一層的反射光為零，而剩下透明物體的第二層與水面的反射光，其關係如圖 3.3 所示。

在此圖中 θ_1 僅表示光由空氣進入不同介質時的折射角；而I表示透明物體的反射光。下一層的反射光，即水-空氣界面的反射，在此我們並不考慮，由於只要將水的厚度增加，我們即可忽略這項因素。同樣地，由Fresnel's equation，我們可以得到由此結構所造成反射率為

$$R = |r|^2 = \left| \frac{n \cos \theta_B - n_0 \cos \theta_1}{n \cos \theta_B + n_0 \cos \theta_1} \right|^2, \quad (3.1)$$

而由Snell's law我們可以用n來表示 θ_1 ，則

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B}}{n}, \quad (3.2)$$

結合(3.1)式與(3.2)式，我們可以得到反射光強度與透明物體的折射率間的關係

$$I = I_0 R = I_0 \left| \frac{n \cos \theta_B - n_0 \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B}}{n}}{n \cos \theta_B + n_0 \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B}}{n}} \right|^2, \quad (3.3)$$

從(3.3)式即可由反射光的強度來得到透明物體的折射率

$$n(I) = \sqrt{\frac{n_0^2 (1 + \sqrt{\frac{I}{I_0}})^2 + \sqrt{n_0^4 (1 + \sqrt{\frac{I}{I_0}})^4 - 4n_0^4 (1 + \sqrt{\frac{I}{I_0}})^2 (\cos \theta_B - \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cos \theta_B)^2}}{2(\cos \theta_B - \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cos \theta_B)^2}}, \quad (3.4)$$

將 $\theta_B = 55.59^\circ$ ，即空氣-嬰兒油的布魯斯特角， $n_0 = 1$ 、透明物體的折射率 n 的範圍為 1.33~1.46

代入(3.3)式，則可得到反射光強度 I 對透明物體折射率 n 的關係，如圖 3.4 所示。在該圖

中為了方便起見我們假設入射光強度 $I_0 = 1$ ，由此圖我們發現當透明物體的折射率為

1.46 時，即此時透明物體即為嬰兒油，其反射光強度為零，光全部透射至水下；而當透

明物體折射率愈小其反射光強度會愈大。

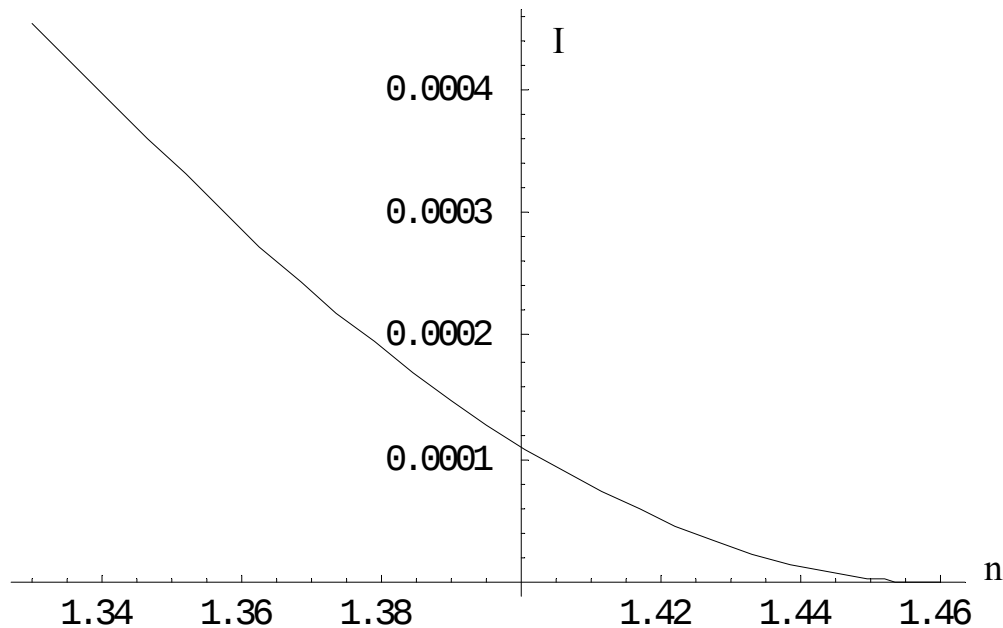


圖 3.4 樣品 A 反射光強度與透明物體折射率的關係

(b) 樣品 B

考慮如圖 3.2 的樣品B結構。為了避免空氣-玻璃界面的反射光，我們將入射角定為空氣-玻璃的布魯斯特角($\theta_B=56.57^\circ$)，如圖 3.5 所示。由Fresnel's equation，可以得到蓋玻片-透明物質界面的反射率大小為：

$$R = [t_{02} \times r_{2n} \times t_{20}]^2, \quad (3.5a)$$

其中 t_{02} 是 p 偏光以布魯斯特角由空氣進入玻璃時的振幅透射係數

$$t_{02} = \left(\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_B} \right) \times \left(\frac{2n_0 \cos \theta_B}{n_0 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_B} \right), \quad (3.5b)$$

r_{2n} 是 p 偏光自蓋玻片與待測物界面處反射時的振幅反射係數

$$r_{2n} = \frac{n \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_3}{n \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_3}, \quad (3.5c)$$

而 t_{20} 是 P 偏光自待測物反射後由玻璃進入空氣時的振幅透射係數

$$t_{20} = \left(\frac{n_0 \cos \theta_B}{n_2 \cos \theta_2} \right) \times \left(\frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_B + n_0 \cos \theta_2} \right), \quad (3.5d)$$

所以我們可得反射率為

$$R = \left[\left(\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_B} \right) \times \left(\frac{2n_0 \cos \theta_B}{n_0 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_B} \right) \right]^2 \times \left[\left(\frac{n \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_3}{n \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_3} \right) \right]^2 \times \left[\left(\frac{n_0 \cos \theta_B}{n_2 \cos \theta_2} \right) \times \left(\frac{2n_2 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_B + n_0 \cos \theta_2} \right) \right]^2, \quad (3.6)$$

其中 n_0 、 n_2 、 n 分別代表空氣折射率、玻璃折射率、透明物體折射率；而 θ_B 、 θ_2 及 θ_3 則分別代表空氣-玻璃的布魯斯特角、空氣到玻璃的折射角及玻璃到物質的折射角。為了簡化計算，我們先將實驗上的參數 $n_0=1$ ； $n_2=1.515$ ； $\theta_B=56.57^\circ$ ； $\theta_2=33.42^\circ$ 部分代入(3.6)式，則可以將反射率簡化為

$$R = \left[\left(\frac{n \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_3}{n \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_3} \right) \right]^2, \quad (3.7)$$

利用 Snell's law 定律，可以用 n 來表示 $\cos \theta_3$

$$\cos \theta_3 = \frac{\sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2}}{n}, \quad (3.8)$$

所以反射光的強度可以寫為

$$I_1 = I_0 R = I_0 \left[\frac{n \cos \theta_2 - n_2 \frac{\sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2}}{n}}{n \cos \theta_2 + n_2 \frac{\sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2}}{n}} \right]^2, \quad (3.9)$$

其中 I_1 為反射光強度， I_0 為入射光強度。

所以我們可以藉由反射光強度的不同，利用式(3.9)式而求得折射率分佈：

$$n = \sqrt{\frac{\left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}\right)^2 n_2^2 - \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}\right)^4 n_2^4 - 4 \left(1 - \frac{I_1}{I_0}\right)^2 n_2^2 \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2}}{2 \left(1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}\right)^2 \cos^2 \theta_2}}, \quad (3.10)$$

將 $n_0=1$ 、 $n_2=1.515$ 、 $\theta_2=33.4^\circ$ ，並設入射光強度 $I_0=1$ ，透明物體的折射率 n 則由 1.33~1.515 分別代入(3.9)式，可以得到反射光強度 I 與透明物體折射率 n 的關係，如圖 3.6 所示。由此圖我們可以發現，當折射率 n 越接近 1.515 時，反射光的強度就越弱。若遠離 1.515 處，則反射光強度大。

3.3 實驗與結果

本節中將介紹實驗系統裝置、實驗結果。

3.3.1 量測系統架構與架設

本研究的實驗裝置如圖 3.7 所示。為了方起見，定義沿光行進的方向為 z 軸，垂直紙面向上的方向為 y 軸。由雷射光源所射出的光經由空間濾波器及透鏡所構成的擴束器後成為平行擴束光，將此擴束過的光經平面鏡反射後，再經過起偏鏡(polarizer)後成振動為 x 方向的 p 偏光。此 p 偏光，以空氣-玻璃界面的布魯斯特角入射至待測物上，反射光以 CCD 來接收，調整 zoom lens 可以改變影像的放大率，拍攝影像時所對準的是待測

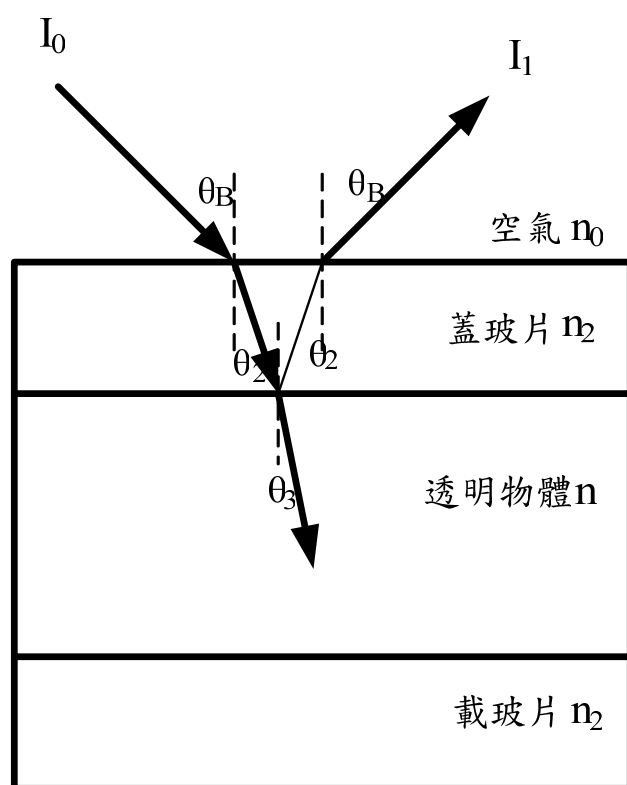


圖 3.5 樣品 B 入射光、反射光與透射光關係圖

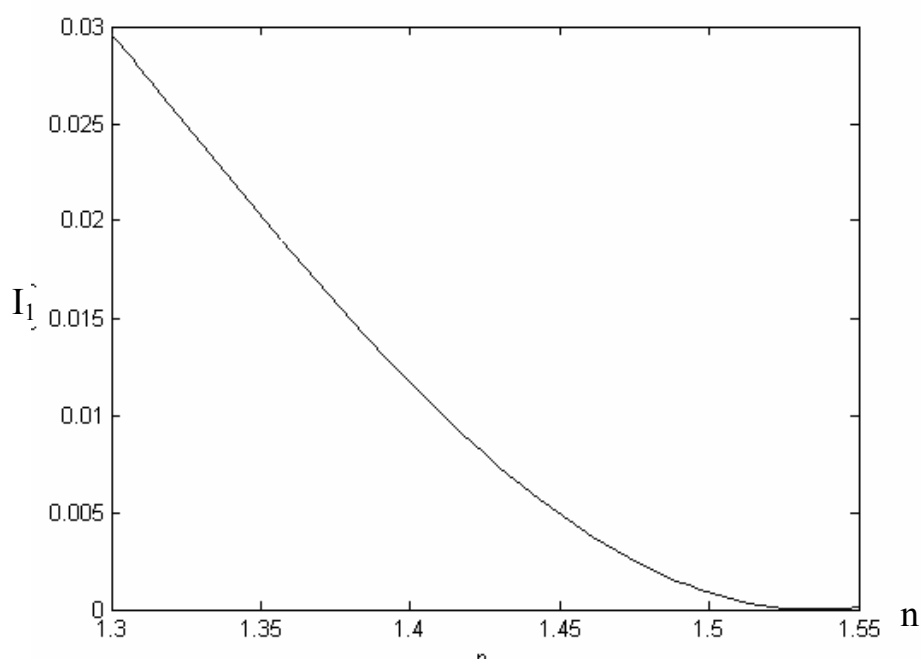


圖 3.6 樣品 B 反射光強度與透明物體折射率的關係

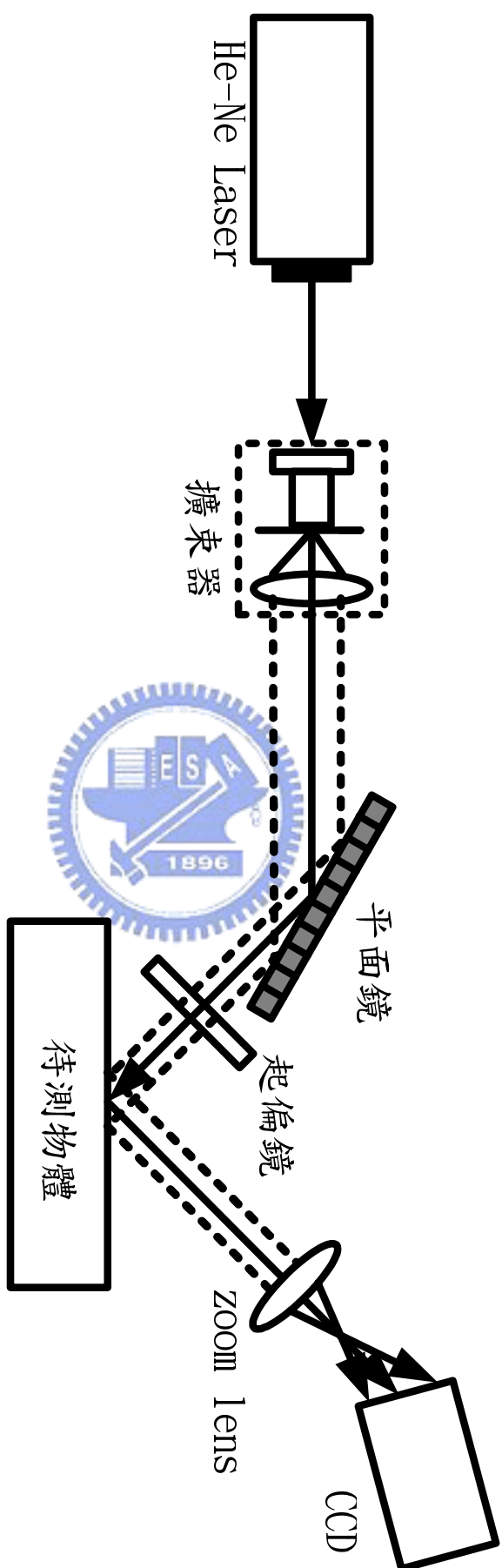


圖 3.7 實驗裝置圖

物的表面。

實驗中，由於反射光強度太弱，以致於我們選用高功率的雷射光源。其次，由於反射光強度對布魯斯特角的選定是非常敏感，當角度恰好為布魯斯特角時，則界面的反射光強度為零；反之，當角度稍稍偏離布魯斯特角，則界面反射光會有明顯的提高[14]。所以在架設實驗裝置時有三個特別需要注意的地方，第一入射光束必須為 p 偏光；第二，入射光束在實驗的範圍內必須是良好的平行光；第三，入射光束入射到待測物時的角度必須為實驗所選定的角度。符合以上三項，可以大幅度降低實驗誤差。

在架設實驗裝置時，我們利用起偏鏡來使雷射光束成為 p 偏光。而在調校光路部份，我們雷射經過空間濾波器後，放置一個透鏡使其成為平行光，而我們在調整平行光時，利用可調式光圈將雷射光射在同心圓紙片形成一個固定的大小，之後使同心圓紙片前後移動約三公尺的距離，調整透鏡使雷射光在三公尺內保持平行。在入射光角度的設定上，由於我們的入射角度並不固定，所以不依照傳統的架設方式[15]，即將雷射以待測物某一定點為轉軸，而轉動雷射。由於雷射不宜時常移動，以及若移動整個實驗光源，恐會影響實驗系統的穩定度及平行度。所以本研究採用的方法是將擴束後且確定平行的雷射光，後面放置一可旋轉的平面鏡，將雷射光經過平面鏡反射後的光使其反射回原點，以確定平面鏡轉軸垂直雷射光前進的方向，如圖 3.8 所示。由於平面鏡轉動 θ 角，反射光會轉動 2θ 的關係，如圖 3.9 所示，因此平面鏡轉動的角度將會是入射角的一半。實驗時先將平面鏡旋轉 45° ，此時雷射光會垂直往下，將待測物放在雷射光下，調整樣品傾斜角使其將雷射光反射回原點，如此可確定樣品表面與雷射光束垂直。此時再將雷射光束調整到所需的角度的角度，將樣品水平移動到雷射光處即可。本實驗所使用的旋轉台是 SIGMA SGSP-160YAW，轉動的精確度可達 0.0025° 。此法將不會轉動到雷射及空間濾波

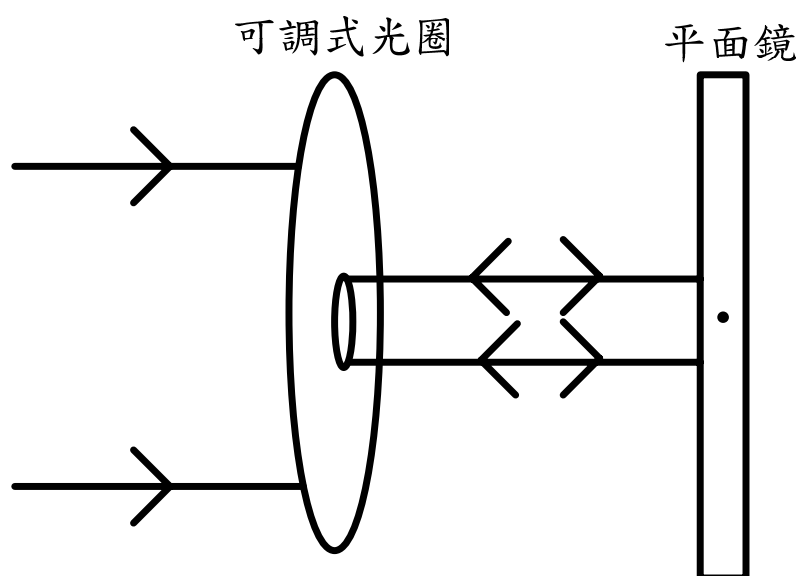


圖 3.8 水平入射時入射光與反射光關係

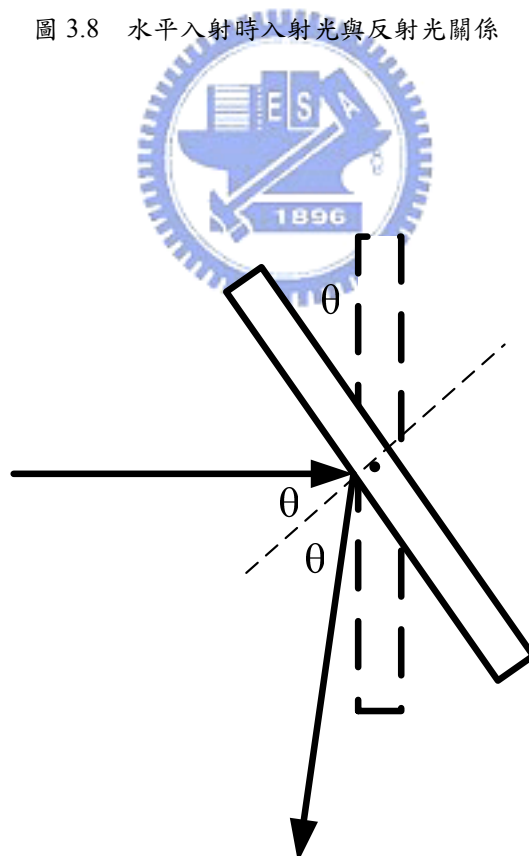


圖 3.9 反射光與反射面鏡的關係圖

器，使系統的穩定度大大的提升。

3.3.2 實驗參數

為了驗證這個方法的可行性，我們利用兩種不同的樣品結構，並利用油與水的混合來模擬透明生物體在水中的狀態，該油類混合物溶液為透明且難以用肉眼觀察其分布，所以能取代透明生物體並測試本方法的可行性。我們使用波長 632.8nm 的 He-Ne 雷射；蓋玻片與載玻片則是折射率為 1.515 的 BK-7；待測物使用蓖麻油、嬰兒油混合水模擬之，其折射率分別為 1.513、1.463 及 1.33。CCD 為 PULNiX Inc. 生產的 TM-545，為 510×492 pixels 以及 8bits 解析度，影像擷取卡為 Matrox 公司生產之 Meteor-II/Standard，最後實驗資料擷取與分析是使用 Engineering Synthesis Design Inc. 的 IntelliWave™ 軟體，以及 MathWork 公司的 Matlab 軟體。

在此我們將待測物分為兩種結構探討。在樣品 A 中，我們選擇嬰兒油使其浮在水面上。樣品 B 我們選擇將嬰兒油、蓖麻油及水的混合夾在蓋玻片與載玻片的中間。



3.3.3 樣品 A 結果

圖 3.10 為水面上放置嬰兒油，而在一般情形下所見待測物體的外觀，圖中我們分辨不出透明物體的分布情形如何。

接著我們利用 p 與 s 混合的偏光以空氣-嬰兒油的布魯斯特角入射，可以得到如圖 3.11 的結果，在此圖中，水及嬰兒油表面的反射含有 s 偏光的成分，導致反射光太強以致於我們無法判別出透明物體的分佈。

其次以為單純 P 偏光以空氣-嬰兒油的布魯斯特角入射，可以得到如圖 3.12 的結果，由此圖可以明顯的看出透明物體的分佈情形為何。與理論預測相同，圖中較亮的部分為折射率較小的部分，而較暗的部分為折射率較大的部分。但是由於嬰兒油於水界面處並不是完美的平面，所以會有散射光的產生。

將圖 3.12 的反射光強度分佈結果代入(3.4)式中，即可得如圖 3.13 所示的折射率的二維分佈圖；由此圖可以清楚分辨出嬰兒油及水的差別。

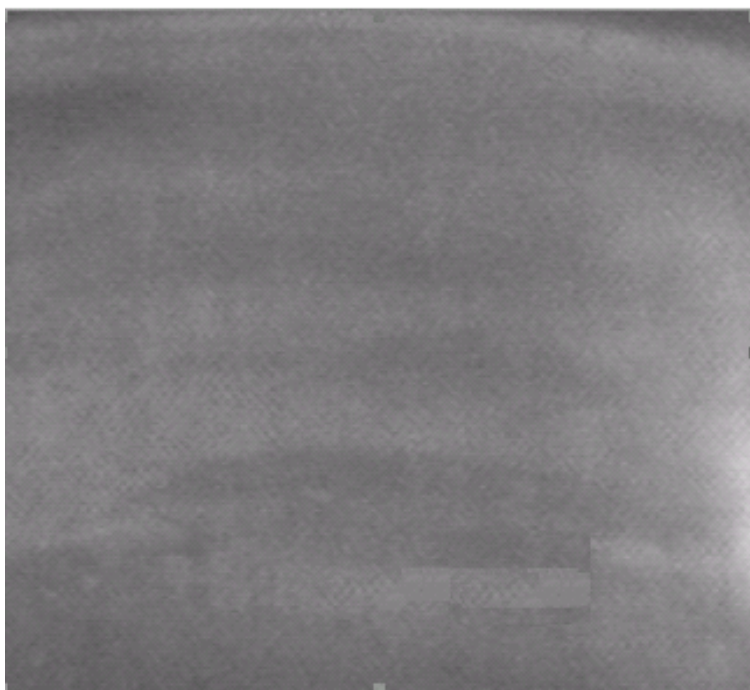


圖 3.10 樣品 A 在日光燈下樣品圖形



圖 3.11 混合 p 偏光與 s 偏光入射所得樣品 A 的結果



圖 3.12 p 偏光入射樣品 A 所得的結果

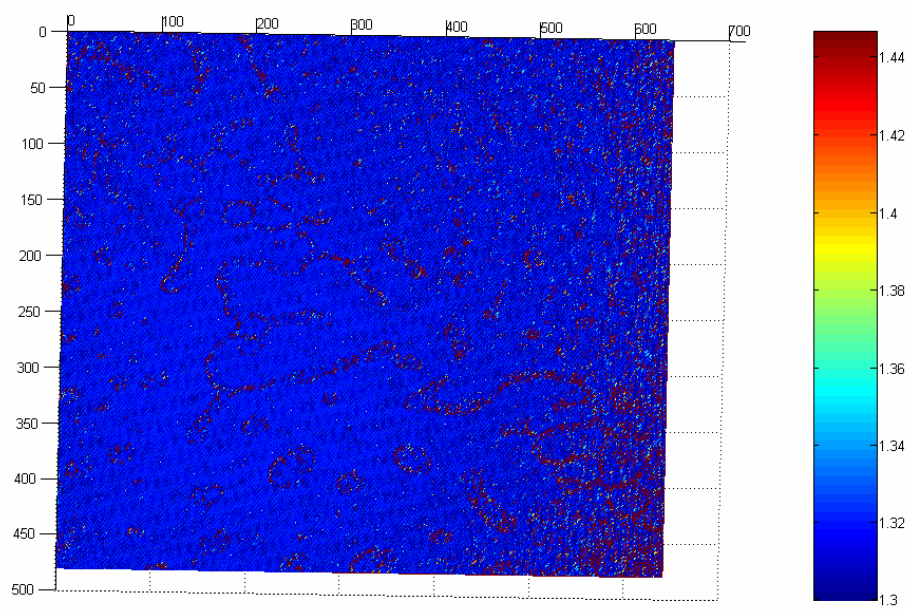


圖 3.13 樣品 A 的二維折射率分佈圖

3.3.4 樣品 B 結果

而在一般日光燈照射的情形下所見樣品 B 的外觀如圖 3.14 所示，由圖中我們分辨不出透明物體的分布情形如何。接著我們利用 p 與 s 混合的偏光以空氣-玻璃的布魯斯特入射，可以得到如圖 3.15 的結果，在此圖中，由於蓋玻片表面反射 s 偏光，導致反射光太強而以致於我們無法判別出透明物體的分佈。其次為單純 p 偏光以空氣-玻璃的布魯斯特角入射，可以得到如圖 3.16 的結果。由此圖可以明顯的看出透明物體的分佈情形為何。與理論預測相同，圖中較亮的部分為折射率較小的部分，而較暗的部分為折射率較大的部分。由於我們是用空氣-玻璃的布魯斯特角入射，所以周圍全黑的地方是玻璃。

將圖 3.16 的反射光強度分佈的結果代入(3.10)式中，即可得如圖 3.17 所示的折射率的二維分佈圖，由此圖可以清楚分辨出蓖麻油、嬰兒油及水的差別。此外，由於蓖麻油跟玻璃的折射率幾乎是一樣的，所以在圖中並不是那麼的明顯。

3.4 討論

為了探討此技術的量測誤差[16]，我們將誤差的討論就不同的樣品分為兩個部分討論，其中誤差的主要來源有折射率的改變量有關 Δn 與入射角度的偏差 $\Delta\theta$ 。

(a) 樣品 A

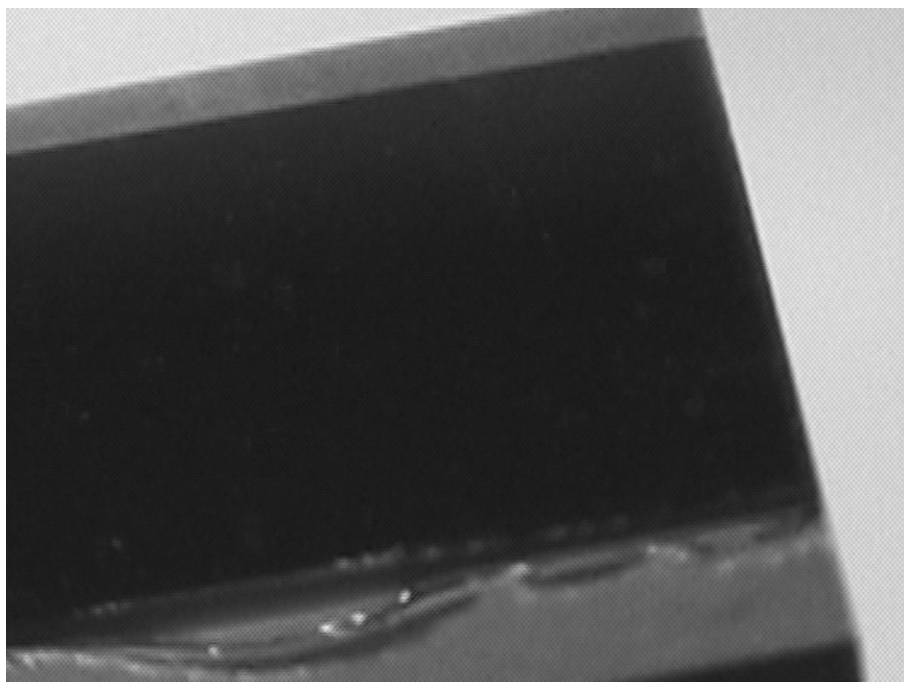


圖 3.14 樣品 B 在日光燈下樣品圖形

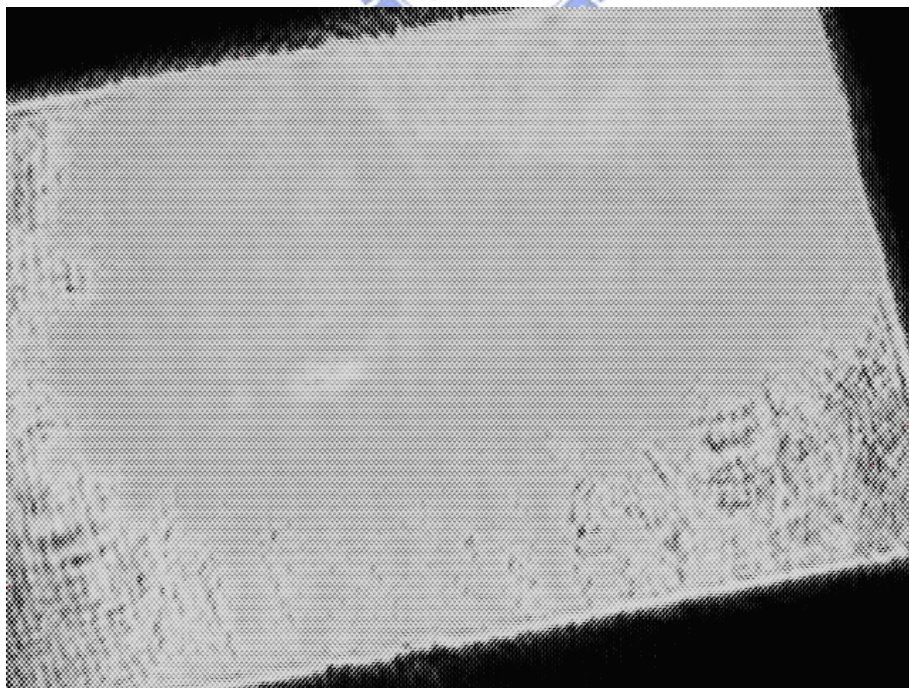


圖 3.15 混合 p 偏光與 s 偏光入射樣品 B 的結果

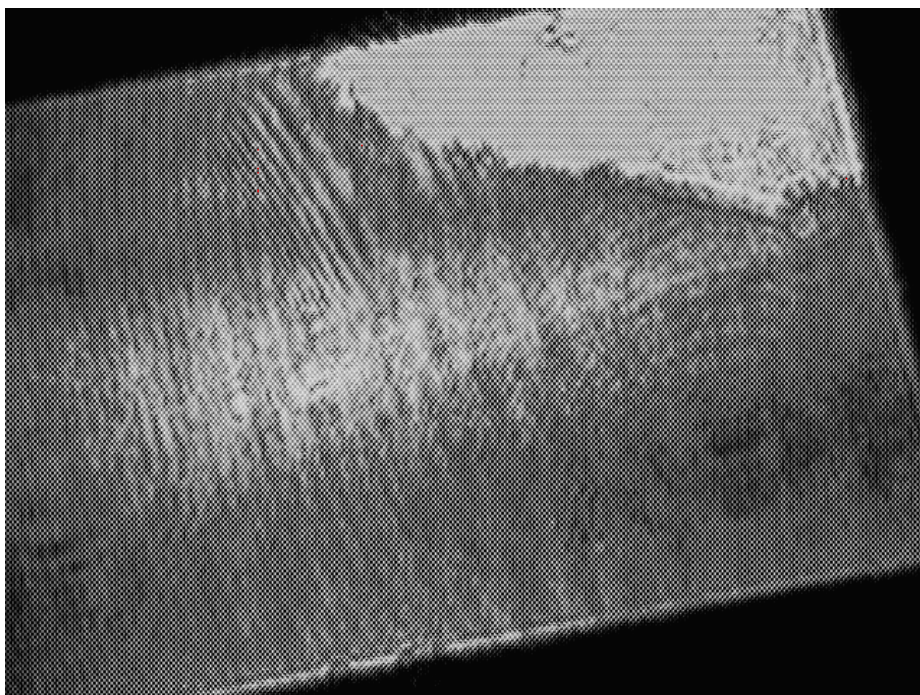


圖 3.16 p 偏光入射的結果

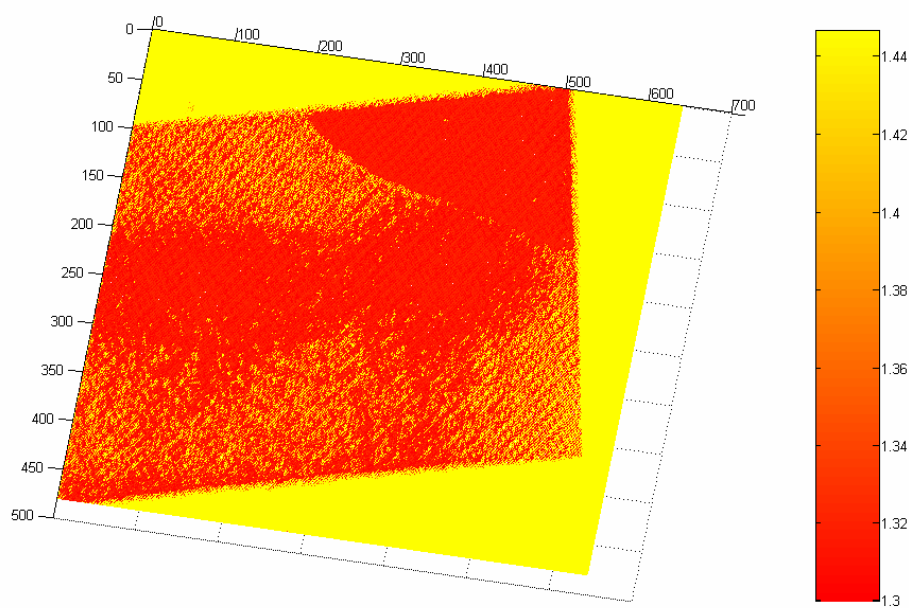


圖 3.17 樣品 B 二維折射率分佈圖

將(3.3)式對透明物體折射率 n 做微分，我們可以得到

$$dI = \frac{\partial I}{\partial n} \Delta n = \frac{4n_0^4 \sin^2 \theta_B (n^2 - 2n_0^2 \sin^2 \theta_B) (n^2 \cos \theta_B - n_0 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B})}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B} (n^2 \cos \theta_B + n_0 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B})^3} \Delta n, \quad (3.11)$$

將實驗條件 $n=1.33$ ， $n_0=1$ 與 $\theta_B=55.59^\circ$ 等實驗條件代入(3.11)式，則我們可以得到如圖 3.18 所示光強度變化 ΔI 對折射率變化 Δn 的關係。調整 CCD 的動態量測範圍(dynamic range)，使實驗結果所得的光強度最弱的地方其灰階值定為 0，而光強度最強的地方其灰階值定為 255，如此我們即可量測光強度變化 $\Delta I=0.001$ 且當 $n=1.33$ 時，相對應的折射率變化 $\Delta n=0.044$ 。

誤差第二項來源是由於入射光角度的變動。將(3.3)式對 θ 微分，我們可以得到反射光強度對入射光角度變化的關係

$$dI = \frac{\partial I}{\partial \theta} \Delta \theta = \frac{4n^2 n_0 \sin \theta_B (n^2 - n_0^2) \left(n_0 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B} - n^2 \cos \theta_B \right)}{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B} \left(n^2 \cos \theta_B + n_0 \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_B} \right)^3} \Delta \theta, \quad (3.12)$$

將實驗條件 $n=1.33$ ； $n_0=1.33$ ； $\theta_B=55.59^\circ$ 等代入(3.12)式中，當反射光強度變化為 $\Delta I=0.001$ 且 $n=1.33$ 時，計算(3.12)式可得 $\Delta \theta=0.011^\circ$ ，將此結果與反射光強度變化對折射率變化做比較，則可得知當角度變化 $\Delta \theta=0.011^\circ$ 時，相當於折射率變化 $\Delta n=0.044$ 。但是我們使用的旋轉台 SIGMA SGSP-160YAW 的精確度可達 0.0025° 遠小於實驗可容許的角度誤差 $\Delta \theta=0.011^\circ$ ，所以此樣品的實驗解析度中，可以不考慮角度誤差值 $\Delta \theta$ 的影響，因此在待測樣品的折射率 $n=1.513$ 時本法可得為 $\Delta n=0.044$ 的解析力。

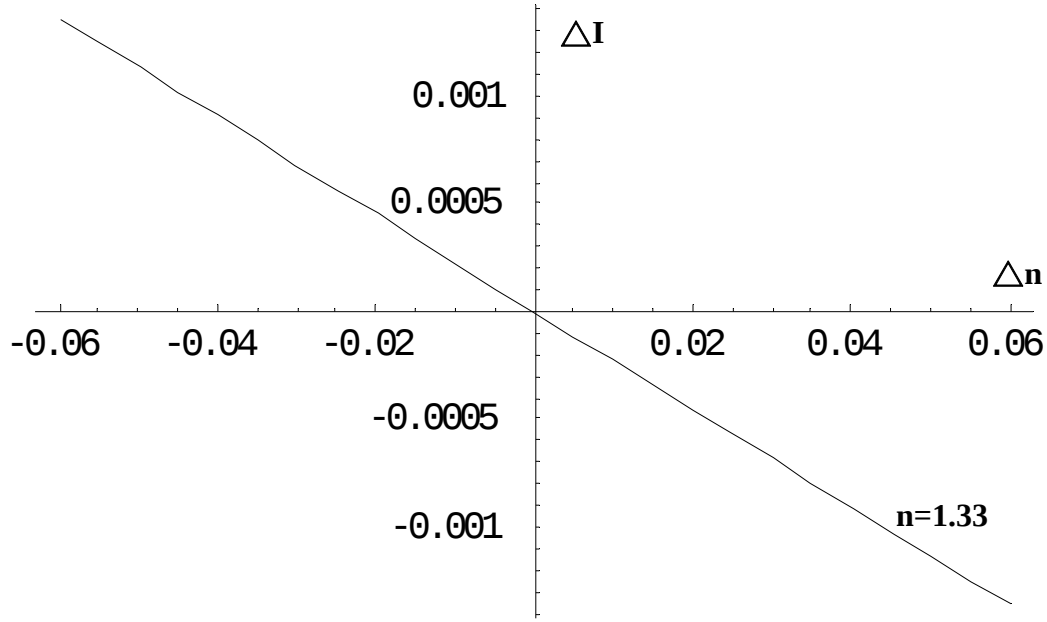


圖 3.18 樣品 A 反射光強度變化與折射率變化關係

(b) 樣品 B

將(3.9)式對透明物體折射率 n 做微分，我們可以得到

$$dI = \frac{\partial I}{\partial n} \Delta n = \frac{4n_2^4 \sin^2 \theta_2 (n^2 - 2n_2^2 \sin^2 \theta_2) (n^2 \cos \theta_2 - n_2 \sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2})}{\sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2} (n^2 \cos \theta_2 + n_2 \sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2})^3} \Delta n, \quad (3.13)$$

將實驗條件 $n=1.46$ 、 1.33 、 $n_2=1.515$ 及 $\theta_B=56.57^\circ$ ； $\theta_2=33.42^\circ$ 代入(3.13)式，則我們可得如圖 3.20 所示光強度變化 ΔI 對折射率變化 Δn 的關係。我們可知在 $n=1.463$ ，反射光強度變化 $\Delta I=0.001$ 時，其對應的折射率變化 $\Delta n=0.032$ ；在 $n=1.33$ ，反射光強度變化 $\Delta I=0.001$ 時，折射率變化 $\Delta n=0.014$ 。由此可知折射率越大時，其光強度改變對折射率所造成的變化愈明顯，解析度也相對提高。

誤差第二項來源是由於入射光角度的變動所造成的影響。將(3.9)式對 θ_B 做微分，我們可以得到反射光強度對入射光角度變化的關係

$$dI = \frac{\partial I}{\partial \theta} \Delta \theta = \frac{4n^2 n_2 \sin \theta_2 (n^2 - n_2^2) (n_2 \sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2} - n^2 \cos \theta_2)}{\sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2} (n^2 \cos \theta_2 + n_2 \sqrt{n^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_2})^3} \Delta \theta, \quad (3.14)$$

將實驗上的條件 $n=1.46$ 、 1.33 ； $n_2=1.515$ 及 $\theta_B=56.57^\circ$ ； $\theta_2=33.42^\circ$ 代入(3.14)式，我們可得

在 $n=1.33$ ，反射光強度變化 $\Delta I=0.001$ 時，可得相對應的入射光角度變化 $\Delta\theta=0.102^\circ$ 。在 $n=1.463$ 的入射角度變化 $\Delta\theta=1.33^\circ$ 。但我們使用的旋轉台SIGMA SGSP-160YAW的精確度可達 0.0025° 遠小於實驗可容許的角度誤差 $\Delta\theta=1.56^\circ$ ，故可以不考慮 $\Delta\theta$ 的影響。所以待測物體 $n=1.33$ 時本法的實驗解析度為 $\Delta n=0.014$ 。

3.6 小結

本章討論利用反射光強度的方式，量測透明物質折射率分佈的方法及結果，為了驗證其可行性，我們使用不同的待測物結構及待測物體，以及使用自行設計的驗架構配合P偏光以不同界面的布魯斯特角入射以量測二維折射率分佈，最後驗證了此方法的可行性，也討論了此方法的誤差量。

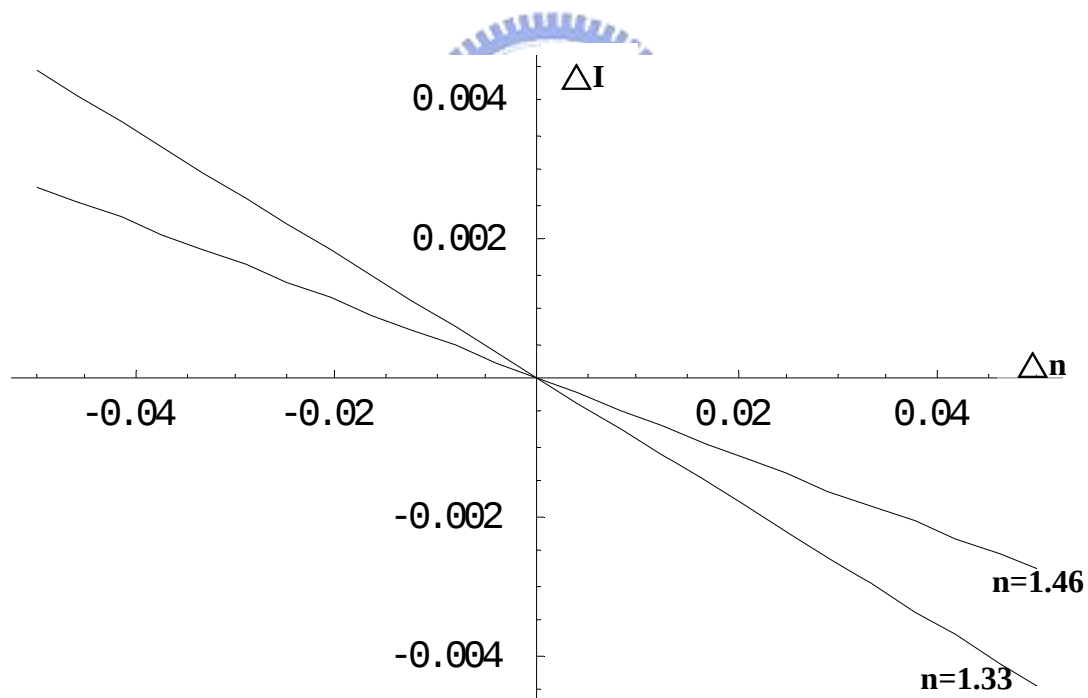


圖 3.19 樣品 B 反射光強度變化與折射率變化關係

第四章 以相位方式量測二維折射率分佈

4.1 引言

一般而言，以光強度變化來做測量的方式，精確度很容易受到光源穩定度、散射光與其他內部的雜散光所影響。本章提出利用旋光移相干涉術[17]以及布魯斯特角的特性，來量測透明物體二維折射率分佈。首先，一線性偏振光通過電光晶體調製器後，其水平偏光與垂直偏光間會受到電光晶體調製器的作用而產生相位差，之後經過四分之一波片，會成為一個具有左右旋光的旋光光源（circularly polarized light source）。接著，當光線經待測物反射並通過檢偏板之後，根據菲涅爾方程式與 Jones calculus 可推導出干涉光強度，其相位會隨著入射角而變化。1998 年，Lee 等人[17]提出當入射的角度為某一特定折射率的布魯斯特角時，此時 p 偏光與 s 偏光之間干涉信號的相位差為零，而非此特定折射率的物質的反射光 p 偏光與 s 偏光之間的相位差則不為零。利用此特性，我們可以推導出待測物折射率與相位差之間的關係。由於測量的是相位差，且此為共光程干涉儀的架構，故較不受環境震動的影響，又以移相干涉術來測量相位，因此具有極高的穩定性與高解析度；而且此方法可測量的折射率範圍並無限制。

4.2 實驗原理

由於本方法是利用旋光干涉的方式，將待測物的折射率引進干涉信號的相位差中，因此本節首先說明旋光干涉術原理，再推導出由於旋光所造成干涉信號的相位差與待測物折射率的關係；最後介紹如何利用電光晶體調製器及四步驟移相法來得到干涉信號的相位差。

4.2.1 旋光干涉術原理

旋光干涉術的架構如圖 4.1 所示，設定 z 軸為光前進的方向，x 軸為水平方向。雷射光經過穿透軸與 x 軸夾角為 45° 的起偏鏡 P 後，進入電光晶體調製器 EOM 後，再經過快軸與 x 軸夾角為 45° 的四分之一波片 Q 後，經擴束後以空氣對某特定折射率的布魯斯特角入射

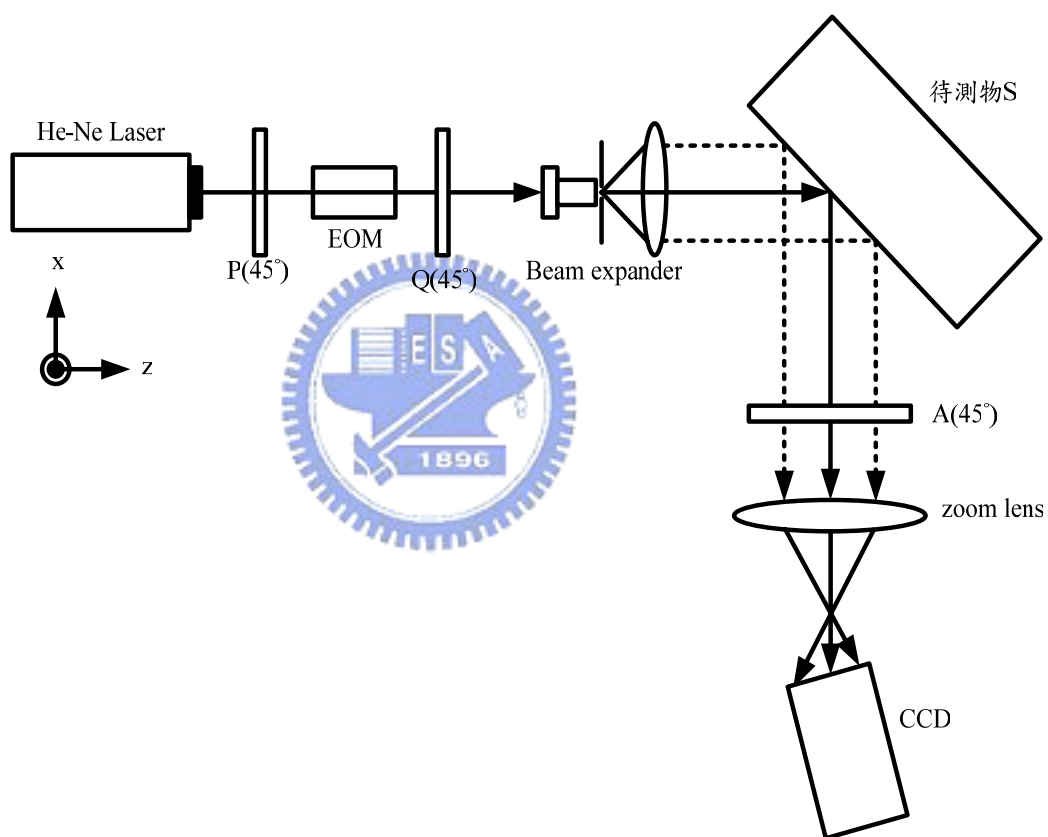


圖 4.1 相位量測實驗架構圖

至待測物上，反射光經過穿透軸與x軸夾角為 45^0 的檢偏板(AN)後，再進入CCD中取像。所以我們的光程為雷射→P(45^0)→EOM→Q(45^0)→Beam expander→Sample→AN(45^0)→CCD。zoom lens的功用是調影像的放大率。

為了實驗上的方便，將電光晶體調制器的快軸定在與 x 軸成 45° 的方向。在水平方向振盪的線性偏振光 E_{in} ，經過此電光晶體調制器與快軸和 x 軸夾角為 45° 的四分之一波片 Q 之後，電場的 Jones vector 變為

$$\begin{aligned}
 E' &= Q(45^\circ) \cdot EOM(\Gamma) \cdot E_{in} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}}, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

其中 Q 與 EOM 分別為四分之一波片的與電光晶體調制器的 Jones 矩陣。 Γ 為經由電光晶體調制所造成的相位延遲，可以寫成

$$\Gamma = \frac{\pi \cdot V_i}{V_{\frac{\pi}{2}}} + \Gamma_0, \tag{4.2}$$

其中 Γ_0 是未加電場時的相位延遲， $V_{\frac{\pi}{2}}$ 是電光晶體調制器的半波電壓， V_i 是施加在電光晶體調制器上的驅動電壓。由(4.1)式可以看出此時電場 E' 為一個同時具有左旋偏光與右旋偏光的光源。當此旋光光源經過測試物 S 反射，並通過穿透軸與 x 軸成 45^0 角之檢偏板 AN 之後，電場的 Jones vector 變為

$$E_t = AN(45^0) \cdot S \cdot E'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Gamma}{2}} - ie^{-i\frac{\Gamma}{2}} \\ -ie^{i\frac{\Gamma}{2}} + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_p \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Gamma}{2}} - ie^{-i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix} \\ r_s \begin{pmatrix} -ie^{i\frac{\Gamma}{2}} + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{S}$ 為光由待測物體反射時的 Jones 矩陣，而 r_p 與 r_s 分別為光由待測物反射時 p 偏光與 s 偏光的反射係數。

因此 CCD 所接收到干涉信號的強度 I_t 為

$$\begin{aligned}
I_t &= |E_t|^2 = I_0 [1 + \cos(\Gamma + \phi' + \phi_r)] \\
&= I_0 [1 + \cos(\Gamma + \phi)], \tag{4.4}
\end{aligned}$$

其中 I_0 是平均光強度， ϕ 為實驗量測的相位差。平均光強度 I_0 與相位差 ϕ 的定義分別為

$$I_0 = \frac{(r_p^2 + r_s^2)}{4}, \tag{4.5}$$

與

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2r_p r_s}{r_p^2 - r_s^2} \right); \tag{4.6}$$

4.2.2 p 偏光與 s 偏光間的相位差

光入射至待測物界面的關係如圖 4.2 所示，圖中入射角為 θ_i ，而 θ_1 僅表示光由空氣進入待測物時的折射角。由(2.14a)式與(2.8a)式我們可以得到入射光的 p 偏光分量與 s 偏光分量的振幅反射係數為

$$r_p = \frac{n \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_1}{n \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_1}, \tag{4.7}$$

$$r_s = \frac{n_0 \cos \theta_i - n \cos \theta_1}{n_0 \cos \theta_i + n \cos \theta_1}, \quad (4.8)$$

利用 n 來表示 $\cos \theta_1$ ，則可將(4.7)式與(4.8)式改寫為

$$r_s = \frac{n_0 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}}{n_0 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}}, \quad (4.9a)$$

$$r_p = \frac{n \cos \theta_i - n_0 \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}}{n}}{n \cos \theta_i + n_0 \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}}{n}}, \quad (4.9b)$$

將(4.9a)式與(4.9b)代入(4.6)式，則可得干涉信號的相位差

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{n^2 \cdot \cos^2 \theta_i - n_0^2 \sin^2 \theta_i}{2n_0 \sin^2 \theta_i \cos \theta_i \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \right], \quad (4.10)$$

當入射角是空氣對某特定折射率的布魯斯特角 θ_B 時，由(2.18)式我們可得 $n = n_0 \tan \theta_B$ ，代入(4.10)式我們可以得到此時 $\phi = 0$ 。因此由(4.10)式可以得待測物的折射率與干涉信號的相位差 ϕ 之間的關係為

$$n = \sqrt{\tan^2 \theta_i \left(n_0^2 + 2 \sin^2 \theta_i \left(\sqrt{n_0^4 \sec^2 \phi \tan^2 \phi - n_0^2 \tan^2 \phi} \right) \right)}, \quad (4.11)$$

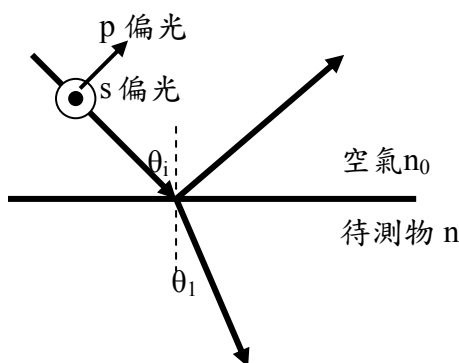


圖 4.2 光入射至空氣-待測物界面示意圖

4.2.3 四步驟移相法[18-20]

我們可以將 CCD 得到的干涉信號的光強度改寫為

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |E|^2 \\
 &= I_0 [1 + \cos(\Gamma + \phi_p - \phi_s)] \\
 &= I_0 [1 + \cos(\Gamma + \phi)] \\
 &= A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos(\Gamma + \phi(x, y)),
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$A(x, y)$ 、 $B(x, y)$ 為強度係數， ϕ 為干涉信號的相位差。

接著為了解出此二維空間的相位分佈 $\phi(x, y)$ ，便使用電光晶體調制器來改變 p 偏光和 s 偏光間的相位差，每次相位差改變為 $\frac{\pi}{2}$ ，以 CCD 拍攝四次干涉條紋，其強度分別為

$$I_1(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos(0 + \phi(x, y)), \tag{4.13a}$$

$$I_2(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos(\frac{\pi}{2} + \phi(x, y)), \tag{4.13b}$$

$$I_3(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos(\pi + \phi(x, y)), \tag{4.13c}$$

和

$$I_4(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos(\frac{3\pi}{2} + \phi(x, y)), \tag{4.13d}$$

解 (4.13a) 式至 (4.13d) 式的聯立方程式可得

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right). \tag{4.14}$$

最後只要將得到的 $\phi(x, y)$ 與相關參數代入(4.11)式中，即可準確求出二維空間的折射率分佈 $n(x, y)$ 值。

4.2.4 使用電光晶體調制器移相

由圖 4.3 來討論電光晶體調制器的移相原理，首先將一起偏鏡放置於雷射光源與電光晶體調制器間，使得入射至電光晶體調制器的光偏極方向與 x 軸成 45° 夾角，並設定調整

電光晶體調制器的快軸在 x 軸上，並且在電光晶體調制器上施以驅動電壓 V_i ，如此出射光的 y 分量相對於 x 分量的相位延遲 Γ 可以寫成[21]

$$\Gamma = \frac{\pi \cdot V_i}{V_{\frac{\lambda}{2}}} + \Gamma_0, \quad (4.2)$$

若我們使用的驅動電壓 V_i 是一直流電壓，則相位延遲將維持一固定值，改變驅動電壓 V_i ，則可以改變相位延遲 Γ ，因此我們可以利用電光晶體調制器作為移相的工具。

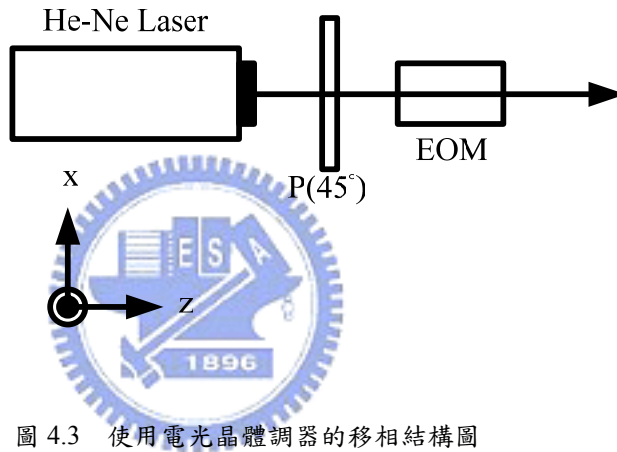


圖 4.3 使用電光晶體調制器的移相結構圖

4.3 實驗與結果

為了驗證此方法的可行性，我們利用三種不同的透明油類混合，模擬透明生物體在水中的狀態，該油類混合物溶液為透明且難以用肉眼觀察其分佈，所以能取代透明生物體並測試本方法的可行性。使用波長 632.8nm 的 He-Ne 雷射，入射角為空氣-蓖麻油的布魯斯特角 $\theta_B = 56.53^\circ$ 。待測物使用蓖麻油、橄欖油以及嬰兒油混合，其折射率分別為 1.513、1.474、1.463。CCD 為 PULNiX Inc. 生產的 TM-545，畫素為 510×492 以及 8bit 解析度；另外，影像擷取卡為 Matrox 公司生產之 Meteor-II/Standard，最後實驗資料擷取與分析則是使用 Engineering Synthesis Design Inc. 的 IntelliWaveTM 軟體，以及 MathWork 公司的 Matlab 軟體。

實驗時首先要調校實驗光路，雷射光通過電光晶體調制器後，經待測物反射通過檢偏板並有干涉條紋的產生，這是由於電光晶體調制器是由兩塊晶體所構成，如下圖 4.4 所示，雷射光通過此電光晶體調制器後，p 偏光與 s 偏光會有些微的夾角，最後經過檢偏板時產生剪切干涉的現象，所以會有干涉條紋的產生。實驗時在移相之前，首先要先確定電光晶體調制器移相時的驅動電壓，我們利用移相軟體 IntelliWaveTM 來替我們做校正的工作，如此一來，可以避免因為初始相位 Γ_0 而造成移相時的誤差，所以經過校正後，我們可以得到實驗時所需的驅動電壓。圖 4.5a-d 為電光調制晶體在移相 0 、 $\pi/2$ 、 π 、 $3\pi/2$ 時 CCD 抓取的干涉圖形影像，接下來利用 IntelliWaveTM 軟體計算後得到其相位差二維分佈圖，如圖 4.6 所示，由此圖我們可初步判斷折射率的二維分佈，在圖中相位差為零的部分為蓖麻油，這是由於我們是利用空氣-蓖麻油的布魯斯特角入射，並且由(4.10)式可以得知其干涉信號的相位差為零。將圖 4.6 所得到的相位差二維分佈圖代入(4.11)式計算，可以得到待測物折射率二維分佈圖，如圖 4.7 所示。

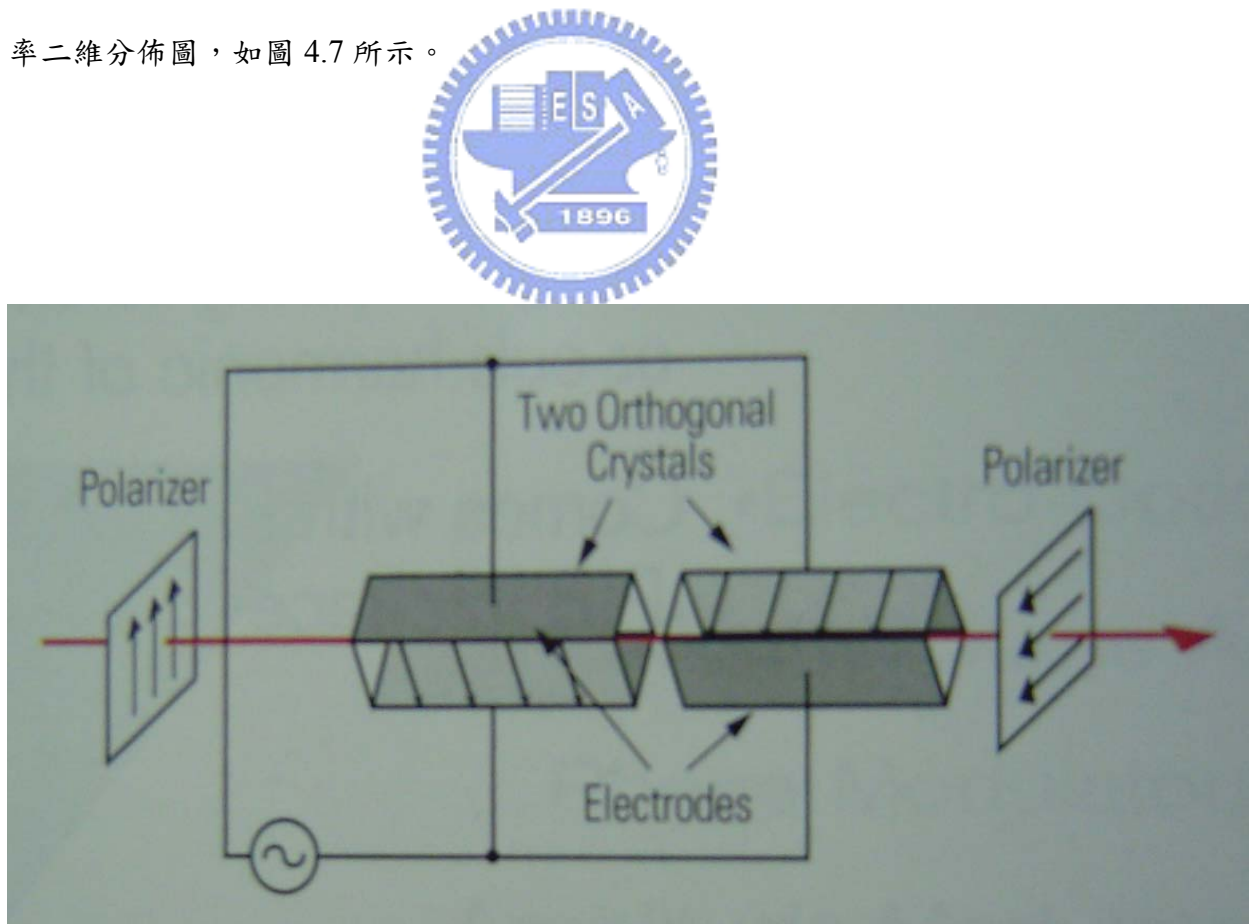
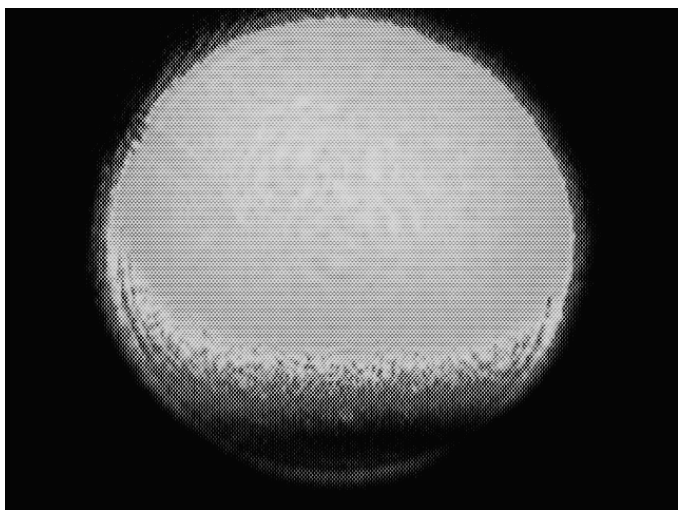
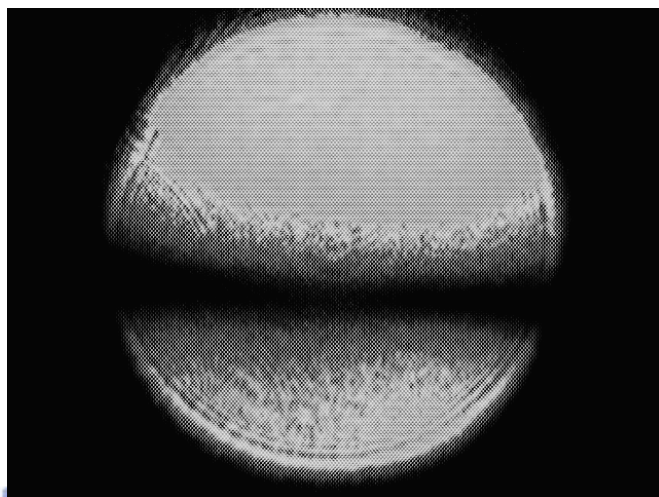


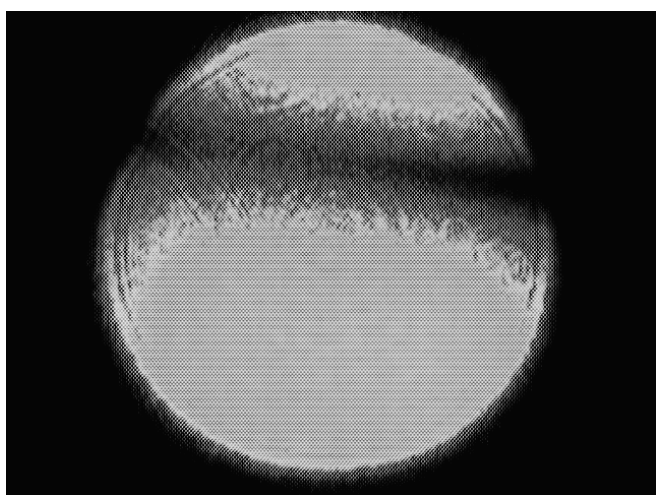
圖 4.4 電光晶體結構圖



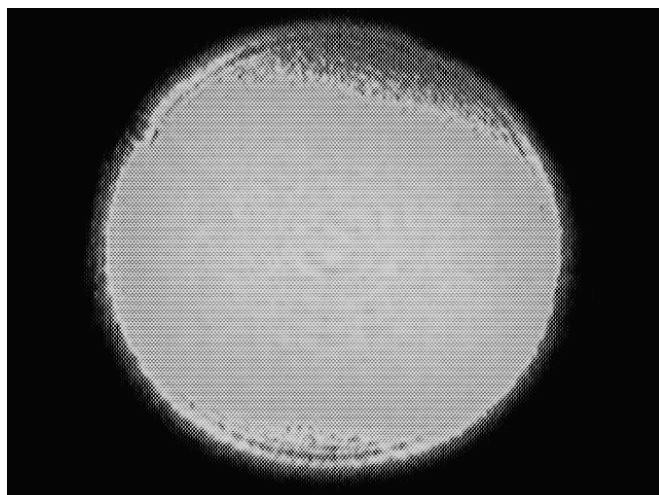
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 4.5 電光調制晶體移相(a)0 (b) $\pi/2$ (c) π (d) $3\pi/2$ 時所得到的干涉條紋

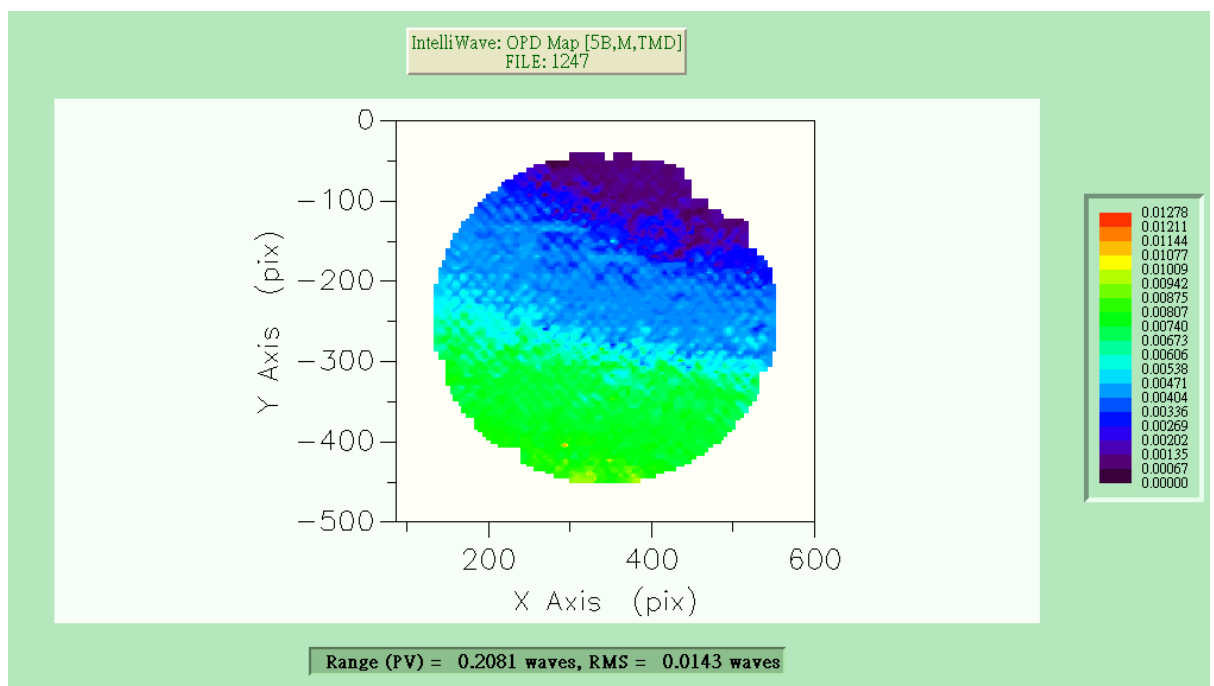


圖 4.6 干涉信號相位差二維分佈圖

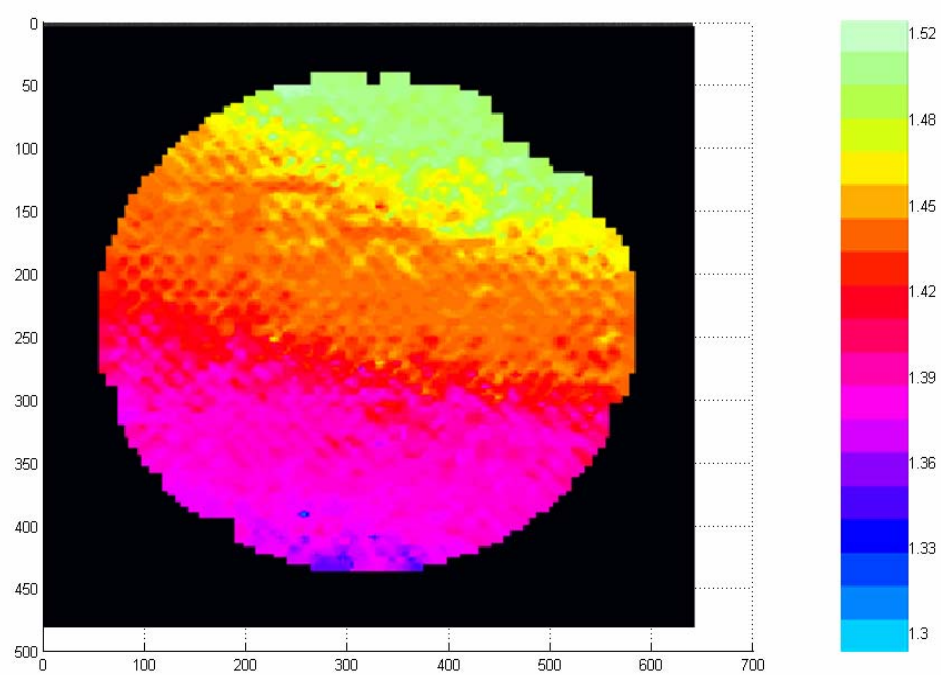


圖 4.7 待測物折射率二維分佈圖

4.4 討論

為了討論此技術的量測誤差[22-25]，對(4.11)式進行微分，則可得

$$\Delta n = \left| \frac{\partial n}{\partial \phi} \right| \times \Delta \phi$$

$$= \frac{\sin^2 \theta_B \tan^2 \theta_B \left(\tan \phi \sqrt{n_0^4 \sec^2 \phi \tan^2 \phi} + \csc \phi \sec \phi \sqrt{n_0^4 \sec^2 \phi \tan^2 \phi} - 2n_0^2 \sec^2 \phi \tan \phi \right)}{\sqrt{\tan^2 \theta_B \left(n_0^2 + 2 \sin^2 \theta_B \left(\sqrt{n_0^4 \sec^2 \phi \tan^2 \phi} - n_0^2 \tan^2 \phi \right) \right)}} \Delta \phi, \quad (4.15)$$

其中 Δn 及 $\Delta \phi$ 分別為待測透明物體折射率 n 及相位差 ϕ 的誤差。 $\Delta \phi$ 的誤差來源主要有三項，第一項為解析相位的誤差量 $\Delta \phi_1$ ，第二項為偏振混和所引起的誤差量 $\Delta \phi_2$ [26-27]，第三項為偏振旋轉誤差 $\Delta \phi_3$ [28]。第一項的誤差量取決於解相位的演算法以及 CCD 的 bit 數，而且許多不同的演算法已經被提出來，也具有不同的相位誤差量，若將實驗所得的干涉條紋中最暗及量亮的地方其灰階值分別定為 0 及 255，那麼此法理論上的解析度可達

$$\Delta \phi_1 = \frac{360^\circ}{256} \cong 1.406^\circ。$$

第二項偏振混合誤差為當光線通過如檢偏板等偏光元件時，常會發生偏振混合的現象。即實驗室座標中的 x 軸，除了主要的 x 方向的偏振光外，還有一小部分的 y 方向的偏振光會耦合過來；同樣地，實驗室座標中的 y 軸，除了主要的 y 方向的偏振光外，還有一小部分的 x 方向的偏振光會耦合過來，因此偏振混合所引起的相位誤差為

$$\Delta \phi_2 \cong \beta \cdot \sin \phi, \quad (4.16)$$

其中 β 則是兩正交偏光偏離原正交方向的角度。

第三項的相位誤差來源為偏振旋轉誤差，也可以稱作二次諧波誤差。主要的原因是在架設干涉儀時，外差光源的兩正交偏振光與實驗室座標有偏移量所致。例如以 z 軸為光前進方向， x 軸為水平方向，則理想的兩正交偏振光應在 x 軸與 y 軸的方向上。當兩正交偏

振光與 x 軸或 y 軸有一旋轉角度 θ_R 時，如圖 4.8 所示，x 軸上會出現兩個頻率不同的偏振分量，y 軸上也會有兩個頻率不同的偏振分量。也就是說，s 偏光與 p 偏光不再是單一頻率了。因此，在偏振旋轉存在的情況之下，相位差的誤差量可表示為：

$$\Delta\phi_3 = \tan^{-1} \left[\frac{\tan \phi (\sec 2\theta_R - 1)}{1 + \sec 2\theta_R \cdot \tan^2 \phi} \right], \quad (4.17)$$

其中 θ_R 是由於偏光元件無法將入射光正確地偏極化至入射平面上，而使得原本應該位於入射平面上的 p 偏光偏離入射面的角度。

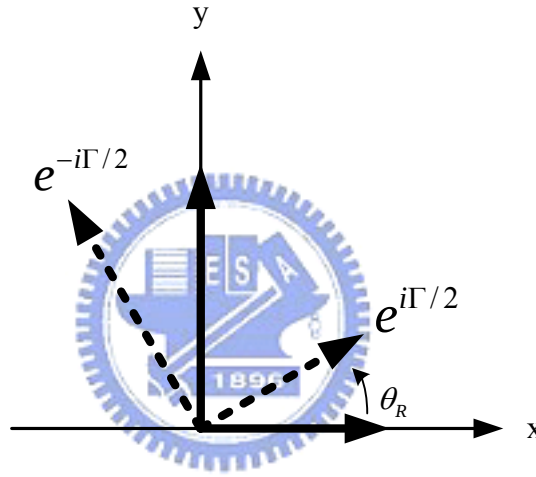


圖 4.8 偏振旋轉示意圖

本研究中，入射角為空氣-蓖麻油的布魯斯特角 θ_B ，並且由(4.10)式可知蓖麻油干涉信號的相位差 ϕ 為 0，則此處的 $\Delta\phi_2$ 與 $\Delta\phi_3$ 也為 0。其他折射率與蓖麻油不同的待測透明物體則有相位差的產生，由圖 4.6 我們可得最大的相位差 $\phi=0.01279$ ，且本實驗是使用 Newport Inc. 公司製造的偏振片，其消光比可以到達 10^{-4} ，將這些條件代入(4.16)式及(4.17)式則可得 $\Delta\phi_2 \cong 0$ 及 $\Delta\phi_3 \cong 8 \times 10^{-6}$ ，與解析相位的誤差相比之下可以忽略。將 $\theta_B = 56.53^\circ$ 、

$n_0 = 1$ 、 $n = 1.3 \sim 1.515$ 等實驗的條件代入(4.15)式，則可以得到不同折射率之下的解析度關係圖，如圖 4.9 所示。

4.5 小結

本章討論了量測透明物質折射率分佈的原理以及方法，為了驗證可行性，我們使用三種油類的混合物當待測物，並且使用布魯斯特角的特性及移相干涉術實際量測相位的二維分佈，最後驗證了此方法的可行性，也討論了此方法的解析度。

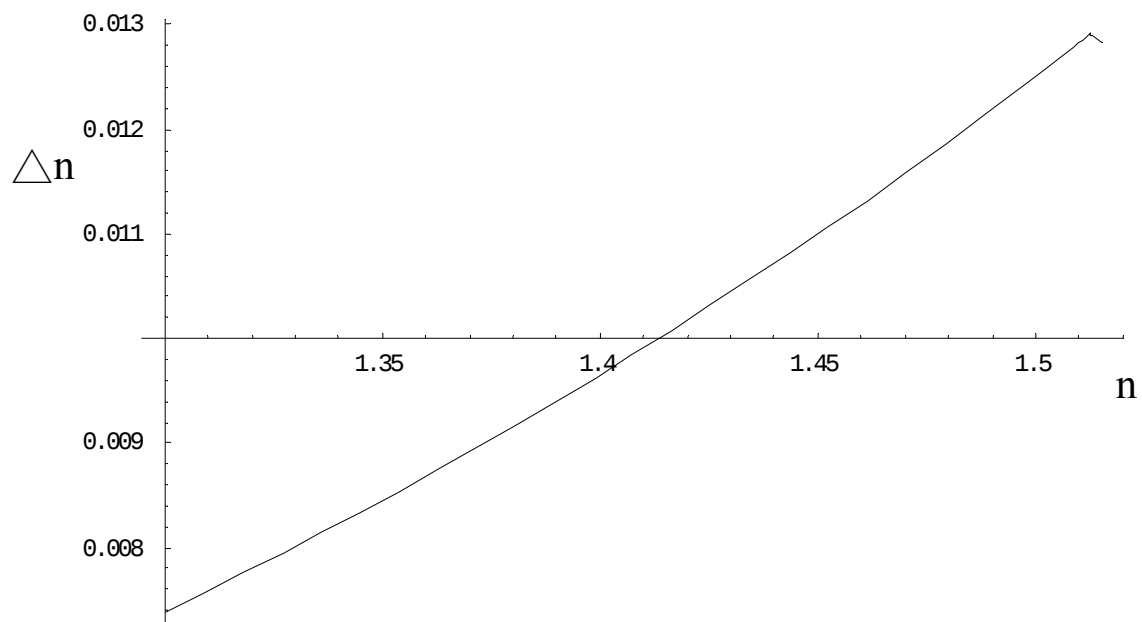


圖 4.9 不同折射率與解析度關係圖

第五章 結論

本研究提出以布魯斯特角入射法，利用 Fresnel's equation，以強度及相位的方式來量測透明物質的折射率分佈，並且使其成像，為了証明本法之可行性，我們以嬰兒油、蓖麻油及水和載玻片組成的樣品 A 及樣品 B，其量測條件及結果歸納如表 5.1；因此可以驗證此方法並且達成

- (1) 能分辨在平面上不同折射率的物質並且能抓取其分佈的區域。
- (2) 利用布魯斯特角的特性，我們輕易的避開空氣-玻璃界面或空氣-水界面的反射光，直接量測反射光強度，以得到待測透明物質的折射率分佈並成像。
- (3) 相位測量法比強度測量法有較高的解析度。

且此技術有優點有：

- (1) 操作容易。
- (2) 利用現有相機取像軟體與程式軟體可以達成自動化的目標。
- (3) 可以避免不必要的表面反射光。
- (4) 可作待測物的長時間監測。

本研究可以應用於透明生物組織方面的研究，除了可以辨識生物組織的外型之外，也可以利用監測其折射率的變化，研究當環境或是溶液成分有所改變時，對生物組織所造成的影響。最後，未來針對此研究的努力方向有：

- (1) 延續此技術，研究出布魯斯特角顯微鏡在量測透明生物體上的應用。
- (2) 因為外差光源對於折射率量測的準確度更高，利用外差光源結合整面式相位量測技術，是一個非常值得研究的方向。

	樣品 A	樣品 B
待測物	i. 嬰兒油 ii. 水	i. 蓖麻油 ii. 嬰兒油 iii. 水
布魯斯特角 θ_B	55.59° (空氣-嬰兒油)	56.57° (空氣-玻璃)
解析度 Δn	0.014	0.044
備註		

表 5.1 強度量測比較表



參考資料

1. E. Hecht, Optics, Adisson Wesley, 3rd ed, Chap4, 85-147 (1998)
2. D. Axelrod, "Cell-substrate contacts illuminated by total internal reflection fluorescence", J. Cell Biol., 89, 141-145, (1981) .
3. P.N. Prasad, Introduction to Biophotonics, John Wiley & Sons, Inc, Chap.7, 203-249 (2003) .
4. 邱宗凱，錢正浩，連偉男，林奇宏，"全反射螢光顯微術於生物物理的應用"，物理雙月刊，二十四卷三期 (2001) .
5. C. J. Cogswell and C. J. R. Sheppard, "Confocal differential interference contrast (DIC) microscopy : including a theoretical analysis of conventional and confocal DIC imaging", Journal of Microscopy , 165 , 81-101 (1992)
6. G. Holzwarth, S. C. Webb, D. J. Kubinski and N. S. Allen, "Improving DIC microscopy with polarization modulation", Journal of Microscopy , 188, 249-254 (1997) .
7. E. B Van Munster, L. J. Van Vliet and J. A. Aten, "Reconstruction of optical pathlength distributions from images obtained by a wide-field differential interference contrast microscopy", Journal of Microscopy, 188, 149-157 (1997) .
8. S. Henon, and J. Meunier, "Microscope at the Brewster angle: Direct observation of first order phase transitions in monolayers", Rev. Sci. Instrum., 62, 936- 939 (1991)..
9. M. Akimoto and Y. Gekka, "Brewster and pseudo-Brewster angle technique for determination of optical constants", Jpn. J. Appl. Phys., 31, 120-122 (1992).
10. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 3rd ed., Chap9, 364-415 (1999) .
11. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 3rd ed., Chap2,

- 87-90 (1999) .
12. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 3rd ed., Chap5, 240-242 (1999)
 13. E. Hecht, Optics, Addison Wesley, 3rd ed, Chap4, 85-147 (1998)
 14. J. Meunier, “Why a Brewster angle microscope?”, Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 171, 33-40 (2000).
 15. S. Henon, and J. Meunier, “Microscope at the Brewster angle: Direct observation of first order phase transitions in monolayers”, Rev. Sci. Instrum., 62, 936- 939 (1991)
 16. J. W. Wu, and C. S. Jung, “Brewster angle microscope imaging of surface inhomogeneity in liquid crystal alignment polyimide layers”, Jpn. J. Appl. Phys., 40, L691- L694 (2001)
 17. J. Y. Lee and D. C. Su, “A Method for Measuring Brewster’s Angle by Circularly Polarized Heterodyne Interferometry”, J. Opt., 29, 349-353 (1998).
 18. K. J. Gasvik, Optical Metrology, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc. (2002)
 19. P. Hariharan, Optical Interferometry, Academic Press, 2nd ed. (2003)
 20. D. Malacara, Optical Shop testing, John Wiley & Sons, Inc. 2nd ed., vol I, II (1992)
 21. A. Yariv and P. Yeh, Optical waves in crystals, John Wiley & Sons, Chap. 8, 276-287, (1984)
 22. A. Dubois, L. Vabre, and A. C. Boccaro, “Sinusoidal phase- modulated interference microscope for high- speed high- resolution topographic imagery”, Opt. Lett., 26, 1873- 1875 (2001)
 23. J. Schwider, T. Dresel, and B. Manzke, “Some consideration of reduction of reference phase error in phase-stepping interferometry”, Appl. Opt., 38, 655- 659 (1999)

24. M. Dobosz, T. Usuda and T. Kurosawa, "Methods for the calibration of vibration pick-ups by alser interferometry: I. Theoretical analysis", Meas. Sci. Technol., 9, 232- 239 (1998)
25. M. Dobosz, T. Usuda and T. Kurosawa, "Methods for the calibration of vibration pick-ups by alser interferometry: II. Experimental verification", Meas. Sci. Technol., 9, 240- 299 (1998)
26. W. Hou and G. Wilkening, "Investigation and compensation of the nonlinearity of heterodyne interferometers", Prec. Eng., 14, 91- 98 (1992)
27. A. E. Rosenbluth and N. Bobroff, "Optical sources of nonlinearity in heterodyne interferometers", Prec. Eng., 12, 7- 11 (1990)
28. J. M. De Freitas and M. A. Player, "Importance of rotational beam alignment in the generation of second harmonic error in laser heterodyne interferometry", Meas. Sci. Technol., 4, 1173- 1176 (1993)

