

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

數學軟體 DERIVE 應用於
高中學生學習多項式概念的教學研究

A Study of Using Mathematic Software, DERIVE, to Teach
Polynomials in High School

研究生：李采虹

指導教授：袁媛 教授

中華民國 九十六年七月

數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式概念的教學研究

A Study of Using Mathematic Software, DERIVE, to Teach
Polynomials in High School

研究 生：李采虹

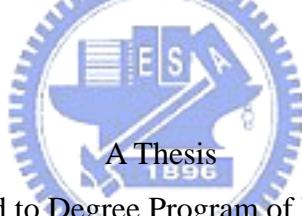
Student : Tsai-Hung Lee

指 導 教 授：袁 媛 教 授

Advisor : Dr. Yuan Yuan

國 立 交 通 大 學
理 學 院 網 路 學 習 學 程

碩 士 論 文



Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science

National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

July 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式概念的教學研究

學生：李采虹

指導教授：袁 媛 教授

國立交通大學理學院專班網路學習組

摘要

本研究乃是將數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式概念的教學研究。以「多項函數的圖形」和「多項方程式」為單元主題，開發適合學生的學習素材和教學活動，了解學生對此試探性教學活動的看法與回饋，探究數學軟體 DERIVE 應用於高中數學教學之可行性。同時透過觀察與訪談，將探討數學軟體 DERIVE 的輔助學習對學生學習多項式概念的影響。本研究採行動研究的方式，以台北縣某完全中學 8 名高中一年級普通班學生為研究對象，依多項式之學習成就測驗前測的結果，將研究對象分為四組。前測階段 8 人同時進行二次共計 110 分鐘的電腦軟體教學課程，實驗階段中為時約 7 小時的教學活動則採分組分次進行，逐次地修正與調整教學活動，使教學模式能較佳化，在未來可作為大班教學的參考。藉由課堂觀察、學生電腦操作觀察、學習單、學生問卷、學生學習成就測驗以及訪談等資料之蒐集整理，來進行研究結果分析。

研究結果發現在合適的學習單循序漸進引導下，DERIVE 免除學生作單調繁雜的計算，讓學生有更多的時間去作數學思考；當抽象的數學變成可具體操作時，學生心中的解題策略在 DERIVE 的輔助下得以延續；DERIVE 有別於傳統教室教學的呈現，除了給學生新鮮感，亦激發學生學習數學的興趣。以 DERIVE 來輔助教學的模式，學生反應可以適應、接受，並不會因此而分心，並依學生學習成就之前後測的整體結果及學生給予的回饋，研究者相信數學軟體 DERIVE 應用於輔助高中學生學習多項式是具可行性的。惟教師以 DERIVE 輔助教學時，對於教學環境的限制、軟體可能帶來圖形錯誤解讀的迷思概念等，應有相對的應變與調適。

最後根據研究結果與發現，提出若干建議以作為教師改進與未來研究之參考。

關鍵字：電腦代數系統、數學軟體 DERIVE、多項式、函數



A Study of Using Mathematic Software, DERIVE, to Teach Polynomials in High School

Student : Tsai-Hung Lee

Advisors : Dr. Yuan Yuan

Degree Program of E-Learning of College of Science
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This study applied an action research method to explore the possibility of applying Mathematics Software, DERIVE, to teach polynomials in high school. The researcher used DERIVE as the tool to design learning materials and activities for teaching and learning of “Graphs of polynomial functions” and “Polynomial equations”. This study was based on observing classroom and interviewing students to discuss its effect on students’ conceptual understanding of polynomials.

Participates were 8 high school students in Taipei County. At the beginning, all students took an achievement test and based on the test results students were assigned to four groups of two. All students were given a 110-minute DERIVE exploration lesson at the same time. After the DERIVE lesson, the researcher designed a 7-hour polynomial exploration activity using DERIVE as the aid tool. Each group was taught by the research sequentially, and this gave the researcher a chance to modify the activity to improve the lesson plan for follow-up group teaching.

It was found that using DERIVE could reduce the time on rigmarole tasks and students could spend much time on thinking mathematically. DERIVE was considered to make the abstract concept accessibility and manipulability, and this helped students continue their thought on solving problems. Unlike in the traditional classrooms, students were motivated by these novel presentations. Students responded that they liked to used DERIVE and it helped them focus on conceptual explorations. However, possible misconceptions might occur when

using DERIVE in teaching mathematics. Suggestions for applying DERIVE into mathematics teaching and future research were provided.

.

Keyword: Computer Algebra System, DERIVE, Polynomial, Function



誌 謝

在完成論文口試的那一剎那，我幾乎要掉下眼淚，沒想到自己居然能熬過這一關。首先要感謝我的指導教授袁媛老師！學弟曾形容老師就像一把傘照顧著我們這些學生，而在我心中老師就像是一支 500 萬的超級大傘～從編寫學習單到撰寫論文，袁媛老師細心、耐心地循序指導，百忙之中花了許多時間修正我的論文並給予意見與建議。因此，能完成這篇論文，心中對於老師熱心的指導和溫暖的鼓勵，有著無限的感動與感激！同時，在此也要感謝中央大學單維彰教授與本校專班主任莊祚敏教授給予寶貴意見，讓我的教學視野更加寬廣。

在研究期間，非常感謝專班同學與學校同事的鼓勵與支持，讓我擁有堅持下去的力量。昱伶，謝謝妳～不但是我做研究的好伙伴，亦是交換心事、鼓勵彼此的好朋友。淑惠，謝謝妳～每次跟妳話後總能紓解不少壓力，讓我又恢復活力拼下去。木發、秀瓊，謝謝你們～有你們這兩位超棒的工作伙伴的鼓勵與支持，讓我在忙碌的工作中能更有心力去完成學業。國唐、基添，謝謝你們的關心，學妹我終於寫完論文。再則感謝眾多大朋友和小朋友給我加油，你們的加油都是我動力的來源。

最後要感謝我的家人對我的關懷與照顧，讓我在這幾年能無後顧之憂，順利完成我的學業，而今日終能開心地跟你們說聲：「謝謝你們！我要畢業了喲～」

再一次誠摯地感謝大家的指導、支持與鼓勵，能夠順利完成論文並取得碩士學位，真的非常開心，同時將這份喜悅及成果與大家分享。

采虹 謹識

2007 年 7 月



目 錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	iii
誌 謝	v
目 錄	vii
表目錄	ix
圖目錄	x
第一章 緒論	- 1 -
第一節 研究動機	- 1 -
第二節 研究的重要性	- 3 -
第三節 研究目的	- 5 -
第二章 文獻探討	- 7 -
第一節 電腦代數系統	- 7 -
第二節 DERIVE	- 19 -
第三節 多項函數	- 30 -
第三章 研究方法	- 41 -
第一節 研究架構和研究方法	- 41 -
第二節 研究對象	- 43 -
第三節 研究工具	- 45 -
第四節 研究流程	- 51 -
第五節 資料之整理與分析	- 55 -
第四章 研究結果與討論	- 57 -
第一節 學生學習歷程	- 57 -
第二節 教學實施後之影響	- 75 -
第三節 教師成長	- 93 -
第五章 結論與建議	- 99 -
第一節 結論	- 99 -
第二節 建議	- 107 -
參考文獻	- 111 -
中文部份	- 111 -
英文部分	- 114 -

附件一	學習背景調查表	- 117 -
附件二	DERIVE之操作手冊	- 119 -
附件三	教學活動學習單	- 145 -
附件四	教學活動教案設計	- 167 -
附件五	學習成就測驗前測試題	- 183 -
附件六	學習成就測驗後測試題	- 187 -
附件七	學生使用DERIVE學習回饋問卷	- 191 -
附件八	後測階段學生訪談計劃及大綱	- 195 -
附件九	前測－學生作答結果之比較與分析	- 197 -
附件十	後測－學生作答結果之比較與分析	- 207 -



表目錄

	頁次
表 2-2-1 DERIVE的歷史發展簡史	- 20 -
表 2-3-1 內化、壓縮、物化三層次比較表	- 33 -
表 3-2-1 研究對象學習背景調查結果摘要表	- 44 -
表 3-3-1 單元主題教學活動內容	- 47 -
表 3-3-2 學習成就測驗前、後測試題評量概念分析表	- 48 -
表 3-4-1 研究流程	- 51 -
表 4-2-1 學習成就測驗前測試題答題計分表	- 76 -
表 4-2-2 學習成就測驗後測試題答題計分表	- 78 -
表 4-2-3 學生使用DERIVE學習回饋摘要	- 87 -



圖目錄

	頁次
圖 2-1-1 直線圖形往左移動的錯覺	- 12 -
圖 2-1-2 直線圖形往右移動的錯覺	- 12 -
圖 2-1-3 視不同斜率之直線為兩平行線的錯覺	- 13 -
圖 2-1-4 直觀兩圖有高度差別而影響或忽略y截距的判讀	- 13 -
圖 2-1-5 直觀兩圖有開口大小不同、圖形位置不同的錯覺	- 14 -
圖 2-1-6 Casio的CFX-9850GC PLUS	- 15 -
圖 2-1-7 HP 50g	- 15 -
圖 2-1-8 SHARP的EL-9900	- 15 -
圖 2-1-9 TI-nspire系列產品	- 15 -
圖 2-2-1 DERIVE的界面和功能簡介	- 22 -
圖 2-2-2 DERIVE將常用的指令以視覺化的小圖示呈現	- 22 -
圖 2-2-3 DERIVE將功能以選單的方式呈現	- 22 -
圖 2-2-4 DERIVE對於隱函數可以直接繪出圖形	- 23 -
圖 2-2-5 TI-89 Titanium	- 24 -
圖 2-2-6 Voyage TM 200	- 24 -
圖 2-2-7 Kutzler經由符號和圖形的表現來分析多項式	- 25 -
圖 2-2-8 DERIVE克服計算障礙，學生可專注於數學概念的理解	- 26 -
圖 2-2-9 學生利用DERIVE觀察指數函數和對數函數的性質	- 27 -
圖 2-2-10 自我循步探索多項函數和圖形的關係	- 28 -
圖 2-3-1 函數概念的歷史發展	- 31 -
圖 2-3-2 自由落體運動的函數建模	- 37 -
圖 2-3-3 數學建模的操作程序	- 37 -
圖 3-1-1 研究架構	- 41 -
圖 3-3-1 前測階段師生於電腦教室進行電腦軟體教學課程	- 46 -
圖 3-3-2 實驗階段小組進行教學活動的教學環境	- 46 -
圖 3-3-3 修正前測試題中不當的輔助圖示	- 50 -
圖 4-1-1 學生專心投入學習DERIVE，並一起討論	- 58 -
圖 4-1-2 學生誤取代數視窗之指令表示式，導致無法成圖	- 62 -
圖 4-1-3 欣欣對常數函數與零多項式的混淆	- 65 -
圖 4-1-4 欣欣和阿斌對一般式的了解	- 65 -

圖 4-1-5 欣欣對一次函數圖形的平移產生迷思概念.....	- 66 -
圖 4-1-6 阿斌對一次函數圖形的平移產生迷思概念.....	- 66 -
圖 4-1-7 學生觀察圖形時可能會有多樣的解讀	- 67 -
圖 4-1-8 欣欣對複係數方程式根的個數的探索	- 68 -
圖 4-1-9 萱萱和小琳對一次函數圖形的觀察	- 70 -
圖 4-1-10 萱萱對多次函數圖形的觀察	- 71 -
圖 4-1-11 綾綾對代數基本定理的探索	- 74 -
圖 4-2-1 小穎在第 16 題的答題內容	- 80 -
圖 4-2-2 阿全在第 17 題的答題內容	- 81 -
圖 4-2-3 欣欣在第 17 題的答題內容	- 81 -
圖 4-2-4 萱萱在第 7 題的答題內容	- 82 -
圖 4-2-5 綾綾在第 15 題的答題內容	- 82 -
圖 4-2-6 小真、小琳後測第 8 題的答題內容	- 84 -
圖 4-2-7 阿斌在第 17 題的答題內容	- 85 -
圖 4-2-8 綾綾在第 17 題的答題內容	- 86 -





第一章 緒論

我經由這個機會，接觸到許多美麗的數學理念。這些理念都是很容易親近的。如果沒有這個機會，我可能一輩子都碰不見它們，除非我選擇數學做為終身的事業。

— Sarah Flannery

(夫蘭納里，2001，p. 28)

第一節 研究動機

在研究者過去的中小學求學經驗中，數學學習的環境以傳統教室為唯一場所，知識的傳授以教師板書為主，教師上課時甚少使用教具及教學媒體。而多數學生學習數學知識的歷程，部分觀念是因為解題技術的熟練而有深刻的記憶，部分比較難以想像的概念，則是採硬記手段，然後慢慢花時間理解；當然，學習中所遭受的挫折與困難也有可能促使學生學習數學的興趣低落，甚至選擇放棄。若研究者站在教師的角色來看現在的學生，一樣有如此種種面向，雖然傳統的教學方式是不可輕易摒棄，但隨著科技的進步及教育方式的改革，現在的學生其實有更多的管道學習知識，從感官的刺激、實體物體的操作、虛擬情境的模擬、電腦的輔助學習……等，皆是我們思考新教學方式的方向。環境的不同、世代的改變，影響了學生的思維模式，因此教師必須思考新的方式及尋求或創造更適合學生的教學方式。

資訊科技的進步和校園資訊資源愈顯普及性，「電腦輔助學習」(Computer-Assisted Learning)已經能成功地運用到許多教學領域。隨著電腦硬體與軟體的發展與改善，使得數學學習活動除了紙筆運算、模型教具外，亦可利用電腦軟體及網路資源來輔助教學。目前電腦軟體應用在數學教學的部分，主要的有動態幾何系統 (Dynamic Geometry System) 和電腦代數系統 (Computer Algebra System)，二者可以用來進行數學教學實驗與活動，當然尚有其他軟體，甚至網路上亦有許多虛擬教具 (Virtual Manipulatives) 可以成為我們教學活動的良好資源。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM) 在發展課程標準時，認為新課程應著重解決問題、以及思考如何解決的多元性，鼓勵學生討論、探索，教師僅扮演從旁協助的角色，學生主動地在既有的知識架構下整合所學。NCTM 指出關於數學的教與學，

計算機與電腦是不可或缺的，電腦科技影響了數學教學的方式，也提高了學生的學習能力，同時亦建議各層次的老師為了教導數學技能與概念，而讓學生達到有效的學習，都應該適當使用科技的工具（NCTM, 2000）。

為實現國民教育目的，目前我國教育部所公佈之《國民中小學九年一貫課程綱要》(2006) 指示須引導學生致力達成課程目標，其中包含運用科技與資訊的能力、激發主動探索和研究的精神、培養獨立思考與解決問題的能力。當然，「資訊融入教學」這樣的課題是具挑戰性，對於任教多年的老師可能需要時間去學習及適應。雖然資訊技術對部分教師來說仍是有障礙存在，但是身為教師的我們應學習如何善用電腦科技及其所發展出來的資源，作為課程上有用的教學素材，讓電腦軟體及網路資源成為良好的輔助教學工具，讓學生亦有另類的數學學習環境。

周琦（2005）認為將資訊科技與學科課程作有效的整合，可以建構出一種理想的學習環境，不但可以支援真實的情境假設，教學素材也可以不受時空限制地資源分享，教學情境可以有豐富多樣的交互模式，教學資源也可以打破地區界限的限制來共同合作交流，而以學生為主體的教學，也可以創造有利培養學生的自主發現和自主探索的機會，進而建構知識。

隨著電算器的問世，我們的數學教育因此有了重大的改變。它能幫助學生數學觀念的建立與了解，也能提高學生對數學的興趣，讓數學不再是大部分學生討厭的科目。它讓學生減少時間花費在複雜而無意義的計算中，而可以讓學生去探究並釐清數學觀念，它可以做許多以前的紙筆運算所做不到的事，如描繪3D圖形……等等（陳育聖、楊德清，2001）。

Lindsay (1995) 表示，七十年代以來電腦代數系統蓬勃發展，欲成為數學教學使用工具，可惜要被視為學習輔助的接受度有限。他持續關心數學教育，並深入探索電腦代數系統的潛力，研究軟體與數學課程整合的可能性，以他二年的電腦輔助教學的經驗，提出數學軟體 DERIVE 可做為論證示範、應用和自我循步探索的輔助工具。

為此，研究者特別考慮使用電腦代數系統中的數學軟體 DERIVE，思考其在高中數學教學應用上的可能性，期待能讓 DERIVE 不只是電腦軟體，更希望利用 DERIVE 開發數學學習素材，使其能有效地激發學生之思考、啟發學生對數學知識之建構！

第二節 研究的重要性

在一般教室進行數學教學時，礙於授課時數的壓力、黑板板面空間的有限運用、數學式子的繁雜運算過程、黑板製圖的不便等種種限制，教科書上一些數學性質及定理，許多數學教師在課堂上僅能繪製幾個圖形、舉幾個簡單的例子、快速帶過數學證明，而學生就是直接接受這些性質、定理，甚至是不思考解題方法而去硬記這些例子的解題過程。陳育聖、楊德清（2001）提到在傳統的數學教育中，由於聯考引導教學，使得教師在課堂中特別強調公式的背誦，並讓學生重複那些單調又繁雜的計算題，以訓練學生的計算能力，並認為擁有良好的計算能力是重要的，但卻忽略了數學教育的本質並不是訓練學生成為一流的計算機器，而應該是著重在數學觀念的建立與理解。倘若在教學過程中能適當使用電腦輔助教學，引入數學軟體的使用，則在教師適當的引導下，學生將於有限時間內可經由大量的觀察與實作經驗的訊息刺激，更能相信性質、定理的存在，亦能提昇學生的思考層次。

於國立交通大學理學院在職專班網路學習組修讀碩士的期間，研究者有機會接受到電腦科技的刺激，以學生學習需求為目標，鑽研多樣性教學素材，開發多元學習內容與活動，以提昇校園學習情境，強化學生學習之成效。一般來說，電腦軟體在數學上的應用可分為三大類（郭亮偉，2005）：

1. 動態幾何系統（Dynamic Geometry System）

以尺規作圖為基礎，考慮了幾何教學的需要，圖形具可變異性，學習者利用滑鼠拖曳點或圖形，可讓圖形產生連續且漸進的動態變化或軌跡，藉由動態觀察來獲得平時不易得到大量資料及圖形變化，直觀地去探查幾何問題的變與不變。常見的軟體有 GSP (The Geometer's Sketchpad)、Cabri Geometry、Cabri 3D.....等。

2. 電腦代數系統（Computer Algebra System, CAS）

利用演算法解決代數的微分、積分、線性、非線性方程式、多項式系統的求解，以及利用數值方法來作 2D、3D 圖形的繪製；在數學的實驗與學習可藉由數值的改變來觀察代數系統的圖形變化。常見的軟體：Mathematica、Maple、DERIVE.....等。

3. 其他數學軟體

除了前面兩大分類，目前有許多研究發展工具軟體有助於數學教學，用以製作數學學習素材，如陳明璋教授利用 Microsoft Office PowerPoint 發展

外掛程式 MathPS、李俊儀（2004）和黃俊榮（2004）利用 Flash 開發幾何繪圖工具 GP（Geometry Player）、蔡仁杰（2005）繼續發展荷蘭繪圖軟體 Drape（DRAWing Programming Environment），甚至是目前我們常用來試算的 Microsoft Office 軟體 Excel，這些軟體都是數學教師可利用它來開發素材、發展適當的模組、以進行教學活動來強化學生的概念建立。此外，許多數學教育者開發具主題性質的虛擬教具（Virtual Manipulatives），如張世明的 Magic Board（2006）、王智弘的多方塊（2006）、劉賢建的虛擬計算機（2006），皆是利用 Flash 開發虛擬教具；網路資源更有許多虛擬教具有主題式的學習目標，讓數學教師或學生可以利用虛擬教具的特性來輔助數學概念之養成。

有關電腦輔助數學教學的研究，近年來國內有許多研究者利用動態幾何系統的數學軟體來開發教學模組及教學素材，並深入教學環境實際教學，其中 GSP 在教學實務中，不僅在高等教育中使用它來處理複雜的幾何問題，在高中、國中、甚至國小都有數學教師利用它來開發素材運用於平時的教學活動；如前所言，亦有許多數學教育學者開發其他數學軟體，甚至是設計 Web 教學平台、利用多媒體來輔助學生之數學學習。而研究者比較好奇的是：為什麼國內運用 CAS 於數學教育的文獻不多？再則從這些文獻中可以發現：CAS 的使用對象多為高等教育的學生，一般大學以上的學生有機會接觸 CAS 數學軟體，利用它來協助數學概念的養成與理解，或作為解決艱深問題的輔助工具；但是，在中等教育以下，除了少數學生接觸過 CAS 之數學軟體，一般的學校數學教學環境卻甚少使用。雖然在教育部為配合九年一貫的實施所公佈之《普通高級中學設備標準》（2005）中，表列 Mathematica、Maple、DERIVE 這三個 CAS 數學軟體，但在實際的教學環境中卻很少有教師使用 CAS 數學軟體來輔助教學。

研究者在本研究將使用 CAS 數學軟體 DERIVE，探討其在高中數學教學應用上的可能性。DERIVE 的前身是 muMATH-79，早於西元 1979 年開發，當時使用於 DOS 系統，所佔容量不大，卻能以高速運算協助解決數值運算及代數問題，發展至今已經開發到 DERIVE 6，可用於 Windows 視窗系統；雖然開發已久，但至今尚未正式引入台灣。大陸學者趙繼源、石剛（2005）針對師範院校數學專業的學生及在職中小學數學教師，編寫《數學工具軟件及應用》，其中提到大陸於 1995 年引進 DERIVE 的 DOS 版本，但目前尚未見到 Windows 版本，然而在以 Windows 操作系統為主的時代，人們選擇接觸 Mathematica、Mathlab 等 Windows 版本的數學軟體，使得未引進 Windows 版本的 DERIVE 在大陸更

鮮為人知。不過，DERIVE 從 DOS 版本開始在國外如英國、美國十分流行，許多大學都要求學習高等數學的學生，必須同時學習 DERIVE，並會用該軟體解決數學中的問題，甚至在中小學之數學教室裡讓學生能以計算機來搭配使用以輔助學生學習數學。

相較於其它代數軟體，DERIVE 將常用的指令以視覺化的小圖示呈現，而許多功能亦以選單的方式呈現，不但讓初學者很容易上手，甚至容易操作使用。因此，高等教育的學生可以使用它來解決繁雜的運算及代數問題，由於介面簡單及指令的視覺化及選單化，使中等教育以下的學生亦可在數學活動中配合使用之。

不管是解決數學問題、研究數學學問，還是教授數學課程或學習數學知識，這是一個極好的輔助工具軟體。以教學的角度來看 DERIVE，它提供了一種有別於傳統的新方式，利用鍵盤的敲擊，消除長時間進行數學計算的苦工，但這不代表 DERIVE 必須淪為計算工具。當 DERIVE 幫助使用者去解決數學問題及減輕計算部分的負擔，以教師的課程教授，加上學習單的輔助，可以讓學習者更能專心於所遭遇問題的數學意義，建構所涵蓋的數學概念。



第三節 研究目的

本研究乃是將數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式概念的教學研究。在引入 CAS 數學軟體 DERIVE 的同時，亦蘊涵下列研究目的：

1. 透過 CAS 數學軟體 DERIVE 的輔助，設計適合高中學生學習多項式概念之教學活動，並開發學習素材以輔助學生學習。藉此教學活動鼓勵學生討論、探索，了解學生對此試探性教學活動的看法與回饋，續而探究數學軟體 DERIVE 應用於高中數學教學之可行性。
2. 透過觀察與訪談，本研究將探討 CAS 數學軟體 DERIVE 對學生學習多項式概念的影響，了解教學活動設計是否有助於學生對多項式概念的理解，進而達成數學學習的成效。

依據上述研究目的，本研究主要透過分析學生學習歷程、學習單、學習成就測驗及訪談資料等，回答下列問題從而達成研究目的：

1. 使用數學軟體 DERIVE 應用於輔助高中學生學習多項式概念是否可行？
2. 使用數學軟體 DERIVE 的輔助學習下，對學生學習多項式概念有何影響？



第二章 文獻探討

本研究乃是將電腦代數系統數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式概念的教學研究。基於國內關於電腦代數系統的介紹有限，且數學軟體 DERIVE 在國內無相關文獻；因此，在本章探討本研究之相關文獻的同時，將進一步介紹之。全章共分三節，第一節介紹電腦代數系統及其相關議題，第二節引介數學軟體 DERIVE 及其相關議題，第三節將討論多項函數之相關概念及應用。

第一節 電腦代數系統

在資訊科技的輔助下，可以讓我們頭腦中的數學實驗更具體地呈現：對艱深的數學概念、問題解決過程進行類比；遇到困難的計算、複雜的方程式，只要給出算法，就能獲得解決；多變的幾何關係，利用電腦動態的作圖功能即可得到圖形的顯示。然而資訊科技不僅是輔助教學或輔助學習的工具，亦是啓發、促進學生自主學習的認知工具和情感激勵工具，增進學生的參與感及學習興趣。本節將介紹電腦代數系統及其在教學上的應用。

一、電腦代數系統

電腦代數系統（Computer Algebra System, CAS）是可以提供使用者進行符號運算、數值計算和圖形顯示的電腦軟體。數值計算的涵義不僅是基本的算術計算，還包括其他較複雜的計算，如：函數的求值、方程式的數值解、矩陣的計算、矩陣特徵值的計算等。符號運算是CAS在所有數學軟體中最重要的特色，也就是對代表數學對象的符號進行運算，這些符號可以代表整數、有理數、實數、複數或代數式，也可以代表其他的數學對象如多項式、有理函數、矩陣、方程組，或其他抽象的數學對象如群、環、域等等。傳統模式通常是以手工紙筆進行符號運算，隨著資訊科技的發展及對符號算法的深入研究，用電腦代替人工進行符號運算已經成為可能。

從成都理工大學信息管理學院數學實驗室的網頁中，可以獲得符號運算軟體發展歷程的重要訊息（<http://www.mathlab.cdut.edu.cn/jpkc/index.html>）。西元 1960 年以來，符號運算這個領域有極大的發展，一系列符號運算算法的提出為現代電腦代數系統奠定了理論基礎。比較著名的算法包括：計算多項式理想

的 Grobner 基算法、多項式分解的 Berlekamp 算法、計算有理函數積分的 Risch 算法。在二十世紀六十年代，比較流行的電腦程式語言是 FORTRAN 和 ALGOL。這兩種語言主要是用來作數值計算，至今 FORTRAN 依然是數值計算領域的標準語言之一。然而 FORTRAN 語言和 ALGOL 語言並不適合於編寫符號運算軟體。六十年代初出現的 LISP 語言為符號運算軟體提供了合適的語言環境，因此早期的符號運算軟體都是用 LISP 語言編寫，其中最著名的符號運算系統是由 Stanford 大學的 Tony Hearn 開發的 REDUCE，而最初的目的就是用來進行物理計算。到了七十年代初，由麻省理工學院的 Joel Moses、Willian Martin 等人開發 MACSYMA，是當代功能最強大的符號運算系統。它的功能除了標準的符號運算以外，還包括極限的計算、符號積分、解方程式等等。事實上，許多符號運算的標準算法都是由麻省理工學院的研究小組提出的。由 G. Collins and R. Loos 開發的 SAC/ALDES 系統是另外一種類型的符號運算系統，所使用的開發語言是 LISP 語言的一個子集稱為 muSIMP。進入八十年代，隨著個人電腦的普及，電腦代數系統也獲得了飛速的發展。在這個時代推出的電腦代數系統大部分是用 C 語言編寫的，比較著名的系統包括 Maple、Mathematica、DERIVE 等。

除了上述通用的 CAS 數學軟體以外，亦有一些在某個領域專用的 CAS 軟體，如：用於高能物理計算的 SCHOONSCHIP，用於廣義相對論計算的 SHEEP 和 STENSOR；在數學領域中用於群論的 Cayley 和 GAP，用於數論的 PARI，SIMATH 和 KANT；在代數幾何和交換代數領域中常用的系統是 CoCoA 和 Macaulay；還有專門計算 Lie 群的 Lie 等等。

在佛山科學技術學院數學系的網頁中，對於 CAS 數學軟體之共同性有一些見解 (<http://www.fosu.edu.cn/li/math/>)，認為不同的數學軟體之間有較大的差別，但通用 CAS 數學軟體有一些共同的特點：

1. 可以進行數值計算、符號運算和圖形顯示，具有高效的可編程功能。
2. 多數 CAS 都是交互式的，經由使用者透過鍵盤輸入命令，電腦計算計算後顯示結果。較好的系統都有 Windows 版本、良好的介面、方便靈活的命令輸入模式，且很容易獲得說明幫助。此外，好的數學軟體都提供了人們習慣的數學符號表達形式。
3. 各個系統持續發展、更新，朝著智能化、自動化方向發展。數學軟體的實質是數學方法及其演算法在電腦上的實現，這些都是無數數學家的工作與智慧的結晶。

- 參與軟體開發和應用的人員的數量在不斷增加，而且日趨國際化。隨著網際網路的普及，使用者可以很方便地與軟體開發者進行溝通，反應軟體中存在的問題，也把新的應用情況和好的程式提供給軟體的開發者。數學軟體的開發不再只是軟體開發者的事情，也是廣大使用者的事情。

二、CAS 的功能及表徵

CAS透過電腦利用數學演算法解決代數的微分、積分、線性、非線性方程式、多項式系統的求解，以及利用數值方法來作2D、3D圖形的繪製。使用在數學的實驗與學習可藉由數值的改變來觀察代數系統的圖形變化。黃誌偉(2006)有鑑於CAS能提供數值計算、符號運算、圖形顯示，以「CAS表徵」表示透過CAS呈現數學概念之各種表徵形式，認為CAS表徵涉及到數值計算、圖形呈現、動態展示和代數運算。以本研究所探討之多項函數及多項方程式為例，來看CAS表徵的四種模式：

- 數值模式 (numerical model)：

CAS可以提供快速的數值運算，讓學習者可檢驗自己所求的函數值是否正確；利用指令可以一次求得多組自變數與應變數的對應，大量的數值供應可讓學習者便於進行觀察及猜想函數變化趨勢。

- 圖形模式 (graphical model)：

經由學習者給予函數的定義，CAS可以提供函數圖形，讓學習者可檢驗自己所描繪的圖形是否正確；藉由快速的函數圖形供給，可讓學習者同時觀察比較不同函數圖形的共同特徵及相異處。

- 動態模式 (dynamic model)：

函數各項係數的連續改變，可即時對應到圖形的改變；圖形視窗可拉近來觀察圖形的細微變化，亦可放遠來觀察圖形的延伸狀況；利用追蹤 (Trace) 的功能由函數圖形上的點的坐標表示亦能明白函數值的增減變化及極值的產生處，也可以協助學習者建構多項函數的zero與多項方程式的解的關係。

- 代數模式 (algebraic model)：

利用CAS可進行符號運算的特色，對多項式可進行因式分解或多項式展開的工作，多項方程式的求解亦可以代數解的方式呈現。

CAS的優越性主要在於它能夠進行大規模的符號運算。平時我們利用紙筆進行符號運算只能處理符號較少、過程較不複雜的算式；一旦所涉及的符號較多、過程較複雜時，人工的紙筆計算便成為可能而不可行的事，主要原因是在

做大量符號運算時，我們很容易出錯，並且缺乏足夠的耐心。當算式中的符號個數上升到四位數後，紙筆計算便成為不可行的事，此時，使用 CAS 進行運算可以做到準確、快速、有效。

CAS 提供學習者進行數學實驗的空間，除了可以協助學習者驗證答案，免除繁雜的計算，節省計算時間並轉移於思考，也可以從上述的 CAS 表徵的各個模式中獲得觀察、歸納、建構知識的機會，此外，學習者平時礙於紙筆計算的麻煩或能力不足等因素而停頓的問題，也可以利用 CAS 依自己所欲進行之歷程繼續完成問題解決，增加了學習者探索數學知識之可能性。

CAS 包含大量的數學知識，但僅是數學的一小部分，有許多數學領域還未能涉及。雖然 CAS 在代替使用者進行繁瑣的符號運算上有強大的優越性，可是 CAS 數學軟體都有一定的局限，畢竟電腦是個機器，只能執行人們給它的指令。多數 CAS 對電腦硬體有較高的要求，在進行符號運算時，通常需要很大的容量和較長的計算時間，而精確的代數運算須以時間和空間為代價，這一點在資訊科技成長快速的現代是可以被克服的；使用 CAS 數學軟體所遇到的另一個問題是解決問題時所得的計算結果有時會很長，使用者有時可能會很難從結果中看到問題的要義。



三、使用 CAS 的整合教學環境與教學模式

傳統的教學系統只有教師、學生和教材三個要素，在資訊科技進步的現代則是多了一個要素－「教學媒體」。周琦（2005）認為這四個要素不是孤立地、簡單地組合在一起，而是相互聯繫、相互作用的有機整體。將資訊科技與學科課程作有效的整合，可以建構出一種理想的學習環境，可支援真實的情境假設、不受時空限制的資源分享、快速靈活的訊息獲取、豐富多樣的交互模式、打破地區界限的合作交流，以及有利培養學習者的自主發現和自主探索。

資訊科技在與學科內容整合的環境下，不僅是輔助教學或輔助學習的工具，亦是啟發、促進學生自主學習的認知工具和情感激勵工具。由於數學的知識是抽象的，所用的術語也很抽象，如"對稱"、"極限"、"軌跡"等概念、關係、及動態的變化過程較讓人難以直接想像，而在資訊科技的輔助下能讓人心振奋，其運用可幫助教師和學生解決這些難處，激發學生探究的興趣，幫助學生更快速、更高品質地完成數學問題的探索。

在此整合的教學環境下，提供學生自主探索、自我省思、同儕合作學習等機會，除了讓學生能主動、積極地"動"起來，更是使學生的創新思維與實踐能力在學習過程中得到有效的鍛鍊。而在利用資訊科技整合之數學教學環境中，學生學習知識時所經歷的操作、觀察、測試（試驗）、猜想、發現等過程變得更具體、清晰，嘗試錯誤的成分減少（比手算時較少不必要的嘗試及計算錯誤），數學思維的目的性增強，數學推理的邏輯基礎更為穩固，數學思考更具有程序性；因此，相對提高了學生透過自主積極的數學思維而成功建構數學概念、解決數學問題的可能性。Jonassen (1996) 提到學習者若將電腦科技當作認知學習環境的工具，可以提升解決問題能力與擴展思考力，進而提升學習者知識建構與認知的能力。

教師的教學模式以學生的學習發展做為根本目的和出發點，使所教知識能學生的生活世界連繫，幫助學生發現知識之客中意義，激勵學生完成富有挑戰性的學習任務；引導學生創設和諧融洽的學習氣氛以利於小組合作學習與溝通。資訊科技與課程之整合須以數學的具體任務為完成目的，使學生的數學學習能自主地處於發現問題、用數學的模式提出問題、探索解決方法、解決問題的學習過程。

而以資訊科技為主，有兩種教學模式值得我們深入探索：探究性學習模式和合作式學習模式，根據數學教學本身的特點，從數學課堂教學和數學實踐教學尋找切入點，創設具有豐富性、挑戰性和開放性的教學環境，為學生的發展提供更為寬廣、彈性、具創意的學習空間，讓學生在運用資訊科技中培養學生觀察、猜想、類比等數學思維。CAS能夠使學生以任何傳統的表徵形式來定義、結合、轉換、比較、或直觀操作函數與關係，可以在代數與幾何之間搭起橋樑，而教師惟有理解和掌握CAS的功能及其教學意義，才能真正實現資訊科技與數學課程的有效整合。

四、使用 CAS 時所產生的圖形誤解

黃誌偉 (2006) 指出在使用CAS時有相當多的微妙技巧，選擇適當的定義域與值域才能呈現合適的圖形。由於在CAS整合環境下的數學學習，著重學生的自主學習，因此，螢幕上所呈現的圖形，可能在學生知識的建構過程給予不同的讀解，造成意義上的嚴重誤解。Goldenberg (1988) 提出在學生自主學習的情境下，探索係數對函數圖形的影響，可能建構出錯綜複雜的數學概念。舉例如下：

1. x 軸和 y 軸保持不變，常數項的改變所引發觀察線型函數圖形的錯覺

學生從操作經驗中觀察圖形的移動方向，但有時並非是教師所預期的學習目標。針對線型函數 $y = ax + b$ ，改變常數項 b ，觀察圖形的變化，如圖2-1-1所示，教師的期望乃是能得到 $y = x - 1$ 向上平移2單位可得 $y = x + 1$ 的結果。但在同一個視窗，學生可能將其解讀為 $y = x - 1$ 向左平移2單位可得 $y = x + 1$ 的結果，甚至可能會有 $y = x - 1$ 向左上方平移可得 $y = x + 1$ 的錯覺，這些在教師教導線型函數概念時，都不是教師所盼望得到的觀察結果。

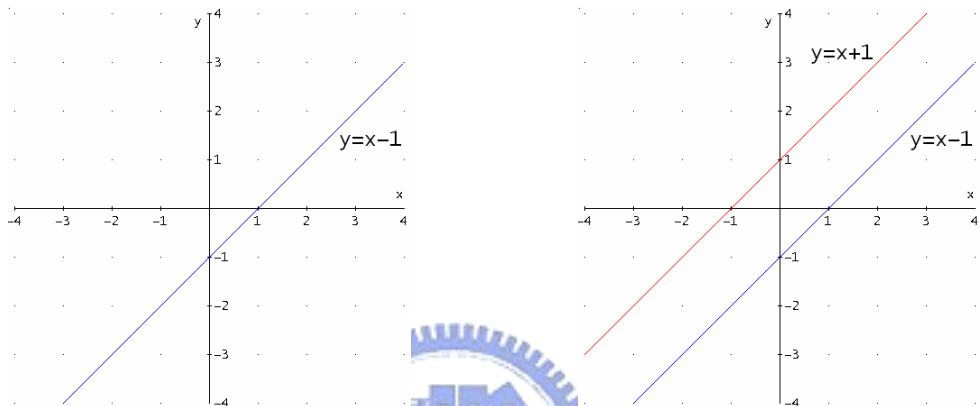


圖 2-1-1 直線圖形往左移動的錯覺

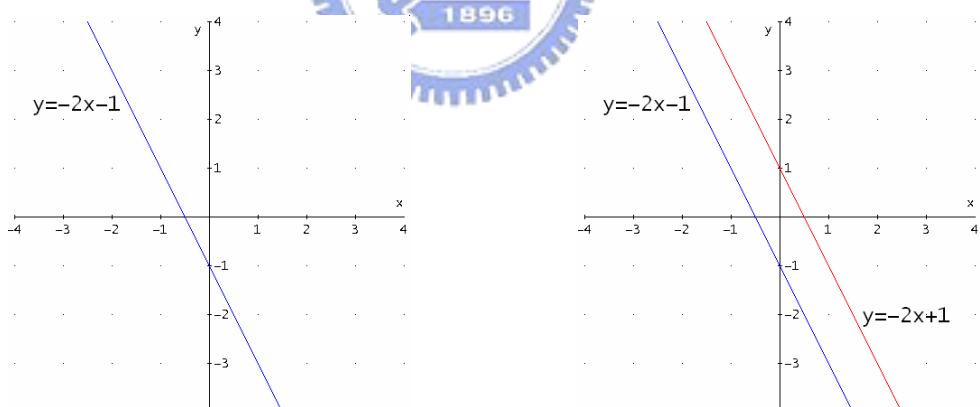


圖 2-1-2 直線圖形往右移動的錯覺

同樣地，如圖2-1-2所示，教師希望能得到 $y = -2x - 1$ 向上平移2單位可得 $y = -2x + 1$ 的結果。但在同一個視窗，學生可能將其解讀為 $y = -2x - 1$ 向右平移1單位可得 $y = -2x + 1$ 的結果，甚至可能會有 $y = -2x - 1$ 向右上方平移可得 $y = -2x + 1$ 的錯覺。

2. x 軸和 y 軸的比例改變，視不同斜率之直線為兩平行線的錯覺

x 軸和 y 軸的比例會改變原有圖形的風貌，而影響學生對圖形的判讀。譬如數學上所定義直線之「斜率」，我們常會直觀地以直線斜的程度來比較，一旦 x 軸與 y 軸沒保持1:1的比例，很可能在比較二圖形時學生會將兩條不同斜率的直線看成是兩條平行線，如圖2-1-3所示。所以，在使用CAS時，必須注意 x 軸和 y 軸的比例或使用視窗的比例，才能去除其對圖形產生的影響，正確地讀取圖形所傳達的訊息。

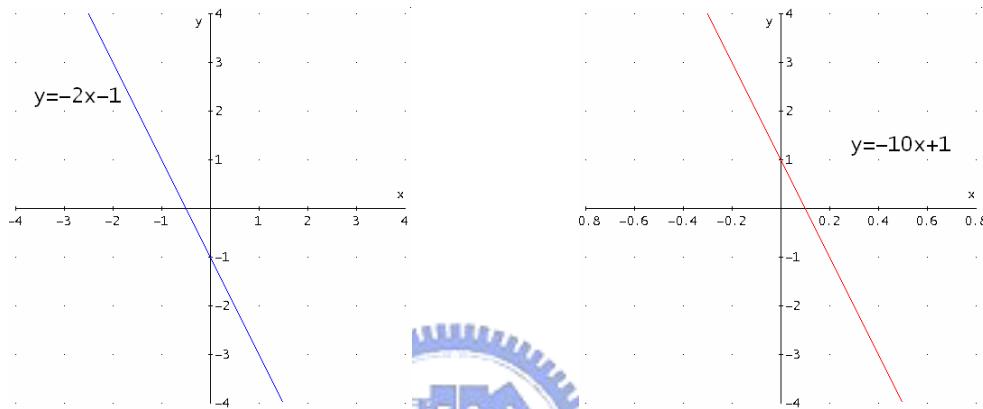


圖 2-1-3 視不同斜率之直線為兩平行線的錯覺

3. x 軸和 y 軸的比例保持不變，視野大小改變，觀察同一函數圖形的錯覺

如圖2-1-4所示，採用同一個一次函數 $y = -2x - 1$ ， x 軸和 y 軸的維持1:1的比例，而將視野大小改變，也就是將圖形拉近（如左圖）或放遠（如右圖）來看，由於保角的因素，會讓學生覺得圖形很像、斜率一樣；但拉近、放遠的動作改變了距離，使得右圖的直線看起來比左圖的直線來得高，學生可能認為直線 $y = ax + b$ 中的 b 有改變，因此影響學生對 y 截距 b 的判讀，甚至有可能會直接忽略。

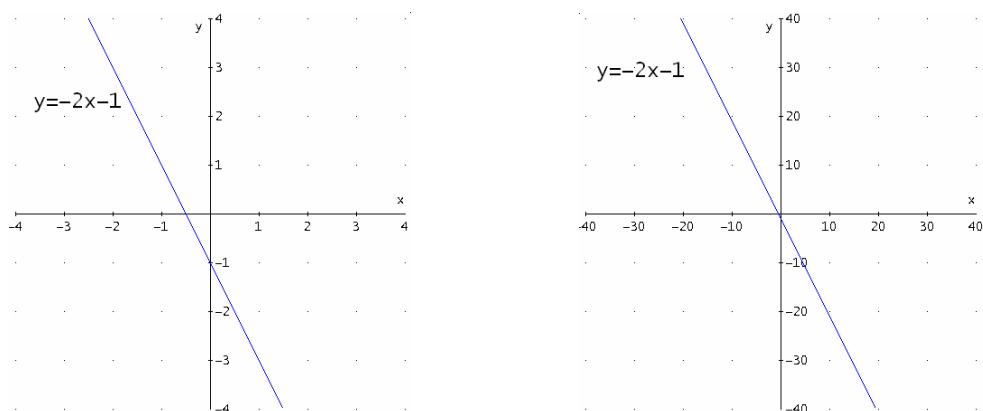


圖 2-1-4 直觀兩圖有高度差別而影響或忽略 y 截距的判讀

同樣的狀況若發生在二次函數的探索，如圖2-1-5所示，拉近或放遠來看同一個拋物線的圖形，直觀的觀察會覺得二者的形狀不一樣，即開口大小不一樣，如此會影響學生對二次函數中 x^2 項係數的判讀。此外，學生對圖形的位置也可能產生錯覺，可能會覺得左圖和右圖中的頂點不是同一點，亦可能會覺得左圖拋物線頂點附近的曲線較鈍、較為平緩。

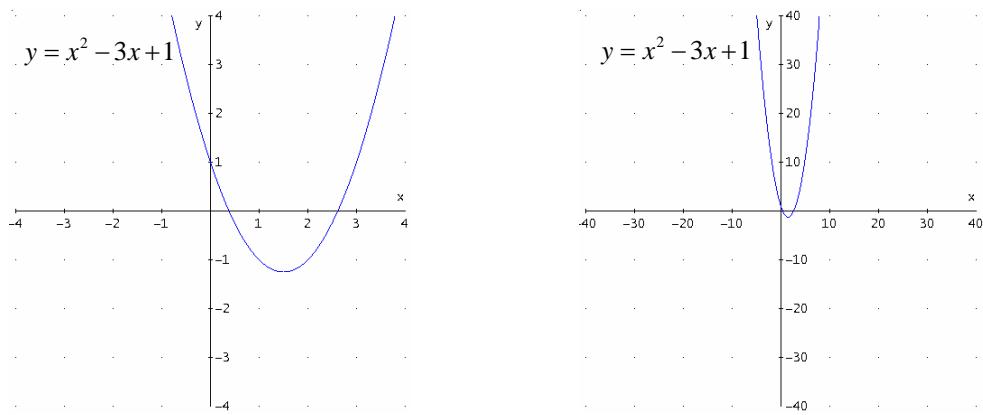


圖 2-1-5 直觀兩圖有開口大小不同、圖形位置不同的錯覺

由上面的舉例可知，雖然CAS具有強大的繪圖功能，在程式的設計控制下，幾乎能作出數學中所有的函數圖形，提供數學教學者以CAS輔助教學來輔助學生概念之養成，但如何解讀CAS所產生的圖形，成為使用上不可或缺的重要問題，如何協助學生以CAS來輔助學習，達到正確的學習目標，亦是身為教學者的重要工作。

五、CAS 使用之新趨勢—圖形計算器 (graphing calculator)

在我們台灣大家很普遍地使用計算機 (calculator)，是一種小型的手持儀器，可用來完成計算，但通常僅能完成算術運算和少量邏輯操作，並顯示其結果。回顧計算器的歷史，中國的老祖宗們使用算盤，西洋的數學家們開發計算尺，就時代背景而言，這些都是數值計算的好用工具。過去有些計算器跟現在的電腦一樣大，1623年W. Schickard建造出世界已知的第一部機械式計算器，慢慢地被桌上型電力機械計算器取代。1948年造型輕便小巧的科塔計算器上市，計算機的市場又展開新的競爭年代。最後隨著積體電路和微處理器的開發，昂貴笨重的計算器逐漸被輕薄小巧的電子裝置所取代，今日大部分計算器是掌上型微電子裝置。

近代較高階的科學計算器、工程型計算器可以支援三角函數、統計和其他函數。而最先進的現代計算器甚至可顯示圖形，並且包含CAS，我們稱之為圖形計算器（graphing calculator）。這種計算器是一種新型的數學工具，具備符號代數系統、幾何操作系統、數據分析系統等，可以直觀地繪製各種圖形，並進行動態演示、軌跡追蹤。圖形計算器擴展了普通計算機的功能，具有強大的圖形功能、視覺化功能和CAS功能，是教學、學習和做數學的輔助工具，為數學思想提供視覺化的圖像，使組織、分析數據容易實現。這類計算器可顯示填滿螢幕的單一數值，並可將數字以科學記號的方式表現至 $9.999999999 \times 10^{99}$ ，如果使用者試圖輸入一個過大的數值或運算結果產生過大數值的算式（如： $200!$ ），則計算器將顯示「error」，原因在於記憶體有限的計算器無法儲存如此巨大的輸入。使用圖形計算器時，如果輸入數學上未定義的函數或操作有誤時，亦會顯示「error」，例如：把數字或式子除以零、對負數取平方根（除了某些昂貴的計算器擁有可處理複數的特殊函數，大部分科學計算器並不允許複數的存在）……等。



圖 2-1-6 Casio 的 CFX-9850GC PLUS

圖 2-1-7 HP 50g



圖 2-1-8 SHARP 的 EL-9900



圖 2-1-9 TI-nspire 系列產品

目前有一些公司開發圖形計算器進攻教育市場，如：Casio的FX-7000G、CFX-9800GFX-7400G PLUS、CFX-9750G PLUS、CFX-9850GC PLUS；惠普HP的HP 9g、HP 39gs、HP 40gs、HP 48gII、HP 50g；夏普SHARP的EL-9900；德州儀器的TI-73 ExplorerTM、TI-83Plus、TI-83 Plus Silver Edition、TI-84Plus、TI-84 Plus Silver Edition、TI-86、TI-89 Titanium、TI-92 Plus、VoyageTM 200及最新開發的TI-Nspire.....等。

以TI圖形計算器為例，其內部置了功能強大的數學教學軟體，如函數作圖、分析、幾何繪圖、符號運算、數據處理等系統，且具有編程功能。體型小攜帶方便，提供極大的便利性，讓學生能及時學習和解決腦海中和生活上隨時出現的問題，而且任何時間都可以使用圖形計算器，讓每一個普通教室成為計算機教室，讓每一個學生隨時隨地可以學習和探索數學。美國德州儀器（Texas Instruments, TI）中國教育產品事業部（2004）在人教網的專家論壇中表示TI圖形計算器具有以下四個特色，其實這些特色亦是各個圖形計算器所努力的目標：

1. 便攜性：圖形計算器可以在任何一間普通教室利用普通的投影機進行演示，還可以利用實物投影儀、電視、電腦等多種設備。此外，師生可以方便地隨身攜帶圖形計算器，教師隨時隨地可以備課，學生可以在教室、家庭、野外、運動場等各種場合進行數學實驗，透過探索科學，進行數學分析，從而發現規律。
2. 專用性：圖形計算器起初乃為數學教學時使用，後來發展為數理綜合性的應用。其硬體和軟體都是基於教學目的而設計，不同於一般意義的計算機和掌上型電腦，因此，圖形計算器更專業化，更符合教學的要求和學習的需要，更具有實用價值。
3. 多學科：圖形計算器不僅僅在數學課堂教學中可以得到廣泛應用，還可以透過以電腦為基礎的實驗室和儀器進行多種物理、化學、生物等學科的實驗。另外，由於數學軟體的使用，可以將實驗結果用適合的函數擬合，並用數學的方法分析，如此數學、物理、化學、生物等教學成為一個綜合理科的實驗、教學與學生創新實踐的過程。
4. 網路化：TI 圖形電算機相互之間可以方便地傳輸數據和程式，更可以和相關的電腦數學軟體進行連繫、建立備份、綜合使用。同時，如今的 TI 圖形電算機已經可以連接互聯網，從網路上下載應用程式，更新作業系統，訂作做用戶界面，甚至完成數學作業等。

圖形計算器不僅影響了老師的「教」，也改變了學生的「學」。其優點在於它提供給學生一個自我研究、自我學習的優良環境，激發了學生主動發展研究性學習的積極性，支持學生在數學各個領域的研究。學生可以在幾何、統計、代數、測量等方面集中精力和時間於做出選擇、反思、推理和問題解決（顧穎、張信，2005）。

圖形計算器在數學實驗的過程中，扮演良好的輔助角色，對於學生的學習起了以下的功用：

1. 圖形計算器可以減少繁雜計算，延伸大腦思維：

利用圖形計算器學生可以做過去做不到或不太好做的事情。如：指數函數圖形的描繪及性質的歸納，紙筆作圖較費時、準確性不夠，且不便於研究函數的性質。若有圖形計算器的輔助，學生可以多個圖形，甚至任意選定多個不同的底數來比較。學習過程中減少繁瑣的低層次紙筆運算，而讓學生有更多的時間用於數學思維的訓練，再經過自己的實驗、觀察、歸納、猜想、驗證，親身去體驗知識的形成過程，因此，更容易去認識、理解和獲得抽象的數學概念及結論。

2. 圖形計算器可以使抽象的數學變為可操作的：

建構多重表徵的教學環境，學生可以自己動手進行數學實驗，使抽象的數學具體化，使靜態的數學動態化。圖形計算器的繪圖功能使學生易於掌握「數形結合」的思想，把一些抽象的概念和原理用直觀形象、生動活潑的形式表現出來，而且學生在自主發現規律、類比總結的過程中，加深對數學概念的理解和記憶。

3. 圖形計算器為研究性學習創造條件：

圖形計算器使學生可以有機會觸及課堂教學以外的更多實際生活中的問題（如：數學建模等），培養較具深的數學思維，並能更深層次地研究數學。在研究的同時，作為主體的學生在思想、行為、觀念等方面得到重視和鼓勵，使學生在這種氛圍下更願意去嘗試探索，培養了學生的自信心，滿足了學生的好奇心，提高了學生的自學能力。

4. 圖形計算器激發了學生的學習數學的興趣：

傳統數學教學中大量枯燥的公式、繁瑣的運算、複雜的空間圖形令部分學生感到害怕，尤其抽象思維能力不佳的學生更是感到自卑。圖形計算器中奇妙、直觀的圖形語言深深吸引了學生，學生對這種學習工具充滿好奇，由好奇激發出極大的興趣，啓動了學生的數學學習潛能。學生從親歷數學

發現的過程、相互之間研究討論、發現總結規律，有時甚至發現新的問題，進而激發學生自行探究，學生在這種狀態下產生了濃厚的學習興趣和強烈的求知欲望，自覺主動地、快樂地學習。

Riedesel, Schwartz, and Clements (1996) 表示計算器在他們社會中逐漸普及化，國小教師覺得如此會阻礙小孩們基本的算術能力，家長亦認同如此甚至會禁止他們的孩子使用計算器；還有一派的說法，認為學生使用計算器算數學是一種作弊行為，因而導致很多學校的學生會拒絕使用計算器運算的這個教學法。除了這些觀點之外，明智的老師認為計算器的確改變了我們做數學的傳統方式，而且應該教導學生如何正確地使用計算器，適當使用計算器的教學方法需要一些想像並仔細考慮教學上的目標是什麼。敏感的老師也企圖發表一些言論認為計算器的使用會對家長和孩子產生不良影響。由於有關學校是否使用計算器教學的相關研究數以百計，Riedesel et al. (1996) 整理出一些正面的影響：

1. 增加學生對解決問題的熱誠和信心。
2. 對數學有更正面的態度。
3. 有持續解決問題的能力。
4. 能自己決定使用或不使用計算器來計算。
5. 熟悉科技產品。
6. 增加對數字的觀念。
7. 增加對數字的熟練度。
8. 願意選擇任一種方法解決問題。
9. 利用練習題來增加學生建構數學規則的能力。
10. 發展學生對數學關係的探索和對數字屬性的觀念。
11. 清楚了解問題關鍵。
12. 增加解決問題的速度。
13. 能解決難度較高的問題，就是多重性類型。
14. 有效使用計算演算法。
15. 增加消費者知覺。
16. 促進團體合作。
17. 增加檢查答案的興致和能力。
18. 建立個人化，學生能夠獨立發展新觀念。



然而，還是有一些其他顧慮值得我們教師注意：例如學生可能以錯誤的方式使用計算器，並對計算器的信賴而盲目相信答案；教師為了破解學生的盲從，

常會指導學生以人工驗算，並確認其答案的正確性。當然，學生也有可能只運用計算器取得答案，而不了解運算的真實意義，例如輸入 $(-1) \times (-1)$ 獲得「1」的結果，但卻不了解背後「負負得正」的規則；在此情況下，計算器成為學生的依賴而非學習輔助工具，使學生對任何簡單的運算都以計算器求解，並降低應答的速度，這不是數學教師所樂意見到的。因此，當我們進行教學活動使用學習輔具時，應該於適切的時機使用，並且在旁協助學生數學概念的養成。

第二節 DERIVE

本研究將以電腦代數系統的軟體 DERIVE 6 作為研究工具。如同「電腦代數系統」之名，DERIVE 在處理代數問題具有強而有力的功能。

一、DERIVE 的歷史發展簡介

西元 1979 年，CAS 只能在大型的主機電腦才可以使用，而且幾乎在學術機構才有機會使用。由 Albert D. Rich and David R. Stoutemyer 所建立的 Soft Warehouse 希望能讓 CAS 能廣泛地由群眾在 PC 個人電腦上使用，進行開發 muMATH，並於 1979 年開始發行 muMATH-79，在 8080 和 Z80 電腦上只要 48KB 的記憶體就可以執行 CP/M (Control Program/Monitor or Control Program for Microcomputers)，在 Radio Shack TRS-80 電腦上面可以執行 TRS-DOS (the Tandy Radio Shack - Disk Operating System)；當時使用於 DOS 系統，所佔容量不大，卻能以高速運算協助解決數值運算及代數問題。在 1980 年發行 muMATH-80，除了可以用在前述的電腦，亦可在 Apple II 電腦使用。接著，1983 年發行 muMATH-83 可以在 IBM-PC XT 電腦執行，而且只需要 300KB 的記憶體。

muMATH 的「mu」來自希臘字母 μ ，在十進位的系統中代表微米，也就是百萬分之一 (10^{-6})，由於這個數學程式在當時可以在小型電腦的微處理器 (micro-processors) 上使用，所以很自然地被取名為 muMATH。muMATH 以 muSIMP 語言寫成，由 LISP 語言改進而來，提供了更普通常見的語法，將符號嵌入數學運算中，取代原本 LISP 語言中以字首前綴的方式，如在 LISP 中以 (+ 3 4) 呈現，而在 muSIMP 則以 3+4 直接呈現。後來 muSIMP 發展成 muLISP 語言。

表 2-2-1 DERIVE 的歷史發展簡史

發行年份		系 統 需 求
muMATH-79	1979	ran on 8080 and Z80 computers with as little as 48K bytes of memory running CP/M, and on Radio Shack TRS-80 computers running TRS-DOS.
muMATH-80	1980	ran on the above computers as well as the 6502 based Apple II computers.
muMATH-83	1983	ran on the above computers as well as the 8088 based IBM PC and XT computers with as little as 300K bytes of memory.
DERIVE™	1988.10	had an easy to use menu-oriented CAS interface, 2D and 3D graphics, and ran on PC compatible computers running MS-DOS with a minimum of 512K bytes of memory.
DERIVE for Windows	1996.10	had a GUI Windows interface, a 32-bit math engine kernel, and ran on PC compatible computers running MS Windows and NT.
DERIVE 6	2000	requires Windows 2000 or XP (Minimum RAM and processor requirements are the same as the operating system requirements), a CD-ROM drive for installation, and at least 10MB (or 20 MB if also TI-Connect is to be installed) of free disk space.
DERIVE 6.1		requires Windows 98, Me, 2000 or XP (Minimum RAM and processor requirements are the same as the operating system requirements), a CD-ROM drive for installation, and at least 10MB (or 20 MB if also TI-Connect is to be installed) of free disk space.
		Derive 6.01 <u>did not</u> run under Windows Me, 98, NT 4.0, and Windows 95 because Derive 6 uses Unicode fonts which are not supported by this systems. Starting with version 6.1, this issue has been resolved and Derive can now be used with Windows 98 and Me too.

資料來源：Soft Warehouse Europe (<http://www.derive-europe.com/main.asp>)

而後這些為 CAS 努力的軟體設計者認為程式有必要重寫，不能只是升級或改善 muMATH 而已。LISP 是經常用來寫人工智慧軟體的語言，改版後的軟體即是使用此語言，尤其是使用 muLISP 語言，而新軟體中將符號以隱含的方式呈現，使得其所需容量更小，且具更有效率的運算能力。對於此軟體是否承繼 muMATH 之名，設計者掙扎許久，而為了呈現其在電腦上做數學時動態和創造性的過程這個特色，因此將它命名為「DERIVE」。

DERIVE 是 muMATH 的後繼版本，它是第一個在 PC 個人電腦上營運的符號運算系統，1988 年的 DERIVE 為 MS-DOS 版本，具有友好的選單驅動介面和圖形介面，可以很方便地顯示二維和三維圖形。它唯一的缺陷是沒有編程功能，直到 1994 年 DERIVE 3.0 的版本問世時，才提供了有限的編程功能。1996

年的 DERIVE 為 MS Windows 和 NT 版本，擁有圖形使用者（Graphical User Interface, GUI）視窗介面；2000 年 DERIVE 6 的版本發行，可使用於 Windows 2000 和 Windows XP 這些平台；而最新的 DERIVE 6.1 的版本克服了 Unicode fonts 於使用 Windows 98 和 Windows Me 平台時的衝突，也可以在這二種平台上使用。雖然開發已久，但至今尚未正式引入台灣。

DERIVE 的原創公司 Soft Warehouse 被美國德州儀器公司（Texas Instruments, TI）併購，DERIVE 成為 TI 教育產品的一員。由於 TI 是硬體廠商，真正要賣的是掌上型計算機，此新一代的計算機兼具運算功能和測繪功能，不難想像 TI 買下 CAS 數學軟體 DERIVE 的目的，是為了它的技術，並進一步把技術轉移至掌上型計算機，將它改寫成掌上型計算機的程式。當然，因此造就了 DERIVE 和 TI 的掌上型計算機有著方便的溝通關係，也共同來主攻高中到大一這個範圍的教育市場，除了有較簡單的介面設計供學生使用，亦特別設計「step」的功能，讓微分、積分等動作能顯示一步步的運算過程，供學生學習。

近日，研究者得到一個很遺憾的消息，TI 和 Soft Warehouse 決定於 2007 年七月底停售 DERIVE，除了波蘭語、捷克語、匈牙利語和日語這些版本將於在地廠商銷售到 2008 年十二月底。而 DERIVE 將由 TI 新產品 TI-nspire 取代。TI-nspire 將併入極重要的 DERIVE 特色及其兼容性，支撐著名的圖形計算機 TI-92、TI-89、VoyageTM 200 的技術進一步成為新一代 Math/CAS 工具，採取創新的雙重平台設計（掌上型 + 100% 電腦相容）及各種不同構成要素（CAS、繪圖、幾何、試算表）的密切整合。由於 TI-nspire 有攻佔教育市場的企圖心，未來數學教育學者亦可考量利用它來教與學，將它引入國內並使用於中等教育以上之教學應用的可能性。

二、DERIVE 的界面和功能簡介

CAS 數學軟體 DERIVE 在處理代數問題具有強大功能，可以處理代數變量（algebraic variables）、代數式、方程式、函數、向量和矩陣，亦能執行數值計算和符號運算，處理代數、三角學、微積分的問題，而且可以使用數值方式繪製二維和三維的圖形，如圖 2-2-1 所示。

本研究使用 DERIVE 6.0 版本，研究中以「DERIVE」簡稱之，使用於 Windows 2000 和 Windows XP 視窗系統。相較於其它 CAS 軟體，它將常用的指令以視覺化的小圖示呈現（如圖 2-2-2），而許多功能亦以選單的方式呈現（如圖 2-2-3），不但讓初學者很容易上手，甚至容易操作使用。因此，高等教育的

學生可以使用它來解決繁雜的運算及代數問題，由於介面簡單及指令的視覺化及選單化，使中等教育以下的學生亦可在數學活動中配合使用之。

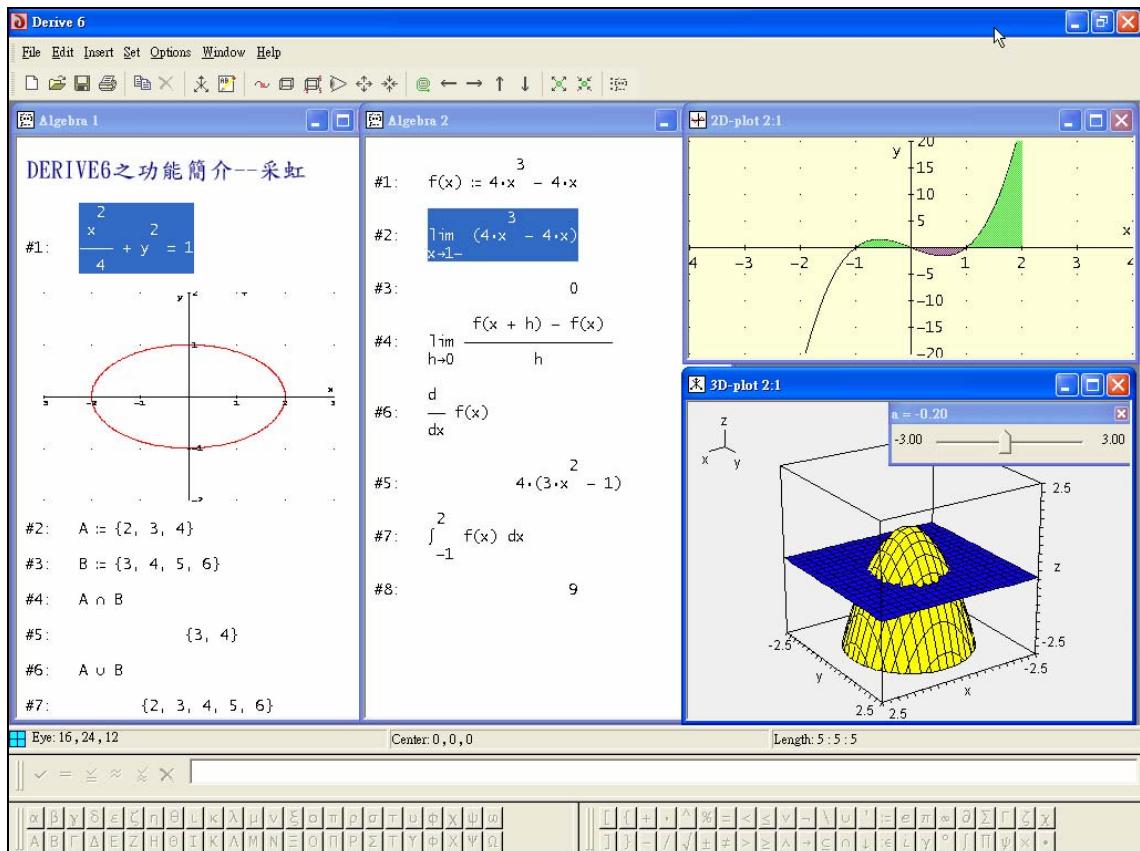


圖 2-2-1 DERIVE 的界面和功能簡介



圖 2-2-2 DERIVE 將常用的指令以視覺化的小圖示呈現

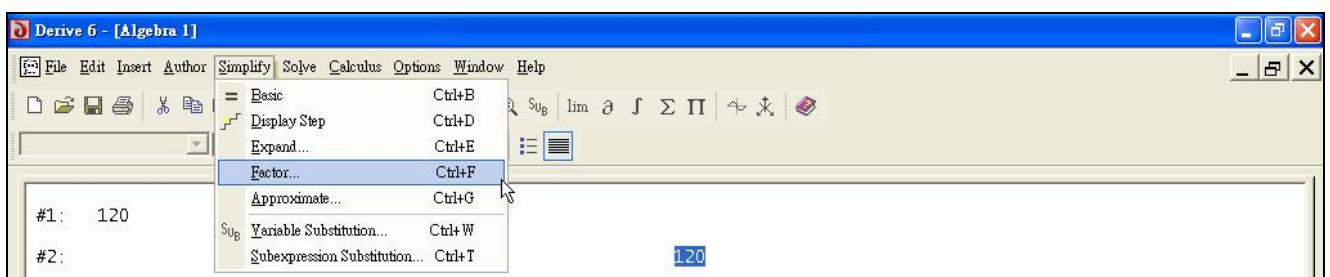


圖 2-2-3 DERIVE 將功能以選單的方式呈現

DERIVE 主要的長處在於使用符號代數(symbolic algebra)及強大的製圖法。我們可以直觀輸入代數式，解決相關問題，例如當我們要輸入 ab 這一項時，其他 CAS 軟體可能要以「 $a*b$ 」的型式輸入，而 DERIVE 除了可以用這個方法，也可以直接用「 ab 」或「 $a b$ 」輸入。最神奇的是它對於隱函數可以直接繪出圖形，無須利用參數慢慢繪製，如圖 2-2-4 所示，譬如我們要繪製一個以原點為圓心、半徑為 5 的圓，可以直接利用圓的方程式 $x^2 + y^2 = 16$ 來繪製，不一定要把圓的方程式改成參數式 $\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$ 才能完成圖形之繪製。

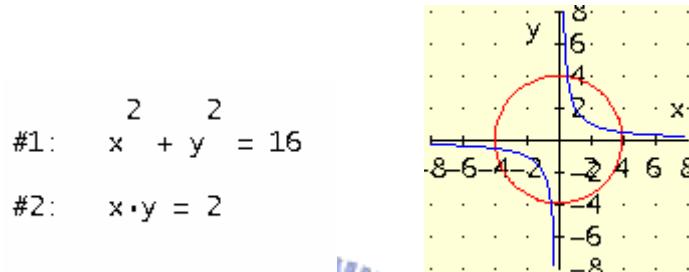


圖 2-2-4 DERIVE 對於隱函數可以直接繪出圖形



以教育市場為目標，DERIVE 6.0 版本較先前的版本新增了一些功能，值得我們注意：

1. 新增「step」功能，能列出代數式簡化過程的步驟和轉換的規則，也就是能將複雜的解題流程，按照解題步驟一步一步呈現，同時並可顯示每一步驟的轉換所使用之數學性質及規則，如此可以讓學生明瞭解題的流程、學習代數式簡化過程的微妙之處。學生學習一個題目就好像是觀察一個專家的思考流程，而在探索專家使用的步驟時，可加深學生對解題的理解，認清解題過程的規則。
2. DERIVE 與 TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus, and VoyageTM 200 這些掌上型圖形計算機之間可以傳送和接收工作單。目前國外圖形計算機漸為廣泛利用，學生人手一機，利用 DERIVE 和圖形計算機之間的連結功能，可以讓教師利用電腦適當傳遞指令給學生，而學生也可以將自己使用圖形計算機的想法回傳給電腦。



圖 2-2-5 TI-89 Titanium



圖 2-2-6 Voyage™ 200

3. 可以使用拉霸（Slider Bar）來控制代數式中的參數，動態模擬參數的改變對圖形的影響。而由視覺上的動態模擬，更可讓學生觀察、推論、歸納代數式之參數與圖形之間的關係。
4. 顯示方程式的圖形時，能自動標示圖形之代數式，便於學生了解代數式與圖形之對應，進而觀察、推論、歸納代數式與圖形之間的關係。
5. 利用滑鼠可以轉動 3D 圖形。
6. 提供 online help 功能。
7. 可以依自己的喜好來訂作工具箱、快速鍵和選單。

不管是解決數學問題、研究數學學問，還是教授數學課程或學習數學知識，這是一個極好的輔助工具軟體。以教學的角度來看 DERIVE，它提供了一種有別於傳統的新方式，利用鍵盤的敲擊，它消除長時間進行數學計算的苦工，但這不代表 DERIVE 必須淪為計算工具。當 DERIVE 協助使用者去解決數學問題及減輕計算部分的負擔，以教師的課程教授，加上學習單的輔助，可以讓學習者更能專心於所遭遇問題的數學意義，建構所涵蓋的數學概念。

三、DERIVE 於高中教學的適用性

利用 DERIVE，除了可以幫助學生處理或解決代數問題，藉由繪製二維和三維的圖形，更可讓學生看到傳統課堂中所不能給予之動態模擬情境及代數與圖形之間的關係，給予學生觀察、自主學習的機會，加強代數與圖形的結合，加深學生對數學概念的了解。

Lindsay (1995) 表示，七十年代以來 CAS 蓬勃發展，欲成為數學教學使用工具，可惜要被視為學習輔助的接受度有限。Lindsay 持續關心大學數學教育，覺得大學講師有職任去探索 CAS 的潛力，並研究將其與課程結合的方法。以他二年的 CAS 輔助教學的經驗，提出 CAS 數學軟體 DERIVE 可做為論證示

範、應用和自我循步探索的工具。

1. DERIVE 可做為論證示範 (Demonstration) 的工具：

在傳統教室授課的環境下，DERIVE 可做為示範的工具。在電腦、投影機、螢幕的搭配使用下，教師可以選擇一些以往於教室傳授的數學概念，適當地利用 DERIVE 來介紹、圖解及探索，同時也可做為傳統教學的一部份。DERIVE 提供了二維畫圖視窗和三維畫圖視窗，將數學視覺化的呈現，可以讓學生經由觀察圖形的變化來闡述代數式之內涵。如圖 2-2-7 所示，Kutzler (1994) 經由符號和圖形的表現來分析多項式，利用二維畫圖視窗畫出 $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 1$ 的圖形，並分析 a 、 b 、 c 對函數圖形形狀的影響，此時並排幾個畫圖視窗可以讓學生觀察比較，教師使用「若是...又會怎樣呢？」、「為什麼...？」、「到目前為止，我們可以有什麼結論呢？」的問句，可以引誘學生去思考，促使學生去推測代數式與圖形之間的關係；對於傳統教學中習慣去畫函數圖形的孩子而言，這是個新奇的學習方法。視覺化的重視讓函數因為有圖形的呈現而不是只是在做代數的運算，所以學生是需要被鼓勵去想像函數的圖形意義。而代數式與圖形的同時呈現可促使學生對數學有更好的體認、對主題概念有更直接的感覺，增強學生對概念的了解，並能試圖去證實視覺上的推論和代數結果是一樣的。

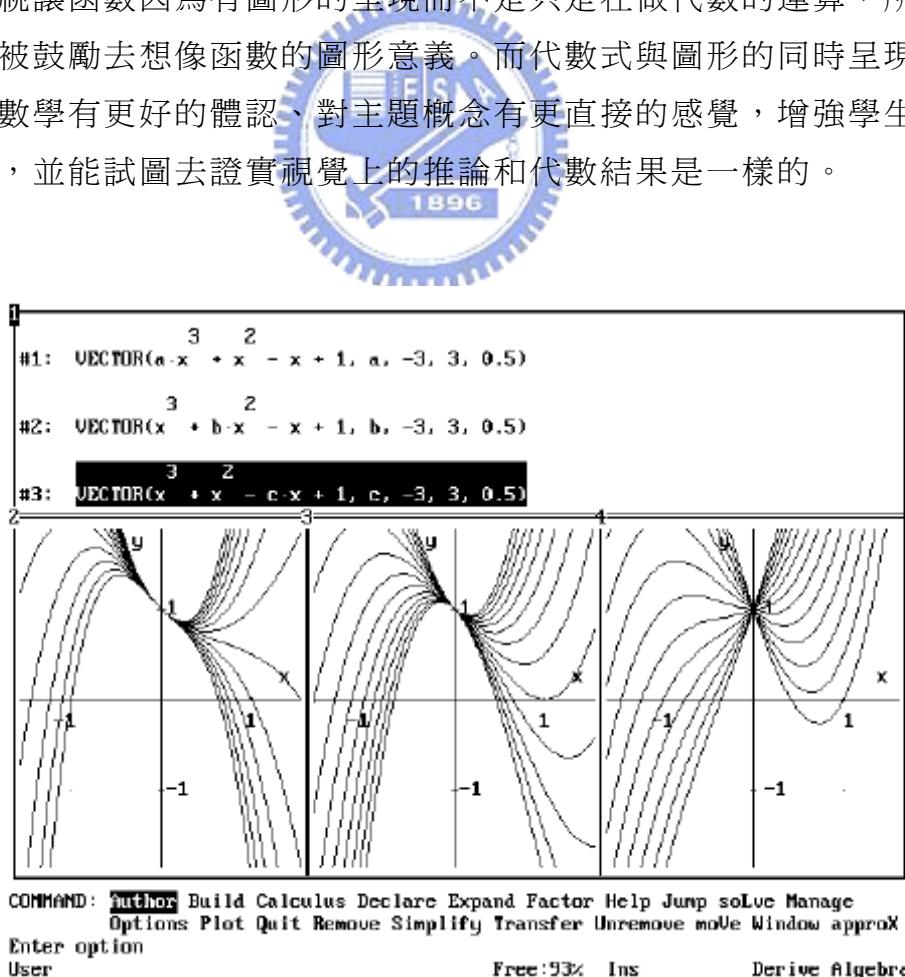


圖 2-2-7 Kutzler 經由符號和圖形的表現來分析多項式

2. DERIVE 可做為應用 (Applications) 的工具：

在個別輔導的環境下，DERIVE 可做為應用的工具。輔導的重點即是涵蓋於數學課程中所面臨之現實世界所遭遇的問題及其應用，例如：給定表面積欲求出有最大體積之圓柱體，學生若想要得到方程式來解決問題，則需要有把命題轉換成數學代數式的能力，及決定是否能成功解題的概念理解；接著甚至有二個障礙必須要克服，一是方程式求解的動作很費時，一是求解過程可能令人感到挫折。DERIVE 提供數值計算、符號運算和畫圖的功能，讓解題的過程變得更容易，而學生可以花更多的時間著重於解釋結果、專注於數學概念的了解。如圖 2-2-8，Lindsay (1995) 以這樣的實例說明 DERIVE 克服學生計算上的障礙，讓學生著重於解釋結果，專注於數學概念的了解，達到問題解決。同樣地，當學生遇到代數的問題時，如：實係數多次多項式方程式的求解、代數基本定理、實係數多項方程式虛根成對定理，學生以既有概念利用 DERIVE 克服了計算過程中的障礙，將可專注於結果的解釋，感受教室教學中所未能及的美妙之處。

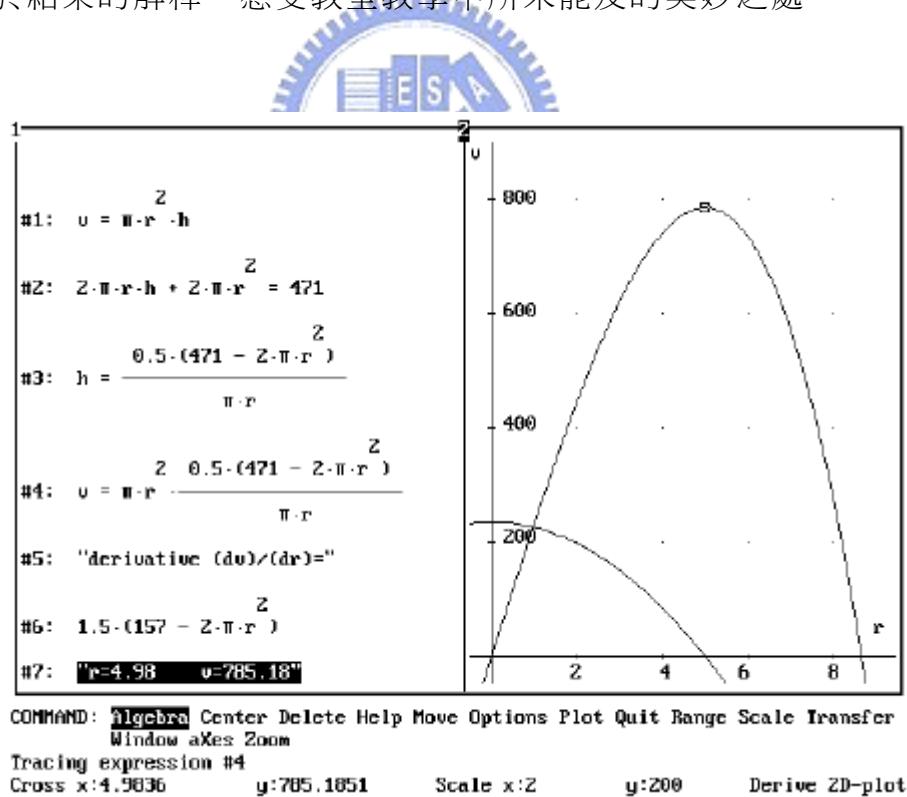


圖 2-2-8 DERIVE 克服計算障礙，學生可專注於數學概念的理解

3. DERIVE 可做為自我循步探索 (Self-paced Exploratory) 的工具：

在實驗室教學的環境下，DERIVE 可做為自我循步探索的工具，強調以自我循步探索的活動為主，有最多的學生介入和最少的教師干涉。過去在教室教授指數函數和對數函數時，學生憑函數帶給他的直覺來探索、描繪、比較；而在 DERIVE 輔助學習的環境中，學生能清楚地觀察到指對數函數遞增和遞減的情形及互為反函數的性質，如圖 2-2-9 所示。以指對數函數作為引介，教師也可以鼓勵學生透過 DERIVE 的畫圖視窗，繼續去探索自己定義的函數。透過軟體提供的圖形放大、水平和垂直移動的功能，可以追蹤出現有圖形的極值發生處，利用這樣的概念，我們可以從多項函數的圖形中嘗試去探索多項函數的極值。接著，鼓勵學生去做實驗，並且預測函數可能的變化。從基本性質的練習開始，能讓許多不願意學習的學生獲得自信和鼓舞作用。如圖 2-2-10 所示，Lindsay (1995) 鼓勵學生做實驗，自我循步探索多項函數和圖形的關係，經由預測、觀察、探索，進一步獲得推論。

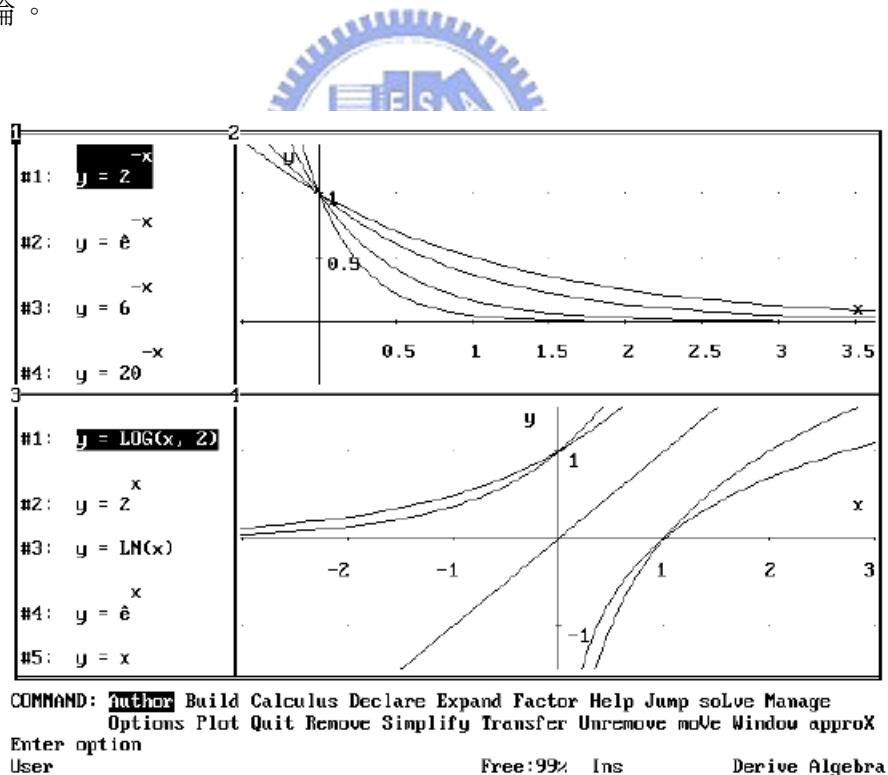


圖 2-2-9 學生利用 DERIVE 觀察指數函數和對數函數的性質

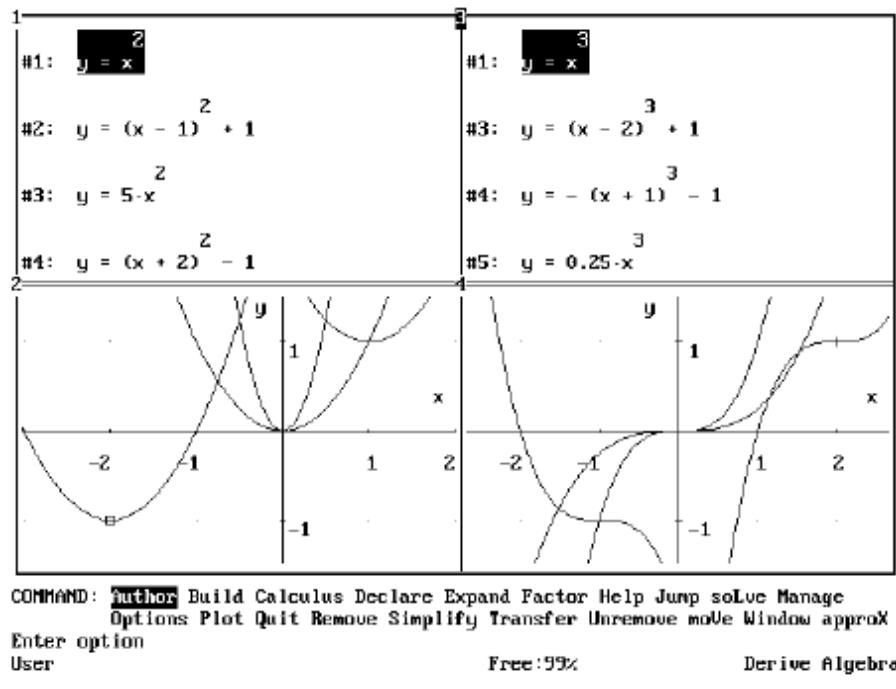


圖 2-2-10 自我循步探索多項函數和圖形的關係

顧穎、張佶（2005）認為數學不止是邏輯，還有實驗。借助數學軟體給予學生一個理想的多重表徵的幾何實驗環境，學生在作圖、度量、測算、變換等實驗活動中，擺脫了單一的紙筆環境，且有更多時間研究、思考問題。特別是學生的猜想與實驗結果的不一致性，能激發學生的好奇心，學生會從不斷的探索活動中得到一些更有益、更直接的反思回饋，如此比教師的強制給予更為有效。在多次探索後，學生會感到有證明的必要，而證明的邏輯思路多半會在實驗活動中產生。這種做數學的實驗活動不僅使學生親身體驗了數學規律的發現與發展過程，而且更為重要的是改變了學生的數學觀念：數學不再是枯燥、乏味的公理、定理和形式化的證明，而是動態的、生動的探索發現過程。

四、使用 DERIVE 教學數學的原則

數學教學是教師思維與學生思維相互溝通的過程。從資訊理論的角度來看，這種溝通就是指數學資訊的接受、加工、傳遞的動態過程，過程中充滿了師生之間的數學交流和資訊的轉換，一旦缺少了學生的參與，整個過程就難以暢通。

從認知心理學來看，建構主義學習觀把數學學習看成是每個學生在自己的數學世界中，經由自我的內化、重組、操作和交流，主動進行建構的過程，這就表明了學生在數學學習活動中的主體地位。建構主義學習觀要求教師在教學

中，應具有「以學生為主」的體會，讓學生積極參與課堂教學，促使學生思維能力的提高。

從認知學習論的角度看，數學學習的過程乃是新的學習內容與學生原有的數學認知結構相互作用形成新的認知結構的過程。這個過程是主體的一種自主行為，而數學學科又具有嚴密的邏輯性和高度的抽象性等特點，所以數學學習更需要積極思考，深入理解。

在使用DERIVE輔助教學和學習的環境下，激發學生的積極參與除了可以提高課堂教學效率，亦可培養學生的學習能力和創造思維能力。教師主導的課堂教學效果應以學生自我學習的功能是否充分發揮來衡量；如果沒有學生的主動積極參與，教師的主導教學的效果也無法發揮極至。而教師所設計的教學活動須具有科學性、啟發性和藝術性，才能充分激發學生的思維活動。由於數學中的重要概念的建立、公式定理的揭示及知識的應用，都是古往今來人們的智慧及創造性思維的結晶，充滿人們勇於探索、敢於創新的精神，因此，教師要啟發、引導學生親自參與這些創造性活動的過程，以達到開發智力和能力，提高創造思維的品質，增強創造力的目的，因而教師應結合教學內容，設計出利於學生參與的教學活動，提高學生的參與程度。

上海華東師範大學二附中的數學老師倪建春（無日期），在利用TI圖形計算器來輔助教學後，覺得教師在資訊融入教學的環境下，應有以下責任：

1. 引導學生參與數學概念的建立過程，培養學生思維的嚴謹性：

數學概念的形成一般來自於解決實際問題或數學自身發展的需要、教材上的定義常常會隱藏概念形成的思維過程。教師要積極引導學生參與數學概念的建立過程，使學生理解概念的來龍去脈，加深對概念的理解，必要時還可以通過舉反例來準確把握概念的本質。如：函數中自變數與應變數的對應，必須要讓學生了解「任意一個」和「存在一個」的差異，以增加學生思維的嚴謹性。

2. 引導學生參與公式的發現過程，培養學生思維的獨創性：

教材中的公式、定理都是數學家辛苦研究的智慧結晶，其中蘊涵著深刻的數學思維過程。而數學公式定理形成過程大致有兩種情況：一是經過觀察、分析，以歸納、類比的模式提出猜想，再進一步尋求邏輯證明；二是直接從理論推導得出結論。我們所遇到的教材，有些是只有公式定理的結論和推導過程，缺少了公式定理的發現過程，這是可以啟發學生思維之處。因此，引導學生參與公式、定理的發現過程，對培養學生的創造能力有很重

要的意義。所以在使用DERIVE輔助學生學習時，可以引導學生去發現所遭遇的狀況所隱藏的規律，自己先發現、猜測出這些規律，然後再加以演繹論證。如此，亦能讓學生在學習的過程中享受到發現的樂趣。

3. 引導學生參與問題的不同解法的探索中，培養學生思維的廣闊性：

匈牙利數學家Polya (1945) 在《怎樣解題》(How to solve it) 中談到解題的四個步驟：了解題意 (Understand)、擬訂計劃 (Plan)、實行計劃 (Carry Out)、回顧 (Look Back)，當教師在進行教學活動時，一定要給學生思考的時間，教師應站在一個協助的角度來啟發學生對問題的多方位聯想、思考、探索。這樣，不但加強了知識間的橫向聯繫，而加寬了學生思維的廣闊性。

在教學活動進行時，除了前面所提到要注重學生的參與之外，身為教育者的我們，應該也要秉持我們的教育熱忱，反求諸己，做到 Polya (1962) 對教師應有的態度所歸納提鍊的教師十諦：對自己的科目要有興趣；熟知自己的科目；懂得學習途徑；努力觀察學生的面部表情，覺察他們的期望與困難；不僅要傳授知識，還要教技能技巧，培養思惟方式；讓學生學會猜想問題；讓學生學會證明問題；從手上的題目中尋找出一些可能用於解今後題目的特徵；不要把全部祕訣一股腦兒地倒給學生，讓他們先猜測、讓他們獨立地找出盡可能多的東西；要啟發問題，而不要以填鴨式的方法硬塞給學生接受。



第三節 多項函數

函數概念在數學學習中佔有極重要的地位，而在高中的函數課程中，多項函數是基本又重要的主題之一，本節將分三方面來探討：函數概念的相關研究、學生在學習多項函數及多項方程式中可能有的迷思概念與學習困難、以及應用科技於多項函數及多項方程式的教學。

一、函數概念的相關研究

鄭毓信 (1998) 表示函數概念的歷史發展是一個一般化的過程，而這事實上就表明數學的研究不斷達到了新的、更高的抽象程度 (如圖 2-3-1 所示)，而數學家們總是追求更大的普遍性。

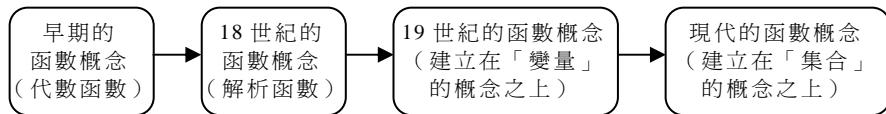


圖 2-3-1 函數概念的歷史發展（鄭毓信，1998，頁 17）

現代函數概念的出現並非只是湊巧，而是為了解決問題而生，我們引進一個未知數 x 表示問題中一個待求的量，然後，把未知數代入問題中，列出算式，此算式就叫做「代數方程式」，整個代數學的基本出發點就是要有效地運用「運算法則」來有系統地解決各種數量的問題（項武義，1998）。

Kleiner (1989) 表示，1450 年到 1650 年間，有以下四個發展奠定了函數概念產生的基礎：

1. 拓展數的概念，包含實數、複數等。
2. 符號代數的創設。
3. 運動研究為科學中重要的問題。
4. 代數與幾何的結合。

十七世紀，克卜勒 (J. Kepler, 1571~1630) 和伽利略 (G. Galileo, 1564~1642) 有關運動的物理研究，促使人們開始尋求可描述所觀察到的現象的工具，因此產生了在數學中具極重要地位的「函數概念」。「函數」（拉丁文 *function*）一詞最早出現在德國數學家萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646~1716) 的研究作品中，用以描述曲線的一個相關量如曲線的斜率。早期僅用幾何語言來討論兩種量之間相互對應的觀念，直到 1718 年白努力 (J. Bernoulli, 1667~1748) 為函數作了定義：「一個變量的函數是一種量，這種量由變量和常數，根據某種關係而建立的。」此後，函數概念一次又一次修正，亦使得函數探討的幾何領域拓展到非幾何語言的範疇（Kleiner, 1989；陳盈言，2001；楊清海，2002；謝豐瑞、陳材河，1997）。

Dreyfus 和 Eisenberg (1982) 指出函數概念不是單一的概念，而是有其他相關的子概念，如：變數、定義域、值域和極值等，且函數可用多種不同的表徵表示之。許多學者亦認為能正確地使用函數的各種表徵有助於溝通和思考數學方法。

有關函數表徵的分類，Yerushalmi (1993) 認為形式可分為三種：數值、視覺、和符號的表徵。Herscovics (1979) 分成表列、圖形、方程式三種。Dreyfus 和 Eisenberg (1982) 指出函數表徵的形式有表格、集合映射圖、圖形、式子、

語意敘述等五種。Even (1990) 提出函數的一般表徵有式子和圖形，其他的表徵有文氏圖、表格、序對集合，以及來自生活的情境。Kieran (1990) 原本將表徵的形式分成表列、圖形、圖表三種；後來他把表徵的形式分成四種：情境（圖形或視覺的描述）、表列、圖形、代數表徵 (Kieran, 1993)。吳玫瑤 (2001) 認為 Kieran 最後在 1993 年的分法較為詳盡。

有關函數表徵的比較，Markovits、Eylon、和 Bruckheimer (1988) 指出學生在初期的學習中，處理圖形表徵比代數式表徵容易，因為圖形是一種視覺化的表徵，函數圖形的呈現對函數性質的討論有輔助觀察的效果，不僅可以輔助教師的教學，更可以幫助學習者的學習。

Freudenthal (1983) 表示圖形是提供函數視覺表徵的重要工具，它可以：(1)點態性閱讀－例如透過坐標平面上的垂直與水平線，可以找出相對應的自變數與應變數之值，必要時可在兩軸上作調整。(2)局部性閱讀－例如研究圖形接近某個點的特性，如：極值、遞增或遞減等。(3)整體性閱讀－使人能夠一眼便認出此函數，並且尋找和比較其整體的特徵。

此外，Zaslavsky (1997) 指出學生在學習二次函數的過程中，代數與幾何圖形表徵間成功的轉換，將是促進函數概念有效的學習策略。

關於概念形成過程的層次，Sfard (1991) 將概念形成的過程分成以下三個層次：

1. 內化 (interiorization)－某個已知的數學個體以某段歷程表現出來（相當於算術過程）。
2. 壓縮 (condensation)－將這個歷程解析為許多可以處理的單位（相當於把這個歷程結構化與符號化）。
3. 物化 (reification)－用新的觀點檢視熟悉的事物，而且把這個「歷程」加以「凝固」成一個靜態的組織體（相當於永久成立的數學個體）。

若將未達到內化層次的學生訂為內化前的階層，則學生的概念成長可分為四個層次：內化前 (pre-interiorization)、內化、壓縮、物化，而且用這四個層次來描述概念的成長是足夠的。Sfard (1991) 認為內化、壓縮、物化形成一個階序 (hierarchy)，即在前面的層次未達成之前，無法進行到下一個層次。當一個概念達到物化時，這個概念又可以當作一個物件來被操作，再次經由內化→壓縮→物化的過程，形成一個更高階的概念。如此一直螺旋式循環上去，概念得以不斷的向上發展。

楊清海（2002）的研究中將比較內化、壓縮、物化三個層次，分別提出三層次的解釋意義和一般特徵，其中並以函數舉例，如表 2-3-1 所示，讓我們看到內化、壓縮、物化三個層次的階序。

表 2-3-1 內化、壓縮、物化三層次比較表

	解釋意義	一般特徵	應用的數學例子
內化層次	學習者藉由過程慢慢熟悉，最後將提升為新的概念（例如數數的過程引導出負數，代數操作變成函數）	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 學習者學會在低階的數學物件上的操作過程，逐漸地，學習者變成熟練地操作這些過程，最後導致新的概念。 ◆ 能透過心靈表徵被執行的過程，而且此過程能被思考、分析及比較。 ◆ 逐漸地，量的改變。 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 負數：當一個人熟練的執行減法就是指這個階段。 ◆ 函數：當變數的想法被學習，且使用公式帶入求應變數之值的能力獲得時所產生的階段。
壓縮層次	將一個長串的操作濃縮到更多可以控制的單位，學習者運用更多的思考能力將過程視為一個整體，而不是考慮細節。	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 長串的操作壓縮到更易於處理的單位。就像在電腦程式中，將循環的部份轉入一個獨立的子程式中。 ◆ 學習者變得越來越具備將一個給定的過程視為有系統的整體的能力，不再覺得有詳細操作的動力，自此之後學習者將此過程視為輸入輸出的關係，而不是藉由指示的任何操作。 ◆ 逐漸地，量的改變。 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 負數：學習者精通計算操作的基本過程，也就是有能力操作正負數之間的加減法。 ◆ 函數：學習者有越多能力看成對應為一整體而不是實際上看它為特定的值，進而研究函、畫函數圖、作函數的結合，甚至找到一個函數的反函數。
物化層次	當一個人有能力去理解、構想將觀念視為一個完全成熟的物件，即是這個概念物化了。物化可以被定義為本體論的轉移，能立即以一全面性的新觀點來看熟悉的事物。	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 本體的轉移，能用一種全新見解，去看一些熟悉事務的一種能力。能將過程凝固成一個物件，一個靜態的架構。 ◆ 學習者能夠研究該範疇的一般性質，以及它的表徵之間的不同關係，並且能夠解決問題，包含發現該範疇中滿足給定條件的所有例子。新的數學物件跳脫出之前的物件，而被建構出來。 ◆ 瞬間的，質與量的大躍進。 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ 負數：學習者有能力視它們為整數環的子集，可視為物化的一個符號。 ◆ 函數：物化則可保證精確的解「未知數」是函數（微分、函數方程式、參數方程式）的方程式，有能力談論函數中不同過程的一般性質。最後理解運算不是函數序對數的集合的必備性質。

資料來源：指數函數教學活動設計的研究（47-48），楊清海，2002，國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文，臺北市。

Dreyfus 和 Eisenberg (1982) 建議學生在首次學到函數概念時，教師應根據學生直觀之心理順序的知識背景進行教學，以促進學生對函數概念的理解。

吳玖瑤（2001）在其研究中指出教學對高中生學習函數概念的影響，發現教學對學生建立函數概念所提供的幫助有：1.直接由函數的定義傳達函數概

念；2.藉由函數圖形的正例與非例，提供學生修正基模的機會；3.課本提供不同的函數表徵，幫助學生瞭解函數的定義；4.提供許多不同的函數讓學生逐漸抽象出函數的概念。經由高一上學期的教學，學生概念的層次改變情形是大部分的學生通過內化的階層的要求，且自內化層次到壓縮層次的幫助最大，但只有極少部分的學生達到物化。

二、學生在學習多項函數及多項方程式中可能有的迷思概念與學習困難

江南青（1984）表示教師不只要接受學生的正確答案，同時更不能忽略錯誤的答案，因為學生在學習過程中所產生的錯誤型態，都是教師進行教學診斷的重要資料。針對學生在多項函數及多項方程式中可能有的迷思概念，有一些研究者提出他們的看法。

葉明達（2000）探討國內高中生最常下的函數定義與函數概念有關的迷思概念時，發現高中生多將函數定義為集合的對應，並強調元素一對一與多對一的特性；而迷思概念主要有：函數關係是一個一定可以列出關係式的對應關係；函數關係就是兩堆數字的關係；函數一定要有規律；對應域是值域的一部分；函數圖形是平滑的、連續的，有缺口的就不是函數。他認為高中生對合成函數的函數值會因誤認自變數一定是 x ，或因代換變數符號混淆不清而發生錯誤。

Markovits（1988）的研究指出學生對定義域與值域方面的學習有困難，學生對指出圖形表徵中定義域與值域感到困難，而表徵之間的轉換，代數轉換到圖形會比圖形轉換到代數容易。

Markovits、Eylon 和 Bruckheimer（1986）研究九年級（14~15 歲）且已修過函數相關課程的學生對函數概念的理解，發現學生遭遇到以下的學習困難：

1. 在不考慮問題的特殊本質下，三種函數：常數函數、分段函數（piecewise function）和以離散點表徵的函數對學生來說是困難的。
2. 學生常忽略定義域和值域。
3. 不論式子或圖形表徵，學生「原像」和「像」的概念僅有部分的理解。
4. 學生所舉的函數例子都侷限在式子和圖形表徵，尤其是式子表徵。
5. 從圖形到式子表徵之轉換比式子到圖形表徵之轉換要來得困難。
6. 所舉的函數例子有傾向線性關係的現象。

王婷瑩（2004）提及在多項式除法原理的教學活動中，文字符號與所代表概念之連結影響思維的啓動與轉化。此外，一般化的語言或式子不一定能使思維啓動、轉化，如：「多項無法比較大小」、「多項式要比較的是次數」，這樣的

傳達只有口頭的語言陳述，沒有提供可豐富學生知覺、表象的例子，難以使學生聯想並轉化概念。教師對學生的提問、同學之間的討論、學生的自行練習皆有助於思維的轉化。

傳統教學中，學生在學習線性函數及解二次方程式之後，才進行二次函數的學習。引自林星秀（2001）的研究，根據 Zaslavsky (1997) 發現，學生在學習二次函數時最常發生的學習阻礙有：

1. 以視覺所看到的圖形解釋幾何圖形：

學生只考慮到函數中可以看到的圖形部分，而未考慮到所呈現的圖形只是函數圖形「原像」的一部分；依視覺觀察，錯認二次函數的圖形有兩條垂直的漸近線。

2. 二次函數與二次方程式關係的錯誤類推：

與所學之二次方程式聯想，混淆方程式與函數的不同。如： $y = x^2 + 2x + 1$ 和 $y = 2x^2 + 4x + 2$ 這二個二次函數，學生可能因其係數有著同倍數的對應關係，因此誤認這二個函數為相同的函數。

3. 二次函數與線型函數關係的錯誤類推：

由於在線型函數中任三點會共線，且直線斜率與函數中的領導係數有關，而當學生將二次函數的圖形，也錯誤類推，以拋物線上二點所估計的斜率來估計二次函數的領導係數。

4. 不了解二次函數的代數形式可能會轉變：

面對二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ，學生可能有這樣的錯誤概念，認為只要 b, c 參數為 0 時，皆不屬於二次函數，而無法有效地應用二次函數的概念。

綜合各學者之闡述，研究者了解高中學生在學習多項函數及多項方程式中可能會有一些迷思概念與學習困難：

1. 就時代背景，高中生多將函數定義為集合的對應。
2. 學習多項函數的經驗，會使他們產生一些錯覺，如：所有函數一定要有規律；函數圖形都是平滑的、連續的，有缺口的就不是函數。
3. 學生的函數舉例都侷限在代數和圖形表徵，尤其是代數表徵，甚至於是傾向於線性關係的例子。
4. 表徵之間的轉換，代數轉換到圖形會比圖形轉換到代數容易。
5. 對於圖形表徵，學生可能只注意到眼前的圖像，而未能完全理解多項函數的原像。

6. 對於代數表徵，學生可能只注意到自己代的式子，而未能注意多項函數中的每組對應。
7. 觀察代數表徵和圖形表徵的關係時，學生可能有不當的錯誤類推，如：函數係數與圖形變化的關係，學生可能取實質上毫不相關的兩個變因來比較。一旦了解學生在學習多項函數及多項方程式中可能有的迷思概念與學習困難，教師越能明瞭學生在進行教學活動時可能遭遇的困境較能診斷學生錯誤的因素，亦能適時給予學生指引。

三、應用科技於多項函數及多項方程式的教學

函數是中學數學極為重要的內容，如：數、多項式、方程式、不等式、數列、極限、導數與微分等內容都與函數息息相關，同時擴及至三角、解析幾何，甚至是內容豐富的應用性問題，而跨學科的綜合應用亦是函數的鮮明特徵。所以，學好函數是學好數學的關鍵。然而函數是學生所接觸到的第一個研究變數之間關係的數學基本概念，部分學生無法很好地以自身知識背景來建構這一個抽象的概念，得到深刻的理解。函數圖形是函數關係的一種直觀、具體形象的表示，函數圖形對函數的概念與性質的理解扮演著很重要的角色，但由於作圖很麻煩、不方便，甚至不可能作出，從而學生很難對函數概念有深刻理解。

Tall和Thomas (1991) 提出一個假設：「一旦學生無法了解概念的意義時，他們會將這個難題隱藏起來，並且藉由一些慣常性活動來得到正確答案、獲得認可。」他們藉由研究來驗證這個假設，此研究是要學生在學習代數課題時利用「動態代數模組」(Dynamic Algebra Module)來達到提升多面向思考的目標，而研究所得的結論，發現電腦似乎能提升學生多面向思考的能力，讓學生更能跳脫例行性的活動，能以更勇於嘗試的想法來解題。

Nickson (2000) 表示對於在教授代數時利用科技有許多爭議，然而證據顯示利用科技是有效的，它能幫助學生看到許多不同的過程，並且對於這個課題有較靈活的看法，可用在將文字題模式化，以及做出許多類型的函數圖形。

楊清泉(2006)認為圖形計算器的出現可以幫助學生很好地學習函數知識，且其在函數學習中有三大優勢：

1. 利用圖形計算器有利於加深對函數知識的理解，挖掘函數知識蘊涵的重要思想方法，領悟數學的本質。
2. 利用圖形計算器有利於掌握函數知識的重點・突破函數知識的難點，構建完整的函數知識體系。

3. 利用圖形計算器有利於解決函數型實際應用問題，逐步培養科學研究的態度和意識。

蔡震雄（2006）以實際生活熟悉的物理問題－自由落體為例子，如圖 2-3-2 所示，利用圖形計算器輸入數據，再畫出函數圖形並迴歸分析是何種函數，進一步利用函數迴歸功能確定相應的係數，整個過程利用圖形計算器來輔助學生將問題轉化而建構出二次函數數學模型。數學建模的操作程序如圖 2-3-3 所示，可以看出培養學生運用數學建模解決實際問題的能力，關鍵在於把實際問題抽象為數學問題，經過觀察分析、提煉出實際問題的數學模型，再將數學模型納入某知識系統去處理。學生藉由 CAS 的輔助學習，培養他們的數學思想，且提高了他們的資訊素養。而使用 CAS 的過程中，學生能夠方便、快捷地建立函數模型，續而增進他們利用數學解決生活實際問題的能力，從中亦體會數學的應用價值和數學魅力，得到成功的喜悅，進一步建立學好數學的信心和探索數學的興趣。

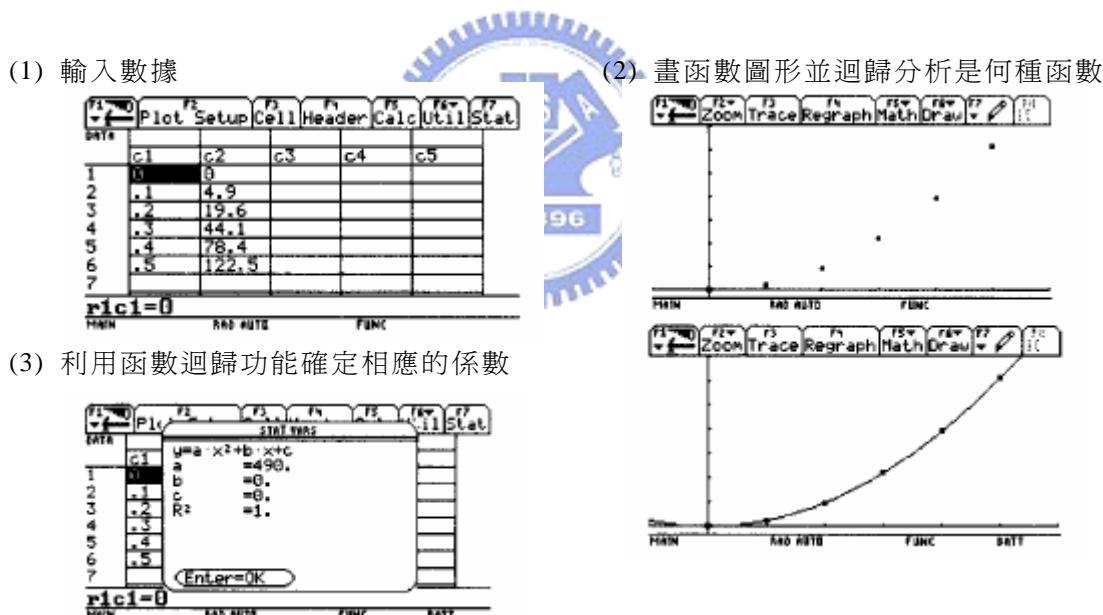


圖 2-3-2 自由落體運動的函數建模

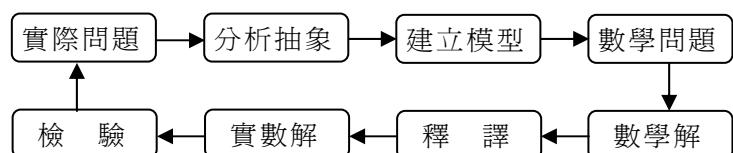


圖 2-3-3 數學建模的操作程序

林保平（1986）提到：在函數及其圖形性質的教學中，通常都須經由描點畫圖來，比較說明圖形與圖形間的異同及函數中係數對圖形的影響。有些函數，計算困難不易求值；有些函數，函數值不是整數，描點困難；比較兩個函數圖形也不太容易。而利用微電腦的快速精準的畫圖工作，學生能夠便利地觀察比較函數圖形的形狀、位置、圖形的平移、疊合及其與函數係數的關係，並探究其原因，解釋其結果。林保平（1986）表示在教學時，教師可依課程內容，設計一些循序發展的問題發給學生，由教師依問題之次序，配以適當的問答演示給學生看（只需要一部電腦）；或將學生分組，分發預先準備的檔案，讓學生自行依問題的次序利用電腦畫圖、研究圖形的形狀位置、回答問題，而教師從旁指導，然後由各組交換分享學習的成果（需要多部電腦）。而關於二次函數 $y = A(x - B)^2 + C$ ，他給予以下的實驗流程建議：

1. 試就不同的 A 值，畫出 $y = Ax^2$ 的圖形，並比較說明 A 值對圖形的影響。
2. 試就不同的 B 值，畫出 $y = (x - B)^2$ 的圖形，並比較說明 B 值對圖形的影響。
同樣再觀察 C 對 $y = x^2 + C$ 圖形的影響。
(前述二題，希望學生經由程式繪圖，發現 A 、 B 、 C 值與拋物線圖形的開口大小、開口的方向、圖形的水平鉛直位移有關。)
3. 對不同的 A 、 B 、 C 值，觀察 $y = A(x - B)^2 + C$ 的圖形與 $y = x^2$ 圖形的關係。
(本題希望學生整體地看係數與圖形的關係，並了解 A 、 B 、 C 的值對圖形並沒有交叉的影響。)
4. 是否所有的二次函數均可化為 $y = A(x - B)^2 + C$ 的形式？
5. 若在式子 $y = A(x - B)^2 + C$ 中，令 $y - C = y'$ ， $x - B = x'$ ，原式可化為怎樣的方程式？
(教師可趁此時介紹平移的概念，引導學生注意到平移的功能。欲研究二次函數圖形的性質，只須考慮 $y = Ax^2$ 形式之二次圖形即可。)
6. 課本上，我們所見拋物線均為開口向上或向下，若有拋物線開口向左或向右，它們是函數圖形嗎？它們的方程式應如何？
(教師可提示學生可利用軟體，手動操作，將圖形旋轉 90 度來觀察。)

應用科技於教學，使資訊科技能夠成為學生良好的數學學習輔助工具。然而，由這些文獻探究，研究者對課程設計有一些想法。關於數學軟體 DERIVE 應用於高中學生學習多項式的概念，研究者的教學活動設計將以「多項函數的圖形」及「多項方程式」為單元主題。

「多項函數的圖形」的部分，除了讓學生知道自變數與應變數的對應關係，亦希望能幫助學生掌握函數的變化趨勢。活動安排將由常數函數著手，循序漸進地接觸至多次函數的範圍。活動開始時會導引學生利用現有的概念寫出函數的意義、舉例、寫出幾組對應、並利用描點畫出函數圖形，續而利用 DERIVE 來驗證結果。此外，利用 DERIVE 快速精準的畫圖工作，讓學生便利地觀察比較函數圖形的形狀、位置，而學習單中亦設計循序發展的問題，安排函數係數改變對函數圖形改變之影響的觀察，讓學生經由操作、觀察、追蹤、探索去作概念連結，並寫下自己的推論。另外，研究者亦將設計進階問題，讓學生挑戰課本罕見的函數問題，以觀察學生代數表徵和圖形表徵之間的連結代換。

「多項方程式」的部分由應用問題開始，希望藉由 DERIVE 讓學生依循自己的想法解決實際應用問題，逐步培養學生科學研究的態度。另外，研究者設計利用 DERIVE 來實例驗證代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理，期待藉由電腦輔助，學生可以自己探索傳統教室中不可能拿來佐證的實例。





第三章 研究方法

本研究乃是將數學軟體 DERIVE 應用於高中數學多項式單元的教學研究；本章將說明本研究之研究設計與方法，全章共分為五節：第一節主要描述本研究的研究架構和研究方法，第二節介紹研究對象及研究者的角色，第三節說明本研究所使用之相關工具，第四節說明整個研究之流程，第五節為資料分析。

第一節 研究架構和研究方法

本研究採行動研究的方式，以「多項函數的圖形」及「多項方程式」為單元主題，探究數學軟體 DERIVE 應用於高中數學教學之可能性。

選擇以「行動研究」的模式來進行研究，乃在於此研究法兼具行動和反思的學習歷程，是一種由實務工作者在社會情境中所主導的自我反思的方法，並以解決工作情境當中特定的實際問題為導向，關注研究結果的立即性與即時性，強調研究與行動的結合及循環檢證，以協助實務工作者從工作過程中進行學習。因此，本研究之主要研究架構如圖 3-1-1 所示，重視實驗實施時之即時問題及反思後的回饋，立即修正調整出較合適之教學活動。

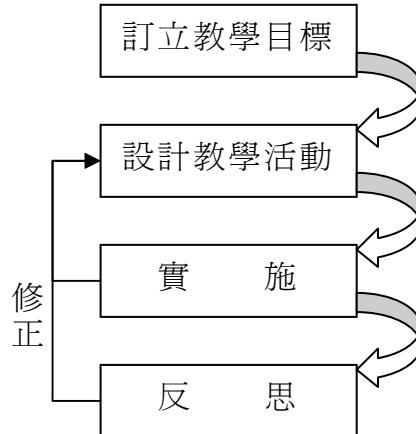


圖 3-1-1 研究架構

由於國內尚未有將 DERIVE 應用於數學教學之文獻資料，而電腦代數系統（Computer Algebra System，簡稱 CAS）運用於數學教學的經驗大多用於高等教育，鮮少用於中等教育，故本研究以行動研究的形式，由研究者於學校使用之教科書中挑選適合實施 DERIVE 輔助教學的單元作為研究的教學內容，並著手設計教學活動，利用 CAS 數學軟體 DERIVE 的長處來輔助教學。

本研究配合 94 學年度教育部審定高級中學翰林版數學教科書第一冊第四章多項式的內容，設計「多項函數的圖形」及「多項方程式」二個單元的教學活動，用以探討高一學生透過 DERIVE 輔助進行多項式教學活動時之概念的改變情形，並了解學生在經過 DERIVE 輔助學習活動後之學習成效和其學習態度的改變，以及對此試探性教學活動的看法與回饋。實驗階段中的教學活動採分組分次進行。除了針對每組在教學過程中所發生之即時問題做一即時性調整，研究者在每組教學活動結束後進行反思回饋，依研究對象的學習狀況來調整修正教學活動之設計，做為下一組的教學實施之依據。在四個小組的教學實驗後，逐次地修正與調整教學活動，使教學模式能較佳化，在未來可作為大班教學的參考。

在教學活動中，研究者兼具教師的角色，主要引導教學活動之進行，當學生遭遇數學概念之相關問題時，以開放性之問答來協助學生進行觀念澄清與進一步探究，若有電腦操作上的問題，在學生無力解決時才會給予適時之指引。教學活動進行的同時，架設 DV 攝影機拍攝教學過程，並利用電腦軟體記錄研究對象使用電腦時之操作過程，加上研究者在教學中的觀察及與學生之教學訪談，來完成教師教學日誌的撰寫。教學活動結束後，教學以既定的半結構式訪談 8 名研究對象，作成訪談紀錄。另外，搜集相關資料如：學習背景調查表、學習成就測驗前後測試題、教學活動學習單。整理上列資料加以分析，評估了解學生在經過 DERIVE 輔助學習活動後之學習成效和其學習態度的改變。

在教學活動進行前，為使研究對象認識了解 DERIVE 的功能及操作，研究者施行二次共計 110 分鐘的電腦軟體教學課程，全程記錄教學過程及研究對象使用電腦的情形，依此可了解高中生對 DERIVE 的接受度及熟悉度，並觀察研究對象使用 DERIVE 的狀況。此外，研究者在實驗過程中的教學準備、實施、反思等心路歷程與成長亦將在本研究中呈現。

第二節 研究對象

本研究最初的想法是希望找二個班級來比較以 DERIVE 輔助高中數學教學的成效，但考量教學活動為時長達 7 小時，在校教師恐有教學進度之壓力，學生亦有課業繁重之虞，且實驗學校高中部 27 個班共用一間電腦教室，白天借用電腦教室不易，並且顧及軟體使用版權的問題，因此，研究者捨棄大班教學的構想，僅以少數學生作試探性教學。

研究對象為 8 名台北縣某完全中學高中一年級普通班學生，為使研究方便記錄與描述，並維護研究對象之隱私權，研究中將以阿斌、萱萱、綾綾、阿全、小真、小琳、小穎、欣欣來代表 8 名研究對象。研究對象來自研究者所任教之高一班級，來自 3 個不同的班級，主要是採自願方式來參與教學實驗，其中學生參加此次數學教學實驗的動機不乏為對此感到興趣、好奇，欲測試一下自己對數學的感覺，藉此機會來學習一些新事物；而部分同學覺得自己的成績不夠理想，所以想要藉此學習更多有關數學的概念。

表 3-2-1 為學生學習背景調查表中的資料，由九十四年國中學生基本學力測驗的結果顯示 8 名學生在入學時之綜合表現的差異並不會很大。關於資訊能力的部分，8 人皆會 Windows 作業系統的基本操作，並且常使用網路瀏覽、搜尋、收發郵件，也曾經使用電腦查資料、寫報告；雖然有部分同學曾經瀏覽過有關數學知識的網站，但在 8 名學生中卻鮮少有人利用數學網站內容來協助解決課堂上遇到的數學問題，更別說是接觸數學軟體，並利用它來解決數學問題。這次的教學實驗是這群學生第一次接觸 DERIVE，也是他們第一次使用數學軟體來協助解決課堂上遇到的數學問題。

從高一上學期數學成績的班級排名百分比中，可以看出阿斌、萱萱、綾綾、阿全 4 人的表現較佳，小穎、小真的表現中等，而小琳、欣欣在班上的成就較差。而實驗學校在高一上學期數學科第三次段考的範圍正是翰林版數學教科書第四章－以多項式為主題，以各班之平均成績為基準，上下 1 個標準差將所有學生分三群，則在多項式的範圍中，這次段考成績顯示阿斌和萱萱屬於高分群，綾綾、阿全、小真、小穎、欣欣屬於中分群，而小琳屬於低分群。雖然研究對象多為自願參與此次教學實驗，但在研究對象並不是集中於成績優異的學生，可以觀察不同成就表現的學生之學習成效和其學習態度的改變。

然而，對於所有的研究對象而言，使用數學軟體 DERIVE 來輔助學習是他們的第一次體驗，在教學活動進行前雖然針對軟體的使用與操作曾經進行二次

的電腦教學課程，但為降低研究對象個體可能因不熟稔軟體的操作而導致教學實驗的延宕，因此採取分組的方法，將學生兩兩分成一組，在小組的合作下可彌補軟體操作生疏之問題。此外，將學生分成四組後，依組別逐次進行教學活動，進行反思與回饋，逐次修正教學活動的設計，以找出使用 DERIVE 教學的可行性模式。

表 3-2-1 研究對象學習背景調查結果摘要表

	阿斌	萱萱	綾綾	阿全	小真	小琳	小穎	欣欣
國中基本學力測驗總分	220	226	225	228	222	220	223	224
國中基本學力測驗之 PR 值	80	82	82	83	81	80	81	81
高一上多項式單元之段考成績	85	75	69	57	52	29	49	44
所在班級的平均	50.5	50.5	50.5	50.9	50.9	50.9	50.9	54.8
所在班級的標準差	21.5	21.5	21.5	18.9	18.9	18.9	18.9	18
高一上學期數學成績之班級排名百分比	2%	10%	14%	26%	79%	93%	60%	95%
家中是否有電腦？	有	有	有	有	有	有	有	有
我所擁有之資訊能力：								
1. Windows 作業系統基本操作								
2. 資料備份、檔案管理之能力								
3. 文書處理 4. 影像處理								
5. 電腦繪圖 6. 電腦硬體組裝								
7. 電腦簡易維修								
8. 網路瀏覽及搜尋								
9. 電子郵件之使用 10. 其它								
我曾經利用電腦完成任務	沒有	作業	多樣	多樣	報告	報告	報告	多樣
是否曾瀏覽過有關數學知識的網站？	有	沒有	沒有	有	沒有	沒有	沒有	有
是否曾利用數學網站內容來協助解決課堂上遇到的數學問題？	沒有	沒有	有	沒有	沒有	沒有	沒有	沒有
是否接觸過有關數學的軟體？	沒有	沒有	沒有	有	沒有	沒有	沒有	沒有
是否曾利用數學軟體來協助解決課堂上遇到的數學問題？	沒有	沒有	沒有	有	沒有	沒有	沒有	沒有
前測結果之答對率	66%	56%	32%	34%	34%	26%	28%	15%

註：研究對象僅依班級座號排序

分組的依據主要來自學習成就測驗（如附件五，見第三節說明）之前測結果，此次測驗在高一下學期進行，學生以上學期學習得到的知識與經驗來答題，答題的敏銳度較上學期不佳，從前測結果的答對率可看出阿斌和萱萱較其他學生突出，擁有較高的答對率，而小琳、欣欣的答題狀況較不佳，此結果正好與上學期之數學成就吻合，而其他 4 人在此次的測驗結果相當。因此，研究者將答對率最高者和最低者分在同一組，答對率次高者和次低者分在同一組，以此類推。完成分組的工作，並將各組排序：

第一組為差異最大的異質組－阿斌、欣欣（來自不同班級）

第二組為差異次大的異質組－萱萱、小琳（來自不同班級）

第三組為同質組－小真、小穎（來自同一班級）

第四組為同質組－阿全、綾綾（來自不同班級）

優先考慮讓異質組先進行教學活動的原因乃是研究者希望能及早發現學生利用電腦輔助學習時所引發之即時問題及其差異，以做為修訂下一次教學活動之考量。此外，研究者亦會擔心來自不同班級所形成的小組是否會因默契不足而影響教學實驗，因此利用教學活動前的電腦教學課程讓小組先培養默契。

在本研究中，研究者同時扮演活動設計者、教學者的角色，教學活動進行的過程中是參與的觀察者，除了觀察記錄學生的學習過程、關於教學活動的反思回饋，教師在此間的成長與感想亦將記錄下來。



第三節 研究工具

關於教學環境，本研究有二個階段使用電腦設備，一為前測階段於實驗學校的電腦教室進行二次電腦軟體教學課程，一為實驗階段於教師辦公室使用電腦進行教學活動，每台電腦皆有 Windows XP 視窗軟體。在電腦教室的環境下進行電腦軟體教學課程，每個學生都可以自己使用一台電腦，教師藉由主控電腦的廣播系統示範操作方法，學生在看過老師的示範後，可自行操作演練，而座位的配置方便學生相互討論，而操作演練時教師亦可巡視觀察學生的操作情形，並給予適當的協助。於教師辦公室進行教學活動時，2 名學生共同使用一台電腦，由學生自主使用電腦，小組成員可以討論，而教師僅在必要時給予操作之協助。



圖 3-3-1 前測階段師生於電腦教室
進行電腦軟體教學課程



圖 3-3-2 實驗階段小組進行教學活
動的教學環境

根據研究目的，以下為探討本研究所使用之研究工具：

一、資訊軟體

(一) DERIVE

使用德州儀器 (Texas Instrument) 所開發的 CAS 數學軟體 DERIVE，顧及版權問題，因此教學實驗全程使用 DERIVETM 6.0 試用版。如同「電腦代數系統」之名，DERIVE 在處理代數問題具有強而有力的功能，可以處理代數變數、代數式、方程式、函數、向量和矩陣，亦能執行數值和符號（代數、三角學、微積分…等）的運算，而且可以使用數值方式繪製二維和三維的圖形。此外，DERIVE 這個數學軟體將常用的指令以視覺化的小圖示呈現，而許多功能亦以選單的方式呈現，不但讓初學者很容易上手，甚至容易操作使用。

(二) AniCam Pro 1.5

國內旭聯科技所開發的 AniCam Pro 1.5，是一套電腦教學影片錄製工具，內建螢幕動態擷取軟體，可以錄製螢幕上的影像，亦能同時錄製教學旁白。此外，尚有畫筆功能，可以隨時在錄製的影片中加上註解、標上重點或畫上輔助說明，加強教學的能力。AniCam 提供類似錄放影機的操作介面，操作方式簡單便利，亦提供壓縮精靈，讓使用者能一步一步將錄製的檔案壓縮成串流型式的影像格式。研究者利用此軟體來記錄學生電腦操作的動態過程，忠實捕捉學生操作電腦的情形。

二、學習背景調查表（詳見附件一）

為了觀察研究對象的學習背景對實驗過程及結果之可能影響，以問卷方式調查研究對象在國中基測所得之 PR 值，了解其參加此次數學實驗之動

機，並以半結構式之問答來了解研究對象之資訊能力、使用資訊之習慣，以及過往利用資訊來接觸數學知識、甚至是解決數學問題的經驗。

三、學習素材

(一) DERIVE 之操作手冊（詳見附件二）

為使研究對象能了解數學軟體 DERIVE 的使用方法，研究者在教學活動前進行二次 DERIVE 教學課程，並依課程需求二次編寫操作手冊來輔助教學。操作手冊的編寫主要是參考 DERIVE 原版軟體所附的原版英文操作手冊「Introduction to DERIVE 6」（Kutzler & Kokol-Voljc, 2003），由研究者和另一名研究者陳昱伶一同進行中文化的手冊撰寫，再依照實驗單元分別設計操作手冊。操作手冊內容主要包含「DERIVE 簡介」、「系統需求及 DERIVE 之啓動」、「DERIVE 之視窗說明」、「DERIVE 之操作實例」。在第一次教學課程「DERIVE 之初探」中，著重 DERIVE 之視窗說明、功能介紹、基本操作、及實例示範繪出多項函數的圖形及解多項方程式。而第二次教學課程「再探 DERIVE」所配合的操作手冊（詳見附件二）則新增以下操作實例：數學式輸入之基本操作、Expand 展開、Factor 因式分解及質因數分解、函數之定義與求值、Slider Bar 拉霸的製作與使用，以便利接續而來的教學活動能順利進行。

(二) 教學活動學習單、教學活動教案設計（詳見附件三、四）

本研究之教學活動以「多項函數的圖形」及「多項方程式」為單元主題，共計七個教學活動，除了最後一個活動「多項函數的 zero 與方程式的解」由教師直接講述，其他六個活動的進行皆有學習單來輔助。關於各單元之教學活動安排，如表 3-3-1 所列：

表 3-3-1 單元主題教學活動內容

單元主題	活動內容
單元一 多項函數的圖形	活動一 常數函數的圖形 活動二 一次函數的圖形 活動三 二次函數的圖形 活動四 多次函數的圖形
單元二 多項方程式	活動一 實係數多次多項方程式之求解 活動二 代數基本定理 & 實係數多項方程式虛根成對定理 活動三 多項函數的 zero 與方程式的解

- 單元一主要討論多項函數的圖形，除了讓學生知道自變數與應變數的對應關係，亦希望能幫助學生掌握函數的變化趨勢。四個活動的安排由常數函數著手，依序進而接觸多次函數的範圍。活動開始時會引導學生利用現有的概念寫出函數的意義、舉例、寫出幾組對應、並畫出函數圖形，續而利用 DERIVE 來驗證結果。此外，在 DERIVE 中可將代數視窗和二維畫圖視窗同時呈現，而學習單中亦安排函數係數改變對函數圖形改變之影響的觀察，讓學生經由操作、觀察、追蹤、探索去作概念連結，並寫下自己的推論，再進一步挑戰課本罕見的多次函數問題。
- 單元二的活動一由應用問題來看多項方程式，除了直接利用 DERIVE 來驗證學生所求之解，亦設計學生無法直接求解的問題，讓學生可用依循自己的想法利用 DERIVE 來幫忙求解。而活動二利用 DERIVE 讓學生可以更相信代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理，甚至可以藉由電腦輔助，學生自己探索傳統教室中不可能拿來佐證的實例。

四、學習成就測驗前、後測試題（詳見附件五、六）

研究對象於高一上已學習第一冊第四章多項式的內容，接觸過「多項函數的圖形」及「多項方程式」。為了瞭解學生於本研究教學活動進行前及進行後之差異性，設計學習成就試題，試題內容部分來自高一上學期數學科第三次段考試題（段考範圍恰以多項式為主題），配合本研究欲達成之教學目標，設計學習成就測驗。測驗試題有 17 題，共計 20 格，每格採 5 分計算，測驗時間為 1 小時，所評量之概念，如表 3-3-2 所列：

表 3-3-2 學習成就測驗前、後測試題評量概念分析表

題號	題目	評量概念
1	下列各式中，「哪些」是 x 的多項式？_____ (A) $3x+2+\frac{1}{x}$ (B) $2\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x-4$ (C) $5x^2y-\frac{x}{y}+3$ (D) 2^{x^2+x+1} (E) $x^2+ x-3 $	了解什麼是多項式（先備知識）
2	多項式 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ ，「哪些」是 $f(x)$ 的因式？_____ (A) $2x-1$ (B) $2x+1$ (C) $x-1$ (D) $2x-3$ (E) $3x-3$	能判別多項式之因式（先備知識）
3	設 a, b 為實數，多項式 $a(3x^3+2x^2)+b(x^3-5x)+2x^3-6x^2+bx-10$ 為一元一次多項式，則 $a+b=$ _____	多項式之同類項合併及對多項式次數之了解。（先備知識）
4	已知多項式 $3x^3+ax^2+bx+42$ 能被 x^2-x-6 整除，則 $a=$ _____	多項式的整除（先備知識）

（續後頁）

表 3-3-2 學習成就測驗前、後測試題評量概念分析表 (續前頁)

題號	題目	評量概念
5	二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形如下圖所示，則下列各式何者成立？ (A) $a < 0$ (B) $b < 0$ (C) $c < 0$ (D) $a + b + c < 0$ (E) $a - b + c < 0$ (F) $9a - 3b + c < 0$ 。	二次函數圖形與函數係數之關係，由已知圖切入。
6	如圖，已知三個二次函數， $\Gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ ， $\Gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ ， $\Gamma_3 : y = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$ ，則下列何者正確？ (A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_1 < a_2 < a_3$ (C) $b_1 < b_2 < b_3$ (D) $c_1 < c_2 < c_3$ 。	二次函數圖形之開口大小與函數係數之關係比較
7	函數 $y = ax + b$ ， $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐標系中的圖形有可能是	一次函數及二次函數之定義及其圖形關係
	(A)  (B)  (C)  (D)  。	
8	將二次函數 $y = x^2 - 2x + 3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數為_____。	給定函數之一般式，測驗平移對函數一般式之影響
9	二次函數 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 與常數函數 $f(x) = 3$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB} =$ _____。	了解圖形交點之意義。此外，若能了解圖形之特性，可較容易求得 \overline{AB} 的長度。
10	a, b 為實數，且二次函數 $y = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ 在 $x = 3$ 時有最小值 8，則實數 $a =$ _____。	知道極值與二次函數之關係
11(1)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x - 1)^2$ ，將 Γ 依水平方向右移，則： (1) 第一次經過點 $(4, 4)$ 時的拋物線其方程式為_____。	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之問題解決能力。
11(2)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x - 1)^2$ ，則： (2) 將 Γ 依直線 $y = x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 $(4, 15)$ 時其拋物線方程式為_____。	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之問題解決能力。較前題之不同處在於平移方向不是單一的上下左右平移。
11(3)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x - 1)^2$ ，則： (3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線正好通過點 $(4, -4)$ 時，則此時新拋物線的方程式為_____。	由頂點及已知點來求得拋物方程式
12	方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的實根個數，則下列何者正確？ (A) 有五個實根 (B) 有四個實根 (C) 有三個實根 (D) 有兩個實根 (E) 有一個實根。	代數基本定理、虛根成對定理、方程式與函數圖形之關係
13	已知 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 有一根為 $-2 + 5i$ ，則其他根為_____。	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解
14	已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 之一根為 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，則其解為_____。	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解，藉此觀察學生解多次方程式之可能性。
15	若 $1 + i$ 為 $x^2 - kx - 1 = 0$ 之一根，則 $k =$ _____。	實係數多項方程式虛根成對定理、複數之加減乘除運算
16	在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗戶裡，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出_____公尺。	能以二次函數來協助解決應用問題
17	試作 $y = x^3$ 之圖形， (1) 並利用平移的概念描出 $y = (x + 2)^3 - 1$ 的圖形。 (2)	函數作圖及平移概念

此份測驗曾請 3 位高三學生協助預試，利用午修 3 人在 40 分鐘內完成，表示對題目敘述毫無疑問，能切中學習目標，測驗學生對多項函數的圖形及多項方程之應用。

原則上，學習成就測驗前測試題和後測試題採用同一份考卷。為避免前後測日期過近，導致學生有背答案之虞，研究者於前測完成後立即回收考卷，且未即時公佈答案，相隔一個月的時間，以同份試卷進行後測試題。不過，於前測結束後，研究者發現第 16 題的題目有缺失，輔助解題的圖形中，數字的位置可能會影響學生對圖形之判讀而忽略題意，因此將輔助圖示略加修正，如圖 3-3-3。

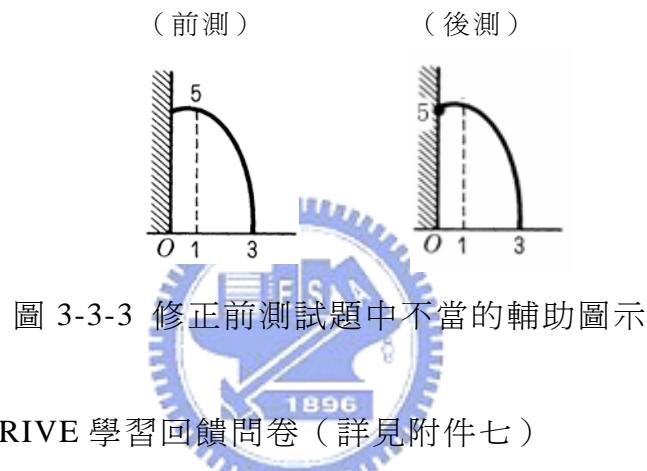


圖 3-3-3 修正前測試題中不當的輔助圖示

五、學生使用 DERIVE 學習回饋問卷（詳見附件七）

為了了解研究對象透過 DERIVE 軟體學習多項函數之後，對多項函數 DERIVE 課程的意見及學習態度，設計此份問卷。部分問題以 Likert Scale 的五點量表的型式詢問研究對象的感受，並提示研究對象可以以文字補充意見；部分問題以開放性問答讓研究對象可以完整地以自己的言語敘述自己經過這幾次教學活動的心得與感想。此份回饋問卷的作用亦讓研究對象有心理準備，明瞭未來訪談時研究者可能會問的問題，讓研究對象可以整理思緒，真實表達心中想說的感想及意見。

六、後測階段學生訪談計劃及大綱（詳見附件八）

教學活動結束後，於後測階段進行研究對象個人訪談。每次僅訪談 1 名研究對象，時間約 30 分，告知訪談目的純粹是為了了解他們個人的看法，與成績無關，鼓勵研究對象暢所欲言、輕鬆自由發表看法。訪談前讓研究對象知道研究者將使用錄音機輔助錄音以協助研究之進行，並在研究對象同意下進行錄音訪談。訪談後，研究者將訪談內容以逐字稿呈現。

第四節 研究流程

本研究自民國 2005 年 9 月開始進行資料的收集以及對軟體 DERIVE 的實務操作，與指導教授討論後，決定由學校課本中挑選適合實施資訊融入教學的單元為本研究的研究主題。實施步驟可分為準備階段、前測階段、實驗階段、後測階段、資料分析與處理、撰寫研究報告等階段，研究流程先簡列於表 3-4-1，並於表後詳細說明各階段工作。

表 3-4-1 研究流程

流程圖	工作說明
<p style="text-align: center;">準備階段</p>	<p>1. 形成研究問題。 2. 文獻資料之搜集與探討。 3. 確定研究主題並設計教學活動。 4. 編寫 DERIVE 之操作手冊。 5. 編寫課程學習單及教案。 6. 編製學習成就測驗前、後測試題。 7. 編製學習背景調查表。 8. 編製學生使用 DERIVE 學習回饋問卷。 9. 編寫實驗後之後測階段學生訪談計劃及大綱。 10. 選定研究對象。</p>
<p style="text-align: center;">前測階段</p>	<p>1. 實施學習背景調查表。 2. 實施學習成就測驗前測。 (2006.06.14) 3. 進行 50 分鐘教學課程 – 「 DERIVE 之初探 」。 (2006.06.14) 4. 利用前測結果將研究對象進行分組。 5. 進行 1 小時教學課程 – 「 再探 DERIVE 」。 (2006.07.13)</p>
<p style="text-align: center;">實驗階段</p>	<p>1. 分組進行教學活動，逐次修正教學流程。 (兩個主題單元，共計七個教學活動)。 第一組 (2006.07.14) 第二組 (2006.07.18) 第三組 (2006.07.19) 第四組 (2006.07.20) 2. 教學觀察及訪談。 3. 撰寫教學日誌。</p>

(繼後頁)

表 3-4-1 研究流程 (續前頁)

流程圖	工作說明
<pre> graph TD A[後測階段] --> B[資料分析與處理] B --> C[撰寫研究報告] </pre>	<p>1. 實施學習成就測驗後測 (2006.07.26)。 2. 實施學生使用 DERIVE 學習回饋問卷。 3. 研究對象個人訪談。</p>
	<p>1. 研究資料之收集與整理。 2. 資料分析。</p>
	<p>1. 撰寫研究報告。</p>

一、準備階段：

在準備階段，研究者於 2005 年 9 月起以將電腦代數系統 DERIVE 融入高中數學教育為大前提，開始閱讀相關文獻，搜集相關資料，熟悉數學軟體 DERIVE 的實務操作，在指導教授的指導下，經討論後確定研究主題，配合高中課程第一冊第四章「多項式」的範圍，以「多項函數的圖形」及「多項方程式」為單元主題來開發教學活動。此階段主要工作如下：

- (一) 開始閱讀相關文獻、搜集相關資料、探究各研究理論。
- (二) 研究工具的編製

根據本研究的需要來編製研究工具，包含 1.DERIVE 之操作手冊；2.「多項函數的圖形」和「多項方程式」之教學活動及學習單；3.學習成就測驗前、後測試題；4.學習背景調查表。

- (三) 研究工具編製完成後，與資深教師、研究生討論修正，再與指導教授討論、修正、審核後完成。
- (四) 選定研究對象，以便實驗之進行。

二、前測階段：

於 2006 年 6 月起，當研究對象確定後，除了學習背景調查表由研究對象於前測實施前帶回以充分之時間填寫，其餘乃是利用共有之課餘時間來實施前測及 DERIVE 教學活動。此階段主要工作如下：

(一) 實施學習背景調查表：

在確定研究對象後，於 2006 年 6 月 12 日將學習背景調查表由研究對象帶回家裡以充分的時間填寫，並在學習成就測驗前測實施當天繳回。

(二) 實施學習成就測驗前測：

2006 年 6 月 14 日實施學習成就測驗前測，8 名研究對象同時施測，施測時間為 1 小時。研究者於施測結束時收齊所有試卷，未向學生公佈試題之答案。

(三) 進行 50 分鐘教學課程－「DERIVE 之初探」：

由於研究對象未曾有使用 DERIVE 的經驗，為了使實驗階段之教學活動能順利進行，進行 50 分鐘數學軟體教學課程－「DERIVE 之初探」。此課程實施於 2006 年 6 月 14 日前測施測之後，8 名研究對象在電腦教室每人使用一台電腦，並以 DERIVE 操作手冊第一版來輔助操作。此次為研究對象第一次接觸 DERIVE，研究者利用電腦廣播系統，使其了解 DERIVE 之介面、功能及基本操作，並給予研究對象練習操作的時間。過程中除了利用 DV 拍攝教學過程，並利用電腦軟體 AniCam Pro 1.5 記錄研究對象使用電腦時之操作過程。

(四) 利用前測結果將研究對象進行分組：

考慮研究對象對屬於電腦代數系統的數學軟體接觸機會很少，故研究者以分組的模式補強學生對電腦操作的能力。利用前測的答題結果來進行分組，將 8 名研究對象兩兩分成一組。

(五) 分組進行 1 小時教學課程－「再探 DERIVE」：

此課程於 2006 年 7 月 13 日實施，在教學活動進行前安排 1 小時教學課程－「再探 DERIVE」，讓 8 名研究對象能再次熟悉 DERIVE 之實務操作。地點同樣安排在電腦教室，每人使用一台電腦，然而此次座位乃是依組別來安排，讓組員之間培養默契。教學課程以 DERIVE 操作手冊第二版為輔，研究者利用電腦廣播系統，使研究對象熟悉 DERIVE 之介面、功能及基本操作，並針對接下來的單元主題教學活動中所使用之新增功能，讓研究對象能先行了解及練習操作。過程中除了利用 DV 拍攝教學過程，並利用電腦軟體 AniCam Pro 1.5 記錄研究對象使用電腦時之操作過程。

三、實驗階段：

(一) 教學活動之進行：

1. 在進行教學活動之同時，架設一台 DV 攝影機全程記錄教學過程中師生或同學之間的互動，利用電腦軟體 AniCam Pro 1.5 記錄研究對象使用電腦時之操作過程，搜集研究對象使用之學習單，作為評估教學成效的依據指標。
2. 教學活動採分組進行，一次僅一組參與教學活動，利用暑假的時間，直接使用教師辦公室的電腦，一人一機，過程中同組的同學可互相討論。教學活動使用「多項函數的圖形」和「多項方程式」之學習單，研究者提示研究對象寫下答案或自己的想法。利用一天的時間完成這二個單元，共計七個主題活動。
3. 四組的教學活動分四天來進行，第一組於 2006 年 7 月 14 日完成，第二組於 2006 年 7 月 18 日完成，第三組於 2006 年 7 月 19 日完成，第四組於 2006 年 7 月 20 日完成。研究者利用前一組的教學經驗逐次修正教學流程。
4. 教學過程中除了利用 DV 拍攝教學過程及研究對象之間的互動，並利用電腦軟體 AniCam Pro 1.5 記錄小組使用電腦時之操作過程。逐次修正教學流程。

(二) 教學觀察及訪談：

教學活動進行時，研究者就特殊狀況做即時紀錄；而教學錄影帶在轉成電子檔案後，與電腦操作紀錄檔同時分析，依此撰寫研究者的教師教學日誌。

(三) 撰寫教學日誌。

四、後測階段：

(一) 實施學習成就測驗後測：

在完成教學活動後，於 2006 年 7 月 26 日實施學習成就測驗後測，8 名研究對象同時施測，施測時間為 1 小時。研究者於施測結束時收齊所有試卷，以作為評量研究對象學習成效之依據。

(二) 實施學生使用 DERIVE 學習回饋問卷。

(三) 教學單元結束後，以既定的半結構式訪談大綱訪談研究對象，作成訪談紀錄。每次僅訪談 1 名研究對象，時間約 30 分，告知訪談目的純粹是為了了解他們個人的看法，與成績無關，鼓勵研究對象暢所欲言、輕鬆自由發

表看法。訪談前讓研究對象知道研究者將使用錄音機輔助錄音以協助研究之進行，並在研究對象同意下進行錄音訪談。訪談後，研究者將訪談內容以逐字稿呈現。

五、資料分析與處理：

依據收集之錄影檔、電腦操作紀錄檔、學生問卷、教師教學日誌、訪談紀錄評估教學成效，整理各項資料進行分析研究。

六、撰寫研究報告：

根據資料整理與分析的結果，寫成研究報告。

第五節 資料之整理與分析

本研究是將數學軟體 DERIVE 應用於高中數學的教學研究。在教學活動進行前實施二次 DERIVE 教學課程，實驗階段中分組進行多項函數教學活動，配合學習單輔助學習。為周全教學之紀錄，以便觀察研究對象之學習歷程，研究者取得研究對象之同意，於教學活動進行時，以 DV 攝影機拍攝教學過程，並將影帶轉錄成 WMV 電腦檔案格式，全程記錄教學過程中師生或同學之間的互動，並聲明所有拍攝內容僅供本研究使用，用以發展未來 CAS 融入高中數學教學的可能性；同時，並利用電腦軟體記錄研究對象使用電腦時之操作過程。另外，在進行 DERIVE 教學課程和多項函數教學活動時，研究者就特殊狀況做即時紀錄；而教學錄影帶在轉成電子檔案後，與電腦操作紀錄檔同時分析，依此撰寫研究者的教師教學日誌。

活動過程中研究者亦蒐集研究對象所使用之相關資料：學習背景調查表、學習成就測驗前後測試卷、教學活動學習單、學生使用 DERIVE 學習回饋問卷。教學活動結束後，以既定的半結構式訪談大綱訪談 8 名研究對象，了解研究對象在教學實驗歷程中的學習狀況、感想與建議。訪談內容並以逐字稿的方式呈現。最後，整理以上各項資料進行分析研究，撰寫研究結果。

依據上述的研究架構，研究者所蒐集的資料如下所列，並將資料檔名以日期（2006 年 6 月 14 日以 060614 表示）、內容、研究對象之編序來建檔：

1. 學習背景調查表: «背景調查_阿斌»
2. DERIVE 教學課程錄影 WMV 檔: «060614_DERIVE 教學»
DERIVE 教學課程學生電腦操作紀錄檔: «060713_DERIVE 操作_綾綾»
3. 教學活動錄影 WMV 檔: «060714_單元一活動一_第一組»
教學活動學生電腦操作紀錄檔: «060718_單元一活動二操作_第二組»
教學活動學習單: «060719_單元一活動三_第三組小真»
4. 學習成就測驗前測試卷: «060614_前測_小琳»
學習成就測驗後測試卷: «060726_後測_萱萱»
5. 學生使用 DERIVE 學習回饋問卷: «回饋問卷_欣欣»
6. 個人訪談: «070115_訪談_阿全»
7. 教師教學日誌: «060720_教學日誌»

此外，經過觀察整個實驗流程所得到錄影 WMV 檔及電腦操作紀錄檔，研究者節錄部分內容於研究中討論，而檔案將以 WMV+檔案編號來建檔，並將其存檔於本研究論文所附的 CD 中。



第四章 研究結果與討論

本章分析使用 CAS 數學軟體 DERIVE 來進行「多項函數的圖形」及「多項方程式」這二個單元的教學活動後對學生學習成效和學習態度的影響。全章共分為三節，第一節整理與討論學生學習歷程；第二節將就研究對象前後測之結果、問卷和訪談的回饋，討論 DERIVE 教學對學生數學學習的成就和態度的影響；第三節為研究者本身在研究過程中的反省與成長。

第一節 學生學習歷程

整個教學實驗的流程中，學生歷經二次的數學軟體 DERIVE 教學課程和以「多項函數的圖形」和「多項方程式」為單元主題的教學活動。本節研究者觀察學生學習歷程，將以學生對 DERIVE 的初體驗、分組教學活動的歷程二大方向來討論。

一、學生對 DERIVE 的初體驗

由於研究對象未曾有使用 DERIVE 的經驗，為了使研究對象能了解數學軟體 DERIVE 的使用方法，並讓實驗階段之教學活動能順利進行，研究者在教學活動前進行二次 DERIVE 教學課程，並且以 DERIVE 操作手冊來輔助操作。第一次於 2006 年 6 月 14 日進行 50 分鐘 DERIVE 教學課程－「DERIVE 之初探」，8 名研究對象在電腦教室每人使用一台電腦，此次為研究對象第一次接觸 DERIVE，研究者利用電腦廣播系統，使其了解 DERIVE 之介面、功能及基本操作，以實例示範繪出多項函數的圖形及解多項方程式，並給予研究對象練習操作的時間。第二次於 2006 年 7 月 13 日進行 1 小時 DERIVE 教學課程－「再探 DERIVE」，讓 8 名研究對象能再次熟悉 DERIVE 之操作。地點同樣安排在電腦教室，每人使用一台電腦，然而此次座位乃是依組別來安排，讓組員之間培養默契。這次除了使研究對象熟悉 DERIVE 之介面、功能及基本操作，並新增以下操作實例：數學式輸入之基本操作、Expand 展開、Factor 因式分解及質因數分解、函數之定義與求值、拉霸（Slider Bar）的製作與使用，以便利接續而來的教學活動能順利進行。

研究對象具有基本的資訊能力，有部分同學曾經瀏覽過與數學知識相關的網站，但卻鮮少有人利用數學網站內容來協助解決課堂上遇到的數學問題，更別說是接觸數學軟體，並利用它來解決數學問題。此次的教學實驗是研究對象第一次接觸 CAS 數學軟體 DERIVE，也是他們第一次使用數學軟體來協助解決課堂上遇到的數學問題。

在這二次的 DERIVE 教學課程中，觀察學生活動及其在電腦上的操作情形，有一些令人感到雀躍的結果：

(一) 學生的專心投入學習

學生第一次接觸 DERIVE，甚至是第一次使用數學軟體，對新事物感到興趣，希望知道它有什麼功能，可以怎麼用。在電腦教學的過程中，以操作手冊為輔助，在教師廣播示範時能集中注意力、全神貫於觀看教師的動作，全程專心投入學習，了解並應用之。

原本會很擔心在電腦教室軟體教學會有些枯燥乏味，但同學的專心投入著實讓教師驚訝，或許是第一次接觸數學軟體，雖然學生不至於有極大的好奇心，但就好像是面對新鮮事物，想知道它到底有什麼功用。《060614_教學日誌》



圖 4-1-1 學生專心投入學習 DERIVE，並一起討論

(二) 顯示利用 DERIVE 來學習之長處

1. 輸入方便，容易上手

對高中生而言，當他們碰到較專業的軟體，總是需要時間練習才能上手。關於數學軟體，研究者在 1997 年首次接觸 Mathematica、2005 年首次接觸 Maple，對研究者而言，要熟悉這二種軟體要花一些時間才能上手，而使用軟體時需要熟悉指令與規則，甚至在大學時代研究者很熟悉 Mathematica，但如今多已不復記憶，需要重新再來過。當研究者接觸到 DERIVE 時，發現它有別於前述二種 CAS 軟體，相較之下，甚至對高中生來說都能很快學會，且容易上手。

使用 CAS 軟體，學生第一個就是要面對輸入的工作。在此，學生可以直觀輸入代數式，解決相關問題。例如當我們要輸入 $2x$ 這一項時，其他 CAS 軟體可能要以「 $2*x$ 」的型式輸入，而 DERIVE 除了可以用這個方法，也可以直接用「 $2x$ 」或「 $2\ x$ 」輸入；輸入「 $1/2$ 」則視窗將顯示「 $\frac{1}{2}$ 」，輸入「 x^2 」則視窗將顯示「 x^2 」，不但輸入很容易，而且電腦所呈現的表示法即是學生熟悉的表示法，學生很容易去察覺自己的輸入是否正確。

在做第一次的練習時，阿全很快地並且毫無障礙地自行輸入他的第一個式子

$$x^6+x^5+x^4+\frac{2}{\sqrt{2}} \text{。} \llbracket 060614_DERIVE\ 操作_阿全 \rrbracket$$

在練習的過程中，初始學生比較沒有方向去舉出例子來使用 DERIVE。在老師的引導下，希望學生能輸入 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求出其估計值，學生積極參與，每個人很快就完成動作。
 $\llbracket 060614_教學日誌 \rrbracket$

2. 節省計算時間、增加思考空間

DERIVE 幫助學生在學習過程中減少繁瑣的低層次紙筆運算，使學生有更多的時間用於數學思維的訓練，再經過自己的實驗、觀察、歸納、猜想、驗證，親身體驗知識的形成過程，因此，更容易去認識、理解和獲得抽象的數學概念及結論。例如：學生可以利用計算函數值及描點的方式去完成函數圖形，若要進一步觀察討論函數與函數圖形的性質，可能需要多個函數及函數圖形來輔助。利用 CAS 軟體來定義函數，除了可以節省運算函數值的時間，藉由電腦的精準地快速成圖，學生可以有較充裕的時間來探討函數與函數圖形的性質。

阿全：其實像數學軟體設計出來都是為了簡易計算。這麼講比較快～都是為了方便計算！不要說一個那麼複雜的方程式用手算，可能要算個好幾天還可能算錯，重點是還可能算錯。如果說交給電腦算，電腦對它來說，就算九個數字乘以九個數字的，它也不會覺得很難。

老師：我們把計算的部份留給它，但是怎麼操作它是我們的大腦來操控的對不對？

阿全：如何操作它或是讓它變得更好，就是我要如何把它設計到我要的你（電腦）都可以辦到。
 $\llbracket 070115_訪談_阿全 \rrbracket$

阿全在訪談中表示平時遇到複雜的方程式時，用手紙筆運算可能要花比較久的時間，而且可能在計算過程中產生錯誤而前功盡棄。但如果將複雜計算交給電腦，則學習者則只要著重於如何操作電腦得到自己想要的結果、如何利用

電腦來協助學習者觀察所欲觀察的現象；換句話說，節省人工計算可能耗費的時間，換取用來認識、理解和獲得抽象數學概念的空間。

3. 功能之視覺化有助於學生之探索

相較於其它 CAS 軟體，DERIVE 將常用的指令以視覺化的小圖示呈現，許多功能亦以選單的方式呈現。如此，除了讓學生容易上手，不用慢慢思考軟體指令和規則，故在操作使用上有很大便利之處；同時，DERIVE 的功能與指令以選單及小圖示的視覺化方式呈現，使得高中學生較有試驗動作的依據，亦讓學生較有心去做嘗試。從萱萱對 DERIVE 的初體驗中（詳見附件十一 WMV01，節錄自«060614_DERIVE 操作_萱萱»），可以看到萱萱在看過老師的示範後，嘗試給予函數 $y = x + 4$ 和 $y = x^2 - 2$ ，並繪製這兩個函數的圖形。過程中，除了代數視窗和二維畫圖視窗的切換，萱萱試驗工具列上的功能鍵，針對坐標系統做了拉近和放遠的動作，並做了定位觀察的動作；在畫出圖形後，以較熟練的手法來重複同樣的試驗與觀察。之後萱萱欲將二視窗並排，亦成功地從功能表中搜尋到關鍵處，完成視窗並排的動作。如果不是有這些能簡單完成動作的小圖示和選單，一般高中生在不熟悉軟體且面臨必須輸入指令的狀況時，他們可能會選擇放棄，也致使他們不會有更進一步的嘗試與探索。

4. 數形結合，使學生有機會去接觸課堂上少見的例子

CAS 數學軟體 DERIVE 建構了多重表徵的教學環境，使學生可以自己動手進行數學實驗，讓抽象的數學更為具體，靜態的數學也跟著動了起來。數與形的結合，使學生有機會去接觸課堂上少見的例子。同時，學生在自主學習的過程中，從發現規律到類比總結，加深對數學概念的理解和記憶。

老師：因為我們現在用 DERIVE 來幫我們解決多項函數的問題，老師設計了這樣的課程，你覺得老師講這樣的課程對你學習有沒有幫助？

阿全：這個學習的話是有一些，是有蠻大的幫助，因為我就可以說至少多認識一些東西，其它有關於數學的東西。就不會說只是知道一些死算或是怎麼樣的...硬算。因為像函數的話，它畫函數圖形也可以，因為它不是有一個叫什麼的，就是設定那個範圍，就是調那個範圍。

老師：就是我們說的拉霸對不對？

阿全：對，拉霸。你就可以去調那個。就是說，比如說我打出一個 x^3 ，我就可以算出說，如果 x^3 前面那個係數變動，那個圖形會怎麼變，我就可以知道啦。

老師：像以前老師在課堂上，老師可能畫一個圖形要畫很久，可是在那裡...

阿全：用 DERIVE 就不會很久！很快！

老師：你可以很快地去觀察，對不對？

阿全：對呀。«070115_訪談_阿全»

高一課程中接觸不多的三次函數及其圖形，在 DERIVE 的輔助下，阿全曾利用拉霸來觀察領導係數的改變對函數圖形的影響，也對此留下深刻的印象。

5. 激發學生的學習興趣

以 DERIVE 來輔助學習是學生的新經驗，除了對新鮮事物感到好奇心之外，藉由 DERIVE 的輔助經驗，學生明瞭利用它可以幫自己做概念的複習，也可以對數學概念有更深一層的接觸與了解，激發了學生對數學的學習興趣。

老師：那這樣的課程，能不能引發你學習數學的一些興趣？

阿全：是會有。因為我就可以對於像方程式那些，有比較深的瞭解，以後碰到方程式，沒問題我都瞭解，或是說，碰到我知道我哪時候又需要方程式，我就會去看那個軟體，我就複習得比較快。它去幫我複習，因為像有些地方，像說係數， X 是二次方那個係數在動的話，我就可以很快觀察到，我就不需要去找個筆記想，還要想，因為直接看的話就比較快。«070115_訪談_阿全»

當然，以 DERIVE 來輔助學習的時候，學生在操作上或是在概念理解的部分，也可能會遭遇一些困難：

1. 由於 DERIVE 沒有中文版，對於英文介面學生會非常戒慎恐懼。因此，中文化的輔助說明對學生來說是重要的。幸好在教學實驗前有進行這兩次的 DERIVE 電腦教學，且輔以中文化的操作手冊對各個功能加以介紹，並對實驗中可能會遭遇的情境賦予舉例說明，降低了學生對英文介面的恐懼。
2. 若學生的函數概念不夠好，則學生可能會在不恰當的畫圖視窗操作出不為老師所預期的結果。例如在代數視窗輸入一次函數 $y = x + 1$ ，教師預期的結果是學生成功地於二維畫圖視窗中畫出一條直線，但是學生若選擇以三維畫圖視窗來處理圖形時，則會得到一個平面的圖形，並非教師所預期得到之學習目標。同理，學生若在代數視窗誤輸一個三元一次方程式的話，那麼若以二維視窗來處理圖形，則 DERIVE 會顯示變數太多，無法作圖。來畫三維圖形。遇到學生覺得奇怪的狀況時，較具企圖心嘗試的學生會再進一步利用其他功能鍵試著解決問題，但數學概念不佳或自信不足的學生可能因不知道何處發生錯誤而停止繼續探索的行為。

阿全：像操作上的困難比較困難是說，要如何去轉換圖形與方程式，就是代數視窗那邊。

有時候心血來潮打一個代數，可能打的一個是 3D 的，然後那個代數視窗是平面的，然後你就要去想在哪裡？為什麼會這樣？然後再慢慢去解決。

老師：所以就是說，你在寫代數，然後再來你在看圖的時候，在這之間，就是你寫出來的東西不確定在哪邊，所以你要去找是這樣子嗎？

阿全：可是後面的話，就是多做幾次就很習慣，他讓我的感覺說不會很難操控，也許你第一次碰到會覺得很難，可是多試幾次就會發現到說，就會慢慢的愈來愈順手。

«070115_訪談_阿全»

3. 若是學生對 DERIVE 操作的熟練度不夠，可能誤取不恰當的表示式來進行學生想要做的動作。如圖 4-1-2 所示，學生如果想畫 $y = (x+1)(x+2)$ 的圖形，選取 $y = (x+1)(x+2)$ 或執行展開的 $y = x^2 + 3x + 2$ 時，皆能順利作圖；但學生剛開始對 DERIVE 的操作很陌生，可能會有這樣的情形，不小心選擇到指令的表示式 $\text{EXPAND}(y = (x + 1) \cdot (x + 2), \text{Rational}, x)$ ，致使沒有辦法畫出自己想要的函數圖形。所幸在本研究中這樣的情形只出現在初始 DERIVE 的電腦教學課程中，一旦學生對操作較熟悉、使用上較有概念時，這些狀況出現次數相當地減少很多。

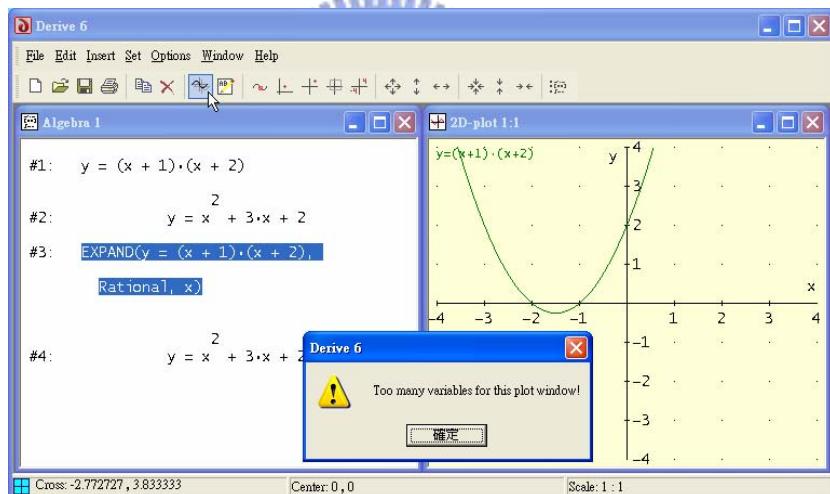


圖 4-1-2 學生誤取代數視窗之指令表示式，導致無法成圖

4. 若是學生信心不足，可能會中止進一步的探究。例如畫一個二次函數的圖形，學生能成功地於代數視窗輸入代數式，在二維畫圖視窗中也成功繪製函數圖形，但坐標系統的觀察範圍若未選擇恰當，可能會在第一時間於電腦螢幕上看不到函數圖形的成像。這樣的結果，學生在缺乏自信的狀況下，可能會覺得自己沒把圖畫出來，覺得自己有錯誤的動作產生，進而放棄進一步的嘗試，放棄利用拉近或放遠的方法來找出函數圖形的原像，中止接續可能有的探索。

然而，在這二次的 DERIVE 體驗，研究者亦發現以 DERIVE 來輔助教學時有一些現象教學者須要注意：

(一) 教學過程中，學生可能有認知上的迷思概念，應隨時予以修正。

1. 以 DERIVE 來觀察函數圖形時，學生可能因為受觀察範圍影響，以為沒有成功畫出圖形，或是函數沒有圖形。此時，教師可提示學生將圖形拉近或放遠來觀察，甚至當學生看到圖形時，亦可提示學生利用追蹤函數圖形上的點來延伸圖形，並配合點坐標的呈現來觀察函數的特性。
2. 觀察圖形時若 x 軸和 y 軸所呈現的單位比例不一致，可能會影響學生對圖形性質的判別，如一次函數的直線斜率、二次函數的開口大小等，一旦在教學環境下學生有如此的錯誤認知，教師應該馬上修正，告知學生要注意 x 軸和 y 軸的單位比例是否一致，讓學生能在正確的認知上繼續建構所欲達成的學習目標。另外， DERIVE 在呈現方程式的解的時候，對於重根的情形只會出現一個解，如果遇到這樣的例子，教師必須對學生特別說明，尤其這可能影響學生對代數基本定理的認知。

(二) 使用 DERIVE 的過程中，教師應給予適當的協助及鼓勵。

1. 利用 DERIVE 輔助學習時，剛開始學生可能會比較沒有方向去舉例來使用；此時，教師的介入引導是必要的。教師可以不用以「一個口令一個動作」的方式指示學生的動作，而是引導學生方向以達成學習目標的方式來替代。例如要檢視學生是否能成功輸入函數，教師可以提示學生輸入一個二次函數看看，順便檢驗當 $x=1$ 時的函數值，不需要強迫全部學生皆以教師指定的某函數來檢視。當教學活動進行時，教師亦可以口頭提示學生去觀察、類比、推論一些重要的性質，讓學生有機會在自主學習的過程中，加深對數學概念的理解及記憶
2. 學生使用 DERIVE 時若遇到操作上的困難，如：拉霸的製作、虛數 i 的輸入、多項式的因式分解、方程式的數值解或代數解...等，甚至是本研究未使用的功能，當學生無法靠自己完成操作且無法從操作手冊中理解操作方法，則教師必須介入指導。畢竟教學活動的目標是以 DERIVE 來輔助學習數學概念，並非是測驗學生對電腦軟體的操作技術。
3. 教師言語的鼓勵可以增加學生的信心，亦可以引發學生的學習興趣，進而使學生的學習態度有正向的改變，也有較高的意願去接受新刺激，努力達到學習目標。本研究整個教學歷程，研究者看到學生達成問題解決時的喜悅，也看到他們遭遇困難時的疑惑與沮喪，而教師言語的鼓勵讓他們提高

信心，引發他們的學習興趣，繼續做其他可能幫助解題的嘗試，合作規劃其他的解題策略。最明顯的是第三組的學生，他們初始參與度不大，以很快的速度完成活動，對學習單的指引觀察也僅是淺嘗輒止，研究者一度感到挫折。在研究者的鼓勵及引導下，他們的學習態度有正向的改變，願意多花時間嘗試、接受新刺激，努力達到學習目標。

(三) 教師應注意教學秩序的管理。

1. 從傳統教室到電腦教室學習數學，這對學生來說是新體驗。然而，教師所要面對的第一問題，便是要收拾學生玩樂之心，讓學生可以馬上進入學習狀況。利用教師電腦廣播系統的功能，先將學生使用電腦的權利收起，可以讓學生有警覺心，進而集中注意力，專注於觀看教師在電腦螢幕上的示範。
2. 教師活動不該只是教師的示範，學生的演練與自主學習亦是重點，所以教師一定要提供恰當的時間給予學生演練及自主學習的機會。不過，對於高中生而言，上網玩遊戲或是利用即時通訊和其他人聊天都是教師於電腦教室教學可能遇到的情形，如此當然會降低學生學習的效果。若要做好教學秩序的管理，教師除了可以透過教師電腦來監控，亦可增加教室巡視的頻率，讓學生可以減少分心的機會，也可以檢視和協助學生的數學學習。



二、分組教學活動的歷程

為了要降低研究對象個體可能因不熟稔軟體的操作而導致教學實驗的延宕，因此採取分組的方法，將學生兩兩分成一組，在小組的合作下可彌補軟體操作生疏之問題。此外，將學生分成四組後，依組別逐次進行教學活動，進行反思與回饋，逐次修正教學活動的設計，以找出使用 DERIVE 教學的可行性模式。

依據學習成就測驗之前測結果，研究者將 8 名研究對象分成四組：第一組為差異最大的異質組－阿斌、欣欣（來自不同班級）；第二組為差異次大的異質組－萱萱、小琳（來自不同班級）；第三組為同質組－小真、小穎（來自同一班級）；第四組為同質組－阿全、綾綾（來自不同班級）。優先考慮讓異質組先進行教學活動的原因乃是研究者希望能及早發現學生利用電腦輔助學習時所引發之即時問題及其差異，以做為修訂下一次教學活動之考量。此外，研究者亦會擔心來自不同班級所形成的小組是否會因默契不足而影響教學實驗，因此利用教學活動前的電腦教學課程讓小組先培養默契。

(一) 第一組教學活動的歷程及教學活動修正

第一組的組合來自不同班級的阿斌和欣欣，雖然二人的學習成就差異大，但由於二人資訊能力皆可，整個過程由二個人來共同操作、討論。欣欣較為細膩，對圖形有較細微之觀察；阿斌的數學能力較強，若有數學概念之澄清狀況，幾乎由阿斌主導。

在單元一的活動一，學生需要時間來熟悉 DERIVE 中對函數的定義方式，由於此活動主題為常數函數，學生很快熟悉操作並進入狀況，而且花費時間比研究者所預計的時間來得少。如圖 4-1-3，欣欣在與同伴討論後，在描述常數函數時，雖知自變數的次數為零次，但仍與零多項式混淆。

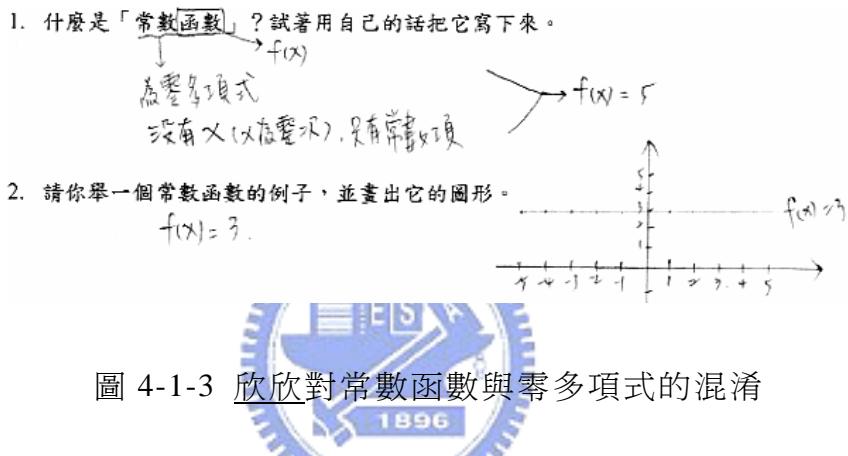


圖 4-1-3 欣欣對常數函數與零多項式的混淆

另外，欣欣對「一般式」的意義較無法理解，研究者當下立即說明並加強「一般式」的概念，阿斌能立即了解，欣欣則尚未完全釐清，如圖 4-1-4 所示。不過，在接續的三個活動中兩人皆能清楚地了解一般式的意義。

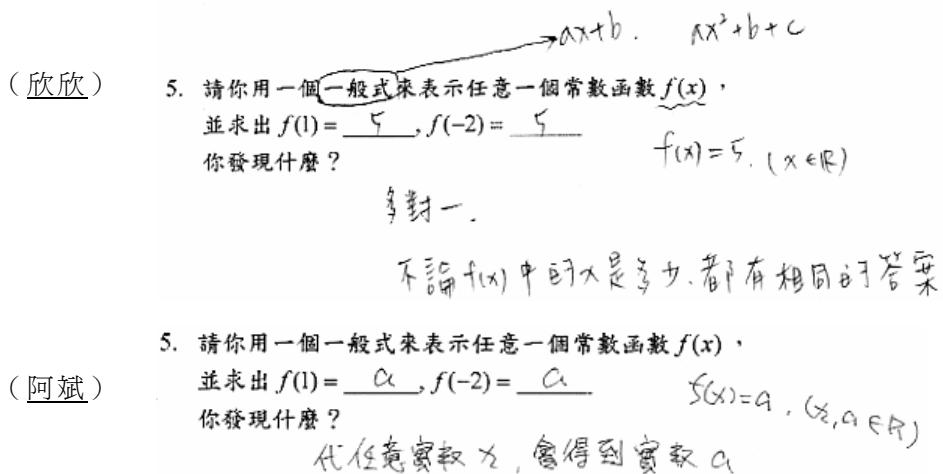


圖 4-1-4 欣欣和阿斌對一般式的了解

單元一活動二有許多活動和活動一相似，學生很快上手並完成學習單，兩人比較不同的是欣欣會以「斜直線」來描述一次函數的圖形，而阿斌在寫一次函數的一般式時能注意到領導係數不能為 0。在這個活動中，學生嘗試製作拉霸來分別代表一次函數 $f(x) = ax + b$ 中的 a、b。當改變 a 時，兩人皆能對圖形的改變有正確的描述；但是，在改變 b 的時候，兩人卻有不同的迷思概念解讀。如圖 4-1-5 和圖 4-1-6 所示，欣欣認為 b 的變動會移動 y 軸上的點，而阿斌卻認為當 $b > 0$ 時直線會往右， $b < 0$ 時直線會往左。當然就函數的改變對圖形的平移影響的觀點來看，這些都是不恰當的認知，必須對學生引導即時性的修正。

- (4) 當你改變 b 值，且 a 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？
請你記錄下來。(可舉例說明)

所有斜線將平行於 $f(x) = ax$ 的圖形，

斜線一樣斜。

$b = 0$ 時，會經過 $(0, 0)$

當拉霸變動時，會移動 y 軸上的點。

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = -4x + b$$

$$f(1) = -4 + b$$

$$b = 4$$

圖 4-1-5 欣欣對一次函數圖形的平移產生迷思概念



- (4) 當你改變 b 值，且 a 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？
請你記錄下來。(可舉例說明)

當 $a = -4$ 時， $-4 \leq b \leq 4$

① 當 $b = 0$ ，會通過原點 $(0, 0)$ 。

② 斜率不變。

③ $b > 0$ 時，直線會往右。

④ $b < 0$ 時，直線會往左。

圖 4-1-6 阿斌對一次函數圖形的平移產生迷思概念

探討二次函數時，欣欣以 DERIVE 輔助繪圖發現自己在描繪圖形時的小誤差。對於學習單中要求以下指令的方式來多找幾組對應，兩人亦能合作完成。在觀察函數圖形的對稱性、開口方向、開口大小、最高點或最低點時，二人皆順利產生正確的認知，且皆能以追蹤 (Trace) 的方法來找到函數的極值，也能利用配方法來找到頂點的所在處。進階討論二次函數 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 時，二人自主學習，在題目未特別提醒的狀況下，正確描述了 a、h、k 對函數之開口方

向、開口大小、頂點位置、圖形平移的影響。當然，在觀察圖形時，學生可能會有不同的發現。如圖 4-1-7，在比較 $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ 和 $f_2(x) = 3(x-4)^2 + 1$ 的圖形時，學生除了會以圖形平移的角度來看，亦會發現兩函數圖形交於(3, 4)，且對稱於 $x=3$ 。雖然教師設計學習單時，給予這二個函數的用意，乃是希望學生能將二個函數中 $x-2$ 和 $x-4$ 的不同與兩個函數圖形的平移關係來作連結，然而當學生在同時呈現函數圖形時，除了平移以外，竟觀察到二圖形之交點、二圖形有線對稱的關係，甚至找出此對稱軸，並說明此線為二拋物線頂點連線段之中垂線。當然這些發現跟教師所預期的有些不同，但身為教師還是欣喜接受學生的發現，且對於學生的積極與多方向思考，教師應給予學生正面鼓勵，不過還是得引導學生朝學習目標思考。

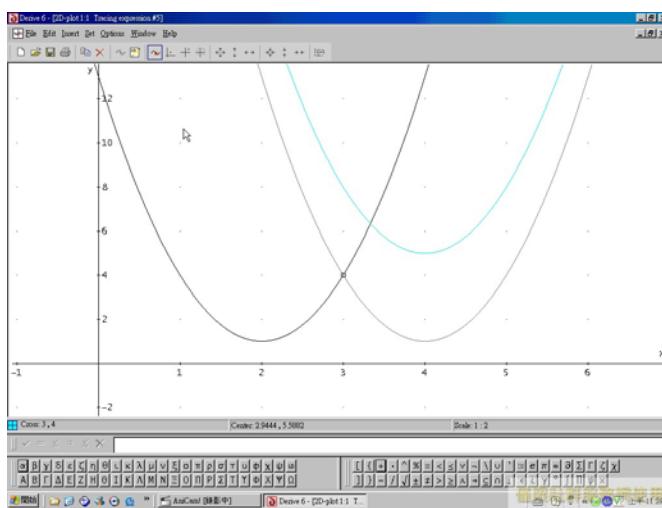


圖 4-1-7 學生觀察圖形時可能會有多樣的解讀

接下來欣欣和阿斌二人在這個活動中順利地將圖形的平移動作歸納推論出與 h 、 k 的改變的相關性，而且都可以利用配方法，將二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 改成 $y = a(x-h)^2 + k$ ，並成功嘗試寫出它的幾何意義。

單元一活動四是多次函數的探索，這個部分是課本較沒出現的教材，所以若要學生直接描繪函數圖形是有困難的。在此藉由 DERIVE 的協助繪圖，學生可以輕易地經由追蹤動作來了解函數遞增或遞減的趨勢、體會函數連續不斷的樣子。但若要歸納領導係數對多次函數圖形的影響，欣欣面臨困境，得要阿斌的協助。而在活動中的觀察三，在題目的設計下學生成功地描述函數次數的改變對函數圖形可能的影響，圖形「轉彎」的狀況可能隨次數的增加而愈來愈多、圖形也愈顯複雜。此外，學生亦發現若能將多次函數因式分解，則可以找到圖

形跟 x 軸之交點，藉此可以幫助自己去畫出多次函數的圖形，後續的進階題兩人便是以如此觀念來合作成圖。此外，最後一題算是研究者大膽的設計，給予學生一個圖形，看看學生是否可以找到這個函數圖形的函數。第一組的合作，歷經幾次的嘗試，成功地找到一個具代表性的函數。

單元二活動一從應用題下手，讓學生能體驗多項方程式在生活中的應用。研究者發現若給予學生已具因式分解型式（且每個因式次數最多為 2 次）的方程式，學生很容易去解方程式。但若不具因式分解的型式，則次數越多的狀況，學生越難求解。在求根的過程中，學生知道可以利用公式解、一次因式檢驗法、因式分解等動作來協助求解，所以若是給予三次方程式，學生尚能接受，且能有有效的解題策略。一旦方程式的次數多於 4 次，且利用因式定理沒能找到簡單的解的話，學生便會選擇放棄。但在有 DERIVE 的輔助下，教師雖然限制學生不可以直接用 Solve 的功能，但學生成功地延續自己想要因式分解的概念，將方程式完成因式分解，進而求出方程式的根。

單元二活動二的設計是針對代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理，這二個主題在高一的課程中，學生採取的學習態度可能是「老師說的一定是對的！」、「背下來就好了！」，而不會去問「為什麼會這樣子？」，更不要說自己去證明。利用 DERIVE 的求解功能，學生在短時間內做大量的試驗，甚至在學習單的設計下去嘗試複係數方程式的求解，欣欣表示求出來的根太恐怖了～寫不下手～經過她的檢查，根的個數真的和方程式的次數一樣多。阿斌在試驗後亦有著和欣欣相同的想法。同樣地，利用 DERIVE 來輔助學習來看實係數多項方程式虛根成對定理，他們一起去體驗以往教室中老師不可能給予的例子，嘗試幾個實係數多次函數，並去嘗試複係數方程式，由電腦的協助求解，發現複係數方程式的根不一定以共軛複數根的型式出現。

次方程式就有幾個根呢？ 係數出現：

5. (1) 請你寫下一個複係數方程式。

$$4i^4x^4 + 3ix + 6i = 0$$

(2) 利用 Derive，寫出這個複係數方程式的根。

太恐怖了～寫不下手...

(3) 檢查一下，根的個數是否和方程式的次數一樣多？

是，共 4 個

圖 4-1-8 欣欣對複係數方程式根的個數的探索

綜合上述教學活動歷程之討論與省思，研究者提出教案設計修正，內容如下：

1. 單元一活動一結束時，應該加強學生對零多項式與零次多項式的區別。
2. 對學生加強有關「一般式」的概念。
3. 單元一活動一的時間可由原本的 30 分鐘改為 20 分鐘。
4. 單元一活動二中，改變一次函數 $f(x) = ax + b$ 中的 b ，學生可能會有迷思概念存在，將 b 的變動想像成會移動 y 軸上的點而非圖形作上下平移，或者是認為當 $b > 0$ 時直線會往右， $b < 0$ 時直線會往左。此時，教師應該即時引導學生作概念上的修正。
5. 單元一活動二改變一次函數的係數，教師可間接引導學生去聯想斜率的變化以及圖形上下平移的情形。
6. 單元一活動三中，教師必須對學生加強有關嚴格遞增的「嚴格」是何種數學意義。
7. 研究者伴隨單元一活動四所附的檔案多次函數.dfw 有誤，某一函數之係數未能和學習單相同，故修正之。
8. 單元一活動四中，在追蹤函數上的點時，教師可以提示學生注意點的移動速度，並進一步思考其數學意義，了解曲線的變化程度。
9. 單元一活動四最後二題進階題，教師應在旁多賦予口頭鼓勵及提示，讓學生有方向且有信心去進行試驗的動作。
10. 對學習成就較低的學生，可以多鼓勵他們可以用文字敘述的方式來寫下他們所觀察到的現象。

(二) 第二組教學活動的歷程及教學活動修正

在第一組的教學活動後，做了一些教學活動教案設計的修正。經過教案的修正，第二組的教學活動歷程更為流暢。第二組的萱萱和小琳也是來自不同的班級，二人學習成就的差異比第一組小了一些，而整個活動的進行由二人來共同主導，不過萱萱有時會不太確定自己的觀念是否完全正確，而小琳是比較沒有自信心，因此，當研究者尋問二人「何謂多項式？」，二人花的時間比研究者所想像的還要多很多，其主因是他們信心不足而不敢開口發表意見。研究者鼓勵她們不要顧忌太多，想到什麼就說什麼，若有數學概念上的疑問，可以隨時提出，教師將會引導她們釐清概念，而軟體操作若有問題，教師也會給予適當的協助。

二人多採合作方式，所以對於電腦螢幕中的觀察多具有相同的見解，不過還是會有些許層次的差異。在一次函數的活動中，亦出現和前組相同的迷思概念。當二人在觀察 $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = 2x - 3$ 時，萱萱和阿斌一樣注意到一次函數圖形的左移和右移，似乎學習成就高的學生很容易去聯想函數的改變對圖形會有平移的作用，然而他們二人都有左右移的錯誤迷思概念，而學習成就較低的小琳只看到這兩個函數圖形是兩條互相平行的線，以及這兩個函數的常數項不同，而無法將二者的關係連結（如圖 4-1-9）。

- (6) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = 2x - 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

(萱萱)

兩函數是平行的。
兩函數為 $f(x) = 2x$ 的平移。
 $f(x) = 2x + 3$ 元，即右移 3 單位。
 $f(x) = 2x - 3$ 乙，即左移 3 單位。

- (6) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = 2x - 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

(小琳)

兩條互相平行。
(主 $f(x) = ax + b$ 中的 b ，有相同點，但正、負_子同時)。

圖 4-1-9 萱萱和小琳對一次函數圖形的觀察

在二次函數的教學活動中，萱萱和小琳在 DERIVE 的環境中畫出幾個不同的二次函數圖形後，觀察圖形共有的特徵，二人寫下了這樣的特徵：「皆為拋物線，都有 2 個解，不一定是實數解。」可見得二人將函數和多項方程式的概念混淆，研究者隨即協助她們釐清數學概念。

萱萱和小琳一起去追蹤觀察多次函數圖形的遞增遞減時，其所使用之描述方式比第一組豐富，不再是單純的遞增與遞減，而是把自變數的範圍分割，真實地描述 x 在哪個區間呈現遞增（遞減）的狀況，如圖 4-1-10 所示。研究者修正教案，提示下一組亦可如此確實描述函數圖形發展的趨勢。此外，萱萱和小琳也成功地完成最後二題進階題的探索。

2. 觀察函數 $h_1(x) = x(x-1)(x-2)$ 的圖形
- (1) 函數圖形是不是連續不斷？
是
- (2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。
- $x = -\infty$ 到 0.43 時遞增
 $x = 1.53$ 以後遞增
 $x = 0.43$ 到 1.53 有遞減

圖 4-1-10 萱萱對多次函數圖形的觀察

關於多項方程式的求解，第二組的解題策略和第一組略有不同。當她們利用因式定理找到方程式的一次因式，繼而以長除法運算，降低多項式之次數，再找其他的解。而這樣的方法也讓她們吃到苦頭！雖然她們有因式分解協助解方程式的想法，但若遇到四次多項方程式，且當下找不到方程式的有理根，那麼她們就只好選擇放棄。而 DERIVE 的輔助，使她們有方法實現她們想要做的因式分解工作，那麼就算不直接求解，亦能利用公式解來求得原本多項方程式的根。

綜合上述教學活動歷程之討論與省思，研究者提出教案設計修正，內容如下：

- 當學生將函數和多項方程式的概念混淆時，教師應當即時協助她們釐清數學概念。
- 提醒學生在追蹤觀察多次函數圖形的遞增遞減時，可以把自變數的範圍分割，真實地描述 x 在哪個區間呈現遞增、在哪個區間呈現遞減。

(三) 第三組教學活動的歷程及教學活動修正

第三組為同質組，學習成就相去不大，是四組中唯一是由同班同學所組成，而且小真和小穎是好朋友。原本在猜想同班同學是否會擁有較多的討論空間，還是會因為閒聊而延宕教學活動。結果這一組是四組中「最有效率」的一組，研究者估計教學活動的時間對其他組而這可能剛好或略顯不足，而這一組帶給研究者的感覺是教案設計的時間對他們來說是非常充裕的。的確，在教學活動進行時，她們以極精準的方式來解決問題，可惜的是就像平日趕著下課的學生一般，有許多的觀察是淺嘗輒止，未能進一步地進行探究，就運用來論證的動作也極為精簡。也因為如此，研究者認為利用 DERIVE 來輔助教學時，同組合作對象是否是熟識的同學並不會對教學活動帶來太大的影響。欲使教學活動有正面的影響，學習者的正面態度是非常重要的！學習者對新鮮事物感到好奇、

或對學習任務感到興趣，這些都會影響學習者對教學活動的參與度。一旦參與度大打折扣，則期待活動結束後能達到學習目標的希望有可能會落空；學生若能積極參與，則就算在未來的評量可能未能提升太多，但也著實地改善其在數學方面的學習態度。

剛開始小穎解釋什麼是常數函數時，認為是「 x 的係數為自然數的函數」，而當教師請小穎舉一個常數函數的例子，並畫出它的圖形，結果小穎舉了一個二次函數的例子，還成功地畫了拋物線的圖形。這是 8 名研究對象中唯一發生如此錯誤，而且是錯得很離譜的情形，或許是因為小穎的心不在焉。後來小穎自己發現錯誤，才再趕快更正。

在一次函數的教學活動中，亦出現和前幾組類似的迷思概念。對於一次函數 $f(x) = ax + b$ 僅改變 b 值時，小穎一樣是注意到一次函數圖形的左移和右移，而小真令 $a = -4$ ，觀察 $b = -4$ 到 $b = 4$ 時圖形的變化，覺得圖形有向右上方移動的傾向。

關於二次函數圖形的觀察，二人都是以精簡的動作操作，連作答也頗為精簡，研究者鼓勵她們盡力去觀察，多一點的文字敘述也無妨，可惜沒有得到小穎和小真的熱情回應，研究者心中之失落油然而生。不過，這樣的狀況有逐漸地改善。而由她們的學習單不難看出：當二人在觀察函數係數的改變對圖形的影響時，幾乎只會作單一方向的討論，只談右移而不談左移，只談上移而不談下移；對她們而言，DERIVE 畫出來的圖形似乎仍欠缺一份感官的刺激。當教學活動進行到活動四的時候，學生的學習態度有較明顯的改變，或許這部分是她們較不熟悉的教材，所以她們停下腳步來仔細觀察、類比、推論，成功地完成活動四的教學活動！

小穎在單元二活動一的部分，當面對多次方程式時，與第二組的情形雷同。而小真在面臨用紙筆運算求四次多項方程式的解時，完全沒有恰當的解題策略，只好都選擇放棄，而後在教師的引領協助下，利用了 DERIVE 來做因式分解的工作，求出了四次多項方程式的根。另外，活動二的部分由於解題運算的動作都交給電腦，所以小真和小穎能順利完成學習單中的指示，亦能了解此活動所欲傳達的概念。

綜合上述教學活動歷程之討論與省思，研究者提出教案設計修正，內容如下：

1. 當學生的學習意願不高時，教師仍是要秉持用心、關心和愛心來鼓勵學生，當學生的燈塔，指引他們方向。

2. 爲了擴展學生對多次方程式的求解探索，當學生完全苦無對策的時候，教師適時的介入協助是必要的。

(四) 第四組教學活動的歷程及教學活動修正

第四組亦為同質組，同組的綾綾和阿全的學習成就差異不大，二人來自不同的班級。在整個過程中，不難發現阿全是操作型的學生，很勇於嘗試，亦樂於發表意見；綾綾較細心，可以從伙伴的電腦操作中，觀察圖形之變化並比較之。

老師：其實我會擔心你綾綾是不同班，不同班的同學，那就怕說你們的默契不夠，那你覺得你們在這次一起操作電腦的方面你覺得怎麼樣？

阿全：其實上綾綾她的話，她是會比較說讓我，像電腦操作我就來做，她做計算或是怎樣的。她有一些觀念背的比我清楚，我是知道然後在算的時候要想一想，想一想要怎麼辦？然後他可能看到就說，可能要用什麼～可能要用什麼～然後像有一些背的東西，說什麼東西會改變什麼，我就會問他，他會記得呀。

老師：所以你們在這邊...

阿全：剛好就...

老師：就是補起來了，一個操作比較強，一個對概念...

阿全：遇到觀察性的那種她都記得起來。《070115_訪談_阿全》

整個教學過程非常順利，在一次函數的教學活動中，亦出現和前幾組類似的迷思概念。對於一次函數 $f(x) = ax + b$ 僅改變 b 值時，阿全和綾綾同時注意到一次函數圖形的左右平移和上下平移。不過，二人經由再次模擬操作和討論後，在最後的總結提出： a 值的改變會影斜率、直線傾斜的方向及角度； b 值的改變會影響圖形的上下平移，甚至提出當圖形為斜線時，會誤認為左右移動。學生自主地發現若要與函數有恰當的結合時，圖形的平移應當是上下平移，與函數關係呼應，則平移的表現乃是函數值的增減。

進行二次函數教學活動中，當學生在探索 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 的進階活動時，發現這一組是四組中唯一有把保持不變的參數所設定的值記錄下來的一組，而針對有改變的參數，他們詳細地記載了參數改變及圖形平移之對應狀況。最後以一般式 $h(x) = ax^2 + bx + c$ 的型式來表示二次函數時，他們都可以成功地利用配方法來處理函數，並寫出其幾何意義。

進行活動四多次函數的圖形時，阿全以確實的方法操作 DERIVE，綾綾在旁亦給予意見。與先前三組不同的是：就多次函數的圖形來觀察，每一組都能論及多項函數圖形的連續性；前三組能概略地描述函數圖形遞增、遞減的情形，

這一組卻能紮實地記錄自己利用追蹤所得來的結果；前三組在教學學習單的提示下，能去觀察圖形的特徵與現象，如與 x 軸之交點、與 y 軸之交點……等，進一步可能發現圖形有點對稱或線對稱的現象（研究者於學習上所給予之部分函數恰有如此性質），而第四組除了上述的描述，甚至試圖表示函數的最大值或最小值。之所以有如此差別，在於第四組有較強烈的解題企圖心與實驗的精神，甚至阿全還主動要求教師能否延長活動時間，讓他們可以利用 DERIVE 輔助學習，多一點觀察圖形的機會。

在單元二活動一的部分，發現學生在解三次以上的多項方程式時，若有機會利用因式定理或者一次因式檢驗法來找出多項式的一次因式，則學生可利用綜合除法或長除法來協助多項式之因式分解，續而利用學過的概念找出多項方程式的解。一旦學生無法利用因式定理或一次因式檢驗法找到一次因式，甚至是遇到類似學習單上第 8 題的四次多項方程式 $x^4 - 9x^2 - 12x + 10 = 0$ ，根本找不到它的實係數一次因式時，學生會選擇放棄，無法繼續求解。但是，在數學軟體 DERIVE 的輔助學習下，雖然教師規定學生不能直接利用 Slove 功能直接求解，阿全、綾綾以及其他各組學生皆延續了因式分解的想法，利用 DERIVE 來協助自己去進行多項式因式分解的動作，再進一步成功地完成多項方程式求解的任務。

在單元二活動二中，阿全和綾綾利用 DERIVE 看到了許多平時教師不可能在黑板呈現的例子。他們實際去感受代數基本定理，發現自己舉的一些複係數方程式，亦可以找到個數與方程式之次數一樣多的根，如圖 4-1-11；同樣地，學生自己亦利用 DERIVE 來看實係數多項方程式虛根成對定理，以真實的例子來看對他們而言較抽象的定理，甚至成功檢驗複係數多項方程式是否一定滿足這樣的定理。

5. (1) 請你寫下一個複係數方程式。

$$x^2 + (2+2i)x + 1 = 0$$

(2) 利用 Derive，寫出這個複係數方程式的根。

$$x = -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)} - 1 - i\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}\right)} + 1$$

(3) 檢查一下，根的個數是否和方程式的次數一樣多？

是。

圖 4-1-11 綾綾對代數基本定理的探索

綜合上述教學活動歷程之討論與省思，研究者提出教案設計修正，內容如下：

1. 當學生在觀察函數係數的變化對其圖形的影響時，可提醒學生記錄下控制變因（保持不變的要素），再就操縱變因（持續改變的要素）來觀察、分析、類比、推論。
2. 平時若是利用課餘時間以 DERIVE 輔助教學，當學生有主動要求再多一點時間給他們觀察的時候，教師不妨順應學生之意，或許在學生自由意願下的探索與學習，可以激出不同的火花！

整個教學歷程依組別逐次進行教學活動，進行反思與回饋。在教學活動進行時，教師對於該組學生之學習狀況適時做即時性調整，並於該組教學活動結束後，針對教學活動教案設計施予立即性修正，以作為未來使用 DERIVE 教學的可行性模式。

為了讓未來教師明瞭課程調整前後之差異，所以有關教案設計的修正部分，研究者以紅色字體來辨識，詳見附件四之教學活動教案設計。



第二節 教學實施後之影響

本節將討論在教學活動進行後，針對多項式的學習，CAS 數學軟體 DERIVE 是否能促進學生學習，增進學生對知識的建構與了解？比較研究對象學習成就測驗前後測之結果，來觀看學生數學學習的成效；同時，從學生問卷及訪談的回饋，了解學生在經過 DERIVE 輔助學習活動後之學習成效和態度的改變，以及對此試探性教學活動的看法。

一、學習成就測驗前後測之比較

蒐集研究對象學習成就測驗前測試題及後測試題，研究者分別就前測及後測之答題結果予以計分統計，此外，不管研究對象答對或答錯，研究者將每個研究對象答題所寫的內容進行分析，了解其解題時所使用的策略（詳見附件九、附件十），並加以比較。以下將依測驗答對率及測驗答題內容來進行討論：

（一）測驗答對率之比較

配合本研究欲達成之教學目標，設計學習成就測驗，前測和後測使用同一份試題。測驗試題有 17 題，共計 20 格，每格採 5 分計算。其中第 1 題和第 2

題為多重選擇題，採部分給分且不倒扣；第 10 題、第 13 題和第 14 題研究對象可能有正確的解題策略，但在最後判別答案時，卻忘了去除不可能有的答案，或是遺漏了部份答案，故也依作答結果給予部分分數；第 17 題(1)、(2)兩格為函數圖形的描繪，亦將依研究對象描繪圖形之確實與否酌情計分。

表 4-2-1 學習成就測驗前測試題答題計分表

題號	阿斌	萱萱	綾綾	阿全	小真	小琳	小穎	欣欣	各題答對率
1	5	2	2	4	5	2	3	3	65.0%
2	4	5	5	1	3	4	4	2	70.0%
3	5	5	5	5	0	0	5	5	75.0%
4	5	5	0	5	5	5	0	5	75.0%
5	5	0	0	5	5	0	0	0	37.5%
6	5	5	0	0	0	0	5	0	37.5%
7	5	5	5	0	5	0	0	0	50.0%
8	0	5	5	0	0	0	0	0	25.0%
9	5	0	0	0	0	0	0	0	12.5%
10	5	3	0	0	0	0	0	0	20.0%
11(1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
11(2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
11(3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
12	0	5	0	5	5	5	5	0	62.5%
13	5	3	5	5	0	3	0	0	52.5%
14	3	3	0	4	1	0	0	0	27.5%
15	5	0	5	0	5	0	0	0	37.5%
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
17(1)	5	5	0	0	0	5	5	0	50.0%
17(2)	4	5	0	0	0	2	1	0	30.0%
個人答對百分比	66%	56%	32%	34%	34%	26%	28%	15%	全體平均答對率 36.375%

註： 學生作答正確無誤

 學生未寫答案，但有解題想法及計算過程

 學生作答不完全正確（包含答錯）

 學生完全放棄且未作答

在表 4-2-1 中呈現各個研究對象在整個教學實驗剛開始時所做的學習成就測驗前測結果。雖然研究對象在高一上學期已學過多項式的單元，而且試題內容部分來自實驗學校高一上學期數學科第三次段考試題（段考範圍恰以多項式為主題），但就此次測驗的結果來看，8 名研究對象平均答對率僅為 36.375%。關於各題之答對率，只有被研究者用來測驗先備知識的第 1、2、3、4 題，以及用來測驗代數基本定理、虛根成對定理、或方程式與函數圖形之關係的第 12 題單選題，這 5 格有超過 60% 的答對率；同時，有 8 格的答對率低於 30%，甚至有 4 格的答對率為 0%（第 11(1)、11(2)、11(3)、16 題）。

若按 8 名研究對象的答題狀況來看，每人 20 格，總計 160 格。學生有作答的部分，其中作答正確無誤者共 46 格（佔 28.7%），作答不完全正確者（包含答錯）共 79 格（佔 49.4%）；換句話說，學生未能得分的格數有 35 格（佔 21.9%）。值得注意的是在未得分的格數中有 17 格（佔 10.6%）是學生未寫答案，但有解題想法及計算過程；有 18 格（佔 11.3%）是學生完全放棄而未作答，其中學生直接放棄答題的格數大多集中於第 11(2)題和第 11(3)題。

答對率為 0%、而且有多位學生直接放棄作答的第 11 題，其測驗內容如下所示：

11. 拋物線 Γ 之方程式 $y = (x - 1)^2$ ，則：

(1) 將 Γ 依水平方向右移，第一次經過點 $(4, 4)$ 時的拋物線其方程式為 _____。

(2) 將 Γ 依直線 $y = x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 $(4, 15)$ 時其拋物線方程式為 _____。

(3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線正好通過點 $(4, -4)$ 時，則此時新拋物線的方程式為 _____。

對於函數圖形平移的概念，學生習慣去處理那些已知圖形往哪一個方向平移多少單位的問題，一旦換成第 11(1)題的描述，學生便無法去揣測「第一次經過」的意義，甚至會因為在乎圖形經過 $(4, -4)$ 這個點，而忽略了圖形平移的動作或方向。第 11(2)題中描述圖形向東北方向移動，不是學生習慣的題型，學生亦無法把它轉換為圖形同時向右移 n 單位及向上移 n 單位的概念，8 人有 6 人未作答，甚至多達 5 人直接放棄嘗試解題。或許是受前二題的影響，抑或是無法去模擬函數的動態呈現，第 11(3)題居然有 7 人未作答，其中有 6 人直接放棄嘗試解題。

在表 4-2-2 中呈現 8 個研究對象在教學活動結束後所做的學習成就測驗後測結果。令人雀喜的是，就本次測驗的結果來看，8 名研究對象平均答對率提高至 58.5%，關於各題之答對率，多達 12 格擁有超過 60%的答對率，其中有 5 格擁有超過 80%的答對率（第 1、2、6、12、13 題）；同時，答對率低於 30%的狀況也由之前的 8 格降低為 5 格（第 10、11(2)、11(3)、15、16 題）的，而本次測驗沒有答對率為 0%的情形。

表 4-2-2 學習成就測驗後測試題答題計分表

題號	阿斌	萱萱	綾綾	阿全	小真	小琳	小穎	欣欣	各題之答對率
1	5	5	5	5	4	4	5	4	92.5%
2	5	5	5	4	4	4	4	4	87.5%
3	5	5	0	5	5	0	5	0	62.5%
4	5	5	0	0	5	5	5	5	75.0%
5	5	5	5	5	0	0	0	5	62.5%
6	5	5	5	5	0	5	5	5	87.5%
7	5	5	0	5	0	5	5	0	62.5%
8	5	5	5	5	0	0	0	0	50.0%
9	5	5	0	5	0	0	5	0	50.0%
10	3	3	0	5	0	0	0	0	27.5%
11(1)	5	0	0	5	0	0	0	5	37.5%
11(2)	0	0	0	5	0	0	0	0	12.5%
11(3)	5	0	0	5	0	0	0	0	25.0%
12	5	5	5	5	5	5	5	5	100.0%
13	3	3	5	5	3	5	3	5	80.0%
14	4	3	5	5	3	3	1	3	67.5%
15	5	0	5	0	0	0	0	0	25.0%
16	5	0	0	0	0	0	5	0	25.0%
17(1)	0	5	0	5	5	5	5	5	75.0%
17(2)	0	5	0	5	3	3	5	5	65.0%
個人答對百分比	80%	69%	45%	84%	37%	44%	58%	51%	全體平均答對率 58.5%

註： 學生作答正確無誤

 學生未寫答案，但有解題想法及計算過程

 學生作答不完全正確（包含答錯）

 學生完全放棄且未作答

同樣地，若按 8 名研究對象的答題狀況來看，每人 20 格，總計 160 格。學生有作答的部分，其中作答正確無誤者共 79 格（佔 49.4%），作答不完全正確者（包含答錯）共 63 格（佔 39.4%）；換句話說，學生未能得分的格數有 18 格（佔 11.2%），其中有 9 格（佔 5.6%）是學生未寫答案，但有解題想法及計算過程，其它 9 格（佔 5.6%）是學生完全放棄且未作答。此外，學生直接放棄答題的格數大多集中於第 11(2)題。

就前測和後測來比較的話，每個學生的答對百分比都相對的提高，後測的結果皆比前測的結果較佳。其中以阿全進步最多，個人答對百分比增加 50%；欣欣、小穎增加 36%、30% 次之；小琳、阿斌、萱萱、綾綾分別增加 18%、14%、13%、13%；而小真則是增加 3%。阿斌和萱萱在前測中即是屬於高分群，因此增加的幅度可能有限，而教學活動中和他們搭配的低分群同學欣欣（第一組異質組）、小琳（第二組異質組）在後測的表現中也優於前測，增加不錯的答對百分比。其他在前測實力相當的四個中分群同學以組別來看，第三組（同質組）的阿全和綾綾進步的幅度比第四組（同質組）小穎和小真進步的幅度來得大。

關於各題的答對率，有 17 格之答對率為正成長，表示教學活動對研究對象在學習多項函數及多項方程式時，有正面的幫助，DERIVE 的輔助學習確實有助於學生代數概念的成長。其他 3 格的情形，有 1 格維持和前測一樣的答對率（75%），其他 2 格（第 3、15 題）則為 -12.5% 的成長，相當於 1 人次的答題，探究後測這二題學生解題錯誤的原因，發現這二題皆有 2 人次寫出正確的解題策略，可惜計算過程有誤，致使未能正確作答。

若按 8 名研究對象的答題狀況來看前後測的不同，很明顯地學生作答正確無誤之百分比由 28.7% 增加為 49.4%，學生未能得分之百分比由原本的 21.9% 降低為 11.2%。讓人感到欣喜的是，學生完全放棄且未作答的部分由原本的 11.3% 降低至後來的 5.6%，可見得學生對解決問題有較高的意願及興趣，同時也具有較大的自信心，嘗試去分析題目、思考解題策略以克服困難，達到問題的解決。

（二）測驗答題內容之分析

分析比較學生學習成就測驗前測及後測的內容，發現在經過以 DERIVE 輔助學習的教學活動後，學生答題的狀況及使用之解題策略有些改變：

1. 先備知識更為強化、鞏固

第 1 題到第 4 題為研究者為測驗研究對象先備知識所設計的命題。關於測驗目標，第 1 題測驗學生是否了解什麼是多項式；第 2 題在測驗學生是否能判

別多項式的因式；第 3 題是關於多項式同類項的合併以及對多項式次數的了解；第 4 題是有關多項式整除的問題。

在前測時，第 1 題有多數學生未能清楚了解多項式之變數不能置於分母、

指數位置、絕對值內，亦未能清楚像 $5x^2y - \frac{x}{y} + 3$ 這種型式的多項式對 x 來說也是 x 的多項式。在第 2 題，學生能用長除法、綜合除法、因式分解、或利用因式定理來找多項式的一次因式，但在了解 $x - 1$ 為 $f(x)$ 的因式之餘，卻容易忽略 $3x - 3$ 亦為 $f(x)$ 之因式。在第 3 題，學生能明白多項式次數的意義，以同類項合併的處理方式，進一步去解未知數 a, b 。在第 4 題中，學生能了解整除的意義，答對者皆以長除法的方式來協助解題。

從後測中，學生減少了前述的缺失處，更明白什麼是多項式、什麼是多項式的因式、什麼叫整除、如何去找多項式的因式，先備知識更為強化、鞏固。因此從後測的答對率中，除了第 3 題學生容易計算錯誤以外，第 1 題、第 2 題、第 4 題皆有很高的答對率 (92.5%、87.5%、75.0%)。

2. 具有更有效之解題策略

在面對生活化的問題時，能將已知條件轉化成以數學方式來解決。以第 16 題為例，小穎在前測時曾嘗試解題，但苦無其他解題策略，故將原本嘗試的過程擦去，選擇不做答。然而其在後測的表現良好，能將拋物線的問題轉化為二次函數的數學問題，假設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ，將已知條件分別轉化成拋物線與 y 軸之交點、拋物線頂點、拋物線與 x 軸之交點，做出聯立方程式，求得 a 、 b 、 c ，進而解決問題。如圖 4-2-1，小穎以更有效的解題策略來作答。

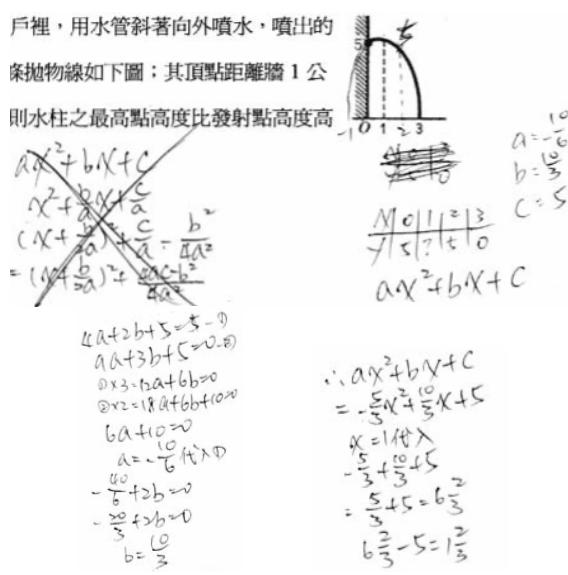
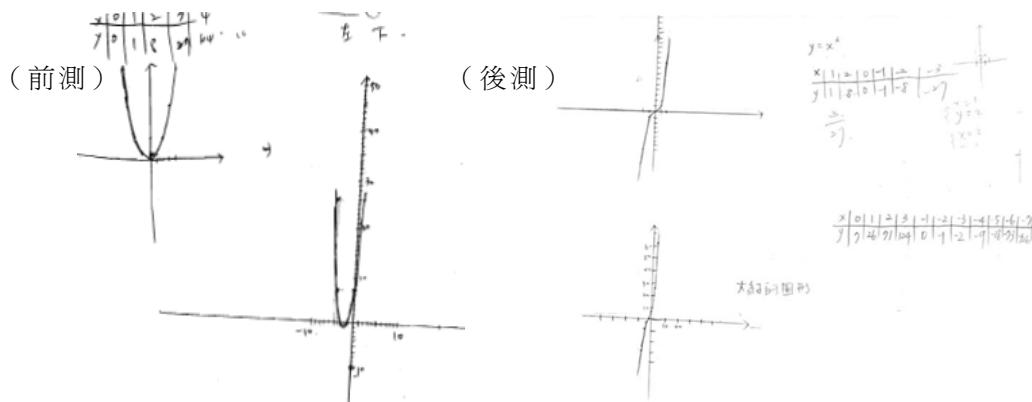
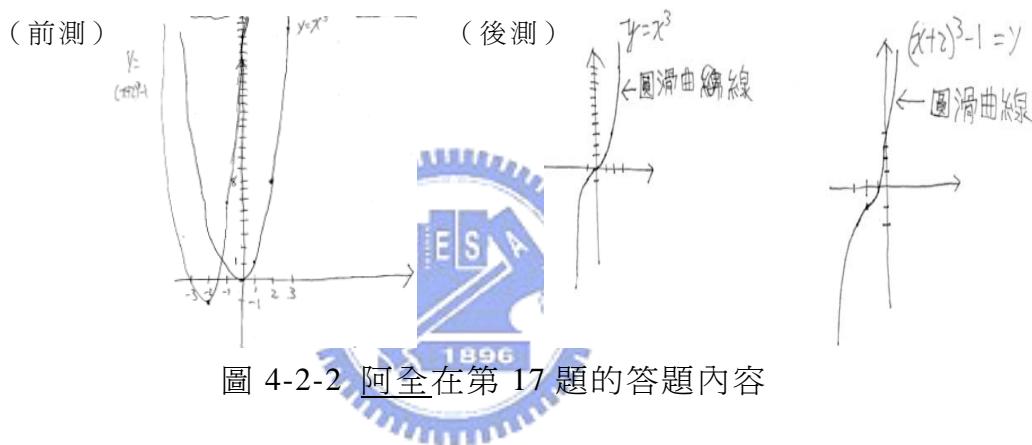


圖 4-2-1 小穎在第 16 題的答題內容

3. 具有更精確之解題策略

在前測時，有關函數圖形的繪製，學生所用的方法多為描點的方式。點描多一點即可看出函數圖形之趨勢走向，但點描少一點時，則會受學生自己認知的影響。如圖 4-2-2 和圖 4-2-3，阿全和欣欣在前測時都使用了描點法，描繪了三個點 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 8)$ 但由於對三次函數完全沒有概念，不約而同地都把三次函數 $y=x^3$ 的圖形視為拋物線的圖形，因此在描了三個點之後，即以線對稱的方式來成圖。經過教學活動的練習及學習之後，阿全利用同樣的三個點，但他了解三次函數的發展趨勢，故以點對稱的型式來成圖；而欣欣則是明瞭三次函數的圖形不是拋物線，因此採取多畫一些點以精準成圖。由於二人皆有正確的認知，具有精確的解題策略，所以能成功畫出三次函數的圖形。



萱萱後測的第 7 題，有別於前測她假設 a 、 b ，僅以拋物線開口方向和直線斜率來協助判斷，在後測時多用了拋物線頂點的概念，不再是將 a 、 b 以數字代入，而改由 a 、 b 的正負來協助判別，如圖 4-2-4。

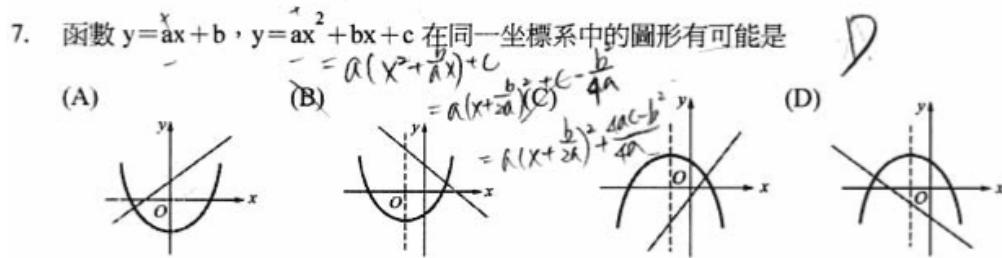


圖 4-2-4 萱萱在第 7 題的答題內容

在此提出一個方程式的例子，綾綾在解決第 15 題時，如圖 4-2-5 所示，前測似乎利用根與係數的關係來協助解題，但她反應說其實她也不確定能不能用，當算出結果後發現 k 居然是複數，她也嚇了一跳，在不確定答案對不對的狀況下，她也只好硬著頭皮將答案寫上去。但是在後測的時候，綾綾明確了解根與方程式的關係，而且在題目沒說明 k 是不是實數時，不能用虛根成對定理，誤把 $1-i$ 當另一根處理，因此，她選擇利用把根 $1+i$ 直接代入方程式的方式來求得未知數 k 該是多少。這一題有幾個學生都是使用相同的解題策略，可能是對複數的運算不夠熟悉，可惜在計算過程中產生錯誤，未能正確求解。

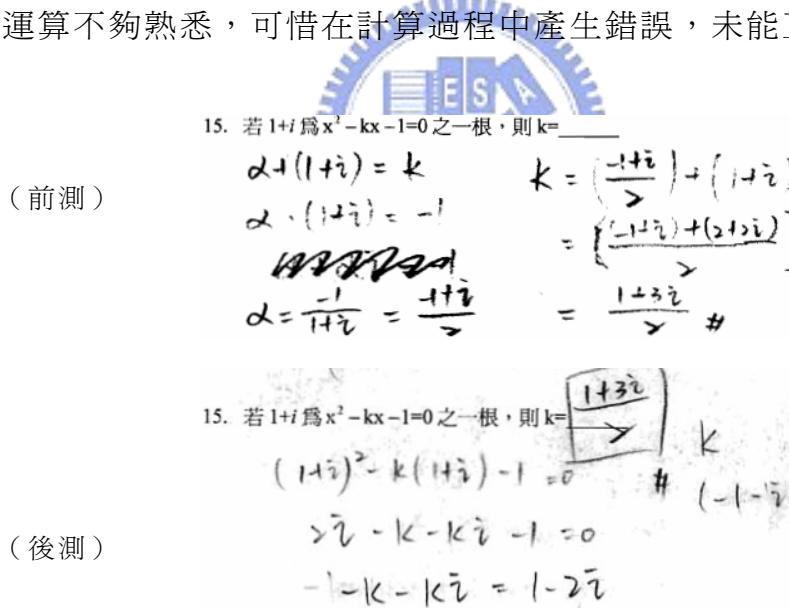


圖 4-2-5 綾綾在第 15 題的答題內容

4. 具有更多元之解題策略

以第 14 題為例，在前測時當學生已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 有一根為 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 時，雖有半數的學生直覺聯想到虛根成對，但確沒有人能正確完整解

題。而錯誤的原因有：利用根與係數的關係來運算，結果計算錯誤；利用已知根來寫出因式，而在使用長除法找其他因式時，錯讀商式而寫錯方程式的解；

作答時未依題意寫出所有解；僅知道方根式有另一根為 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ，沒有其他的解

題策略；欲代入求解，但發覺不是良方，故未作答；嘗試解題，但無有效方法，所以亂寫答案；直接放棄作答。

可是在後測中，研究對象沒有人放棄作答的機會，並努力嘗試求解。從學生的解題過程中，可以發現多數人能了解實係數方程式虛根成對定理，能理解

方程式必有另一根為 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 。解題的步驟中，有人利用根與係數的關係來求已

知解的二次因式；有人了解根的意義，利用這兩個根分別寫出一次因式進而寫

出二根之二次因式；有人直接利用 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 直接推出二次因式 x^2-x+1 。而在寫

出求已知根所得的這個二次因式之後，續而利用長除法、或直接觀察係數因式分解，進一步再求得方程式的其他解。

對所有學生而言，這次的教學刺激他們思考，努力嘗試成功解題的任何可能性，並激發他們就所學的部分有多樣的解題策略，不再只是代入試探便作罷，也不是直接放棄把問題擱著。由第 16 題的答對率來看，由原本的 27.5% 升到 67.5%，便是有力的證據。

5. 有較高的意願及興趣答題

在面對生活化的應用問題，或者是遇到比較少見的題型時，學生若缺乏經驗，無法自行施予解題策略時，可能會選擇放棄，在學習成就測驗中的第 11 題便是如此。第 11(1)題測驗學生對函數圖形平移的概念，使用了不是平常所接觸的描述方法，學生便無法去揣測「圖形平移第一次經過某點」的意義，甚至會因為太在乎這個點，而忽略了圖形平移的動作或方向。第 11(2)題把函數圖形往向東北方向移動，這不是學生習慣的方向，多數學生無法把它轉換化圖形同時向右移及向上移一樣多的距離，因此在前測中有 5 人直接放棄嘗試解題。可能受前二小題的影響，或者是無法去揣測題意中把函數圖形翻轉並把開口放大的動態呈現，第 11(3)題居然多達 6 人直接放棄作答。

以 DERIVE 來輔助學習的教學環境，使得學生有機會把代數和幾何圖形結合。學生曾經利用 Slider Bar 來使函數中的係數以參數的型式改變，而函數圖形亦隨之改變。這樣的經驗使他們較容易去模擬函數圖形動起來的樣子，也較容易把圖形的改變與函數式子的改變二者之間的關係連結起來。如此，當學生再次遇到類似問題時，他們會有較高的意願去面對，較有興趣去嘗試各種可能

解題的方法。像第 11 題這三小題在後測時直接放棄的狀況，明顯地比前測好很多，從先前直接放棄答題的總格數 11 格降低為 6 格，而各題之答對率也不再是前測時的 0%，皆在大家的努力嘗試下而攀升。

不過，在學習成就測驗後測中，研究者亦看到學生在解題過程中的缺失，這些都是身為教育者需要注意的項目，亦要設法協助學生補強：

1. 計算錯誤

在後測的測驗中，許多學生在解題的過程中有更明確之解題方法，相較於前測，研究對象自己本身會有更正確、更鞏固的數學概念。但很遺憾的是有些題目雖然學生有正確的解題策略，但難免有人會因計算錯誤而無法完全正確作答。這樣的錯誤在第 3、4、9、13、14、15 題中都有這樣的情形產生。

研究者認為利用 DERIVE 來輔助學生學習，可以藉由電腦將代數概念和圖像幾何連結，增加學生別於傳統教室學習的經驗；但是，電腦輔助教學並不能完全取代傳統教室教學。雖然繁複的計算可以讓電腦幫我們處理，而電腦的操作亦是由使用者的自我意識控制；但是，傳統教室教學是必要的，除了知識的授予，重要的是經由紙筆的運算，可以加深學生對所學概念的了解，並增加對數字的感覺，有助於觀察所得資料並加以邏輯推理，找出事物的數學模式。同時，紙筆運算練習的經驗增加，可以有機會讓學生減少計算所產生的錯誤。

2. 表示法不夠完善

在第 8 題中，研究者發現這樣的現象：學生可能會將多項式和多項函數二種概念混淆而不自知。在該題中希望學生能找出圖形平移後所得的新函數 $y=x^2+8x+14$ ，而 8 位研究對象中竟有 4 位以多項式 $(x+4)^2-2$ 的方式呈現答案。

(後測_小真)

8. 將二次函數 $y=x^2-2x+3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數

$$\text{誤 } (x+4)^2-2.$$

$$x-1$$

$$x-1$$

$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$$(x+4)^2-2.$$

(後測_小琳)

將二次函數 $y=x^2-2x+3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數

$$\text{誤 } (x+4)^2-2.$$

$$y=x^2-2x+3$$

$$(x-6)^2-2$$

$$y=(x^2-2x)+3$$

$$=(x^2-2x+1^2)+3-1$$

$$=(x-1)^2+2$$

$$=x^2-2x+1+2$$

$$=x^2-2x+3$$

$$=x^2+2x+2$$

$$=x^2+2x+1+1$$

$$=(x+1)^2+1$$

$$=x^2+2x+1+1$$

$$=x^2+2x+2$$

如圖 4-2-6，小真做完配方法後，直接以平移對函數的影響來解題，小琳則是將二次函數配方後，找出頂點，描繪圖形，經過平移的動作後，再利用新頂點找出新函數。二人皆有成功的解法，但是在作答時卻未以函數的型式出現。如此，表示法的不夠完善，必須從加強學生多項式與函數的概念，使學生能對兩者稍作區分，有利於未來其他數學概念之發展。

3. 誤將三次函數 $y=x^3$ 的圖形視為直線：

阿斌在所有學生中是屬於高分群，其在前測的時候能畫出 $y=x^3$ 的圖形，並且利用平移的概念來繪製 $y=(x+2)^3-1$ 的圖形，僅出現繪圖的小瑕疵，如圖 4-2-7 所示。可惜在後測時，阿斌找出 $y=x^3$ 上三點 $(-1, -1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 後，由於三點恰在同一直線上，故不加思索地認為圖形是一條直線。

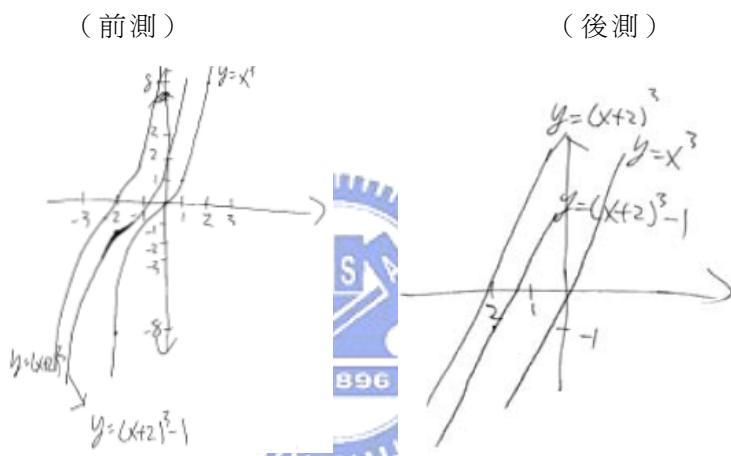


圖 4-2-7 阿斌在第 17 題的答題內容

同樣的情形也發生在綾綾的身上，如圖 4-2-8 所示，她在前測和後測中有同樣的作答情形。前測中綾綾點了三個點後，直接以直線來表示函數圖形。而在後測中，雖然綾綾也是將這個三次函數的圖形畫成直線，但從作答的擦痕中，可以看出她的猶豫。訪談中綾綾也表示自己因為沒有常畫三次函數的圖形，所以沒有很強的概念，加上測驗的時間因素，所以她也沒再多想，就把此題擱著。如果有充裕的時間，綾綾應該有辦法能順利完成三次函數的圖形。

綾綾：我不太確定耶～因為圖形的話，沒有常畫，然後沒有很大的概念。可能是應該是這樣講，就是圖形部份像我們常就是算算算，但是畫圖形的時候，有時候真得會遇到瓶頸，它是一個函數，就是利用 y 跟 x 軸的關係，然後我就知道它有很多點，然後就是像這樣去描點，然後看它的圖形怎麼變。可是時間沒有多到讓我知道每個點，它說不定突然有個點根本不是很規矩的在那裡。

老師：如果有足夠的時間的話，你一定可以讓它規矩的出來，是嗎？可以嗎？你覺得？

綾綾：要很久吧。我覺得這樣太沒有效率了，不行。

老師：所以，你就想說這一題先擱著，所以你先做其它的題目是嗎？

綾綾：對呀！《070117_訪談_綾綾》

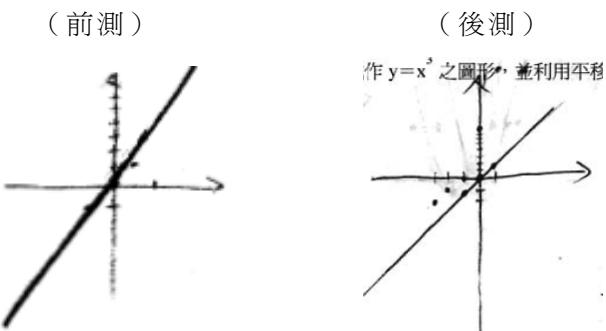


圖 4-2-8 綾綾在第 17 題的答題內容

在函數圖形方面，平常學生比較喜歡處理直線圖形，因此，若在處理次數是二次以上的函數圖形，學生可能會就自己喜愛的方式，直覺認知圖形。而平時教學若遇到同樣的問題時，教師可以提示學生再多畫幾個點觀察一下。

二、學生回饋

教學活動結束之後，研究者請學生填寫學生使用 DERIVE 學習回饋問卷，並以既定的半結構式訪談大綱訪談研究對象，來深入了解學生學習的狀況，作成訪談紀錄。

回饋問卷中有開放性問題，讓研究對象可以完整地以自己的言語敘述自己經過這幾次教學活動的心得與感想，亦有部分問題以 Likert Scale 的五點量表的型式呈現，詢問研究對象的感受，並提示研究對象可以以文字補充意見。表 4-2-3 呈現了回饋問卷中五點量表的部分，「非常同意」以 5 分計，「同意」以 4 分計，「沒意見」以 3 分計，「不同意」以 2 分計，「非常不同意」以 1 分計。從平均來看，每個提問皆有正面的回應：「對於多項函數 DERIVE 課程，我能瞭解老師講解的操作步驟」、「多項函數 DERIVE 課程可以將課本中難以展示的教材具體呈現，讓我更能瞭解多項函數的內容」、「我喜歡這一次的教學實驗。」……等，而且學生在多項函數 DERIVE 課程的學習過程中，不會反而無法專心上課。

表 4-2-3 學生使用 DERIVE 學習回饋摘要

問卷內容	阿 斌	萱 萱	綾 綾	阿 全	小 真	小 琳	小 穎	欣 欣	平均
1.對於多項函數 DERIVE 課程，我在電腦操作上沒有問題。	3	4	4	5	5	3	3	4	3.875
2.對於多項函數 DERIVE 課程，我能瞭解老師講解的操作步驟。	5	4	5	5	5	4	4	5	4.625
3.我覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習很適當。	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4.多項函數 DERIVE 課程可以將課本中難以展示的教材具體呈現，讓我更能瞭解多項函數的內容。	5	4	5	5	4	4	4	5	4.5
5.我喜歡這一次的教學實驗。	4	4	5	5	5	5	3	5	4.5
6.想到能利用電腦上數學課，我覺得很高興。	5	4	5	4	5	3	4	4	4.25
7.我喜歡多項函數 DERIVE 課程的設計。	5	4	5	5	4	4	3	5	4.375
8.我能適應多項函數 DERIVE 課程的教學方式。	5	4	5	5	5	3	3	5	4.375
9.在多項函數 DERIVE 課程的學習過程中，我反而無法專心上課。	2	2	1	2	2	2	3	2	2
10.在多項函數 DERIVE 課程的學習過程中，一遇到問題我會主動向老師或同學發問。	4	4	4	4	4	3	3	4	3.75
11.透過電腦與多項函數 DERIVE 課程的設計，對我在多項函數的學習上有幫助。	5	4	4	4	3	4	4	5	4.125
12.透過電腦與多項函數 DERIVE 課程的設計，可以引發我的學習興趣。	5	3	4	4	4	4	4	4	4
13.我會在其他課餘時間再將多項函數 DERIVE 課程再操作一次。	3	3	4	5	3	3	3	4	3.5
14.多項函數 DERIVE 課程的學習活動中，提供了許多讓我和同學一起討論的機會。	4	4	5	5	4	4	4	4	4.25

註： 5 非常同意 4 同意 3 沒意見 2 不同意 1 非常不同意

對於整個教學實驗的過程，從學生的回饋中可以看到學生所遭遇的困難與得到的收穫，研究者就以下分類來討論：

(一) 數學軟體 DERIVE 的部分

1. 由於本研究所使用的 DERIVE 軟體是英文介面，雖然有中文化的操作手冊輔助，但是學生還是會因為英文而感到苦惱，認為如果有中文介面的話，那就更完美，他們便可以更方便地使用 DERIVE。

◆ 如果改成中文版的話，那就太完美啦。《回饋問卷_小穎》

◆ 還不錯，此系統應該發行中文版。《回饋問卷_小琳》

◆ 對於使用電腦及電腦代數系統學習數學的方式感到滿意，如果都改成中文翻譯會更好！《回饋問卷_萱萱》

◆ 欣欣：操作上的困難，我記得～我每次都找不到拉霸要在哪裡用，就是英文嘛。

老師：就是英文～然後它又在功能裡面所以你會覺得比較困難？

欣欣：我會找不到。《070120_訪談_欣欣》

2. 關於 DERIVE 的操作，大致上學生都表示很容易操作，有工具列的按鍵及功能表的呈現，他們不需記太多的指令，而且在老師示範操作過一次後，學生大概都能學會，除非是比較複雜的狀況才需要教師的介入指導。以下為學生回饋的意見：

◆ 操作方面藉由老師的指導，基本上沒問題，操作介面並不困難。但遇到複雜問題時，使用上就需多嘗試。《回饋問卷_綾綾》

◆ 綾綾：如果基本的英文概念不錯，我覺得它還蠻容易的，因為它有所謂就是一般你會用到的軟體模式都有給你，你可能要輸入什麼然後它就會出現什麼，就是這還蠻簡單簡的。可是可能在圖形，就是有些操作上還是需要有熟悉這個軟體的人來指導你。

老師：我們那時候活動過程中有沒有下很多的指令？

綾綾：還好，就是按一按而已。

老師：按一按，然後東西就跳出來了，你就開始填東西，連輸入數字都很容易？

綾綾：對呀，它連符號在下面都有給你，就是你自己去找，然後點就好了。《070117_訪談_綾綾》

◆ 欣欣：很難學嗎？其實也還好，它畫圖形，大部份要用的功能都在那裡，然後就是～其實老師操作過一遍，同學看過大概就會了。《070120_訪談_欣欣》

3. 關於 DERIVE 的功能，大部分的學生覺得 DERIVE 的解題動作快，且其將代數與圖形結合，他們可以很快地畫出圖形來觀察。小琳提出不同的觀點，認為它沒有計算過程，覺得這個系統不夠好。DERIVE 在 6.0 這個版本有新增「step」這個功能，當使用者在進行微分、積分、不等式的求解、三角函數的化簡等問題時，可以一步一步呈現式子變化的重要概念，如此對學生的數學學習是有幫助的。不過，電腦倒不是萬能工具，可以列出所有數學問題的所有運算過程。雖然有如此遺憾，但研究者為學生使用 DERIVE 的過程，不僅是利用電腦來對答案，藉由他們自己的自主操作，亦是訓練他們數學思考的一種方式。以下為學生回饋的看法：

◆ 我喜歡這種方式。透過自己的操作來看，是能印象深刻的。《回饋問卷_欣欣》

◆ 阿斌：好用！可以畫出我們畫不出來的圖形。還有解題很快，解出它的 x ，把方程式解出來。可以把它（函數圖形）的嚴格遞增可以看得出來。就畫圖吧！畫圖比較有幫助！«070116_訪談_阿斌»

◆ 綾綾：因為針對這兩個單元，我覺得那個還蠻好用，而且除了我們有些圖形是我們，就是人工畫可能畫不太出來，而且畫得可能不太完美那種。(妳所謂的不太完美是怎麼樣？)就是很醜呀，然後根本可能沒有那個圖形的概念，可能那個點都描繪錯了，然後我們都不知道，只是覺得，就是我們描繪那個點覺得它是對的，但是其實出來的圖並不是真正完全是那樣子。

老師：我們比如說它經過(0,0)、經過(1,1)，然後我們可能會想像它是一條直線，可是事實上不是這樣子。

綾綾：嗯~就是有可能它並不是直線，它也可能是曲線之類的。«070117_訪談_綾綾»

◆ 這個系統說實話並不是很好，因為它並沒有計算過程，所以看到數學題目，腦中可能只浮現如何將題目輸入和如何控制電腦算出解來。雖然它有缺點，但它也有它的好處，例如：它可以用來對答案；此外它可以增強圖形的觀念，加快運算速度。«回饋問卷_小琳»

(二) 教學活動的部分

1. 學生覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習很適當。

◆ 在多項函數的部分利用 DERIVE 來呈現，在圖形方面是相當有幫助，會讓人更清楚了解。«回饋問卷_綾綾»

◆ 我覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習很適當，但不要讓學生習慣用 DERIVE 來解決問題。«回饋問卷_阿全»

◆ 輔助 OK，如果改成為主就不行。«回饋問卷_小琳»

◆ 這樣子可以令學生更清楚圖形的樣子。«回饋問卷_欣欣»

2. 在這幾次的教學活動中，學生就自己覺得對自己的學習最有幫助的活動設計，提出了以下的看法：

◆ 利用 DERIVE 來畫出函數圖形，藉由指令來呈現不同的函數，讓人可完整的了解圖形。«回饋問卷_綾綾»

◆ 都不錯。«回饋問卷_小穎»

◆ 最有幫助...圖形概念吧，用久之後，可能就不用藉由電腦，以後看到式子，腦袋中就有一個基本圖。«回饋問卷_小琳»

◆ 不論圖形上、概念上皆是。«回饋問卷_欣欣»

3. 對於教學活動的設計流程，學生提出了下列看法，認為循序漸進的引導可以讓學生不會亂了腳步；配合單元主題以學生沒看過的問題來舉例，可以刺激學生學習的意願。

◆ 我喜歡教學活動的設計，是循序漸進的，所以讓人學的時候不會亂了腳步。《回饋問卷_欣欣》

◆ 老師：你覺得這樣的活動上起來的感覺怎麼樣？你喜不喜歡這樣的活動？

綾綾：我覺得還蠻有趣的呀，就是可能擺脫掉，你可能平常為了準備考試，或是你不知道這個東西，然後你要馬上接受跟吸收。但是這個會慢慢引導你，可能從中間，因為它有一些，就是可能我們沒有在課本上面，你可以去操作的，你可以呈現它的樣子，然後讓你覺得其實數學還蠻好玩的。藉由一些數字的變化，然後就不是那麼死。《070117_訪談_綾綾》

(三) 其他參與實驗的感想

1. 以 DERIVE 輔助學習的教學環境下，小組愉快的合作學習有助於教學活動的進行。

◆ 在課程中，我們是以夥伴的方式進行學習，其中令我印象深刻部分是以文字敘述方式來表達對數學的某一概念。在這之中我們互相討論和分享闡述自己的想法，彼此合力完成教學活動的學習檔案，那樣合作的感覺，共同去完成實在很棒！《回饋問卷_綾綾》

◆ 老師：你覺得跟你的夥伴搭配的情形，或者是你們做這些教學活動的情形，你有什麼樣的感想？

綾綾：第一次我們一開始先試著，就是由老師先示範，然後我們去操作那個軟體。然後我們因為初次使用的關係，所以不懂、不知道然後就馬上會問對方。再來第二次的時候，我們就是寫~我比較印象，那個時候為了瞭解函數圖形，可能在某一些數字上的變化，然後看它怎麼變動。然後我們就會互相分享彼此的想法，寫下來。可能你自己寫了某些部份，然後他寫了你沒有寫的部份，兩個就會互相交換，然後就會知道說，原來還有這樣子的方法，或是還有這樣子的一個說法。《070117_訪談_綾綾》

2. 經過這幾次多項函數 DERIVE 教學活動，多數學生對數學的學習態度有正面的改變；少數學生則表示自己的學習態度沒有特別大的改變，仍然是挑自己喜歡的課題來聽。

◆ 這樣的數學的教學方式可以讓我自己用另一種來重新看待數學，數學不再是僅於課堂上的黑板數學，也可以有親自體驗的學習。《回饋問卷_綾綾》

- ◆ 因為這個程式還蠻上手的，所以對數學的好感度，多多少少有加一點。《回饋問卷_小穎》
 - ◆ 是，讓我知道原來課本計算方程式之外，還可以用電腦科技形式呈現。《回饋問卷_萱萱》
 - ◆ 是。我了解到：其實數學是要去了解的，而不是去背方式，在每題數學中，都有好幾種解法，所以不能只是背方法，要去想，這題在求什麼答案，有什麼未知數，那又能用什麼方式。《回饋問卷_欣欣》
 - ◆ 沒有特大改變，還是只挑自己喜歡的聽。《回饋問卷_小琳》
 - ◆ 老師：你覺得這次的教學活動對你學習數學的態度有沒有影響？
小琳：其實還好，我比較把它看成輔助工具，它沒有計算過程，它只有給你答案跟算式，沒有，就是題目跟答案，過程也沒有，態度改變應該沒有吧，就是可能頂多拿它來當作算解答的東西吧。《070119_訪談_小琳》
3. 資訊融入教學的新模式，使學生感到新鮮有趣，續而紛紛表示喜歡這次的教學實驗，很高興能參加這次的活動。
- ◆ 使用 DERIVE 的過程真的很有趣，大家其實都可以嘗試用用看，體驗數學不同的風貌。《回饋問卷_綾綾》
 - ◆ 其實做這實驗還挺好玩的，可以認識新朋友。《回饋問卷_小琳》
 - ◆ 自從學了 DERIVE 課程了解以後畫圖不用那麼麻煩，還可以對數與座標系了解，讓我學習數學的方式又更上一層樓，有更深的了解。《回饋問卷_萱萱》
 - ◆ 經過這次教學之後，我對函數、多項式方程式等都有更進一步的了解，可是平常在做題目的時候，還是有些題目要怎麼算也不是很知道。《回饋問卷_欣欣》
 - ◆ 我喜歡這一次的教學實驗，是一個很有趣又可以增加概念的機會。《回饋問卷_欣欣》
 - ◆ 這算是我第一次接觸數學軟體，感覺很新鮮，也可以培養夥伴的默契，讓我感受到數學也可以那麼好玩，像單元二的方程式，能快速的解出答案，又能展現出圖形，還有老師一步一步的講解，使我們能體會到其中的樂趣及方便性，也很高興參加這次的活動。謝謝！《回饋問卷_阿全》
 - ◆ 阿斌：這次感覺很新奇，因為圖的呈現還有你可以跟伙伴培養默契，還有也第一次接觸這種軟體，所以像很多就電腦可以幫我們解出一些我們幾乎都不會碰的題目，還有知道一些方法，可以做圖，做方程式怎麼解的方法。《070116_訪談_阿斌》
 - ◆ 綾綾：其實，我數學還蠻爛的，上高一的時候第一次碰到數學，就好~好~認真碰它，就覺得還可以啦。那可能中間就遇到一些，可能自己本身對數學就沒有太大

的敏銳度，就某些部份可能比較不好。然後後來其實這個活動，我一開始聽到可能就覺得還好，但是聽到有同學在討論，然後就覺得可以去嘗試看看，去看一下說，就是藉由這個方式再去玩一下數學。因為其實我沒有那麼討厭它，我並不是討厭它，因為像，不會那就算了，我會繼續學。這次的活動還蠻好玩的，除了一般課程上面的東西以外，還有跟夥伴之間的互動，不僅僅是跟我這一組，就是我們本來認識的同學有一起玩，使用以後我們還會再討論，你回家之後有沒有試試看？你剛才用了什麼東西怎麼樣？感覺是什麼？還有除了我們會進行前測和後測部份，還有一些是我們自己手寫的地方，就覺得說自己也可以寫出這些東西，對數學的概念也有更深一層的瞭解，不僅僅只是在算數學而已。你可以藉由這次數學這些概念，然後寫出一些文章，在數學上寫文章(寫數學的文章)，對呀，其實還蠻好玩的。«070117_訪談_綾綾»

4. 資訊科技的進步，使得抽象的數學概念可以較容易地具體呈現，克服傳統教室教學中的不足之處，可以多量並快速地來看平時不敢舉例的複雜式子，可以確實繪製平時覺得花費時間多或難以呈現的二維圖形和三維圖形……等。值得深思的是，資訊科技可以融入教學，但是不能完全取代傳統教室的教學。數學概念仍是需要傳統教室教學的方法來穩固學生建構知識的基礎，資訊科技可以是輔助學習的工具。

◆ 如果此程式正式編入使用，應排課適當，不要造成過度依賴。«回饋問卷_小琳»

◆ 老師：你覺得我們可以這樣一直依賴電腦嗎？

綾綾：不行吧。因為太依賴就等於我們根本就沒有去真正了解數學。«070117_訪談_綾綾»

◆ 老師：如果我們高中每一節都這樣子上你覺得怎麼樣？

阿斌：最好是有畫圖的再用比較好，假如每一節上的話，就…有一點麻煩。這樣畫圖的話就不用在黑板上畫圖，就可以先準備好，可以直接呈現出來。«070116_訪談_阿斌»

◆ 老師：可是我們可不可以依賴它，你覺得？

小真：不可以。因為考試不能用電腦，還是要靠自己呀。«070119_訪談_小真»

◆ 老師：偶爾來上一堂多項式，你覺得其實對你的幫助還蠻大的？

阿全：對呀！

老師：有沒有可能每節都這樣子上？

阿全：其實每節都這樣子上也不太好，因為通常如果用這種軟體，就是便利性的軟體，會讓你覺得以計算便利的軟體，在亞洲國家來講的話，我是覺得說，最好是到高中或是大學再去用這些，因為你在國中跟高中剛開始不久的話，你根本其實上運用不到這麼複雜的東西，所以說就用手算，實際上重點是因為說，為什麼亞洲人去考試就只能帶著人去然後還有一枝筆，歐洲還有美國人就可以帶著一大堆書還有字典，連計算機都可以。實際上那個意思是說，亞洲是因為人太多，就變得說，如果我的公司要錄用一個人，我要幫他計算東西，我總不可能叫他我也要買一台電腦給他吧。那當然這樣，你的腦就等於電腦啦，因為人多我有選擇性，有錢人有選擇性，你重點是你也要閒呀(所以就變得說你要自己……)你就要比那個電腦還要強呀。

老師：你要比電腦還要強，最起碼就是你自己要有能力，就算有電腦的話也要有能力去使用電腦，所以呢？我們也不可能每一堂課都這樣安排對不對？這樣安排的話恐怕不太適當。

阿全：因為不能讓學生去習慣那個便利，應該是讓他說如果不便利的情況下他要怎麼辦？因為讓他便利的話，他就常常會說什麼事都要計算機。有一次我也是，好像小學五年級有一次什麼事都拿計算機，我爸就在唸呀，然後就有一次我突然拿到筆，嘆~這東西怎麼手寫不太行。這個要怎麼算，然後想一想，回溯最基本乘法，嘆~怎麼會有這種情況。

老師：電腦這樣的軟體只能當作是一種輔助。

阿全：不要讓他產生依賴性。《070115_訪談_阿全》

以上是研究對象在教學活動進行後所給予的實質回饋，於學生使用 DERIVE 學習回饋問卷中呈現，或者是在訪談中與研究者對談時真實說出自己心中的想法。對於學生所給予的寶貴意見與感想，研究者忠實地以學生的說話呈現，而以學生為主體的學習，這些真實的感受與想法，都將是未來研究者利用 DERIVE 來發展數學教學素材以及輔助數學教學的重要參考。

第三節 教師成長

研究者曾接觸其他數學軟體，也會有過以數學軟體 GSP 輔助教學的經驗，但是使用 CAS 數學軟體來輔助教學進行研究是第一次的經驗。在本研究的整個過程中，研究者難免會遭遇困難，亦有令人欣喜的收穫，希望在進行檢討後，

對未來同樣以 CAS 數學軟體來輔助教學的教師能有幫助。

一、數學軟體的接觸與熟悉

研究者大學時曾接觸電腦代數系統數學軟體 *Mathematica* 和當時剛引入國內的動態幾何系統數學軟體 *GSP*。後者在這十年間日漸普及於數學教育界，不論是高中、國中、甚至是國小，有心的教育者利用它發展教學素材以輔助教學。而前者較盛行於大學階段，用以輔助解決較艱深的數學問題，但是，有關 *Mathematica* 的操作方式，當年熟悉其操作方式的研究者在久未使用的狀態下，仍是需要時間練習才能熟悉它的指令。

研究者於交大修讀碩士的期間，認識了更多可幫助數學學習的軟體及素材，發現在中等教育以下甚少有人利用 CAS 來輔助教學。本研究使用 CAS 軟體 *DERIVE* 來輔助學生學習，最主要除了要了解 CAS 應用於中等教育之數學教學的可能性，研究者亦看中此軟體之操作便利，且容易上手，可以協助教師營造環境讓學生進行數學的摸索及探究。

對於資訊融入教學，不管是教師還是學生，遇到的第一問題即是軟體的使用方式。研究者在第一次使用 *DERIVE* 時，覺得這樣的軟體很好使用，不會太難學，比較特殊的指令需要軟體的說明來輔助，大部分的功能都可以經由自己的嘗試中學習。此外，研究者於 2005 年 11 月 19 日於研究者服務的學校對校內高中部數學教師進行一次以 *DERIVE* 研習，在大家具有相當的資訊能力下，簡單說明後教師自己使用 CAS 數學軟體 *DERIVE* 應該是不成問題。而大部分教師的問題則是：「用這個軟體要怎樣上課？」、「往後的學生是不是拿它解決問題就好了？」、「學生以後是不是就不用計算了？」研究者對此的省思，認為數學軟體不該只是幫忙使用者做求解的工作，也不應該只是單純論證結果的工具，遂努力思考 *DERIVE* 應用於高中教學的可能性。

事實上，研究者也曾經心生徬徨，思考著：「學生看到英文軟體可能不太會用、或者是不喜歡用。」、「教學時間不夠，我真的可以做好資訊融入教學的工作嗎？」、「該怎樣做才能讓教學活動順利進行？」、「該怎麼樣協助學生建構數學知識，完成學習目標？」。縱使心中有許多的不確定，仍是漸漸釐清方向，在自己更加熟悉 *DERIVE* 後，為了克服學生使用 *DERIVE* 時可能會產生的恐懼，製作 *DERIVE* 的中文操作手冊；進一步設計學習單時，努力去思考 *DERIVE* 對教學上的幫助及其價值，希望在學生的自主學習中激發其學習數學的興趣，也從中建構正確的數學知識。

教師在面臨新型態的教學時難免會心生恐懼，但是，教師的教學熱忱是足以克服這些恐懼。以學習目標作為學習單的設計指標，不單單是從教師的角度出發，亦要從學生學習的角度來思考。教學以學生為本位，學習的主體是學生，因此，學生可能會遇到的瓶頸及困難都是教師需要考慮的關鍵，而這些也只有具教育熱忱的教師才能做到這一層次的考慮。

二、教學環境的限制與壓力

利用 CAS 數學軟體 DERIVE 來輔助教師教學及輔助學生學習，固然是不錯的想法與理念，但是在現實的教學環境中，教師仍是會面臨教學環境的限制以及間接引發之壓力。

1. 電腦教室借用不易：實驗學校高中部共有 27 班，而可用的電腦教室僅有 1 間。平日白天有資訊課程使用電腦教室，夜間亦有補校學生使用，因此教師若欲於數學課或課餘時間安排全班共同上機使用學習，其實是很有難度的一件事。倘若真的很想利用資訊科技呈現給學生了解數學概念時，可以由教師親自操作，於普通教室單槍投影給學生觀察理解。如此，可以利用 DERIVE 來改善平日教學無法呈現的部分，但卻也多了學生無法親自操作而完全自主學習的那一份遺憾。
2. 電腦教室的秩序管理不易：從傳統教室中到電腦教室學習數學，這對學生來說是新體驗。不過，教師必須面對的第一件事，便是要收拾學生玩樂之心，讓學生可以馬上進入學習狀況。對於高中生而言，上課時間上網玩遊戲或是利用即時通訊和其他人聊天都是教師於電腦教室教學可能遇到的情形，如此當然會降低學生學習的效果。若要做好教學秩序的管理，教師除了可以透過教師電腦來監控，亦可增加教室巡視的頻率，讓學生可以減少分心的機會，也可以檢視和協助學生的數學學習。
3. 教學時數有限：本研究為了補強學生對軟體操作的熟悉度，在教學活動前進行了二次的 DERIVE 電腦教學課程，且於暑假期間進行教學活動。但若思考 DERIVE 在平日教學的適用性，教師必須注意教學時數有限。若教學時數多數花在數學軟體的操作熟悉時，那就遠離我們資訊融入教學原本的意涵，對學生數學知識的建構有限！若欲克服此問題，可以僅協助學生學習必要的功能即可；但最佳的解決方案則是和生活科技教師協同合作，軟體部分由資訊教師來教授，這樣數學教師可以在利用 DERIVE 教學時，使學生更聚焦於數學概念的養成與建構。

4. 教學進度所帶來的壓力：研究者身為高中教師，平時教學進度緊湊，平均每一週一定要有課本教材一小節的進度，每當學校有其他活動時，教學進度便成了教師們最大的壓力。至於資訊融入教學這樣的課題，教師們不願意接觸的可能因素，除了對教師而言它是新東西需要時間學習，再則最重要的因素即是教師有教學進度的壓力。傳統的教室教學是必要的，過度逢迎資訊教學是不恰當的；但如果教師先於教室教授重要數學課題及概念，打穩學生學習目標的基礎後，再以 DERIVE 來補充不足之處，或交由學生於課後自行操作、觀察學習，這樣不但可以減少一些教學進度可能會造成的壓力，也可以擴增學生學習數學知識的視野、感受有關數學的新鮮體驗和數學魅力、增加學生學習的興趣與動機。

三、教學活動的省思

本研究教學活動所選用的單元為「多項函數的圖形」和「多項方程式」，而實驗對象為 94 學年度入學之高一學生。他們在國中階段完全沒有學過函數概念，雖然教育部為了銜接國中數學和高中數學課程進行 36 小時之數學銜接課程，函數為其中之重要課題（洪有情等人，2005），但學生對函數概念之了解有限。經過高一上學期之函數及多項式教學，學生能漸漸了解其中意涵。

本次教學活動可以說是研究對象對此範圍之數學概念的再次接觸。對於常數函數和一次函數的概念和圖形意義，學生能非常熟稔；二次函數的概念，學生亦能從活動中強化自己過往已學習之經驗；多次函數的概念則是學生較不熟悉的課題，但是 DERIVE 輔助他們有機會去深入探索自己較不知道的數學知識。在教學活動循序漸近地引導下，學生多能適應電腦輔助學習的學習模式，過程中學生多能利用現有的概念寫出函數的意義、舉例、求出函數值，並畫出函數圖形，亦能利用 DERIVE 驗證結果。除了基本概念的鞏固以外，研究者在學習單中設計進階的發展性問題，例如安排學生去觀察函數係數改變對函數圖形改變的影響，學生經由自己的操作、觀察、追蹤、探索去作概念連結，由自己的主動學習，推論出的問題結果，挑戰了多次函數問題的學習。研究者發現以 DERIVE 輔助學習的教學活動可以不僅是鞏固強化學生已學之數學概念，若有恰當的學習單輔助，在教師的鼓舞下，學生能自我循步探索，並更有自信亦更感興趣去挑戰新問題，親身體驗了數學規律的發現與發展過程，刺激發展了他們對數學的視野，數學不再只是枯燥的公式與證明，而是生動的探索發現過程。

研究者在設計單元二的活動時，希望從教學實驗中能看到學生能利用 DERIVE 作為論證示範的工具，亦希望看到其解決生活問題上之應用，讓學生能體驗有別為傳統教室教學的新經驗。單元二的活動一由應用問題引入多項方程式，學生面臨現實世界所遭遇的問題，把問題成功轉化為數學代數式，除了直接利用 DERIVE 來驗證自己所求之解，當學生遇到多次方程式且教師要求他們不能直接使用 DERIVE 直接求解的功能時，研究者看見學生利用已習得的數學概念來操作軟體，以因式分解、一次因式檢驗法、或是因式定理等想法來嘗試多項函數的運算，研究者感到非常欣喜。不論學生是否順利完成問題解決，當他們以數學想法去構思、去嘗試他們的解題策略時，便是建構數學思維的一種過程。以往在課程教學時，教師較難以舉例的部分，在活動二中學生經由 DERIVE 的使用，強化了學生對代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理的了解，甚至可以藉由電腦輔助，學生自己探索傳統教室中不可能拿來佐證的實例，如複係數多項方程式。研究者認為 CAS 軟體有其強大的功能，除了利用它來探索數學問題，在它的輔助下，電腦可以成為教師展現數學魅力、揭示數學本質、激發學生數學興趣的重要教學平台。

整個教學流程為了降低研究對象個體可能因不熟稔軟體的操作而導致教學實驗的延宕，因此採取分組的方法。實驗開始時研究者較擔心小組分組合作是否真的能完成合作任務，尤其四組中有三組是由不同班級的學生組成，加上第一次利用 CAS 數學軟體來輔助教學，研究者的心情會有些焦慮，所幸整個教學流程大多都能依教案設計的時間進行，而學生合作的情形比研究者想像來得佳。研究者發現小組合作對象是否為同班這對高中生來說是不成問題，能完成合作任務最主要是與學生的積極參與程度及對教學活動的興趣有關。實驗中第三組學生參與活動之熱度不大，即使合作學習的夥伴是同班同學，研究者發現雖然他們完成合作任務，但對學習單的指引觀察也僅是淺嘗輒止。然而，教師的角色真的很重要！在研究者的鼓勵及引導下，增加學生的學習自信心、引發學生的學習興趣，使其學習態度有正向的改變，有較高的意願去接受新刺激，努力達到學習目標。

四、學生回饋帶來的省思

第一次使用 CAS 數學軟體來輔助教學，對於未知的實驗結果總會感到憂心，而從學生的回饋表現，使研究者增加往後資訊融入教學的信心與動力。學生表示喜歡這一次的教學實驗，對這樣的新模式感到新鮮有趣，能適應以

DERIVE 輔助學習多項函數的教學活動，喜歡教學活動循序漸進的設計，覺得這樣的課程可以將課本中難以展示的教材具體呈現，使他們更了解多項式的內容。這樣的回饋使研究者感到非常欣慰，覺得教師的用心和苦心能有學生的專心、熱心來回應，除了加強教師教學的信念，亦將此次注入的新活力轉化為下一次設計活動的動力。

然而，如同學生的感受，偶爾從資訊科技來刺激學生的數學學習是不錯的想法，但若欲將教學全面以電腦輔助教學來取代，則是不恰當的做法。研究者覺得數學概念仍是需要傳統教室教學的方法來穩固學生建構知識的基礎，資訊科技可以是輔助學習的工具。比較現實的一點即是考試引導教學的社會趨勢，學生本身必須具備數學能力，不能完全依賴電腦。當高中生使用電腦來輔助學習時，教師不該只是著重於學生是否能成功解題，或者是電腦操作技術是否熟練，而是該著重於學生是否主動參與學習和強化概念間連結及建構的過程。

五、未來的自我期許

過去研究者以電腦輔助教學的機會或許不多，但這次的教學研究給予研究者很大的體驗。不管是什麼樣的軟體，都必須在恰當的時機使用它來輔助教學，教師用心去思考教學課程的設計，付出教育熱忱與心血，學生一定能直接感受！引發學生的學習動機後，在教師的引導下，一步步啟發學生的數學思維，學生之概念養成可以在教師的協助下完成。或許在高中的教學環境中，教師會有教學進度的壓力和教學資源的限制，但是如果能讓學生對數學有新鮮感和興趣以及刺激學生產生數學學習的機會，亦是教師所樂見其成。研究者亦將以此自我期許，期望除了傳統教室教學的知識傳授，能引入資訊科技的輔助開拓學生的數學視野。

第五章 結論與建議

本研究乃是將數學軟體 DERIVE 應用於高中數學的教學研究，探討在進行「多項函數的圖形」和「多項方程式」二個單元活動後對學生數學學習的影響。以下依據研究結果歸納結論，並提出對未來教學研究的建議，作為未來相關研究之參考。

第一節 結論

本節主要根據學生學習歷程、教學實施後之影響及教師成長的研究分析結果進行歸納與整理，針對多項式概念的學習，探討數學軟體 DERIVE 應用於高中數學教學的可行性，以及使用數學軟體 DERIVE 的輔助學習對學生學習多項式概念之影響。

研究問題一：使用數學軟體 DERIVE 應用於輔助高中學生學習多項式概念是否可行？

從研究結果發現，在教師設計合適的學習單循序漸進地引導學生學習的狀況下，DERIVE 免除學生作單調繁雜的計算，讓學生有更多的時間去作數學思考；當 DERIVE 使得抽象的數學變成可以具體操作時，平日學生比較難解的問題，甚至是容易放棄的難題，在 DERIVE 的輔助下，學生得以延續心中的解題策略來鑽研問題，而 DERIVE 的操作容易，讓學生有探索較具深度之數學概念的機會；有別於傳統教室教學的呈現，除了給學生帶來新鮮感，亦激發學生學習數學的興趣。本研究以 DERIVE 來輔助教學的模式，學生反應可以適應、接受這樣的模式，並不會因此而無法專心，且依學生學習成就之前後測的整體結果以及學生給予的回饋，研究者相信數學軟體 DERIVE 應用於輔助高中學生學習多項式是具可行性的。

以 DERIVE 來輔助教學，支援教師呈現平日較難呈現的部分，例如以多量實例快速論證代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理；教師為學習目標設計合適的學習單，在學習素材的循序輔助以及教師適當地介入引導，資訊科技可以創造有利培養學生的自主發現和自主探索的機會。教師將 DERIVE 融入教學，除了要有接觸與熟悉數學軟體的心理準備，還可能會遭遇教學環境的

限制與壓力，如：電腦教室借用不易、電腦教室的秩序管理不易、教學時數有限、教學進度所帶來的壓力。而教師的教學熱忱及努力付出是足以克服這些恐懼，在教師努力規劃經營下，必能藉此展現數學魅力、揭示數學本質、激發學生數學興趣。

DERIVE 的輔助學習，學生可能只注意到電腦呈現的結果，未能切中問題的要義；DERIVE 能快速呈現代數式的圖形，但是學生可能在解讀圖形時會有迷失概念，影響其接續對代數式之數學意義的判定。教師必須了解 DERIVE 不該只是學生驗證答案的工具，應該是學生的學習輔具，於適當時機以適當方式輔助，且教師有義務在旁做適當的介入與引導，協助學生數學概念的養成。此外，教師的口頭鼓勵及提示，讓學生有方向且有信心去進行探索試驗的動作。

研究問題二：使用數學軟體 DERIVE 的輔助學習下，對學生學習多項式概念有何影響？

關於多項式的學習，在以 DERIVE 輔助學生學習的教學環境下，學生有不錯的表現。依學習單中的提示，觀察函數圖形的各種性質，皆順利產生正確的認知，且皆能利用 DERIVE 的功能，來追蹤函數上的點來做細部觀察。DERIVE 的輔助學習，讓學生可以將多項函數的代數表徵和圖形表徵作一連結，來觀察、類比、推論出圖形的發展趨勢與其代數式之間的關係。藉由電腦的輔助，減少計算的時間，使得學生可以全專注於數學概念的建構，且有更豐富的推論。面對四次以上的方程式，學生解題明顯有困難，而 DERIVE 的輔助使他們能利用自己的想法去操作軟體，使得平日利用紙筆運算的他們，DERIVE 的輔助延續了他們心中的解題策略，完成較艱深問題的問題解決。

從學習單的設計輔助，研究者發現學生表徵之間的轉換，代數轉換到圖形會比圖形轉換到代數容易；學生可以容易地利用求函數值的方式來描點並畫出圖形，但若要以圖形來找出函數，或者是圖像的變化來直接與函數作一連結，對學生而言會比較困難。在觀察代數表徵和圖形表徵的關係時，學生可能有不合適的類推，或者對 DERIVE 呈現的結果有誤解，此時，教師必須做適當的介入指導。

從學習成就測驗前測和後測之答對率來比較，不論是全體還是個體，後測的結果皆比前測的結果來得佳。同時，在經過本次的教學活動後，學生有較高的意願及興趣思考解題策略來嘗試解題，減少了直接放棄解題的情形。就內容而言，學生的先備知識更為強化鞏固，具有更有效、更精確、更多元之解題策

略。然而還是有些問題存在，如：計算錯誤、表示法不夠完善，這些都是需要傳統教室教學來增強學生的數學概念與計算能力。此外，平常學生比較喜歡處理直線圖形，有學生面對三次函數 $y=x^3$ 時，取出三點 $(-1, -1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 後，即將圖形視為直線，可能是 DERIVE 的負面效果，讓學生不想多花太多時間取點、描點、並驗驗之，直覺地認為圖形該是如此。

不可否定的是將數學軟體 DERIVE 適當的融入於數學教學中對學生的學習興趣具有正面的效果，而且容易操作的軟體更使得學生能有機會探索更深的數學概念，讓他們在這方面有更多的喜悅。儘管如此，研究者認為資訊科技可以融入教學，但是不能完全取代傳統教室的教學。數學概念仍是需要傳統教室教學的方法來穩固學生建構知識的基礎，數學軟體 DERIVE 可以是輔助學生學習的良好工具。

由於本研究以行動研究為研究主體，以下研究結論的陳述主要是從研究過程中觀察所得的細項結論，分成數學軟體 DERIVE、教學活動、學習成就測驗前後測之比較、學生回饋四個部分來說明：



一、有關數學軟體 DERIVE 的部分

(一) 觀察學生對數學軟體 DERIVE 的體驗，發現令人感到雀躍的結果：

1. 學生的專心投入學習
2. 顯示利用 DERIVE 來學習之長處
 - (1) 輸入方便，容易上手
 - (2) 節省計算時間、增加思考空間
 - (3) 功能之視覺化有助於學生之探索
 - (4) 數形結合，使學生有機會去接觸課堂上少見的例子
 - (5) 激發學生的學習興趣

(二) 以 DERIVE 輔助學習，學生在操作上或是在概念理解的部分，也可能會遭遇一些困難：

1. 英文介面會使學生畏懼，中文化的輔助說明對學生來說是重要的。
2. 學生的數學概念不夠，可能會誤以二維畫圖視窗來畫三維圖形。
3. 學生對 DERIVE 操作的熟練度不夠，可能誤取不恰當的表示式來進行學生想要做的動作。
4. 學生信心不足，可能會中止進一步的探究。

(三) 以 DERIVE 來輔助教學時，有一些現象教學者必須要注意：

1. 教學過程中，學生可能有認知上的迷思概念，應隨時予以修正。
2. 使用 DERIVE 的過程中，教師應給予適當的協助及鼓勵。
3. 教師應注意教學秩序的管理。

二、有關教學活動的部分

(一) 關於多項式的學習，在以 DERIVE 輔助學生學習的教學環境下，學生有不錯的表現。

1. 教學實驗剛開始時，學生需要時間來熟悉 DERIVE 中對函數的定義方式，由於以常數函數出發，學生很快熟悉操作並進入狀況，而且花費時間比研究者所預計的時間來得少。
2. 學生對於不熟的指令，在二人合作下能成功地依學習單中的提示，以序對的方式同時找到函數的多組對應。
3. 觀察二次函數圖形的對稱性、開口方向、開口大小、最高點或最低點時，學生皆順利產生正確的認知，且皆能以追蹤 (Trace) 的方法來找到函數的極值，也能利用配方法來找到頂點的所在處。
4. 多次函數的探索是課本較沒出現的教材，要學生直接描繪函數圖形是有困難的。藉由 DERIVE 的輔助繪圖，學生可以輕易地經由追蹤動作來了解函數遞增或遞減的趨勢、體會函數連續不斷的樣子，成功地描述函數次數的改變對函數圖形可能的影響，圖形「轉彎」的狀況可能隨次數的增加而愈來愈多。
5. 多項函數的活動中，研究者大膽給予學生一個函數圖形，希望學生能找出其函數。教師告知答案可能不是唯一，但鼓勵學生去推測其可能性。單就學生的數學能力，能從圖形中觀察幾個特殊的點來推測函數的可能性，在 DERIVE 的輔助下，學生實際去檢驗自己找到的函數，並加以修正，成功地找到一個具代表性的函數。
6. 紿予學生已具因式分解型式的方程式，學生很容易去解方程式。但若不具因式分解的型式，則次數越多的狀況，學生越難求解。在方程式求解的過程中，學生知道可以利用公式解、一次因式檢驗法、因式分解等動作來協助求解，遇到三次方程式，學生尚能有有效的解題策略。面對四次以上的方程式，學生解題明顯有困難，而 DERIVE 的輔助使他們能利用自己的想法去操作軟體，以完成較艱深問題的解題動作。

7. 在學習單的輔助下，利用 DERIVE 學生嘗試多量的試驗動作，來真實感受代數基本定理及實係數多項方程式虛根成對定理，不再只是依靠教師的講述傳授，而是以真實的例子來看抽象的定理。

8. 整個教學活動的過程中，對於有強烈學習企圖心的學生而言，DERIVE 的輔助學習讓他們有更深入的觀察並加以記錄，使得他們有更豐富的推論。

(二) 關於多項式的學習，學生在教學活動中會有一些概念混淆或不解的狀態，教師應給予即時的澄清。

1. 澄清多項式的概念，加強學生對零多項式與零次多項式的區別。

2. 對學生加強有關函數「一般式」的概念。

3. 第二組學生觀察二次函數的圖形，寫下了這樣的特徵：「皆為拋物線，都有 2 個解，不一定是實數解。」可見得二人將函數和多項方程式的概念混淆，教師應協助她們釐清數學概念。

4. 觀察函數圖形時，教師必須對學生加強有關嚴格遞增的「嚴格」是何種數學意義。

(三) 為了使學生能達成學習的目標，教師可以作適時的介入與引導。

1. 黃誌偉 (2005) 認為 CAS 圖形本身沒有對錯可言，它只是個技術限制下的產物。當所呈現的圖形造成觀察者知覺上衝突時，就會產生視錯覺，此一現象為觀察者知覺所產生的。本研究中改變一次函數 $f(x) = ax + b$ 中的 b ，學生可能會有迷思概念存在，將 b 的變動想像成會移動 y 軸上的點而非圖形做上下平移，或者是認為當 $b > 0$ 時直線會往右， $b < 0$ 時直線會往左。此時，教師應該即時引導學生作概念上的修正。

2. 學生會以「斜直線」來描述一次函數的圖形，教師可間接引導學生去聯想改變一次函數的領導係數對圖形的改變及對直線斜率的影響。

3. 當學生在觀察函數係數的變化對其圖形的影響時，可提醒學生記錄下控制變因（保持不變的要素），再就操縱變因（持續改變的要素）來觀察、分析、類比、推論。

4. 學生利用追蹤的功能來觀察函數圖形上的點時，教師可以提示學生注意點的移動速度，並進一步思考其數學意義，了解曲線的變化程度。

5. 當學生以 DERIVE 協助解平日較少接觸的問題時，教師應在旁多賦予口頭鼓勵及提示，讓學生有方向且有信心去進行試驗的動作。

6. 為了擴展學生對多次方程式的求解探索，當學生完全苦無對策的時候，教師適時的介入協助是必要的。

7. 當學生使用電腦時，有些觀察他們可能會淺嘗輒止，此刻需要教師適時的導引及鼓勵，才能有機會刺激其他有關數學思考的行為，啟發數學思維。
8. 對學習成就較低的學生，可以多鼓勵他們可以用文字敘述的方式來寫下他們所觀察到的現象。

(四) 關於教學活動的設計，應就學生學習的狀況及偶發事件的情形，給予立即性和即時性的修正。

1. 常數函數是學生較熟稔的概念，學生能成功將函數和其圖形連結，所花教學時間沒研究者原本想像的多，所以在教案的設計可以縮短此活動的時間。
2. 提醒學生在追蹤觀察多次函數圖形的遞增遞減時，可以把自變數的範圍分割，真實地描述 x 在哪個區間呈現遞增、在哪個區間呈現遞減，此舉將對學生自主學習的觀察與發現有很大的助益，對未來函數之極值與極限問題能有機會理解，不再只是概圖的簡單描述。
3. 當學生的學習意願不高時，教師仍是要秉持用心、關心和愛心來鼓勵學生，鼓勵他們並指引他們學習的方向，增強他們學習數學的自信心。
4. 平時若是利用課餘時間以 DERIVE 輔助教學，當學生有主動要求再多一點時間給他們觀察的時候，教師不妨順應學生之意，或許在學生自由意願下的探索與學習，可以激出不同的火花！



三、有關學習成就測驗前後測之比較

(一) 從學習成就測驗前測和後測之答對率來比較，不論是全體還是個體，後測的結果皆比前測的結果來得佳。同時，在經過本次的教學活動後，學生有較高的意願及興趣思考解題策略來嘗試解題，減少了直接放棄解題的情形。

1. 就學習成就測驗前測和後測之答對率來比較，全體平均答對率由前測的 36.375% 提升至後測的 58.5%。
2. 就學習成就測驗前測和後測之答對率來比較，每個學生的答對百分比都相對提高，後測的結果皆比前測的結果較佳。其中以阿全進步最多，個人答對百分比增加 50%；欣欣、小穎增加 36%、30% 次之；小琳、阿斌、萱萱、綾綾分別增加 18%、14%、13%、13%；而小真則是增加 3%。
3. 阿斌和萱萱在前測中即是屬於高分群，因此增加的幅度可能有限，而教學活動中和他們搭配的低分群同學欣欣（第一組異質組）、小琳（第二組異質組）在後測的表現中也優於前測，增加不錯的答對百分比。

4. 前測實力相當的四個中分群同學若以組別來看，第三組的阿全和綾綾較有學習企圖心來參與本次的教學實驗，他們進步的幅度比第四組小穎和小真進步的幅度來得大。
5. 比較學習成就測驗前測和後測各題之答對率，有 17 格之答對率為正成長，表示教學活動對研究對象在學習多項函數及多項方程式時，有正面的幫助，**DERIVE** 的輔助學習確實有助於學生代數概念的成長。
6. 依照 8 名研究對象的答題狀況來看學習成就測驗前後測的不同，發現學生作答正確無誤之百分比由 28.7% 增加為 49.4%，學生未能得分之百分比由原本的 21.9% 降低為 11.2%。令人感到喜悅的是，學生完全放棄且未作答的部分由原本的 11.3% 降低至後來的 5.6%，可見得學生對解決問題有較高的意願及興趣，同時也具有較大的自信心，嘗試去分析題目、思考解題策略，達到問題的解決。

(二) 分析比較學生學習成就測驗前測及後測的內容，發現在經過以 **DERIVE** 輔助學習的教學活動後，學生答題的狀況及使用之解題策略有些改變：

1. 先備知識更為強化、鞏固
2. 具有更有效之解題策略
3. 具有更精確之解題策略
4. 具有更多元之解題策略
5. 有較高的意願及興趣答題



(三) 從學習成就測驗後測中，可以看到學生在解題過程中的缺失，這些都是身為教育者需要注意的項目，亦要設法協助學生補強：

1. 計算錯誤：後測中學生有更明確之解題方法，相較於前測，學生自己本身會有更正確、更鞏固的數學概念；遺憾的是難免有人會因計算錯誤而無法完全正確作答。紙筆運算可以加深學生對所學概念的了解，並增加對數字的感覺，有助於觀察所得資料並加以邏輯推理，找出事物的數學模式；而紙筆運算練習的經驗增加，可以有機會讓學生減少計算所產生的錯誤。
2. 表示法不夠完善：學生有成功的解題策略，而作答時卻未依題意以函數的型式呈現，卻以多項式呈現。最終作答之表示法不夠完善使得前功盡棄，若要改善這種情形，必須從加強學生多項式與函數的概念做起，使學生能對兩者稍作區分，有利於未來其他數學概念之發展。
3. 誤將三次函數 $y=x^3$ 的圖形視為直線：平常學生比較喜歡處理直線圖形，所以在處理次數是二次以上的函數圖形，學生可能會就自己喜愛的方式，直

覺認知圖形。以 $y=x^3$ 為例，學生找出 $y=x^3$ 上三點 $(-1, -1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 後，由於三點恰在同一直線上，故不加思索地認為圖形是一條直線。平時教學若遇到同樣的問題時，教師可以提示學生再多畫幾個點觀察一下。

四、有關學生日饋的部分

- (一) 在學生填寫的學生使用 DERIVE 學習回饋問卷中，部分問題以 Likert Scale 的五點量表的型式呈現，而從平均來看，每個提問皆有正面的回應。
- (二) 整個教學實驗的過程，學生對於所遭遇的困難與得到的收穫，給了許多重要的回饋，研究者整理如下：
1. CAS 數學軟體 DERIVE 目前仍沒有中文版，英文介面是學生感到苦惱。幸好有教師給予之中文化操作手冊輔助，減輕了他們對英文介面感到的壓力。
 2. 學生都表示 DERIVE 很容易操作，有工具列的按鍵及功能表的呈現，他們不需記太多的指令，而且在老師示範操作過一次後，學生大概都能學會，除非是比較複雜的狀況才需要教師的介入指導。
 3. 關於 DERIVE 的功能，大部分的學生覺得 DERIVE 的解題動作快，且其將代數與圖形結合，他們可以很快地畫出圖形來觀察。
 4. 學生覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習很適當。
 5. 多數學生覺得函數與圖形結合的課程設計，對自己多項式概念的學習很有幫助。
 6. 對於教學活動的設計流程，學生認為循序漸進的引導可以讓學生不會亂了腳步；配合單元主題以學生沒看過的問題來舉例，可以刺激學生學習的意願。
 7. 以 DERIVE 輔助學習的教學環境下，小組愉快的合作學習有助於教學活動的進行。
 8. 經過這幾次多項函數 DERIVE 教學活動，多數學生對數學的學習態度有正面的改變；少數學生則表示自己的學習態度沒有特別大的改變，仍然是挑自己喜歡的課題來聽。
 9. 資訊融入教學的新模式，使學生感到新鮮有趣，續而紛紛表示喜歡這次的教學實驗，很高興能參加這次的活動。
 10. 資訊科技的進步，使得抽象的數學概念可以較容易地具體呈現，克服傳統教室教學中的不足之處，可以多量並快速地來看平時不敢舉例的複雜式子，可以確實繪製平時覺得花費時間多或難以呈現的二維圖形和三維圖

形...等。

11. 資訊科技可以融入教學，但是不能完全取代傳統教室的教學。數學概念仍是需要傳統教室教學的方法來穩固學生建構知識的基礎，資訊科技可以是輔助學習的工具。

第二節 建議

本節根據研究者在整個研究的經歷與感受，提出一些以 CAS 數學軟體來輔助數學教學的建議，提供未來希望從事相關研究者的參考。

1. 周琦（2005）認為教學模式應該是教師、學生、教材、教學媒體四個要素互相連繫、互相作用的整合模式。教師使用 CAS 數學軟體來輔助教學，必須設計符合課題之學習單輔助，讓學生能有學習方向依循。而且，良好的學習單能幫助學生自主學習，激發其學習數學的興趣，從自己的操作中觀察、分析、類比、推論，建構數學知識，達成學習目標。
2. 教學以學生為本位，學習的主體是學生。教師以學習目標作為學習單的設計指標，不能只是從教師的角度出發，亦要從學生學習的角度來思考，必須考慮學生可能會遇到的瓶頸及困難。
3. 數學軟體應該是輔助學生學習的工具，而不僅僅是驗證結果的工具。Lindsay（1995）提出 CAS 數學軟體 DERIVE 可做為論證示範、應用和自我循步探索的工具。教師設計以 CAS 軟體輔助學生學習的教學活動時，除了可以利用 CAS 數學軟體來做論證的工作，必須摻入探索活動及實際問題之應用，增加學生自我思考的機會，藉此訓練學生之數學思維。
4. 教學活動之進行，應該著重於學生數學概念之養成。活動中學生若有軟體之操作問題，教師須給予適時的協助；學生若有概念需要釐清的部分，教師應該要適當介入活動及引導學生。
5. 黃誌偉（2005）的研究發現，以 CAS 軟體輔助學生學習時，概念視覺化有助於學生極限概念的建立，但先決條件是能夠正確地解讀 CAS 所產生的圖形。在本研究中 CAS 軟體 DERIVE 確實能輔助學生對多項式概念的學習，雖然學生能以按鍵來拉近或放遠觀察圖形，但仍是會遭遇一些圖形觀察的迷失，如同 Goldenberg（1988）所言，學生自主學習的情境下，探索係數對函數圖形的影響，可能建構出錯綜複雜的數學概念，對 CAS 所產生的圖

形有不恰當的誤讀。對於學生自主的觀察學習，研究者覺得不該多加限制，但若有不恰當的誤讀圖形，影響正確之數學概念的建立，教師應即時介入導引，輔助學生修正概念的建構。

6. 使用 CAS 數學軟體融入教學時，教師第一要面臨的問題即是電腦教室借用不易。遭遇這樣的難題時，教師可於普通教室利用單槍投影親自操作給學生觀察理解。惟使用此方法之遺憾乃是學生無法親自操作達到完全自主學習。
7. 於電腦教室進行教學時，教師必須注意學生上課秩序的管理；學生若不能專心致力於教學活動，將降低學生學習的效果。建議可以利用教師電腦廣播系統的方式，先收回學生使用電腦的權利，集中學生的注意力，減少分心的機會；而利用教師的電腦監看學生的電腦活動，並增加教師教室巡視的頻率，可以檢視和協助、引導學生的數學學習。
8. 由於教學時數有限，為了補強學生對軟體操作的熟悉度，可以選擇性教授學生活動中會遇到的必要操作，甚至若能和生活科技教師協同合作，軟體部分由資訊教師來教授，這樣數學教師可以在利用 DERIVE 教學時，使學生更聚焦於數學概念的養成與建構。
9. 對教師而言，資訊融入教育是需要時間學習，而且教師都有教學進度的壓力。建議教師可先於教室教授重要數學課題及概念，打穩學生學習目標的基礎後，再以 DERIVE 來補充不足之處，或交由學生自主操作、觀察學習，這樣不但可以減少教學進度帶來的壓力，也可以擴增學生學習數學知識的視野、感受有關數學的新鮮體驗和數學魅力、增加學生學習的興趣與動機。
10. 趙繼源（2005）提出：「電腦對數學的影響體現在在兩大方面：一是用電腦輔助數學研究，電腦科技成為人們探索數學問題的重要手段；二是用電腦輔助數學教學，電腦成為教師展現數學魅力、揭示數學本質、激發學生數學興趣的重要的教學平台。」然而，教師在面臨新型態的教學時難免會心生恐懼，不過，教師的教學熱忱及努力付出是足以克服這些恐懼。教師努力去熟悉軟體、規劃教學課程，則在教師的專業下，必能藉此展現數學魅力、揭示數學本質、激發學生數學興趣。
11. 從本研究發現小組合作對象是否為熟識的同學這對高中生來說是不成問題，能完作合作任務最主要因素是學生的參與熱忱及對教學活動的興趣。教師言語的鼓勵及引導是學生建立自信心的來源，亦是激發學生學習興趣的動力，可以使學生的學習態度有正向的改變，有較高的意願去接受新刺

激，努力達到學習目標。

12. 本研究初探 CAS 數學軟體 DERIVE 應用於高中數學教學的可行性，開發學習單以八名高一學生為研究對象，以小組型式進行教學活動。未來有意願發展以 CAS 軟體輔助教學之教師，可以嘗試進行班級教學活動，研究 CAS 軟體於班級教學之可行性。
13. 本研究以多項式概念的學習為主，進行「多項函數的圖形」和「多項方程式」二個單元主題。未來有意願使用 CAS 數學軟體 DERIVE 來輔助教學，可以利用軟體的長處，進行數學教學活動。對於高中之數學教材，建議可以討論下列課題：指數函數、對數函數、三角函數、平面方程式、圓錐曲線、矩陣、極限、微分、積分……等，進行學習單的開發，讓學生感受數學的新鮮體驗和樂趣。
14. 未來的研究可以嘗試利用一些現有的數學軟體來開發數學教材、進行數學課程，或者是開發具主題性的虛擬教具來輔助學生的學習。





參考文獻

中文部份

- 王婷瑩（2004）。高中生數學學歷程中之思維研究－多項式除法原理、餘式定理、因式定理。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文（未出版）。
- 尼克森（2004）。數學的學習與教學：六歲到十八歲。（詹勳國、李震甌、莊蕙元、戴政吉、侯美玲譯）。台北市：心理出版社。（原著出版年：2000 年）。
- 左太政、柳賢（編）（2005）。高級中學數學第一冊。臺南市：翰林出版社。
- 江南青（1985）。比例概念的診斷與補救。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文（未出版）。
- 吳玖瑤（2001）。教學對高中生學習函數概念的影響。國立台灣師範大學數學研究所數學教學組碩士論文（未出版）。
- 李迪塞、舒華茲、克勒孟茲（2002）。數學科教材教法。（謝如山、謝名起、謝如娟譯）。台北市：五南圖書出版公司。（原著出版年：1996 年）。
- 周琦（2005）。信息技術與數學課程整合的探索。2006年3月31日，取自：
<http://www.whedu.cn/Article.asp?ArticleID=1343>
- 林保平（1986）。二次及三角函數圖形教學的微電腦程式設計及其應用。數學傳播，10(2)，39-51。
- 林星秀（2000）。高雄市國二函數課程GSP輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學數學系碩士班碩士論文（未出版）。
- 林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海與陳順宇（編）（2005）。高級中學數學第一冊。臺南市：南一書局。
- 洪有情等人（編）（2005）。臺北縣因應高中課程改革數學科課程銜接教材之研究。台北縣：台北縣政府。
- 美國德州儀器中國教育產品事業部（2004）。掌上數學：圖形計算器在中學數學教育中的作用。北京：人民教育出版社。2006年3月31日，取自：
http://www.pep.com.cn/gzsx/jssx/sxjy/zjlt/200407/t20040720_106985.htm
- 計算機代數系統（無日期）。2007年2月12日，取自：佛山科學技術學院數學系網頁：<http://www.fosu.edu.cn/li/math/SXRJ/QITA/DSXT.htm>

- 倪建春（無日期）。**圖形計算器如何提高數學課堂教學中學生的參與程度**。2007年5月16日，取自德州儀器（TI）中國網站論文集錦網頁：http://education.ti.com/sites/CHINA/downloads/pdf/teacher_graphicCalc_students.pdf
- 教育部（2006）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北市：教育部。（1998年公佈總綱綱要，2000年公佈暫行綱要）
- 教育部（2005）。**普通高級中學設備標準**。台北市：教育部。
- 符號計算軟件發展歷程（無日期）。2007年2月12日，取自：成都理工大學信息管理學院數學實驗室網頁：<http://www.mathlab.cdut.edu.cn/jpkc/7fuhao.html>
- 莎拉·夫蘭納里、大衛·夫蘭納里（2001）。**數學小魔女**。（葉偉文譯）。台北市：天下遠見出版社。（原著出版年：2001年）。
- 郭亮偉（2005）。**透過電腦輔助建構動態學習環境之研究**。國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班碩士論文（未出版）。
- 郭潔（無日期）。**TI 圖形計算器的使用對學生學習方式的影響**。2007年5月16日，取自德州儀器（TI）中國網站論文集錦網頁：http://education.ti.com/sites/CHINA/downloads/pdf/teacher_graphicCalc_influence.pdf
- 陳育聖、楊德清（2001）。從NCTM（美國數學教師協會）課程標準之科技教育談對我國九年一貫數學學習領域之電算器教學的啓示。**科學教育研究與發展**，25，101-115。
- 陳盈言（2001）。**國二學生變數概念的成熟度對其函數概念發展的影響**。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文（未出版）。
- 項武義（1998）。**從算數到代數**。台北市：九章出版社。
- 黃誌偉（2006）。**CAS實驗活動的學習環境下極限概念之建構歷程**。國立交通大學應用數學系碩士班碩士論文（未出版）。
- 楊清泉（2006）。圖形計算器在函數學習中的三大優勢。**數學通報**，45 (9)，52-54。北京：中國數學會、北京師範大學。
- 楊清海（2002）。**指數函數教學活動設計的研究**。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文（未出版）。
- 葉明達（2000）。**高中生函數迷思概念及函數表徵轉換能力之初探**。論文發表於中華民國第十六屆科學教育學術研討會。台北市：國立台灣師範大學理學院。

- 趙繼源、石剛（2005）。**數學工具軟件及應用**。北京：北京理工大學出版社。
- 蔡震雄（2006）。利用圖形計算器構建函數模型。**中小學信息技術教育**，11，35-36。北京：北京教育音像報刊總社。
- 鄭毓信（1998）。**數學教育哲學**，17。台北市：九章出版社。
- 謝豐瑞、陳材河（1997）。函數的一生。**科學教育月刊**，199，34-43。台北市：國立臺灣師範大學科學教育中心。
- 顧穎、張佶（2005）。TI數理計算器在數學學習中的應用。**科學教育**，11（4），35-38。上海：華東師範大學。



英文部分

- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: a baseline study on intuitions. *Journal for research in Mathematics Education*, 13, 360-380.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of Mathematics structures. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 135-173.
- Jonassen, D. H., & Reeves, T. C. (1996). Learning with technology: using computers as cognitive tools. In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology*, pp. 693-719. New York: Macmillan.
- Herscovics, N. (1979). A learning model for some algebraic concepts. In K. Fuson, & W. Geeslin (Eds.), *Explorations in the modeling of the learning of mathematics*. Columbus, OH: ERIC/SEMAC.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher, & J. Lilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of Mathematics education*, pp. 96-112. New York: Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology: integrating research on learning and instruction. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*, pp. 101-130. London: LEA.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: a brief survey. *College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.
- Kutzler, B. (1994). *Introduction to DERIVE*. Hagenberg, AT: Soft Warehouse.
- Kutzler, B., & Kokol-Voljc, V. (2005). *Introduction to DERIVE 6*. Hagenberg, AT: Soft Warehouse.

- Lindsay, M. (1995) *Computer Algebra Systems: Sophisticated 'Number Crunchers' or an Educational Tool for Learning to Think Mathematically?* Paper presented at the meeting of the Australian Society for Computers in Learning in Tertiary Education Conference 1995 (Ascilite 95), Melbourne, AU. Retrieved May 15, 2007, from
<http://www.ascilite.org.au/conferences/melbourne95/info.html>
- Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.
- Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra. K-12*, 43-60. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Retrieved from <http://www.nctm.org>
- Nickson, M. (2000). *Teaching and Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research and its Application*. London; New York: Continuum.
- Riedesel, C. A., Schwartz, J. S., & Clements, D. H. (1996). *Teaching Elementary School Mathematics*. (6nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Soft Warehouse Europe. (n.d.). *A brief history of the muMATH/DERIVETM CASS*. Retrieved February 12, 2007, from
<http://www.derive-europe.com/theroots.asp?history>
- Tall, D. O. & Thomas, M. O. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 191-228.
- Texas Instruments. (n.d.). *DeriveTM 6*. Retrieved February 12, 2007, from
http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_derive6.html

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*, 41-68. London: LEA.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. Focus on learning problems in Mathematics, 19(1), 20-42.



附件一 學習背景調查表

個人基本資料暨學習背景調查

歡迎你參加這個團隊，成為此次數學實驗的伙伴！

以下問題請詳細填寫，若有不明白之處可先詢問老師～～

1. 姓名：_____
2. 性別：_____
3. 班級：_____
4. 國中學測之 PR 值：_____
5. 參加此次數學實驗之動機：

6. 家中是否有電腦？ 有 沒有
7. 我所擁有之資訊能力：

- 
- Windows 作業系統基本操作 資料備份、檔案管理之能力
 - 文書處理 影像處理 電腦繪圖 電腦硬體組裝
 - 電腦簡易維修 網路瀏覽及搜尋 電子郵件之使用
 - 其它

8. 我曾經利用電腦完成任務，例如：

9. 是否曾瀏覽過有關數學知識的網站？ 有 沒有

如果有，請寫下你瀏覽過的網站：

10. 是否曾利用數學網站內容來協助解決課堂上遇到的數學問題？

有 沒有

如果有，試舉例說明：

11. 是否接觸過有關數學的軟體？ 有 沒有

如果有，請寫下你接觸過的軟體：

12. 是否曾利用數學軟體來協助解決課堂上遇到的數學問題？

有 沒有

如果有，試舉例說明：



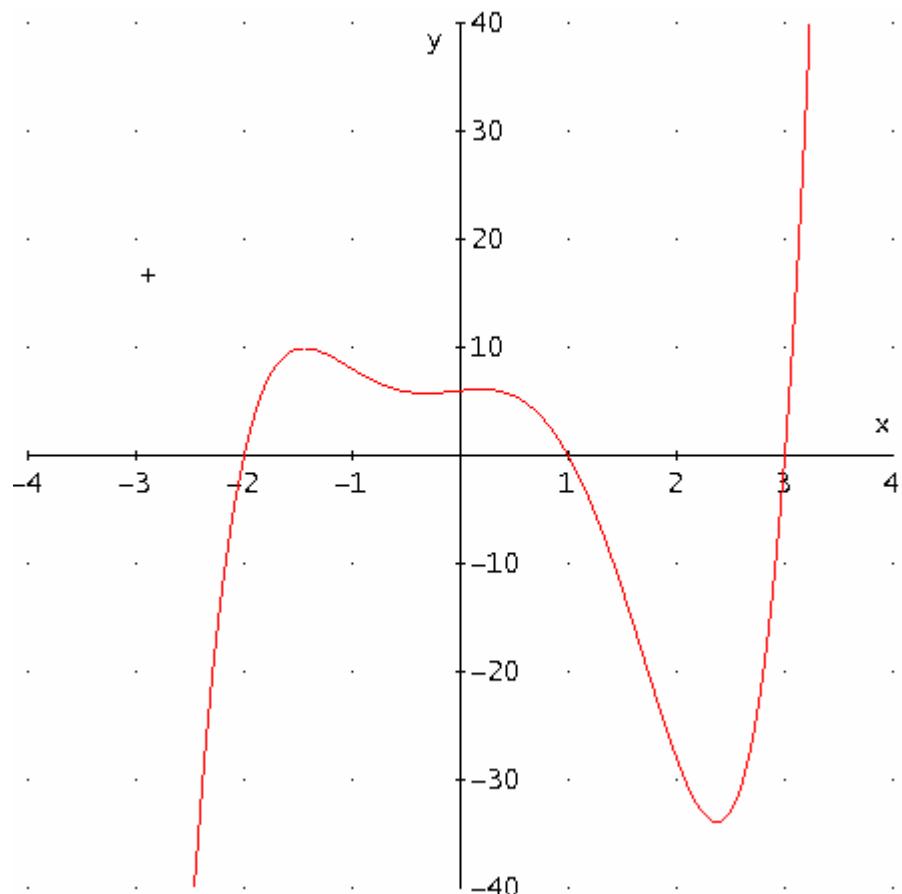
此次的實驗將使用數學軟體 **DERIVE 6**，將利用課餘時間於 503 電腦教室進行教學，請同學在下表中先勾選能配合實驗之時段（可複選）。由於課程之時間安排可能無法全然符合各位同學的要求，因此，老師將會事先告知同學上課時間，並請同學務必排開其它事務、盡力配合。

在此由衷感謝同學的參與及合作！😊

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五		星期六	星期日
午休						上午		
晚上						下午		

認識 DERIVE

— 以多項函數與多項方程式為例 —



李采虹老師編製

95年7月1日

目 錄

一、前言	p.123
二、DERIVE 簡介	p.123
三、系統需求及 DERIVE 之啟動	p.124
四、DERIVE 之視窗說明	p.124
五、DERIVE 之操作實例	p.134
六、結語及參考書目	p.145



一、 前言

為了與教學實驗配合，針對學習單的設計，以「多項函數的圖形」及「多項方程式」為主題，特別編寫此操作手冊，提供同學參考使用。本次教學實驗我們所使用的版本是 DERIVE6，操作手冊及學習單中將以「DERIVE」簡稱。而操作手冊的內容將依「DERIVE 簡介」、「系統需求及 DERIVE 之啟動」、「DERIVE 之視窗說明」、「DERIVE 之操作實例」幾個部分做簡易的介紹及說明。

二、 DERIVE 簡介：

如同「電腦代數系統」之名，數學軟體 DERIVE 在處理代數問題具有強而有力的功能，可以處理代數變數、代數式、方程式、函數、向量和矩陣，亦能執行數值和符號（代數、三角學、微積分...）的運算，而且可以使用數值方式繪製二維和三維的圖形。此外，DERIVE 這個數學軟體將常用的指令以視覺化的小圖示呈現，而許多功能亦以選單的方式呈現，不但讓初學者很容易上手，甚至容易操作使用。

DERIVE 主要的長處在於使用符號代數(symbolic algebra)以及強大有力的製圖法。我們可以直觀輸入代數式，解決相關問題，最神奇的是它對於隱函數可以直接繪出圖形，無須利用參數慢慢繪製。本次教學實驗我們所使用的版本是 DERIVE 6，較先前的版本新增了一些功能：能列出方程式簡化的步驟和轉換的規則，可以透過 TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus, and VoyageTM 200 這些繪圖計算器傳送和接收工作單，可以使用拉霸來表示參數方程式，能自動標示畫出顯示方程式的圖形，能用滑鼠來轉動 3D 圖形，此外還提供 online help 功能，也能依自己的喜好來訂作工具箱、快速鍵和選單。

不管是解決數學問題、研究數學學問，還是教授數學課程或學習數學知識，這是一個極好的輔助工具軟體。以教學的角度來看 DERIVE，它提供了一種有別於傳統的新方式，利用鍵盤的敲擊，它消除長時間進行數學計算的苦工，但這不代表 DERIVE 必須淪為計算工具。當 DERIVE 協助使用者去解決數學問題及減輕計算部分的負擔，以教師的課程教授，加上學習單的輔助，可以讓學習者更能專心於所遭遇問題的數學意義，建構所涵蓋的數學概念。

三、 系統需求及 DERIVE 之啟動

使用本軟體之系統需求為擁有 WINDOWS 2000 或 WINDOWS XP 視窗系統的個人電腦，至於與 WINDOWS 98 及 WINDOWS ME 相容之系統正在開發中。

此使用手冊是在 WINDOWS XP 視窗系統下使用 DERIVE 6.0 版本；依版本或 WINDOWS 視窗系統的不同，可能會有些許不同的功能及視窗呈現。



當 DERIVE 6 安裝完畢後，連按二下桌面上的圖像 ，即可執行 DERIVE；或者可以從視窗左下方的〔開始〕鈕中的〔所有程式〕中尋找 DERIVE 的執行檔，來啟動 DERIVE。

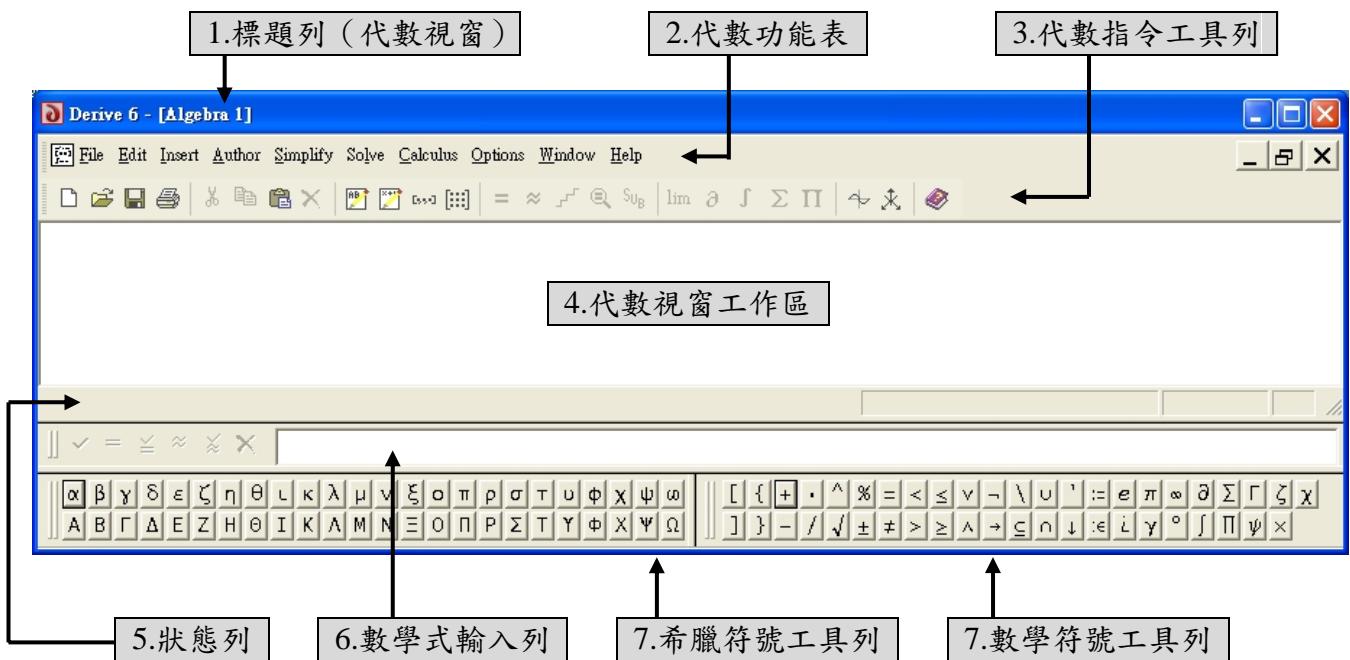
四、 DERIVE 之視窗說明

DERIVE 的軟體介面共有 Algebra Window (代數視窗)、2D-Plot Window (二維畫圖視窗)、3D-Plot Window (三維畫圖視窗) 三種。當你成功啟動 DERIVE 之後，所看到的畫面就是「代數視窗」。



代數視窗一介面由七個部分組成，由上而下分別為：

1. 標題列：the Titlebar
2. 代數功能表：the Menubar
3. 代數指令工具列：the Command Toolbar
4. 代數視窗工作區：a (currently empty) Algebra Window, also called the View
5. 狀態列：the Status Bar
6. 數學式輸入列：the Expression Entry Toolbar, also called the entry line
7. 希臘符號工具列和數學符號工具列：
the Greek Symbol Toolbar and the Math Symbol Toolbar



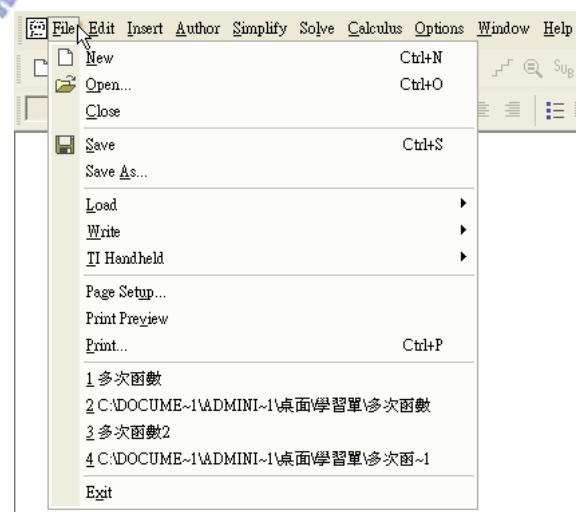
接下來，我們逐項介紹各項功能：

1. 標題列：

由於 DERIVE 可以同時開啟多個視窗，經由標題列的標示，可以提醒使用者目前使用的視窗是代數視窗、二維畫圖視窗、還是三維畫圖視窗。

2. 代數功能表：

分為檔案(File)、編輯(Edit)、插入(Insert)、編寫(Author)、化簡(Simplify)、求解(Solve)、計算 (Calculus) 、功能 (Option) 、視窗 (Window) 、說明 (Help) 十大功能，每個功能表內收納有相關的設定指令，包含了 Derive 中的代數的所有功能設定。



3. 代數指令工具列：

代數工具列裡面所看到的都是代數中常用到的功能，其形式如下，依序逐一編號加以說明。

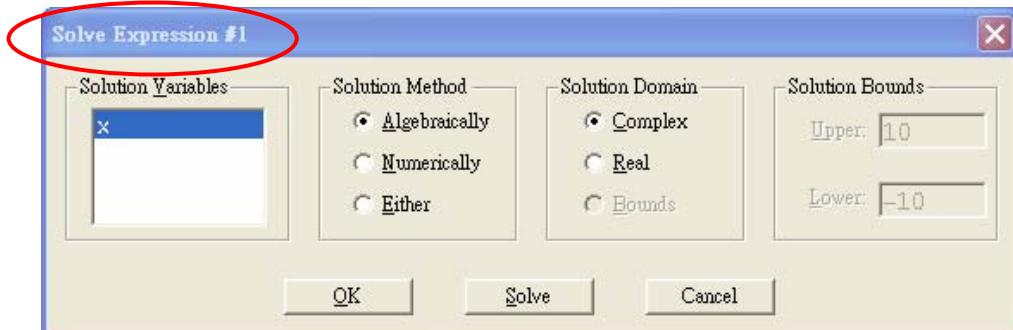


編號	圖示	英文名稱	中文名稱	快速鍵
01		New	開啟新檔案	Ctrl +N
02		Open	開啟舊檔	Ctrl +O
03		Save	儲存檔案	Ctrl +S
04		Print	列印	Ctrl +P
05		Cut	剪下	Ctrl +X
06		Copy	複製	Ctrl +C
07		Paste	貼上	Ctrl +V
08		Delete Object	刪除	Del
09		Insert Text	插入註解	F5
10		Author Expression	編寫數學式	F2
11		Author Vector	輸入向量	
12		Author Matrix	輸入矩陣	
13		Simplify	求值	Ctrl +B
14		Approximate	求近似值	
15		Display Step	按步解答	Ctrl +D
16		Solve Expression	求解	Ctrl +Shift +E
17		Variable Substitution	變數代換	Ctrl +W
18		Find Limit	求極限值	Ctrl +Shift +L
19		Find Derivative	求微分	Ctrl +Shift +D
20		Find Integral	求積分	Integrate...
21		Find Sum	求總和	Ctrl +Shift +S
22		Find Product	求連乘積	Ctrl +Shift +P
23		2D-Plot Window	畫 2 維圖形	
24		3D-Plot Window	畫 3 維圖形	
25		Online Help	小幫手	

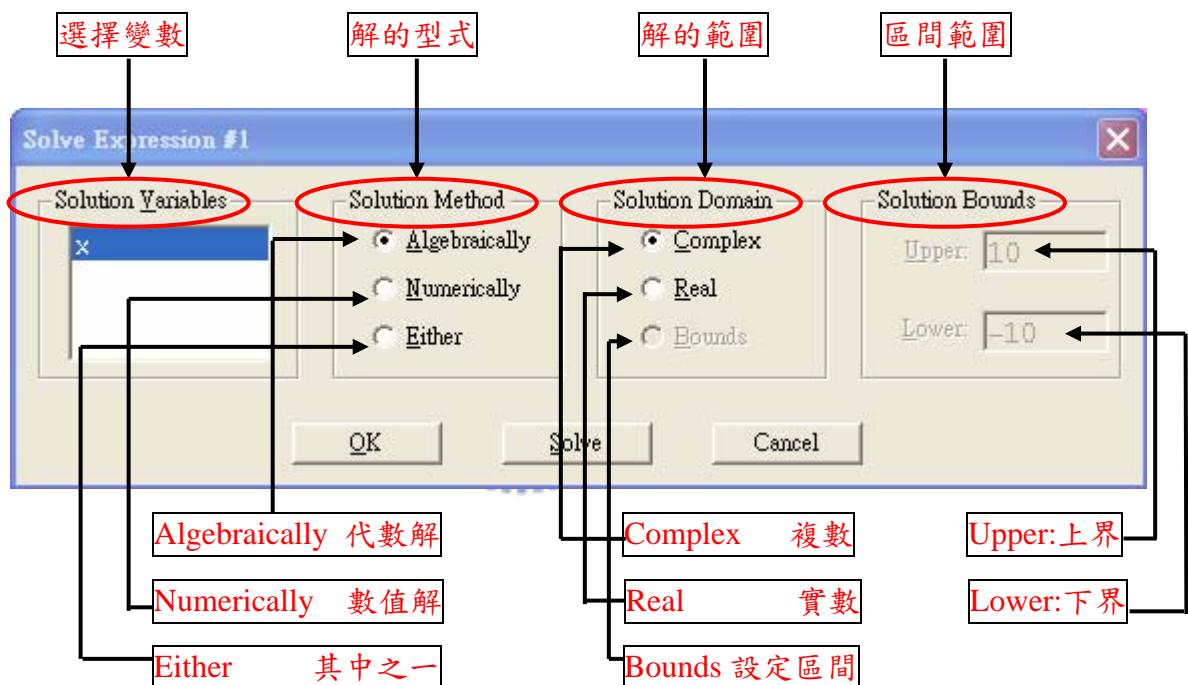
上面有二處以紅線粗框標示，將是我們較常用的指令，大略作以下說明：

16		Solve Expression	求解	Ctrl +Shift +E
----	---	------------------	----	----------------

(1) 按【】之後，就會出現【Solve Expression #1】的視窗



(2) 【Solve Expression #1】視窗可以選擇要求解的形式，其說明如下；



按此指令可以切換至二維畫圖視窗。

4. 代數視窗工作區：

數學式輸入列中所輸入的方程式，都會呈現在代數工作區中。

5. 狀態列：

前半部將顯現即時提示，而後半部將呈現在工作區所選之數學表示式之定義來源。

6. 數學式輸入列：

前半部提供幾個常用之數學式輸入指令，後半部為使用者書寫數學式之區域。針對前半部之常用指令，我們依序逐一編號加以說明：



編號	圖示	英文名稱	中文名稱	快速鍵
01	✓	Author Expression	編寫成數學式	Enter
02	=	Simplify	求值	
03	≈	Author and Simplify	同時結合了✓和=的功能	Ctrl +Enter
04	≈	Approximate	求近似值	
05	≈	Author and Approximate	同時結合了✓和≈的功能	Shift +Enter
06	✗	Delete all	刪除	Shift +Del

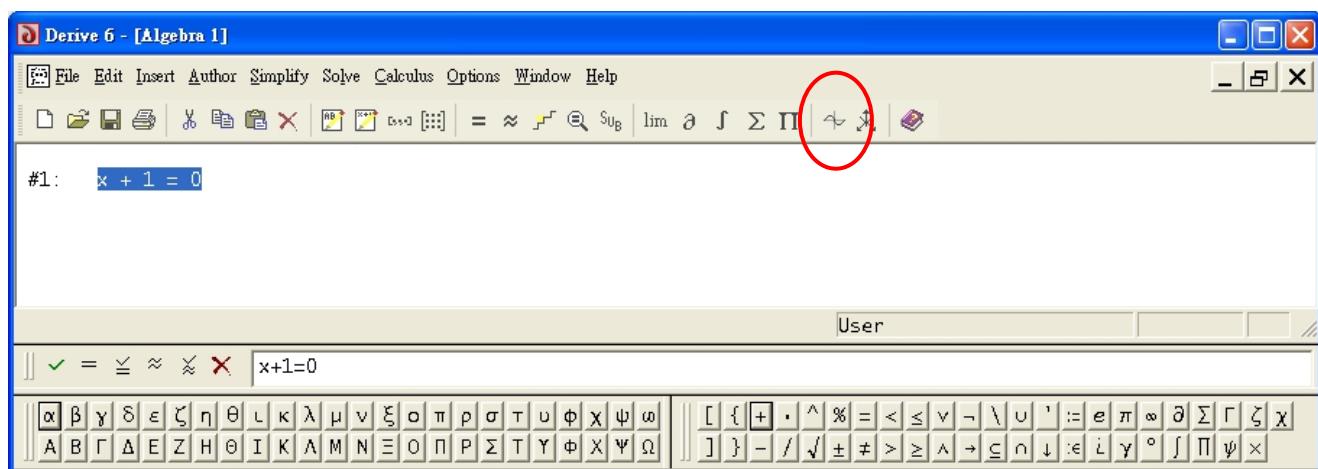
7. 希臘符號工具列和數學符號工具列：

視窗下方提供了希臘字母及數學符號，讓同學們可以方便取用。

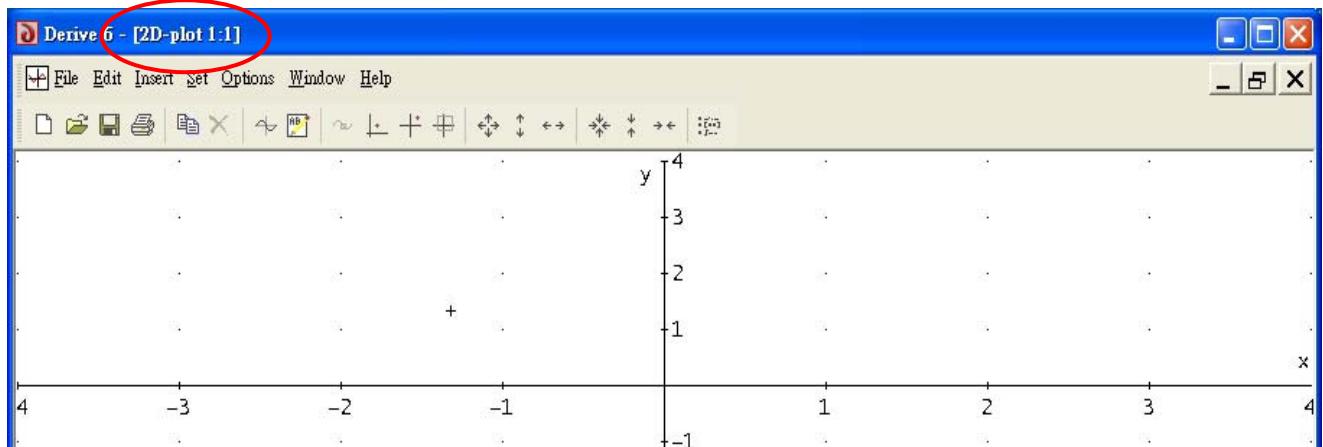


代數視窗與二維畫圖視窗之切換—依下列的操作步驟 1 和 2，就可以出現「二維畫圖視窗」。

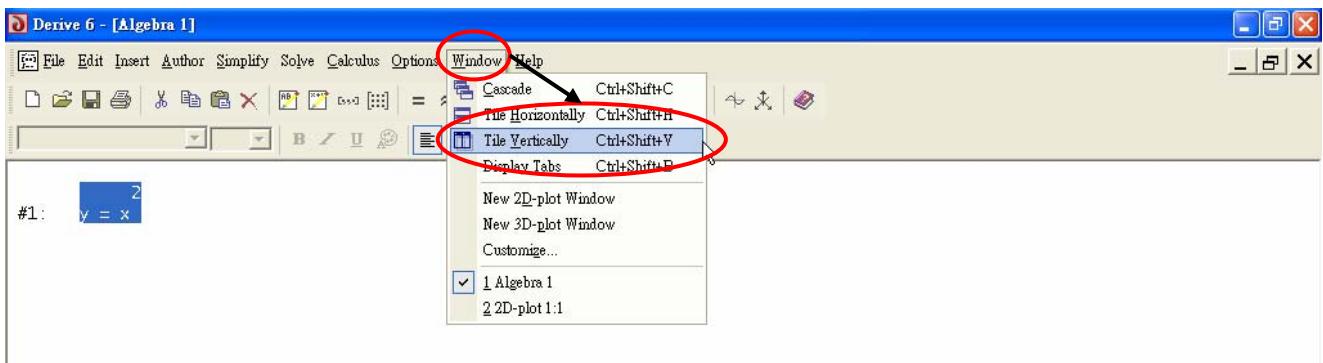
1. 在「代數視窗」中點選 ；



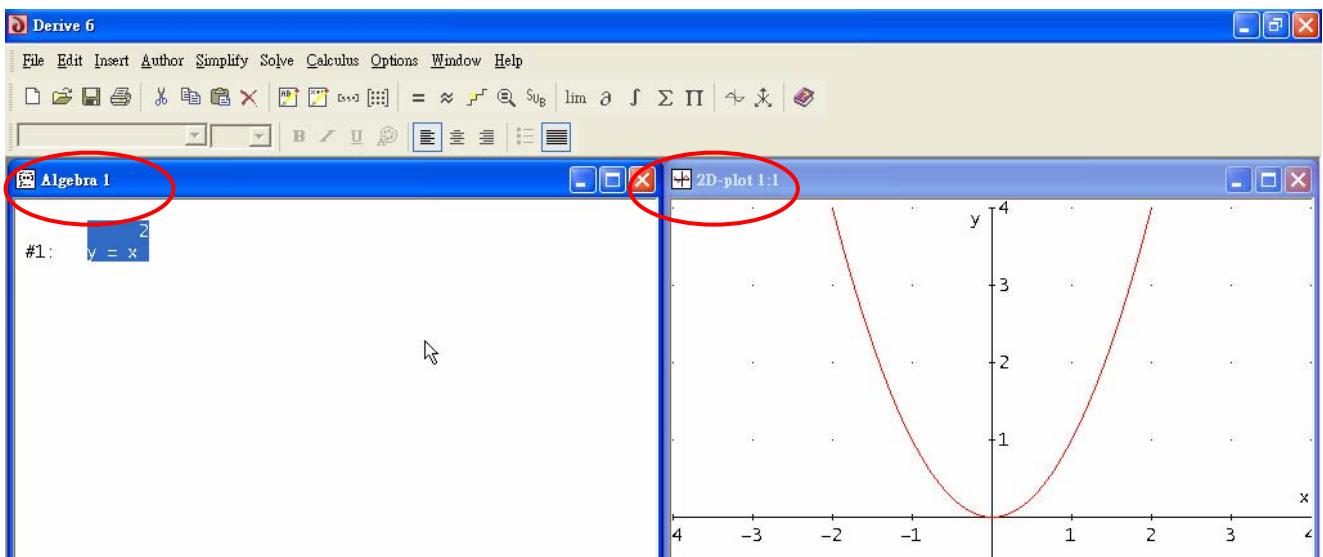
2. 按下之後，即可出現「二維畫圖視窗(2D-plot 1:1)」



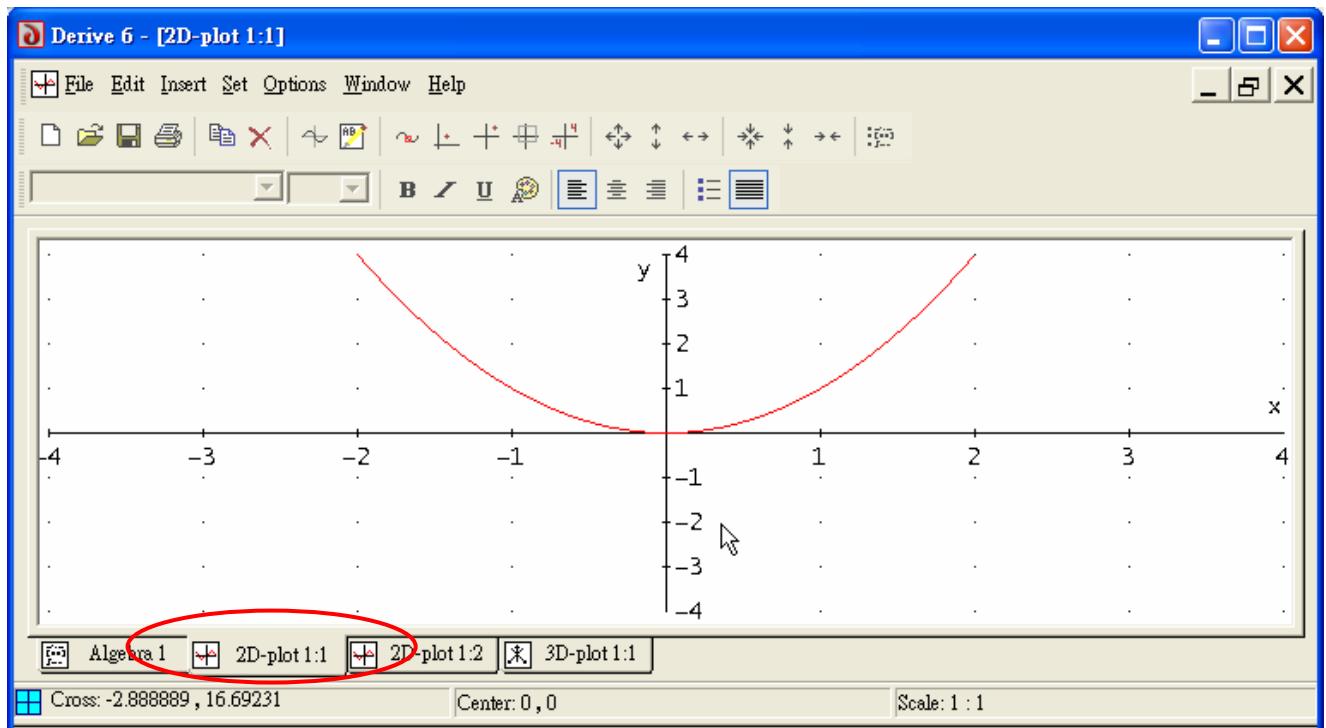
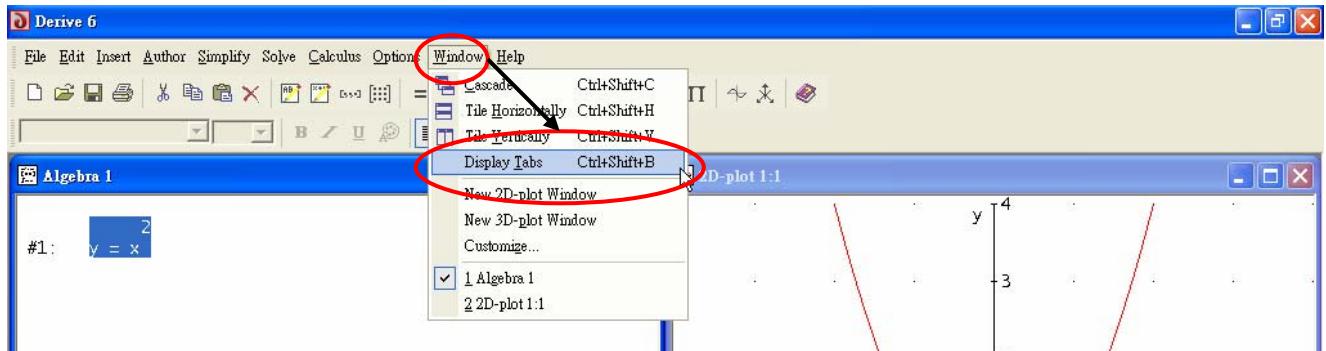
3. 欲將「代數視窗」和「二維畫圖視窗」同時並排顯示，可在功能表中點選 Window→Tile Vertically，讓二個視窗以垂直並排的形式呈現。



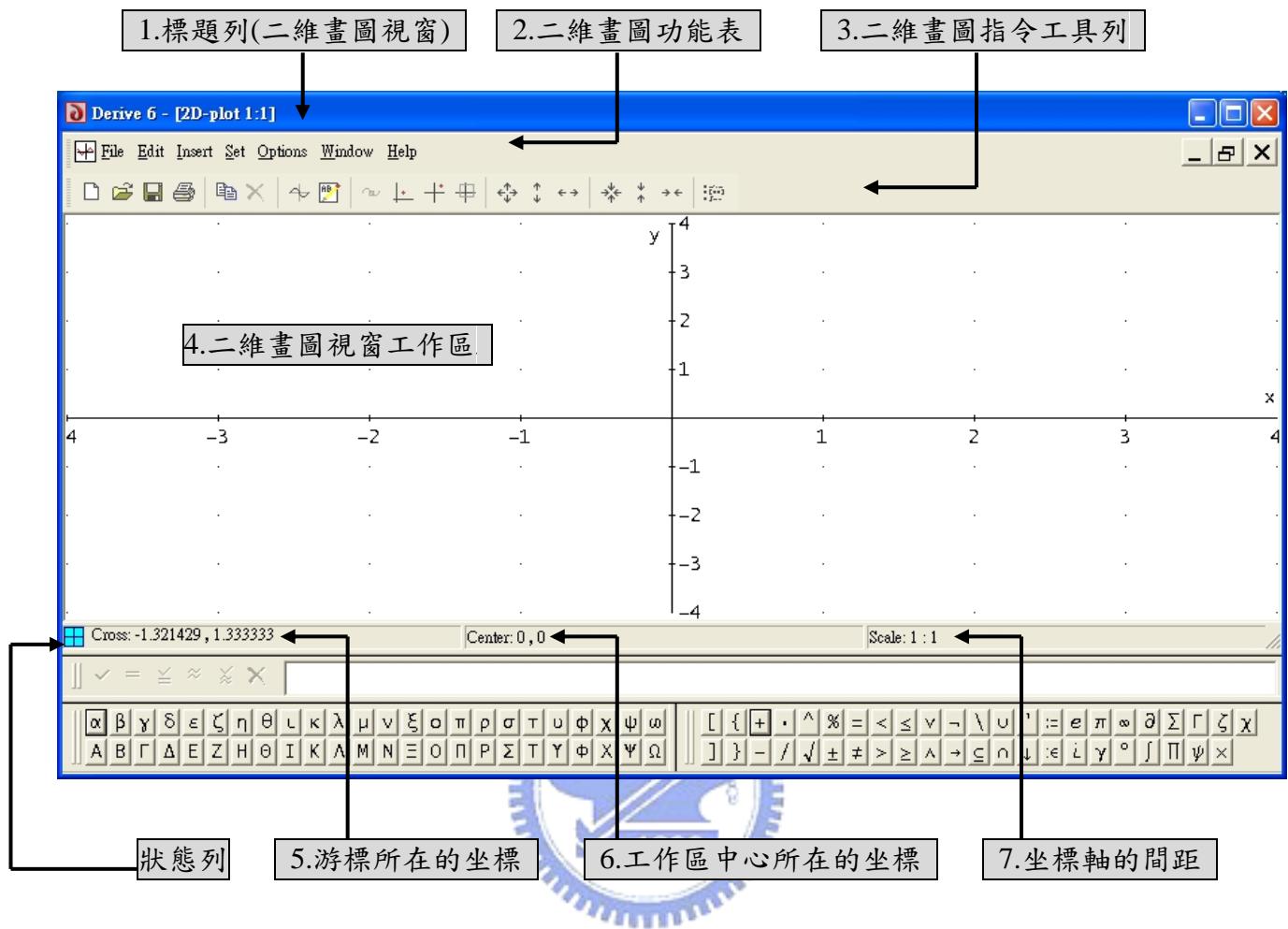
按下之後，即可同時出現「代數視窗」和「二維畫圖視窗」。



4. 欲將「代數視窗」和「二維畫圖視窗」以 Tabs 方式顯示，可在功能表中勾選 Window→Display Tabs，此方法可同時使用多個視窗，利用 Tabs 切換視窗。



二維畫圖視窗—可以畫出二維的圖形，介面包含了 6 個部分，如下所示：



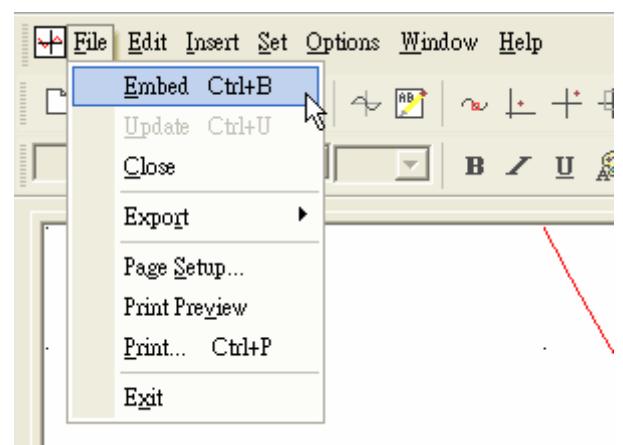
接下來，我們逐項介紹各項功能：

1. 標題列：

由於 DERIVE 可以同時開啟多個視窗，經由標題列的標示，可以提醒使用者目前使用的視窗是代數視窗、二維畫圖視窗、還是三維畫圖視窗。

2. 二維畫圖功能列：

一分為檔案(File)、編輯(Edit)、插入(Insert)、設定(Set)、功能(Option)、視窗(Window)、說明(Help)七大功能，每個功能表內收納有相關的設定指令，包含了 Derive 中二維畫圖的所有功能設定。



3. 二維畫圖指令工具列：

二維畫圖指令工具列裡面的功能，可以將圖形做放大縮小的變化，也可以追蹤圖形中的任何一點。, 其形式如下，依序逐一編號加以說明。



編號	圖示	英文名稱	中文名稱	快速鍵
01		New	開啟新檔案	Ctrl +N
02		Open	開啟舊檔	Ctrl +O
03		Save	儲存檔案	Ctrl +S
04		Print	列印	Ctrl +P
05		Copy	複製	Ctrl +C
06		Delete Object	刪除	Del
07		plot	畫圖	F4
08		Insert Annotation	插入註解	F12
09		Trace Plots	尋找圖形軌跡上的點	F3
10		Center on Cross	以通過點為中心的坐標軸	
11		Center on Origin	以原點為中心的坐標軸	
12		Set Range	設定坐標軸範圍	
13		Reset Range	重新設定坐標軸範圍	
14		Zoom out	擴大間距	F10
15		Zoom vertical out	垂直擴大間距 (擴大 y 軸間距)	F8
16		Zoom horizontal out	水平擴大間距 (擴大 x 軸間距)	F6
17		Zoom in	縮小間距	F9
18		Zoom vertical in	垂直縮小間距 (縮小 y 軸間距)	F7
19		Zoom horizontal in	水平縮小間距 (縮小 x 軸間距)	F5
20		Algebra Window	切換到代數視窗	Ctrl +1

4. 二維畫圖視窗工作區：

代數視窗中所數學式輸入列中所輸入的方程式，都會呈現在代數工作區中。

5. 游標所在的坐標：

於狀態列的前半部呈現，顯示直角座標中任何一點的坐標。它的形式如下所示：

 Cross: -2.761905, -1.33871

該點之坐標 (x 坐標, y 坐標)

6. 工作區中心所在的坐標：

於狀態列的中間呈現，顯示工作區中心所在的坐標。它的形式如下所示：

Center: 0, 0

工作區中心所在之坐標 (x 坐標, y 坐標)

7. 坐標軸的間距

於狀態列的後半部呈現，顯示直角坐標中，x 軸和 y 軸所使用的刻度。它的形式如下所示：

Scale: 1 : 0.5



五、 DERIVE 之操作實例

介紹完 Derive 的視窗之後，接著我們以舉實例的方式，來學習 Derive 的數學式輸入之基本操作、式子的展開、因式分解、函數之定義與求值、Slider Bar 拉霸的製作與使用。

◆ 數學式輸入之基本操作

例 1：在代數視窗中的數學式輸入列中用鍵盤鍵入 $1/3$

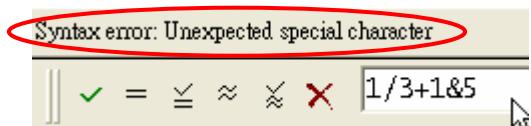
按  (或按 Enter 鍵)，

則在工作區可以得到 $\frac{1}{3}$

例 2：輸入 $1/3+1&5$

按  (或按 Enter 鍵)，

則在工作區並不會呈現輸入結果，
而且在狀態列會出現錯誤訊息 (問題在於“&”這個符號)



例 3：輸入 $1/3+1/5$

按  (或按 Enter 鍵)，在工作區可以得到數學式 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

按數學式輸入列或視窗上方工具列中的 ，可化簡數學式，得到 $\frac{8}{15}$



例 4：輸入 $1/3+1/5$

按  (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可得到例 3 的綜合結果，即同時得到數學式 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 及化簡結果 $\frac{8}{15}$

例 5：輸入  12

按  (或按 Enter 鍵)，在工作區可以得到數學式 $\sqrt{12}$

按數學式輸入列或視窗上方工具列中的 ，可化簡數學式，得到 $2\sqrt{3}$

按  (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可得到上面二個動作的綜合結果，即同時得到數學式 $\sqrt{12}$ 及化簡結果 $2\sqrt{3}$

例 6：輸入 $\sqrt{12}$

按  (或按 Enter 鍵)，在工作區可以得到數學式 $\sqrt{12}$

按數學式輸入列或視窗上方工具列中的 ，可得近似值 3.464101615

按  (或按 Shift+Enter 鍵)，

可得到上面二個動作的綜合結果，即同時得到數學式 $\sqrt{12}$ 及近似值 3.464101615

例 7：輸入 $12345^{\frac{1}{67}}$

按  (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 12345^{67} 及精確值

1348662605521577141133186026956371847027468714202501683631598110392597320
3033102380478150620744083379117936761486799988195646885805346351682922720
8717679242840000079729434910134270596669421689743908383516389750494110820
12506431283848686020210294600474298931658267974853515625

按  (或按 Shift+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 12345^{67} 及近似值 $1.348662605 \cdot 10^{274}$

例 8：輸入 $2x+x/5$

按  (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 $2x + \frac{x}{5}$ 及化簡結果 $\frac{11 \cdot x}{5}$

按  (或按 Shift+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 $2x + \frac{x}{5}$ 及近似值 $2.2 \cdot x$

(依數值運算，有時近似值恰為其精確值)

例 9：輸入 $xy+\sin x$

按  (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 $x \cdot y + \sin(x)$ 及化簡結果 $\sin(x) + x \cdot y$

輸入 $\log(8,2)$

按 $\frac{\wedge}{=}$ (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 $\log(8,2)$ 及化簡結果 3

(DERIVE 也可以呈現其他函數，如：三角函數、對數函數...等，高一下課程可以接觸到。)

例 10：輸入 $2/x+1$

按 $\frac{\wedge}{=}$ (或按 Ctrl+Enter 鍵)，

可同時得到數學式 $\frac{2}{x}+1$ 及化簡結果 $\frac{2}{x}+1$

若要修改方程式時，可在工作窗裡將 $\frac{2}{x}+1$ 反白，按右鍵選 Edit (或在功能表中點選

Edit→Expression)，在輸入列進行修改，結束後按 Enter 鍵，即可完成。

編輯 $\frac{2}{x}+1$ 修改成為 $2/(x+1)$

可得到 $\frac{2}{x+1}$



例 11：輸入 $4x-1/x-5$

按 \checkmark (或按 Enter 鍵)，

會出現 “Syntax error Unexpected delimiter” 錯誤訊息，

主要是因為數學式之定義有以下的可能性：

input	$4x-1/x-5$	$4x-1/x-(5)$	$4x-1/(x-5)$	$4x-(1/x-5)$	$4(x-1/x-5)$	$(4x-1/x-5)$
output	$4x - \frac{1}{x} - 5$	$4x - \frac{1}{x} - 5$	$4x - \frac{1}{x-5}$	$4x - \left(\frac{1}{x} - 5\right)$	$4\left(x - \frac{1}{x} - 5\right)$	$4x - \frac{1}{x} - 5$

所以，在輸入前要先確定自己希望得到的結果是哪一種？

例 12：如同上例，括號的出現位置亦會影響運算的結果

輸入 \sqrt{x}^2 ，按 $=$ 可得到 x ，此運算即為 $(\sqrt{x})^2 = x$

輸入 $\sqrt{(x^2)}$ ，按 $=$ 可得到 $|x|$ ，此運算即為 $\sqrt{x^2} = |x|$

◆ Expand 展開

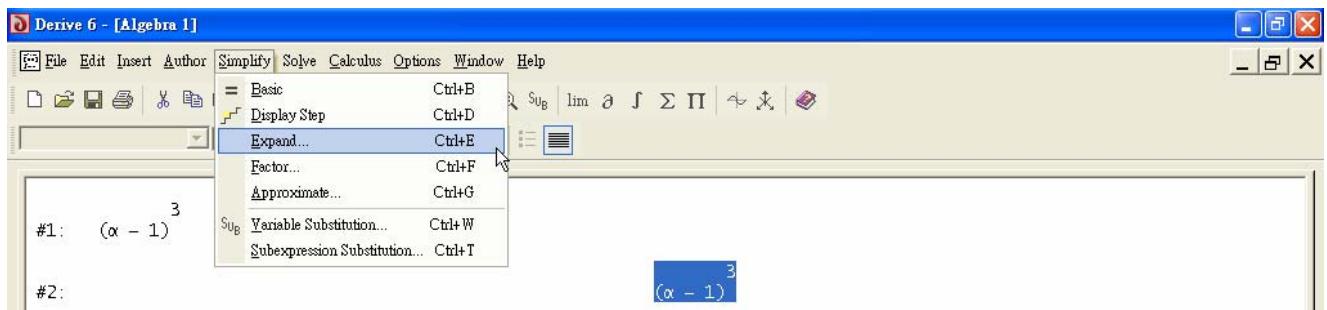
例 13：輸入 $(\alpha - 1)^3$

按 $\frac{\wedge}{\wedge}$ 可得到 $(\alpha - 1)^3$

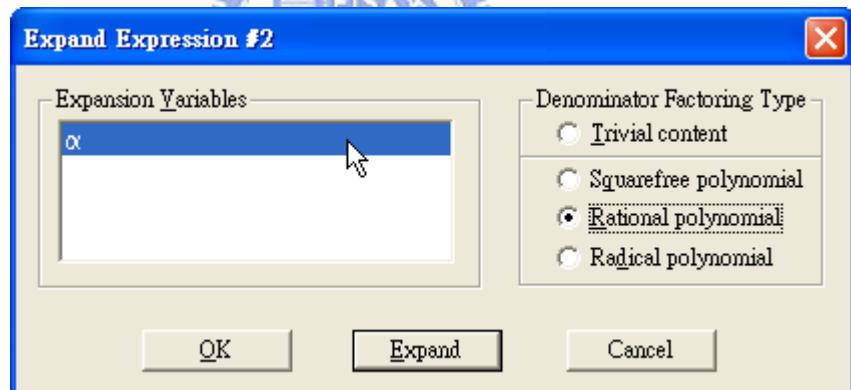
因為 $(\alpha - 1)^3$ 已經是最簡的型式，不能再簡化了。

我們試著將這個式子展開！

在功能表中點選 Simplify→Expand



即出現下列視窗



按 $\frac{\wedge}{\wedge}$ 鍵，即可得到展開式為 $\alpha^3 - 3\cdot\alpha^2 + 3\cdot\alpha - 1$

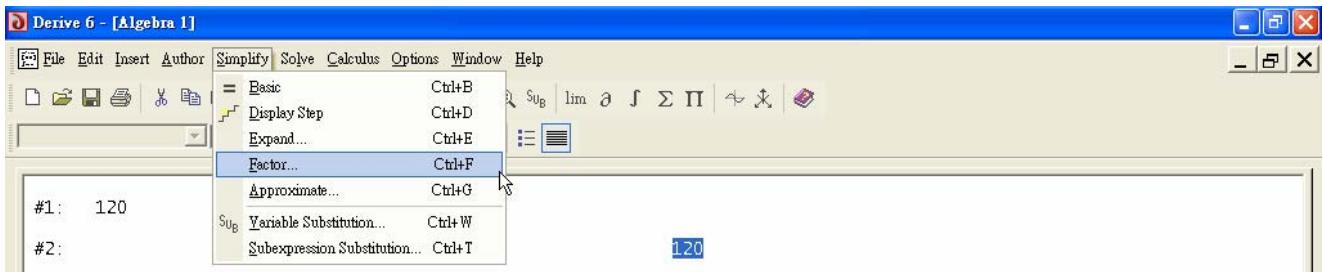
◆ Factor 因式分解、質因數分解

例 14：輸入 120

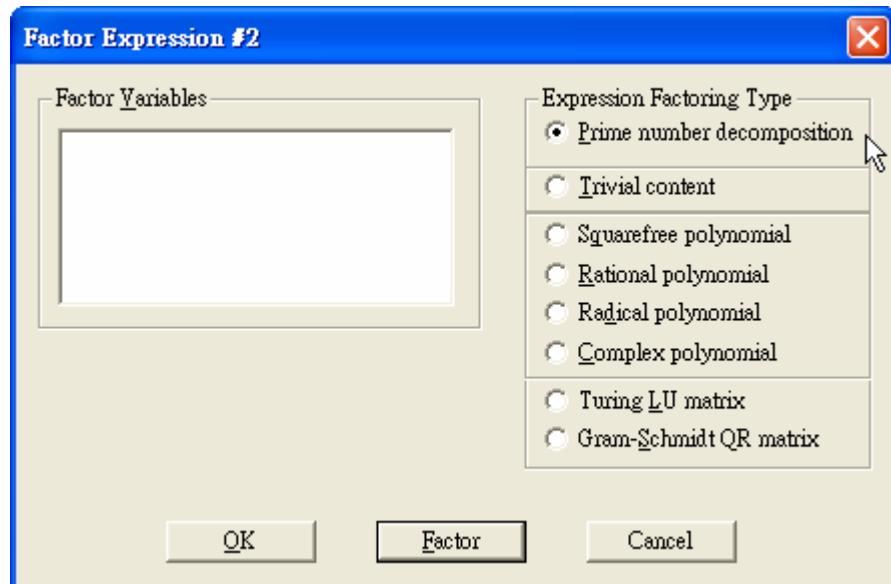
按 $\frac{\wedge}{\wedge}$ 可得到 120

我們試著寫出 120 的標準分解式，將 120 作質因數分解！

在功能表中點選 Simplify→Factor



即出現下列視窗



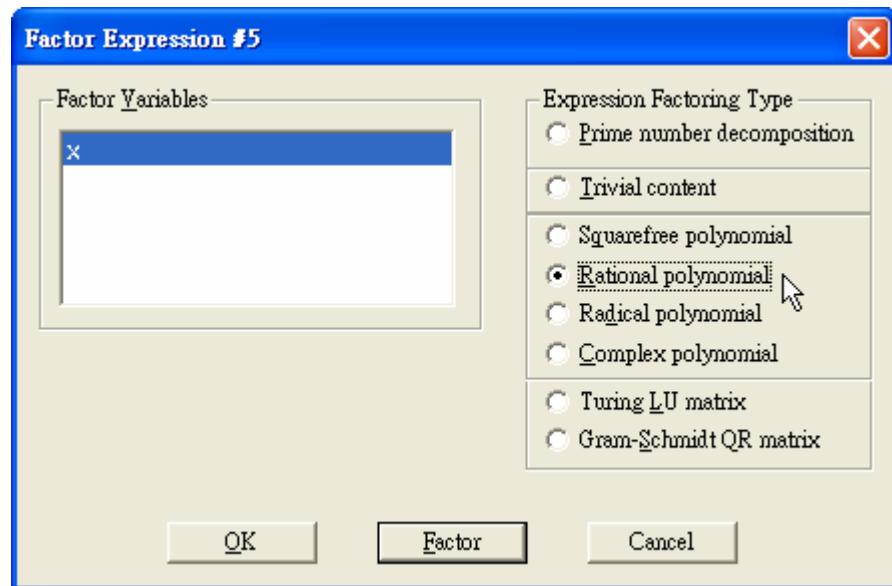
按 **Factor** 鍵，即可得到標準分解式為 $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

例 15：輸入 $x^2 - 5x - 6$

按 **Factor** 可得到 $x^2 - 5x - 6$

我們試著將這個多項式因式分解！

在功能表中點選 Simplify → Factor，即出現下列視窗



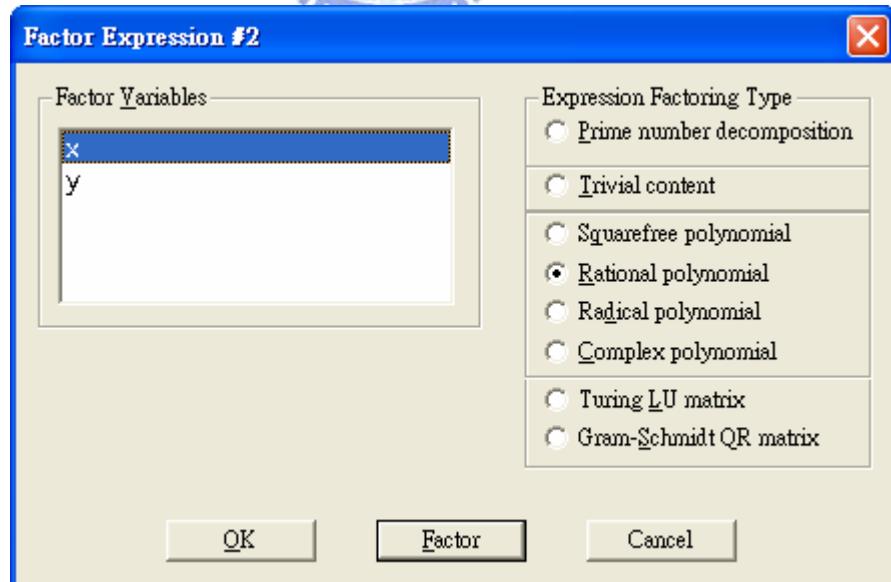
按 **Factor** 鍵，即可得到因式分解的結果為 $(x+1) \cdot (x-6)$

例 16：輸入 $y = x^4 - 1$

按 $\frac{y}{x^4 - 1}$ 可得到 $y = x^4 - 1$

我們試著將這個多項式因式分解！

在功能表中點選 Simplify → Factor，即出現下列視窗



選擇對 x 因式分解

以 Rational polynomial (有理數多項式) 呈現

按 **Factor** 鍵，即可得到因式分解的結果為 $y = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 1)$

以 Radical polynomial (根號多項式) 呈現，則亦可將無理根的存在以一次因式顯示

此題按 **Factor** 鍵，即可得到因式分解的結果為 $y = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 1)$

若以 Complex polynomial (複數多項式) 呈現，則可將複數根的存在以一次因式顯示

此題按 **Factor** 鍵，即可得到因式分解的結果為 $y = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+i) \cdot (x-i)$

◆ 函數之定義與求值

例 17：輸入 $f(x) := x^2 - 5x - 6$

按 **≤** 可得到 $f(x) := x^2 - 5x - 6$

記得要加 “:” 號，否則將無法以函數來識別！

如果想求函數值 $f(1)$ ，可輸入 $f(1)$ ，

按 **≤** 可同時得到數學式 $f(1)$ 及函數值 -10

例 18：輸入 $f(x) := x^2 - 5x - 6$

按 **≤** 可得到 $f(x) := x^2 - 5x - 6$

利用 VECTOR 這個指令，可以用點坐標的方式，一次顯示在函數 $f(x)$ 中多個自變數對應之函數值。此語法將呈現：當 x 由數值 s 到數值 t 每隔數值 d 所對應之函數值 $f(x)$ ，並以點坐標 $[x, f(x)]$ 呈現。

輸入 $\text{VECTOR}([x, f(x)], x, -3, 3, 1)$ ，按 **≤** 可得

-3	18
-2	8
-1	0
0	-6
1	-10
2	-12
3	-12

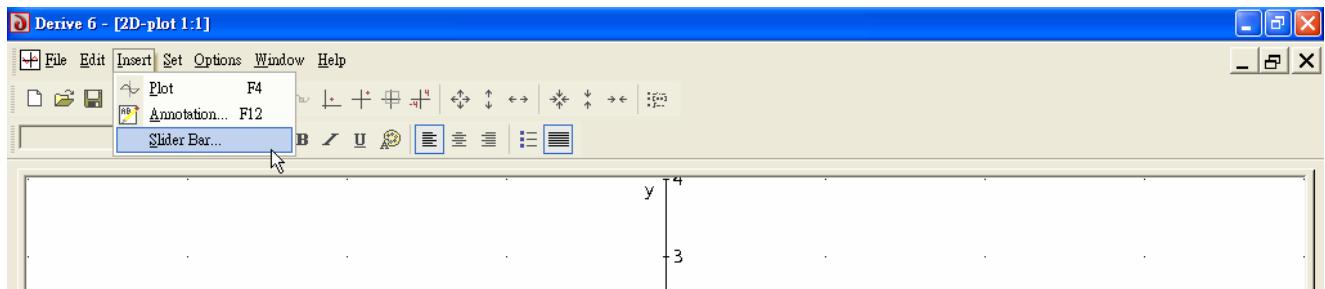
◆ Slider Bar 拉霸的製作與使用

例 19：輸入 $f(x) := ax + b$

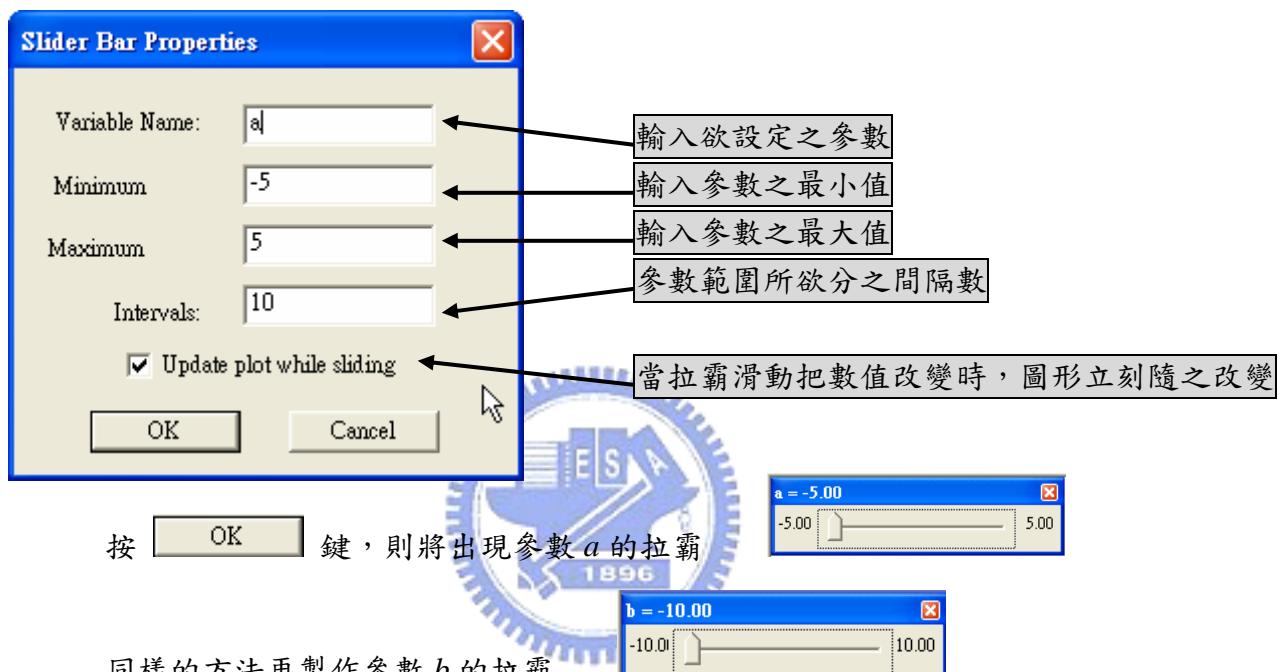
按 **≤** 可得到 $f(x) := a \cdot x + b$

按下 **+** 之後，即可出現「二維畫圖視窗(2D-plot 1:1)」

在功能表中點選 Insert→Slider Bar

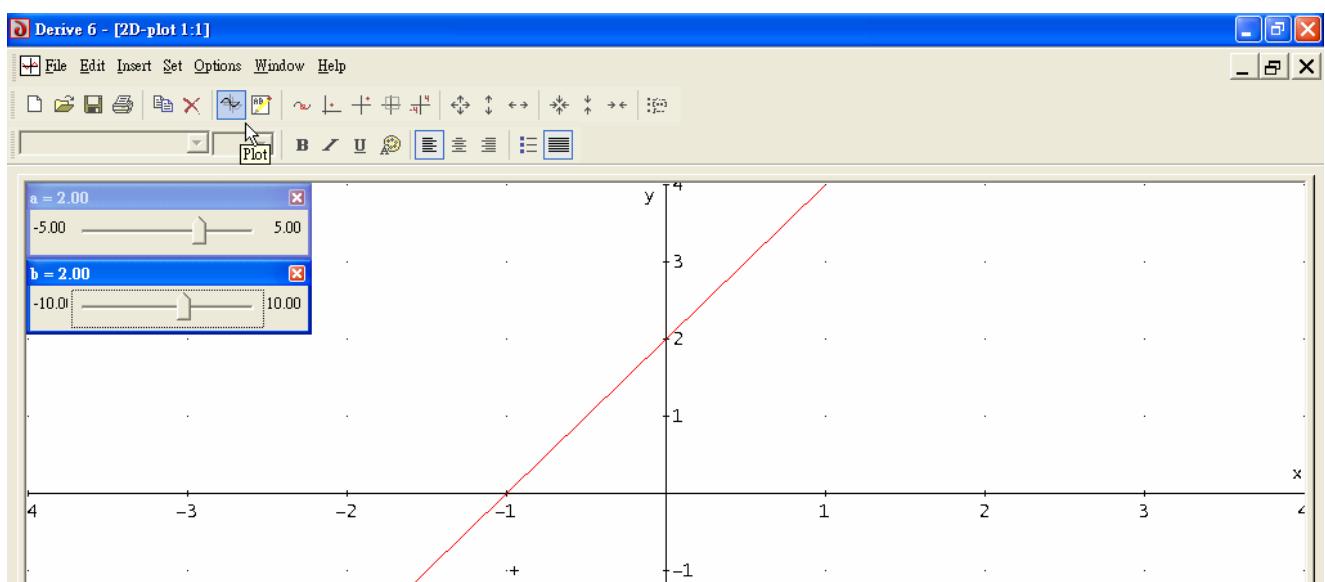


即出現下列視窗



同樣的方法再製作參數 b 的拉霸

滑動拉霸選擇參數 a, b ，再按下 ，即可呈現函數圖形。



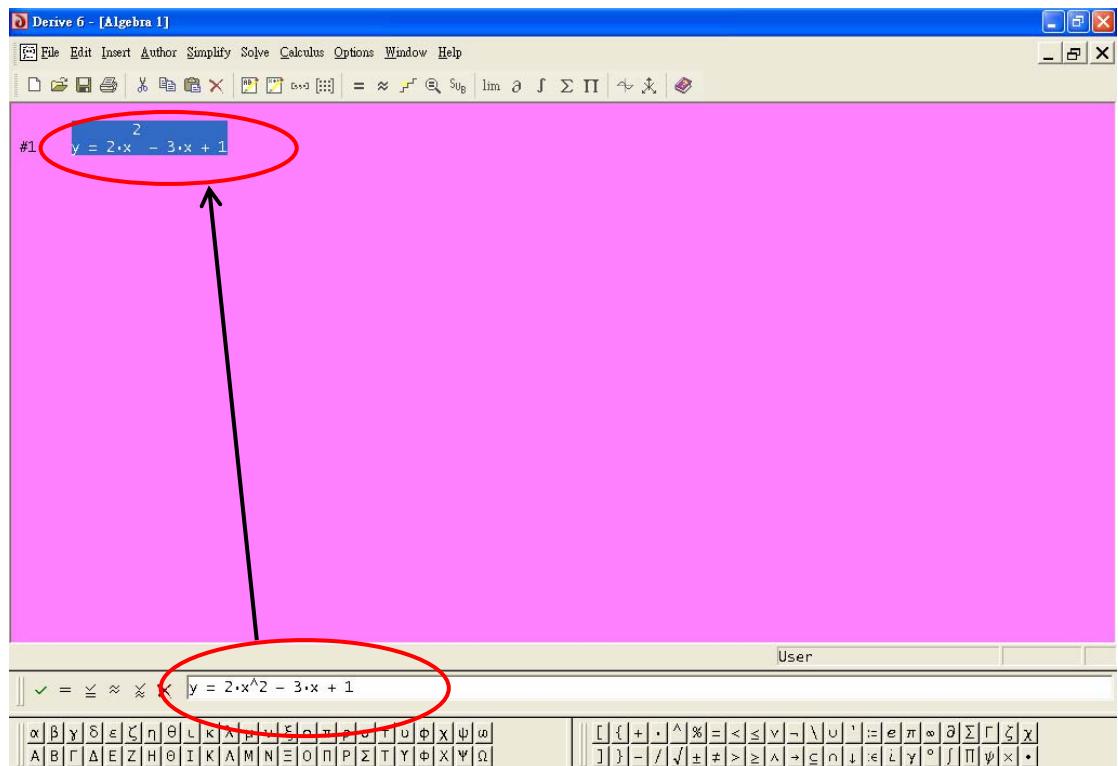
試試看：參數 a, b 的改變，函數圖形是否跟著變化？

介紹完 Derive 的部分操作方法之後，接著我們以舉實例的方式，來說明如何操作 Derive 軟體來畫出函數 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的圖形，並求出方程式 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的解？

1. 畫出函數 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的圖形？

(1) 首先，先將視窗切換到代數視窗。

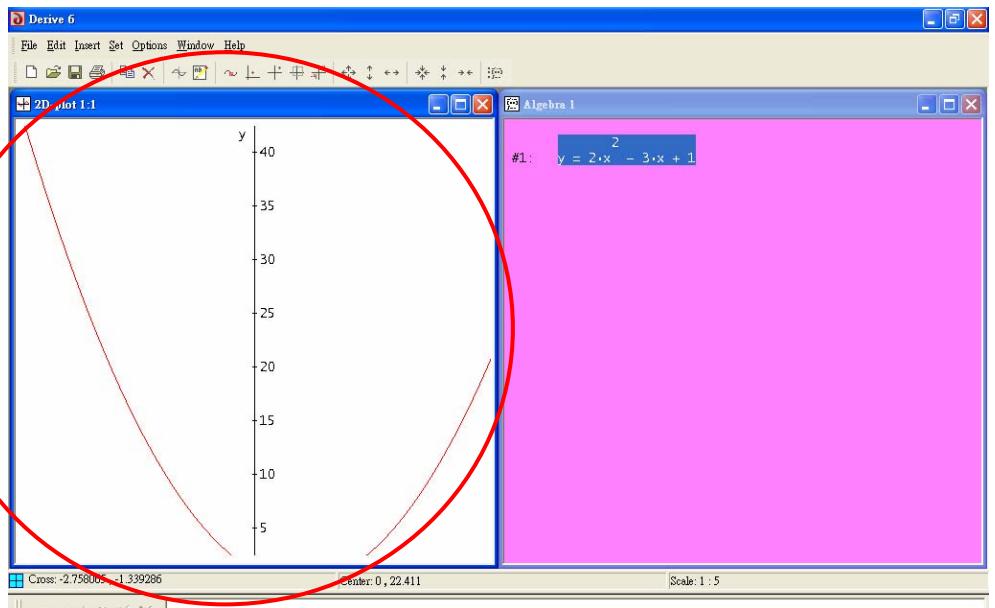
(2) 在「數學式輸入列」中輸入方程式【 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 】，按 Enter 鍵。即可在代數視窗的工作區域中出現我們平常所看到的數學式 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 。



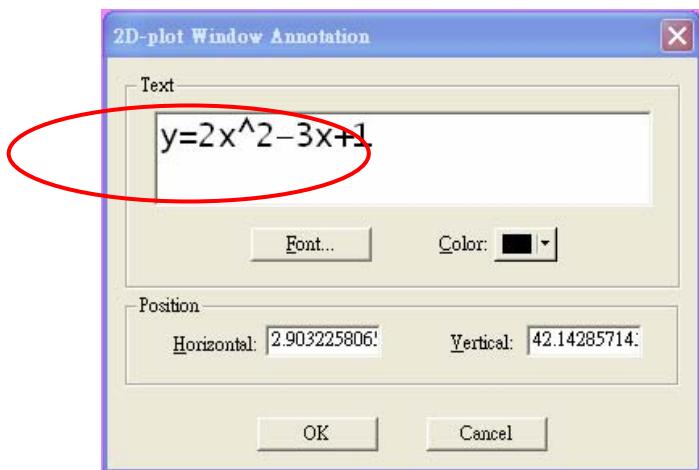
(3) 輸入完方程式之後，接下來就是要畫出圖形了。按【】讓視窗切換到二維畫圖視窗；(當你選取到視窗時，視窗的顏色會變成深藍色)

(4) 選擇雙視窗，按【】。即可以方便觀察方程式和圖形之間的變化情形。

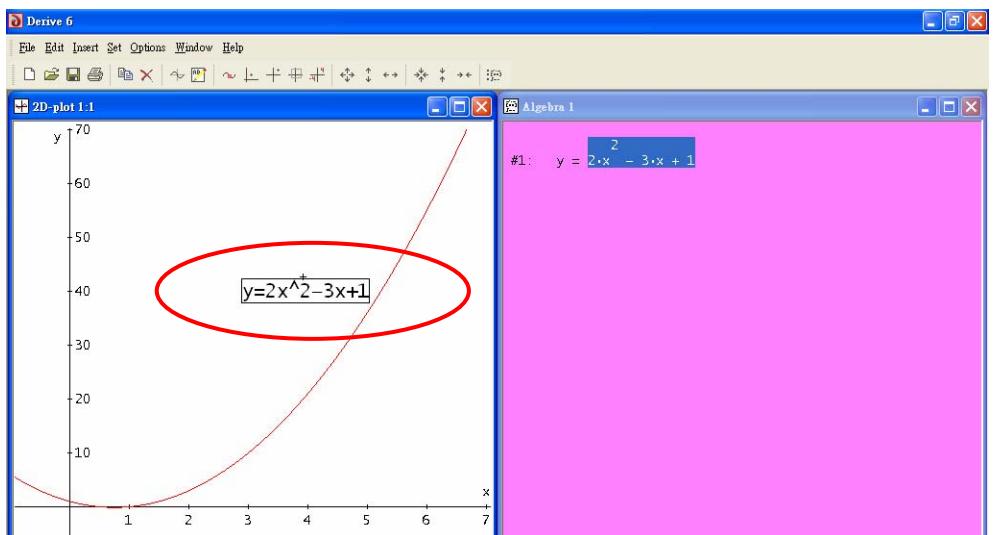
(5) 按【】即可畫出 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的圖形。(多按幾次【】，圖形就會出現不同的顏色哦。)



- (6) 在白色處按右鍵，選擇“Insert Annotation”，就會出現【2D-plot Windows Annotation】視窗，即可輸入方程式 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 。



- (7) 按 Enter 之後，即可在圖形旁邊出現方程式。



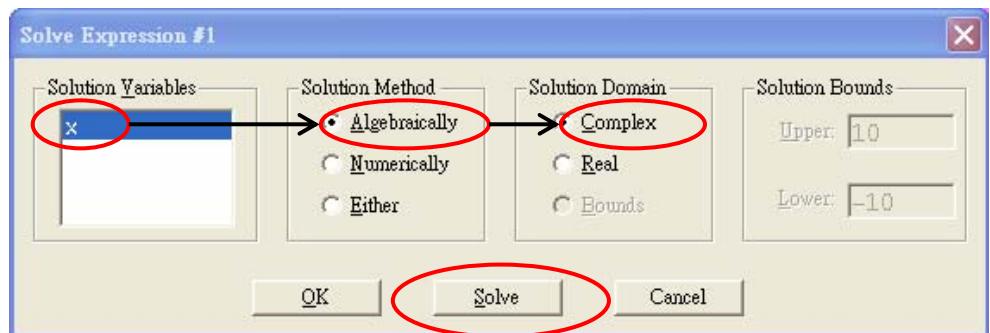
2. 求出方程式 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的解？

(1) 輸入方程式【 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 】，按 Enter 鍵。方程式 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ，即出現在代數視窗的工作區中。

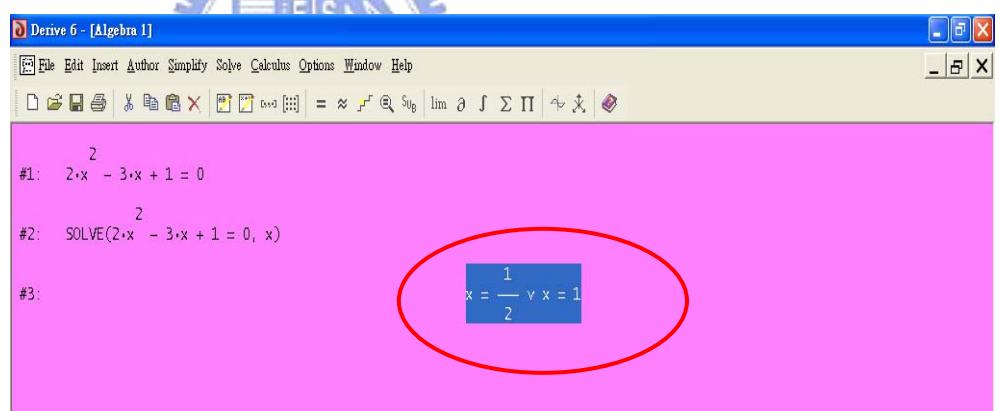
(2) 按【】求出方程式的解；

(3) 按完之後，就會出現【Solve Expression #1】視窗。

選擇變數“x”→選擇“代數解”→解的範圍在“複數”。結束後按【Solve】鍵；



(4) 即可得到方程式的解為 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 1$ 。



六、結語及參考書目

◆ 結語：

數學軟體 Derive 是英文介面的軟體。希望藉由操作手冊裡面的中文說明，讓同學們可以方便操作 Derive 這套數學軟體，並能深入了解及應用它所提供的各項功能，來達到對數學概念的了解。

本次的操作手冊能順利完成，在此深深感謝論文指導教授 袁媛教授和新竹磐石中學的數學老師陳昱伶老師大力的協助和幫忙之下，才能順利完成。

◆ 參考書目：

1. Kutzler, Bernhard & Kokol-Voljc, Vlasta. Introduction to DERIVE TM 6. 2003.





附件三 教學活動學習單

單元一：多項函數的圖形

活動一 常數函數的圖形

活動二 一次函數的圖形

活動三 二次函數的圖形

活動四 多次函數的圖形

單元二：多項方程式

活動一：實係數多次多項式方程式之求解

活動二：代數基本定理 實係數多項方程式虛根成對定理

活動三：多項函數的 zero 與方程式的解



單元一：多項函數的圖形

在這個單元中，我們將討論多項函數的圖形。研究函數圖形除了可以讓我們知道自變數與應變數的關係，同時也使我們能夠掌握該函數的變化趨勢。

接下來的活動，請同學詳細寫下您的回答與想法，活動中將使用 Derive 來輔助教學活動，亦請同學依活動開始時之提示將你操作使用的檔案存檔，或者依提示開啟檔案來操作使用。活動進行中，倘若對教學活動或軟體操作有所疑問，歡迎隨時提問！

活動一 常數函數的圖形

我們曾經在課堂上學過「常數函數」的概念，這個活動我們將回顧常數函數的圖形。同時，請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 001+你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!

1. 什麼是「常數函數」？試著用自己的話把它寫下來。



2. 請你舉一個常數函數的例子，並畫出它的圖形。

3. 試著在 Derive 的環境下畫出第 2 題的圖形，並觀察其結果和你所畫的是否相同？

4. 試著在 Derive 的環境中畫出幾個不同的常數函數圖形。

你發現這些常數函數有什麼共同的特徵？請儘可能地寫下你的觀察結果。

5. 請你用一個一般式來表示任意一個常數函數 $f(x)$ ，
並求出 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
你發現什麼？
6. 在 Derive 的代數視窗中輸入你剛才用一般式所表示的常數函數，試著去檢驗
 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
電腦呈現的結果是否和你相同？

謝謝您的參與!! 此次活動屬於「暖身題」，接下來的活動將有對一次函數、二次函數的探討，以及多次函數的圖形探索。☺



活動二 一次函數的圖形

這個活動我們將回顧「一次函數」的概念及圖形。請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 002+你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!

1. 什麼是「一次函數」？試著用自己的話把它寫下來。

2. 請你舉一個一次函數的例子： $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

並寫出函數值 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

將它的函數圖形畫出來。



3. 試著在 Derive 的環境下呈現此函數，並求出這些函數值。

4. 試著在 Derive 的環境下畫出此函數圖形，其結果和你所畫的是否相同？

5. 試著在 Derive 的環境中呈現幾個不同的一次函數圖形。

你發現這些一次函數圖形有什麼共同的特徵？

6. 請你用一個一般式來表示任意一個一次函數。

休息一下~~^~

進階 經過老師的提示與講解，在這裡的進階題，我們將利用函數的一般式來探討一次函數的圖形！

1. 已知一次函數可以用一般式 $f(x) = ax + b$ 表示（其中 $a, b \in R$ ），

(1) 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數 $f(x) = ax + b$ 。

(2) 請你打開 Derive 的 2D 視窗，以文字標示函數 $f(x) = ax + b$ 。

製作 拉霸分別代表實數 a 及實數 b 。

並畫出 $f(x) = ax + b$ 的函數圖形。

(3) 當你改變 a 值，且 b 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？

請你記錄下來。（可舉例說明）

(4) 當你改變 b 值，且 a 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？

請你記錄下來。（可舉例說明）

(5) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = -2x + 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

(6) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = 2x - 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

2. 根據前面的探索，你有沒有發現一次函數的圖形有什麼特性？

當一個一次函數表示為 $f(x) = ax + b$ 時， a 值會如何影響圖形？ b 值會如何影響圖形？請將你的想法寫下來。



活動三 二次函數的圖形

這個活動我們將回顧「二次函數」的概念及圖形。請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 003+你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!

1. 什麼是「二次函數」？試著用自己的話把它寫下來。

2. 請你舉一個二次函數的例子： $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

並寫出函數值 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

將它的函數圖形畫出來。



3. 試著在 Derive 的環境下呈現此函數，並求出這些函數值。

4. 利用 Derive 中的指令，亦可以一次求得多組自變數與應變數的對應。

請你嘗試寫寫看。

提示：VECTOR([x, f(x)], x, s, t, d) 利用 VECTOR 可以用點坐標的方式，一次顯示在函數 $f(x)$ 中，多個自變數對應之函數值。此語法將呈現：當 x 由數值 s 到數值 t 每隔數值 d 所對應之函數值 $f(x)$ ，並以點坐標 $[x, f(x)]$ 呈現。

5. 利用剛才的結果，請你利用繪圖功能，在 Derive 的 2D 視窗中描繪出這些點。觀察這些點所形成的圖形，圖形有什麼現象？請寫下你推論的結論。

6. 試著在 Derive 的環境下畫出此函數圖形，其結果和你所畫的是否相同？
7. 在你舉的例子裡，觀察 Derive 幫你畫出的函數圖形。
使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，是否有最高點或最低點？
若有最高點或最低點，請記錄下此點之坐標。
8. 請你回想老師在教室教學時，是否有其他方式可以找到函數圖形的最高點或最低點，請你寫下你的方法及想法。
- 
9. 試著在 Derive 的環境中畫出幾個不同的二次函數圖形。
你發現這些二次函數圖形有什麼共同的特徵？
10. 你是否能用一個一般式來表示任何一個二次函數？
如果可以，請寫出這個一般式。

休息一下，等一下還有進階的活動喲~~^-^

進階 經過老師的提示與講解，在這裡的進階題，我們將利用函數的一般式來探討二次函數的圖形！

1. 已知二次函數可以用一般式 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 表示（其中 $a, h, k \in R$ ）

- (1) 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 。
- (2) 請你打開 Derive 的 2D 視窗，以文字標示函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 。

製作 拉霸分別代表實數 a 、實數 h 和實數 k 。

並畫出 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 的函數圖形。

- (3) 當你改變 a 值，且 h 值和 k 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？有什麼不變？請你記錄下來。（可舉例說明）



- (4) 當你改變 h 值，且 a 值和 k 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？有什麼不變？請你記錄下來。（可舉例說明）

- (5) 當你改變 k 值，且 a 值和 h 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？有什麼不變？請你記錄下來。（可舉例說明）

(6) 利用 Derive 同時畫出這二個二次函數： $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ 、

$$f_2(x) = -3(x-2)^2 + 1 \text{ 的圖形。}$$

你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

(7) 利用 Derive 同時畫出這三個二次函數： $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ 、

$$f_2(x) = 3(x-4)^2 + 1 \text{、} f_3(x) = 3(x-4)^2 + 5 \text{ 的圖形，}$$

① 你發現這三個二次函數的圖形有什麼相同的特徵？

② 觀察函數 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$ 。

你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？



③ 觀察函數 $y = f_2(x)$ 和 $y = f_3(x)$ 。

你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？

④ 從①、②和③的觀察發現，請描述 $y = f_3(x)$ 和 $y = f_1(x)$ 的關係。

2. 現在給你一個二次函數 $y = -2x^2 + 4x + 3$ ，請你用配方法將它改成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的型式，並寫出此函數圖形的特性。
3. 如果我們用一般式 $h(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R$) 來表示二次函數，請你利用配方法，試著去寫出它的幾何意義。



活動四 多次函數的圖形

在課本的內容中，所談論的函數圖形最高是三次函數的圖形，而在這次的活動中我們所要討論的多次函數的圖形，除了三次函數圖形的探討，我們也將探索多次函數的變化趨勢。

首先請你先開啟 Derive 檔案：多次函數.dfw。此外，當你在使用 Derive 的過程中若有操作上的問題，可以隨時向老師提問！Are you ready? Let's go!

觀察一 觀察三次多項函數 $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 和 $f_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 圖形的變化趨勢。

1. 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數 $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 。
2. 請你將 Derive 的代數視窗和 2D 視窗並排顯示，並畫出 $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 的圖形。
3. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值 (y 坐標) 之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？……請記錄下你的觀察。

提示：若不易觀察，可將 2D 視窗放大，或將圖形放大、縮小以方便觀察。

另外，追蹤函數圖形上的點時，其點坐標呈現於視窗左下角。



4. 請你利用 Derive 畫出三次函數 $f_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的圖形。
5. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值 (y 坐標) 之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？請記錄下你的觀察。
6. 這 2 個三次函數的圖形趨勢是否有相同或相異之處嗎？試著用自己的話寫出來。
7. 以你的觀察，三次函數的圖形是否連續？是否必為嚴格遞增函數？請寫下你推論的結論。

觀察二 利用下列 3 個三次函數，觀察領導係數的改變對函數圖形的影響。

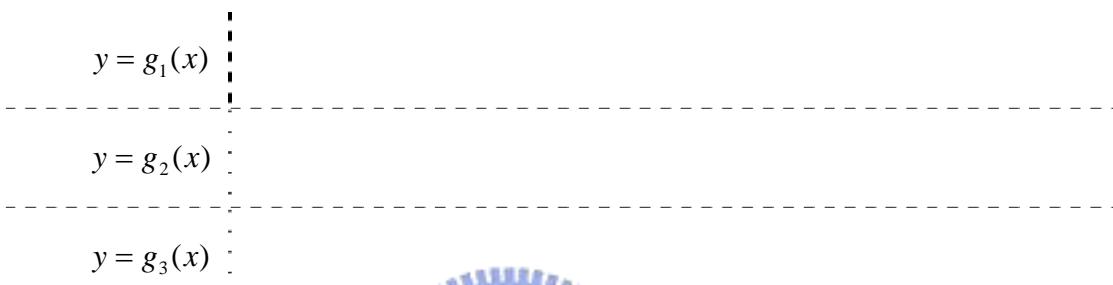
$$g_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad , \quad g_2(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad ,$$

$$g_3(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$$

1. 請你將 Derive 的代數視窗和 2D 視窗並排顯示。
2. 依序將上列 3 個三次函數的圖形畫出。
3. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，依序追蹤這 3 個函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值（ y 坐標）之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？……請記錄下你的觀察。

提示：若不易觀察，可將 2D 視窗放大，或將圖形放大、縮小以方便觀察。

另外，追蹤函數圖形上的點時，其點坐標呈現於視窗左下角。



4. 這 3 個三次函數的圖形趨勢是否有相同或相異之處嗎？

試著用自己的話寫出來。



5. 以上 3 個函數是否有共有的特性？

如果有，請你寫下此特性，並記錄你何以得知。

如果沒有，請你記錄你如何嘗試去尋找他們共有的特性之方法。

6. 以你的觀察，你覺得函數的領導係數對圖形是否有影響？

請寫下你推論的結論。

觀察三 利用下列 3 個多次函數，觀察函數次數的改變對函數圖形的影響。

$$h_1(x) = x(x-1)(x-2)$$

$$h_2(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$h_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

1. 請你先在功能選單中先勾選 Windows → Display Tabs，再陸續新增幾個 2D 視窗。依序將上列 3 個多次函數的圖形畫出。
2. 觀察函數 $h_1(x) = x(x-1)(x-2)$ 的圖形
 - (1) 函數圖形是不是連續不斷？

(2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。

(3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質...等，你還有其他發現嗎？
請你記錄下來。
如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。

3. 觀察函數 $h_2(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的圖形

(1) 函數圖形是不是連續不斷？

(2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。

- (3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質…等，你還有其他發現嗎？
請你記錄下來。
如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。

4. 觀察函數 $h_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的圖形

- (1) 函數圖形是不是連續不斷？
(2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。



- (3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質…等，你還有其他發現嗎？
請你記錄下來。

如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。

5. 以你的觀察，你覺得函數次數的改變對圖形是否有影響？

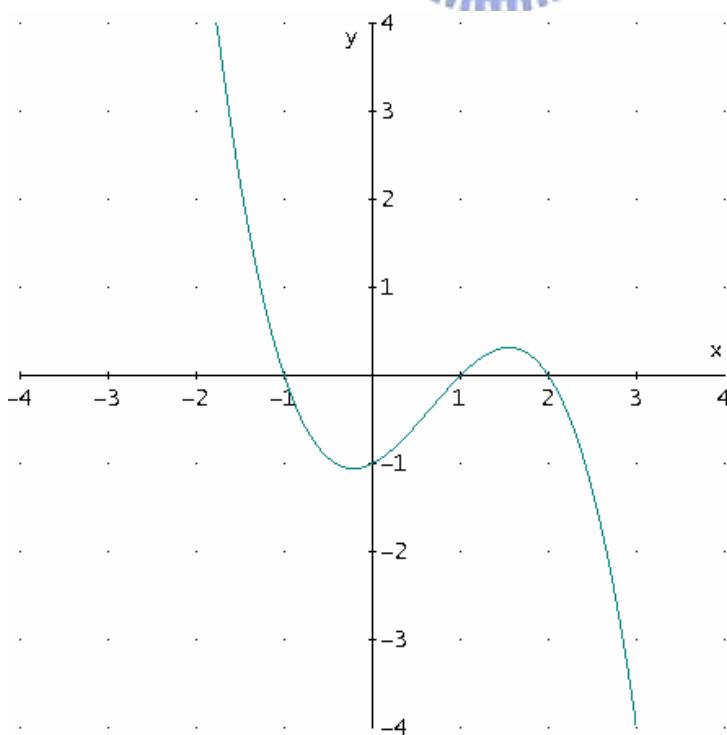
請寫下你推論的結論。

進階

雖然課本中所提到的多項函數其最高次數總是不超過 4 次，但是讓我們來試試看，現在有一個五次函數 $f(x) = -x^5 - 2x^4 + 21x^3 + 22x^2 - 40x$ ，請你用手描繪出此函數圖形。可以使用 Derive 來協助你做計算的工作，但請勿在第一時間便用電腦繪圖喲！請你寫下你的想法及解題過程，倘若解題階段有以 Derive 輔助，亦請你特別註明！◎

進階

現在有一個多次函數 $f(x)$ 的函數圖形如下，請你去猜猜看， $f(x) = ?$



單元二：多項方程式

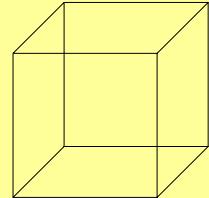
平常當我們遇到有關數學的問題時，常用這樣的解題模式：用文字符號代表未知量，依據問題所給予的條件，建立方程式，然後去解方程式，求出未知量的值以完成解題工作。這個單元我們將討論多項式方程式的求解。回想一下，以往當我們在解方程式的過程中，曾經使用什麼數學概念，或者曾經遭受什麼挫折～

接下來的活動，請同學詳細寫下您的回答與想法，活動中將使用 CAS 軟體 Derive 來輔助教學活動，亦請同學依活動開始時之提示將你操作使用的檔案存檔，或者依提示開啟檔案來操作使用。活動進行中，倘若對教學活動或軟體操作有所疑問，歡迎隨時提問！

活動一 實係數多次多項式方程式之求解

經由剛才老師的教學，相信同學對一次方程式及二次方程式的求解已有概念，知道藉由因式分解、配方法、公式解等方式，可以協助我們找到方程式的解。到目前為止，應該還沒有難倒你吧？！丟個問題來刺激一下你的腦袋！

美美想作一個正立方體的模型，希望這個正立方體的體積可以剛好等於它的表面積與所有邊長的和。如此，這個正立方體的邊長該是多少公分？



假設正立方體的邊長為 x 公分，如果要滿足美美的希望，正方形的邊長 x 必須符合什麼條件或關係式？請你寫下來。

在幫美美解決問題之前，我們先來看三次方程式的求解問題。

1. 解一元三次方程式 $(x-2)(x+3)(x-4)=0$ 。(請你寫下過程)

2. 解一元三次方程式 $(x-2)(x^2 + 4x + 5) = 0$ 。(請你寫下過程)

現在請你開啟 Derive 檔案：方程式 001.dfw，並另存新檔將檔名存成《方程式 001+你的名字.dfw》。

3. 利用 Derive，請你檢查自己剛才求出來的解是否正確。

4. 一元三次方程式 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ ，

(1) 請你試著去求出方程式的解。(請寫下過程)

(2) 在解題的過程中，你用了哪些重要的數學概念？



(3) 如果剛才有寫出解，請你用 Derive 檢查自己剛才求出來的解是否正確。
如果剛才未能成功求解，能否利用 Derive 來幫助自己求解？

5. 回頭來看美美的問題，你能不能幫她找到正立方體的邊長？請你寫下來。

進階

雖然我們很少接觸四次方程式，讓我們試著去解解看！

6. 請你嘗試去解這個四次方程式 $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 = 0$ 。(請寫下過程)

7. 前一題的題目你是否成功找到方程式的解？ 是 否

(1) 如果是，請你直接用 Derive 檢查自己求出來的解是否正確。

(2) 如果不是，請你利用 Derive 來幫助自己找到方程式的解。

ps:如果老師限制不可以使用 Solve 的功能，你是否有其他的解題策略？



8. 請你嘗試去解這個四次方程式 $x^4 - 9x^2 - 12x + 10 = 0$ 。(請寫下過程)

9. 前一題的題目你是否成功找到方程式的解？ 是 否

(1) 如果是，請你直接用 Derive 檢查自己求出來的解是否正確。

(2) 如果不是，請你利用 Derive 來幫助自己找到方程式的解。

ps:如果老師限制不可以使用 Solve 的功能，你是否有其他的解題策略？

活動二 代數基本定理 & 實係數多項方程式虛根成對定理

西元 1799 年，德國數學家高斯在他的博士論文中證明了下面的定理：

每一個複係數（包含實係數） n 次方程式 $f(x)=0$ 至少有一個複數根。

上面這個定理保證了多項方程式的解是存在的。沒有這一個保證，研究方程式的許多理論就失去了依據，此定理確實是代數學的基石，稱為「**代數基本定理**」。當代數基本定理保證解的存在後，解方程式才有實質的意義。以代數基本定理為基礎，用因式定理逐次提出一次因式，可以進一步推導下面的結論：

若將 k 重根計作 k 個根，每一個複係數 n 次方程式 $f(x)=0$ 恰好有 n 個複數根。

當初我們在上課時，同學們非常信任老師，自然而然地接受並記住這樣的結論，真的要證明可能很困難，但是今天的活動我們將利用 Derive 來感受這樣的結論！

現在請你開啟 Derive 檔案：方程式 002.dfw，並另存新檔將檔名存成《方程式 002+你的名字.dfw》。

1. 利用 Derive，請你寫出方程式 $6x^4 - 11x^3 - 85x^2 + 62x + 280 = 0$ 的根。



\therefore 方程式共有 個根。

2. 利用 Derive，請你寫出方程式 $6x^4 + 31x^3 - 54x^2 - 179x + 140 = 0$ 的根。

\therefore 方程式共有 個根。

3. 利用 Derive，請你寫出方程式 $x^5 + x^3 + x = 0$ 的根。

\therefore 方程式共有 個根。

4. 利用 Derive，請你寫出方程式 $x^6 - 1 = 0$ 的根。

\therefore 方程式共有 個根。

在課堂上我們不太敢去接觸複係數方程式，一旦方程式的係數出現複數的話，對我們來說，解它就是個難題。現在我們手邊有 Derive 這個電腦軟體的輔助，我們可以放膽去嘗試複係數方程式，看看是不是如同代數基本定理所言，幾次方程式就有幾個根呢？

5. (1) 請你寫下一個複係數方程式。

(2) 利用 Derive，寫出這個複係數方程式的根。

(3) 檢查一下，根的個數是否和方程式的次數一樣多？

經過剛剛的練習，是不是更能體認代數基本定理的意義。我們再來看看課本中我們證明過的另一個定理：**實係數多項方程式虛根成對定理**。

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ 為一實係數多項方程式。若複數

$a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) 是方程式 $f(x)=0$ 的一根，則其共軛複數 $a-bi$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一根。

次數在三次以下的實係數方程式似乎可以讓我們很容易理解虛根成對定理，那我們現在來看看次數較高的實係數方程式，是不是也可以讓我們看到共軛複數根成對出現的狀況？

6. 利用第 1 題的結果，方程式 $6x^4 - 11x^3 - 85x^2 + 62x + 280 = 0$ 有 ____ 個虛數根，有 ____ 個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？

7. 利用第 2 題的結果，方程式 $6x^4 + 31x^3 - 54x^2 - 179x + 140 = 0$ 有 ____ 個虛數根，有 ____ 個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？

8. 利用第 3 題的結果，方程式 $x^5 + x^3 + x = 0$ 有 ____ 個虛數根，有 ____ 個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？

9. 利用第 4 題的結果，方程式 $x^6 - 1 = 0$ 有 ____ 個虛數根，有 ____ 個實數根。
如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？

10. 已知實係數四次多項方程式 $f(x) = 0$ 的其中兩根為 $2 - i$ 和 $-1 + 3i$ ，且 $f(x)$ 之 x^4 項的係數為 1，請你試著去找出這個多項方程式。

從上面的練習，應該可以體認虛根成對定理之意義。我們知道虛根成對定理是使用在實係數多項方程式，倘若現在我們是遇到複係數方程式，則它的虛數根是不是一定以共軛複數根的型式成對出現？我們來試試看！



11. (1) 請你寫下一個次數最少為二次的複係數方程式。

(2) 利用 Derive，找出這個複係數方程式的根。

(3) 檢查一下，它的虛數根是不是一定以共軛複數根的型式成對出現？

附件四 教學活動教案設計

單元名稱	單元一 多項函數的圖形		
教材來源	高級中學翰林版數學教科書第一冊第四章 (教育部審定 94 學年度用書)		
教學時間	220 分鐘	學生人數	每組 2 人 共四組
學習本單元的預備知識	1. 能明白什麼是多項式。 2. 能判別任一多項式的次數及同類項。 3. 能了解多項式的四則運算。 4. 能了解函數的基本概念，並有求出函數值的能力。		
學生分析	學生程度：此年度的學生在國中時完全沒有學過函數概念，函數概念於高一上學期第一章開始建立。本教學實驗於暑假進行，學生已於高一上學期第四章修習過多項式的範圍，然而對多項函數的概念仍未能清楚明瞭。 學習態度：學生學習態度良好，多數能以努力來補不足之處，少數較消極而較容易放棄。		
單元教學目標	1. 了解多項函數是一連續函數。 2. 能夠了解常數函數的意義，並畫出常數函數的圖形。 3. 能夠畫出一次函數的圖形，並可寫出其斜率、x 截距、y 截距。 4. 能夠了解一次函數的一般式中係數的不同與函數圖形的關係，如斜率、上下平移。 5. 能夠畫出二次函數的圖形，並可寫出拋物線的頂點、x 軸交點、y 軸交點等坐標，了解二次函數圖形的對稱性。 6. 能夠了解二次函數的一般式中係數的不同與函數圖形的關係，如開口方向、開口大小、上下平移、左右平移。 7. 能利用配方法來處理二次函數，並正確說明其幾何意義。 8. 探究多次函數中領導係數的正負與函數圖形的關係、次數多寡對函數圖形可能的影響。 9. 由電腦給予多次函數的圖形，用以探究多次函數圖形的遞增和遞減情形、了解極值的意義、了解多項函數的連續性。		
活動時間分配	活動一：常數函數的圖形 30 分鐘 時間可改為 20 分鐘，各題彈性縮減 活動二：一次函數的圖形 50 分鐘 活動三：二次函數的圖形 70 分鐘 活動四：多次函數的圖形 70 分鐘		
備註	教師準備工作： 1. 教學活動學習單。 2. 電腦（已安裝數學軟體 DERIVE） 3. 教學使用檔案：多項函數. dfw		

活動一：常數函數的圖形		
教師活動	學生活動	時間
<p><引起動機></p> <p>◆ 引言： 感謝同學參與本次之教學實驗，您的參與將是未來教師將資訊融入教學的參考，接下來的活動，請同學詳細寫下您的回答與想法。</p> <p>◆ 複習多項式的意義。</p> <p>◆ 舉例說明多項式之次數。</p> <p>◆ 介紹單元目標： 在這個單元中，我們將討論多項函數的圖形。研究函數圖形除了可以讓我們知道自變數與應變數的關係，同時也使我們能夠掌握該函數的變化趨勢。</p> <p>◆ 敘述活動中希望學生配合的事項： 活動中將使用 Derive 來輔助教學活動，請同學依活動開始時之提示將你操作使用的檔案存檔，或者依提示開啟檔案來操作使用。活動進行中，倘若對教學活動或軟體操作有所疑問，歡迎隨時提問！</p>	<p>學生聆聽。</p> <p>學生舉例。</p> <p>學生聆聽。</p>	5 分
<p><進入活動一></p> <p>◆ 活動及注意事項簡介： 我們曾經在課堂上學過「常數函數」的概念，這個活動我們將回顧常數函數的圖形。同時，請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 001+ 你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!</p> <p>◆ 進行教學活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 什麼是「常數函數」？試著用自己的話把它寫下來。 鼓勵學生用自己的方式來敘述。 請你舉一個常數函數的例子，並畫出它的圖形。 	<p>填寫學習單。</p> <p>學生舉例，並畫出圖形。</p>	5 分
<p>3. 試著在 Derive 的環境下畫出第 2 題的圖形，並觀察其結果和你所畫的是否相同？ 提示學生利用 DERIVE 來驗證自己舉的例子。</p> <p>4. 試著在 Derive 的環境中畫出幾個不同的常數函數圖形。 你發現這些常數函數有什麼共同的特徵？請儘可能地寫下你的觀察結果。 鼓勵學生多畫幾個圖形來比較。</p>	<p>學生操作電腦，並觀察討論。</p> <p>學生操作電腦，並觀察討論。 填寫學習單。</p>	10 分
<p>5. 請你用一個一般式來表示任意一個常數函數 $f(x)$，並求出 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 你發現什麼？ 提示學生「一般式」的概念。</p> <p>6. 在 Derive 的代數視窗中輸入你剛才用一般式所表示的常數函數，試著去檢驗 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$。 電腦呈現的結果是否和你相同？</p> <p>謝謝您的參與!! 此次活動屬於「暖身題」，接下來的活動將有對一次函數、二次函數的探討，以及多次函數的圖形探索。◎</p> <p>活動結束活動一結束時，應該加強學生對零多項式與零次多項式的區別；對學生加強有關「一般式」的概念。</p>	<p>學生計算、填寫學習單。</p> <p>學生操作電腦，並觀察討論。 填寫學習單。</p>	10 分

活動二：一次函數的圖形		
教師活動	學生活動	時間
<p><進入活動二></p> <p>◆ 活動及注意事項簡介： 這個活動我們將回顧「一次函數」的概念及圖形。請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 002+你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!</p> <p>◆ 進行教學活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 什麼是「一次函數」？試著用自己的話把它寫下來。鼓勵學生用自己的方式來敘述。 請你舉一個一次函數的例子：$f(x) =$ _____ 並寫出函數值 $f(1) =$ _____, $f(2) =$ _____, $f(3) =$ _____ $f(0) =$ _____, $f(-1) =$ _____, $f(-2) =$ _____ 將它的函數圖形畫出來。 	<p>學生聆聽。</p> <p>填寫學習單。</p> <p>學生舉例、計算，並畫出圖形。</p>	5 分
<ol style="list-style-type: none"> 試著在 Derive 的環境下呈現此函數，並求出這些函數值。 試著在 Derive 的環境下畫出此函數圖形，其結果和你所畫的是否相同？ 提示學生利用 DERIVE 來驗證自己舉的例子。 	<p>學生操作電腦。</p> <p>學生操作電腦，並觀察討論。 填寫學習單。</p>	5 分
<ol style="list-style-type: none"> 試著在 Derive 的環境中呈現幾個不同的一次函數圖形。你發現這些一次函數圖形有什麼共同的特徵？ 鼓勵學生多畫幾個圖形來比較。 請你用一個一般式來表示任意一個一次函數。 提示學生「一般式」的概念。 檢視學生是否能自己寫出；若學生不知該怎麼寫，教師必須對「一般式」的概念進行加強。 	<p>學生操作電腦，並觀察討論。 填寫學習單。</p> <p>學生思考、填寫學習單。</p>	5 分
<p><發展活動></p> <p>進階 經過老師的提示與講解，在這裡的進階題，我們將利用函數的一般式來探討一次函數的圖形！</p> <ol style="list-style-type: none"> 已知一次函數可以用一般式 $f(x) = ax + b$ 表示（其中 $a, b \in R$）， <ol style="list-style-type: none"> 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數 $f(x) = ax + b$。 請你打開 Derive 的 2D 視窗，以文字標示函數 $f(x) = ax + b$。 製作拉霸分別代表實數 a 及實數 b。 並畫出 $f(x) = ax + b$ 的函數圖形。 提示同學拉霸之製作及使用方法。 當你改變 a 值，且 b 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？ 請你記錄下來。（可舉例說明） <p>教師可間接引導學生去聯想斜率的變化。</p>	<p>學生操作電腦。</p> <p>利用拉霸來改變函數的係數，觀察圖形的改變。 筆記觀察、討論得到的重點。</p>	10 分

<p>(4) 當你改變 b 值，且 a 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？ 請你記錄下來。(可舉例說明)</p> <p>此部分學生會有觀察上的迷思概念，將直線的移動以左右移動觀點來看，或者變成探討交點的移動，教師必須注意。教師可間接引導學生去聯想圖形上下平移的情形。</p> <p>(5) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = -2x + 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？</p> <p>(6) 利用 Derive 同時畫出這二個一次函數： $f_1(x) = 2x + 3$ 和 $f_2(x) = 2x - 3$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？</p>	學生操作電腦，並觀察比較。 填寫學習單。	5 分
<p>〈綜合活動〉</p> <p>2. 根據前面的探索，你有沒有發現一次函數的圖形有什麼特性？ 當一個一次函數表示為 $f(x) = ax + b$ 時，a 值會如何影響圖形？b 值會如何影響圖形？請將你的想法寫下來。</p>	學生討論，並將自己的想法寫下。	5 分
<p>當學生在觀察函數係數的變化對其圖形的影響時，可提醒學生記錄下控制變因（保持不變的要素），再就操縱變因（持續改變的要素）來觀察、分析、類比、推論。</p>	學生提問 or 心得回饋	5 分

活動三：二次函數的圖形		
教師活動	學生活動	時間
<p>〈進入活動三〉</p> <p>◆ 活動及注意事項簡介： 這個活動我們將回顧「二次函數」的概念及圖形。請同學將你操作使用的 Derive 檔案存檔，並將檔名存成《函數圖形 003+你的名字.dfw》。Are you ready? Let's go!</p>	學生聆聽。	5 分
<p>◆ 進行教學活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 什麼是「二次函數」？試著用自己的話把它寫下來。鼓勵學生用自己的方式來敘述。 請你舉一個二次函數的例子：$f(x) =$_____並寫出函數值 $f(1) =$_____, $f(2) =$_____, $f(3) =$_____ $f(0) =$_____, $f(-1) =$_____, $f(-2) =$_____ 將它的函數圖形畫出來。 	填寫學習單。 學生舉例、計算，並畫出圖形。	
<ol style="list-style-type: none"> 試著在 Derive 的環境下呈現此函數，並求出這些函數值。 檢視學生是否可以正確輸入二次函數。 	學生操作電腦。	4 分

<p>4. 利用 Derive 中的指令，亦可以一次求得多組自變數與應變數的對應。 請你嘗試寫寫看。 提示：VECTOR([x, f(x)], x, s, t, d) 利用 VECTOR 可以用點坐標的方式，一次顯示在函數 f(x) 中，多個自變數對應之函數值。此語法將呈現：當 x 由數值 s 到數值 t 每隔數值 d 所對應之函數值 f(x)，並以點坐標 [x, f(x)] 呈現。</p> <p>5. 利用剛才的結果，請你利用繪圖功能，在 Derive 的 2D 視窗中描繪出這些點。觀察這些點所形成的圖形，圖形有什麼現象？請寫下你推論的結論。</p>	<p>學生操作電腦得到多組對應。</p> <p>學生成功繪圖，觀察並討論。 寫下自己推論的結論。</p>	6 分
<p>6. 試著在 Derive 的環境下畫出此函數圖形，其結果和你所畫的是否相同？</p> <p>7. 在你舉的例子裡，觀察 Derive 幫你畫出的函數圖形。使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，是否有最高點或最低點？若有最高點或最低點，請記錄下此點之坐標。 提示學生 Trace 功能的使用方式。</p> <p>8. 請你回想老師在教室教學時，是否有其他方式可以找到函數圖形的最高點或最低點，請你寫下你的方法及想法。</p>	<p>學生觀察比較圖形。</p> <p>利用 Trace 的功能，追蹤二次函數拋物線的最高點或最低點，並寫下坐標。</p> <p>學生可能以描點繪圖的方式或利用配方法來找二次函數的極值。</p>	5 分
<p>9. 試著在 Derive 的環境中畫出幾個不同的二次函數圖形。你發現這些二次函數圖形有什麼共同的特徵？ 鼓勵學生多畫幾個圖形來比較。</p> <p>10. 你是否能用一個一般式來表示任何一個二次函數？ 如果可以，請寫出這個一般式。</p>	<p>學生操作電腦，並觀察討論。 填寫學習單。</p> <p>學生思考、填寫學習單。</p>	5 分
<p><發展活動></p> <p>進階 經過老師的提示與講解，在這裡的進階題，我們將利用函數的一般式來探討二次函數的圖形！</p> <p>當學生在觀察函數係數的變化對其圖形的影響時，可提醒學生記錄下控制變因（保持不變的要素），再就操縱變因（持續改變的要素）來觀察、分析、類比、推論。</p> <p>1. 已知二次函數可以用一般式 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 表示 (其中 $a, h, k \in R$)</p> <p>(1) 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數 $f(x) = a(x - h)^2 + k$</p> <p>(2) 請你打開 Derive 的 2D 視窗，以文字標示函數 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 製作拉霸分別代表實數 a、實數 h 和實數 k。 並畫出 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 的函數圖形。</p> <p>(3) 當你改變 a 值，且 h 值和 k 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？ 有什麼不變？請你記錄下來。(可舉例說明)</p> <p>(4) 當你改變 h 值，且 a 值和 k 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？ 有什麼不變？請你記錄下來。(可舉例說明)</p>	<p>學生操作電腦。</p> <p>利用拉霸來改變函數的係數，觀察圖形的改變。 筆記觀察、討論得到的重點。</p>	3 分 4 分 4 分

<p>(5) 當你改變 k 值，且 a 值和 h 值保持不變的狀況下，函數圖形有什麼改變？有什麼不變？請你記錄下來。(可舉例說明)</p> <p>(6) 利用 Derive 同時畫出這二個二次函數： $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ 、 $f_2(x) = -3(x-2)^2 + 1$ 的圖形。你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？ □頭提示同學寫下觀察結果。 提示同學可以利用 F4 來 COPY 式子，以節省輸入時間。</p> <p>(7) 利用 Derive 同時畫出這三個二次函數： $f_1(x) = 3(x-2)^2 + 1$ 、 $f_2(x) = 3(x-4)^2 + 1$ 、 $f_3(x) = 3(x-4)^2 + 5$ 的圖形，</p> <p>① 你發現這三個二次函數的圖形有什麼相同的特徵？</p> <p>② 觀察函數 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$。 你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？</p> <p>③ 觀察函數 $y = f_2(x)$ 和 $y = f_3(x)$。 你能用自己的話說說看：這兩個函數圖形之間有什麼關係？</p> <p>④ 從①、②和③的觀察發現，請描述 $y = f_3(x)$ 和 $y = f_1(x)$ 的關係。</p>	<p>利用拉霸來改變函數的係數，觀察圖形的改變。 筆記觀察、討論得到的重點。</p> <p>學生操作電腦。 觀察、比較函數圖形。。 填寫學習單。</p> <p>學生操作電腦。 觀察、比較函數圖形。。 填寫學習單。</p> <p>學生操作電腦。 觀察、比較函數圖形。。 填寫學習單。</p> <p>5分</p> <p>3分</p> <p>3分</p> <p>3分</p>
<p>〈綜合活動〉</p> <p>2. 現在給你一個二次函數 $y = -2x^2 + 4x + 3$，請你用配方法將它改成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的型式，並寫出此函數圖形的特性。</p>	<p>學生於學習單上紙筆計算。 思考問題。 筆記重記。</p> <p>5分</p>
<p>〈綜合活動〉</p> <p>3. 如果我們用一般式 $h(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R$) 來表示二次函數，請你利用配方法，試著去寫出它的幾何意義。 教師丟問題，引發學生思考，當作回家練習。</p> <p>當學生在觀察函數係數的變化對其圖形的影響時，可提醒學生記錄下控制變因（保持不變的要素），再就操縱變因（持續改變的要素）來觀察、分析、類比、推論。</p>	<p>學生於學習單上紙筆計算。 思考問題。 筆記重記。</p> <p>6分</p>

活動四：多次函數的圖形		
教師活動	學生活動	時間
<p>〈進入活動四〉</p> <p>◆ 活動及注意事項簡介：</p> <p>在課本的內容中，所談論的函數圖形最高是三次函數的圖形，而在這次的活動中我們所要討論的多次函數的圖形，除了三次函數圖形的探討，我們也將探索多次函數的變化趨勢。</p> <p>首先請你先開啟 Derive 檔案：多次函數.dfw。此外，當你在使用 Derive 的過程中若有操作上的問題，可以隨時向老師提問！Are you ready? Let's go!</p>	<p>學生聆聽。</p>	

◆ 進行教學活動：

對學習成就較低的學生，可以多鼓勵他們可以用文字敘述的方式來寫下他們所觀察到的現象。

當學生的學習意願不高時，教師仍是要秉持用心、關心和愛心來鼓勵學生，當學生的燈塔，指引他們方向。

觀察一 觀察三次多項函數 $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 和 $f_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 圖形的變化趨勢。

1. 請你在 Derive 的代數視窗中呈現此函數

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

2. 請你將 Derive 的代數視窗和 2D 視窗並排顯示，

並畫出 $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 的圖形。

檢視學生是否可以成功將視窗並排，給予適當協助。

3. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值 (y 坐標) 之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？……

請記錄下你的觀察。

提示學生：若不易觀察，可將 2D 視窗放大，或將圖形放大、縮小以方便觀察。另外，追蹤函數圖形上的點時，其點坐標呈現於視窗左下角。

提醒學生在追蹤觀察多次函數圖形的遞增遞減時，可以把自變數的範圍分割，真實地描述 x 在哪個區間呈現遞增、在哪個區間呈現遞減。

4. 請你利用 Derive 畫出三次函數 $f_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的圖形。

5. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，追蹤函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值 (y 坐標) 之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？請記錄下你的觀察。

在追蹤函數上的點時，教師可以提示學生注意點的移動速度，並進一步思考其數學意義，了解曲線的變化程度。

6. 這 2 個三次函數的圖形趨勢是否有相同或相異之處嗎？試著用自己的話寫出來。

7. 以你的觀察，三次函數的圖形是否連續？是否必為嚴格遞增函數？請寫下你推論的結論。

教師可必須強調「嚴格」遞增之意義。

學生操作電腦。

5 分

學生利用電腦繪圖，將視窗並排。

利用 Trace 的功能，追蹤三次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果。

學生利用電腦繪圖，將視窗並排。

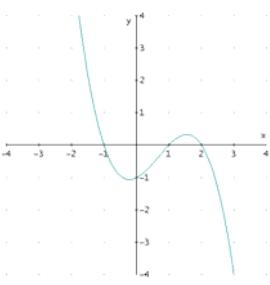
5 分

利用 Trace 的功能，追蹤三次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果。

觀察、比較並討論。
寫下自己推論的結論。

5 分

<p>觀察二 利用下列 3 個三次函數，觀察領導係數的改變對函數圖形的影響。</p> $g_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad ,$ $g_2(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad ,$ $g_3(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$	<p>學生操作電腦，將視窗並排。利用電腦繪圖。</p> <p>利用 Trace 的功能，追蹤三次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果。</p>	5 分
<p>1. 請你將 Derive 的代數視窗和 2D 視窗並排顯示。</p> <p>2. 依序將上列 3 個三次函數的圖形畫出。</p> <p>3. 使用 2D 視窗中 Trace 的功能，依序追蹤這 3 個函數圖形上的點，當自變數 x 由小變大時，其函數值 (y 坐標) 之增減變化情形是如何？函數是否連續不斷？……請記錄下你的觀察。</p> <p>提示學生：若不易觀察，可將 2D 視窗放大，或將圖形放大、縮小以方便觀察。另外，追蹤函數圖形上的點時，其點坐標呈現於視窗左下角。</p>	<p>觀察、比較並討論。</p> <p>填寫學習單。</p>	3 分
<p>4. 這 3 個三次函數的圖形趨勢是否有相同或相異之處嗎？試著用自己的話寫出來。</p> <p>5. 以上 3 個函數是否有共有的特性？</p> <p>提示學生：如果有，請你寫下此特性，並記錄你何以得知。如果沒有，請你記錄你如何嘗試去尋找他們共有的特性之方法。</p>	<p>觀察、比較並討論。</p>	4 分
<p>6. 以你的觀察，你覺得函數的領導係數對圖形是否有影響？請寫下你推論的結論。</p>	<p>比較和討論。</p> <p>寫下自己推論的結論。</p>	3 分
<p>觀察三 利用下列 3 個多次函數，觀察函數次數的改變對函數圖形的影響。</p> $h_1(x) = x(x-1)(x-2)$ $h_2(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ $h_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$	<p>學生操作電腦，利用 Display Tabs 的功能，以標籤的型式新增視窗。</p> <p>利用電腦繪圖。</p>	7 分
<p>1. 請你先在功能選單中先勾選 Windows→Display Tabs，再陸續新增幾個 2D 視窗。依序將上列 3 個多次函數的圖形畫出。</p> <p>2. 觀察函數 $h_1(x) = x(x-1)(x-2)$ 的圖形</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 函數圖形是不是連續不斷？ (2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。 (3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質……等，你還有其他發現嗎？請你記錄下來。如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。 	<p>利用 Trace 的功能，追蹤三次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果及其他發現。</p>	

<p>3. 觀察函數 $h_2(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的圖形</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 函數圖形是不是連續不斷？ (2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。 (3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質…等，你還有其他發現嗎？請你記錄下來。如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。 	<p>利用 Trace 的功能，追蹤四次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果及其他發現。</p>	7 分
<p>4. 觀察函數 $h_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的圖形</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 函數圖形是不是連續不斷？ (2) 請你描述函數遞增、遞減的情形。 (3) 觀察圖形的特徵及現象，如：與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、圖形的連續性及遞增或遞減性質…等，你還有其他發現嗎？請你記錄下來。如果你有方法驗證你觀察到的情形，請寫下您的方法。 	<p>利用 Trace 的功能，追蹤五次函數之遞增或遞減狀況，觀察其連續性，並寫下自己觀察到的結果及其他發現。</p>	7 分
<p>5. 以你的觀察，你覺得函數次數的改變對圖形是否有影響？請寫下你推論的結論。</p>	<p>比較和討論。 寫下自己推論的結論。</p>	4 分
<p><發展活動></p> <p>進階</p> <p>雖然課本中所提到的多項函數其最高次數總是不超過 4 次，但是讓我們來試試看，現在有一個五次函數 $f(x) = -x^5 - 2x^4 + 21x^3 + 22x^2 - 40x$，請你用手描繪出此函數圖形。可以使用 Derive 來協助你做計算的工作，但請勿在第一時間便用電腦繪圖喲！請你寫下你的想法及解題過程，倘若解題階段有以 Derive 輔助，亦請你特別註明！☺</p> <p>提醒學生倘若解題過程有難處產生，可以利用 DERIVE 輔助，但是不要直攬使用 Slove 功能來得到方程式的解。</p> <p>教師應在旁多賦予口頭鼓勵及提示，讓學生有方向且有信心去進行試驗的動作。</p>	<p>學生紙筆計算。 以 DERIVE 來輔助解題。 學生有機會寫出結果，但也可能寫不出來，畢竟這是五次函數，是他們很少接觸的領域。</p>	7 分
<p><發展活動></p> <p>進階</p> <p>現在有一個多次函數 $f(x)$ 的函數圖形如下，請你去猜猜看，$f(x) = ?$</p> 	<p>學生以往習慣從函數來畫圖，在此反向思考，以圖形來猜函數。</p> <p>答案其實不唯一，但只要學生能寫出來就是最佳表現。</p> <p>學生可能從與 x 軸之交點、與 y 軸之交點、函數極值發處先著手。</p>	8 分
<p>提醒學生可以從自己覺得比較特殊的地方先著手。</p> <p>教師應在旁多賦予口頭鼓勵及提示，讓學生有方向且有信心去進行試驗的動作。</p>		

單元名稱	單元二 多項方程式		
教材來源	高級中學翰林版數學教科書第一冊第四章 (教育部審定 94 學年度用書)		
教學時間	120 分鐘	學生人數	每組 2 人 共四組
學習本單元的預備知識	1. 能區分多項函數和多項方程式。 2. 能判別任一多項式的次數及同類項。 3. 能了解多項式的四則運算。 4. 能正確使用配方法。 5. 有因式分解的概念。 6. 能利用公式解來處理一元二次方程式求根的問題。		
學生分析	學生程度：能正確使用配方法，且有因式分解的概念，用以協助解方程式。 學習態度：學生學習態度良好，多數能以努力來補不足之處，少數較消極而較容易放棄。		
單元教學目標	1. 能了解根與係數的關係，並能應用它去解方程式。 2. 能了解代數基本定理及其應用。 3. 能了解實係數多項方程式虛根成對定理及其應用。 4. 能了解多項函數的 zero 與方程式的解的關係。		
活動時間分配	活動一：實係數多次多項方程式之求解 50 分鐘 活動二：代數基本定理&實係數多項方程式虛根成對定理 50 分鐘 活動三：多項函數的 zero 與方程式的解 20 分鐘		
備註	教師準備工作： 1. 教學活動學習單。 2. 電腦（已安裝數學軟體 DERIVE） 3. 教學使用檔案：方程式 001. dfw、方程式 002. dfw		

活動一：實係數多次多項方程式之求解		
教師活動	學生活動	時間
<p>〈引起動機〉</p> <p>◆ 引言： 感謝同學參與本次之教學實驗，您的參與將是未來教師將資訊融入教學的參考。</p> <p>◆ 介紹單元目標： 平常當我們遇到有關數學的問題時，常用這樣的解題模式：用文字符號代表未知量，依據問題所給予的條件，建立方程式，然後去解方程式，求出未知量的值以完成解題工作。這個單元我們將討論多項式方程式的求解。回想一下，以往當我們在解方程式的過程中，曾經使用什麼數學概念，或者曾經遭受什麼挫折～</p> <p>◆ 敘述活動中希望學生配合的事項： 接下來的活動，請同學詳細寫下您的回答與想法，活動中將使用 CAS 軟體 Derive 來輔助教學活動，亦請同學依活動開始時之提示將你操作使用的檔案存檔，或者依提示開啟檔案來操作使用。活動進行中，倘若對教學活動或軟體操作有所疑問，歡迎隨時提問！</p> <p>當學生將函數和多項方程式的概念混淆時，教師應當即時協助她們釐清數學概念。</p>	學生聆聽。	
<p>〈進入活動一〉</p> <p>〈引起動機〉</p> <p>經由剛才老師的教學，相信同學對一次方程式及二次方程式的求解已有概念，知道藉由因式分解、配方法、公式解等方式，可以協助我們找到方程式的解。到目前為止，應該還沒有難倒你吧？！丟個問題來刺激一下你的腦袋！</p> <p><u>美美</u>想作一個正立方體的模型，希望這個正立方體的體積可以剛好等於它的表面積與所有邊長的和。如此，這個正立方體的邊長該是多少公分？</p> <p>假設正立方體的邊長為 x 公分，如果要滿足<u>美美</u>的希望，正方形的邊長 x 必須符合什麼條件或關係式？請你寫下來。</p> <p>在幫<u>美美</u>解決問題之前，我們先來看三次方程式的求解問題。</p> <ol style="list-style-type: none"> 解一元三次方程式 $(x - 2)(x + 3)(x - 4) = 0$。（請你寫下過程） 解一元三次方程式 $(x - 2)(x^2 + 4x + 5) = 0$。（請你寫下過程） <p>現在請你開啟 Derive 檔案：方程式 001.dfw，並另存新檔將檔名存成《方程式 001+你的名字.dfw》。</p> <ol style="list-style-type: none"> 利用 Derive，請你檢查自己剛才求出來的解是否正確。 	<p>學生聆聽。</p> <p>思考應用問題。 學生提問。</p> <p>假設未知數，寫出符合題意的關係式。</p> <p>學生解方程式。</p> <p>學生利用公式解來求方程式的根。</p> <p>學生操作電腦</p>	5 分 3 分 3 分 2 分

<p>4. 一元三次方程式 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$,</p> <p>(1) 請你試著去求出方程式的解。(請寫下過程)</p> <p>(2) 在解題的過程中，你用了哪些重要的數學概念？</p> <p>(3) 如果剛才有寫出解，請你用 Derive 檢查自己剛才求出來的解是否正確。 如果剛才未能成功求解，能否利用 Derive 來幫助自己求解？</p>	<p>學生紙筆計算求方程式的解。 填寫學習單。</p> <p>學生操作電腦來驗證。 以 DERIVE 來輔助解題。</p>	<p>5 分 3 分 3 分</p>
<p>5. 回頭來看<u>美美</u>的問題，你能不能幫她找到正立方體的邊長？請你寫下來。</p>	<p>學生紙筆計算求方程式的解。 以 DERIVE 來輔助解題。 填寫學習單。</p>	<p>6 分</p>
<p><發展活動></p> <p>進階</p> <p>雖然我們很少接觸四次方程式，讓我們試著去解解看！</p> <p>6. 請你嘗試去解這個四次方程式</p> $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 = 0$ 。(請寫下過程)	<p>學生紙筆計算求方程式的解。</p>	<p>7 分</p>
<p>為了擴展學生對多次方程式的求解探索，當學生完全苦無對策的時候，教師適時的介入協助是必要的。</p> <p>7. 前一題的題目你是否成功找到方程式的解？<input type="checkbox"/>是<input type="checkbox"/>否</p> <p>(1) 如果是，請你直接用 Derive 檢查自己求出來的解是否正確。</p> <p>(2) 如果不是，請你利用 Derive 來幫助自己找到方程式的解。 告訴同學：如果老師限制不可以用 Solve 的功能，你是否有其他的解題策略？</p>	<p>學生操作電腦來驗證 或 以 DERIVE 來輔助解題。</p>	<p>3 分</p>
<p>8. 請你嘗試去解這個四次方程式</p> $x^4 - 9x^2 - 12x + 10 = 0$ 。(請寫下過程)	<p>學生紙筆計算求方程式的解。</p>	<p>7 分</p>
<p>為了擴展學生對多次方程式的求解探索，當學生完全苦無對策的時候，教師適時的介入協助是必要的。</p> <p>9. 前一題的題目你是否成功找到方程式的解？<input type="checkbox"/>是<input type="checkbox"/>否</p> <p>(1) 如果是，請你直接用 Derive 檢查自己求出來的解是否正確。</p> <p>(2) 如果不是，請你利用 Derive 來幫助自己找到方程式的解。 告訴同學：如果老師限制不可以用 Solve 的功能，你是否有其他的解題策略？</p>	<p>學生操作電腦來驗證 或 以 DERIVE 來輔助解題。</p>	<p>3 分</p>

活動二：代數基本定理&實係數多項方程式虛根成對定理		
教師活動	學生活動	時間
<p><進入活動二></p> <p><引起動機></p> <p>◆ 複習代數基本定理： 西元 1799 年，德國數學家高斯在他的博士論文中證明了下面的定理：每一個複係數（包含實係數）n 次方程式 $f(x) = 0$ 至少有一個複數根。</p> <p>上面這個定理保證了多項方程式的解是存在的。沒有這一個保證，研究方程式的許多理論就失去了依據，此定理確實是代數學的基石，稱為「代數基本定理」。當代數基本定理保證解的存在後，解方程式才有實質的意義。以代數基本定理為基礎，用因式定理逐次提出一次因式，可以進一步推導下面的結論：若將 k 重根計作 k 個根，每一個複係數 n 次方程式 $f(x) = 0$ 恰好有 n 個複數根。</p> <p>當初我們在上課時，同學們非常信任老師，自然而然地接受並記住這樣的結論，真的要證明可能很困難，但是今天的活動我們將利用 Derive 來感受這樣的結論！</p> <p>◆ 注意事項簡介： 現在請你開啟 Derive 檔案：方程式 002.dfw，並另存新檔將檔名存成《方程式 002+你的名字.dfw》。</p>	學生聆聽、提問。	3 分
<p>◆ 進行教學活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 利用 Derive，請你寫出方程式 $6x^4 - 11x^3 - 85x^2 + 62x + 280 = 0$ 的根。 \therefore 方程式共有 <u> </u> 個根。 利用 Derive，請你寫出方程式 $6x^4 + 31x^3 - 54x^2 - 179x + 140 = 0$ 的根。 \therefore 方程式共有 <u> </u> 個根。 利用 Derive，請你寫出方程式 $x^5 + x^3 + x = 0$ 的根。 \therefore 方程式共有 <u> </u> 個根。 利用 Derive，請你寫出方程式 $x^6 - 1 = 0$ 的根。 \therefore 方程式共有 <u> </u> 個根。 	學生電腦操作。 直接觀察電腦所給予的多次方程式的根。	3 分 3 分 3 分 3 分
<p><發展活動></p> <p>在課堂上我們不太敢去接觸複係數方程式，一旦方程式的係數出現複數的話，對我們來說，解它就是個難題。現在我們手邊有 Derive 這個電腦軟體的輔助，我們可以放膽去嘗試複係數方程式，看看是不是如同代數基本定理所言，幾次方程式就有幾個根呢？</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 請你寫下一個複係數方程式。 (2) 利用 Derive，寫出這個複係數方程式的根。 (3) 檢查一下，根的個數是否和方程式的次數一樣多？ <p>提示學生可自定複係數的方程式，利用 DERIVE 來直接求解，看看係數有 i 的出現，是否也會滿足代數基本定理，根的個數和方程式的次數一樣多。</p>	學生操作電腦，輸入一個複係數方程式，利用 DERIVE 求根，再進一步檢查根。	10 分

<p>◆ 複習實係數多項方程式虛根定理： 經過剛剛的練習，是不是更能體認代數基本定理的意義。我們再來看看課本中我們證明過的另一個定理：實係數多項方程式虛根成對定理。 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ 為一實係數多項方程式。若複數 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) 是方程式 $f(x)=0$ 的一根，則其共軛複數 $a-bi$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一根。 次數在三次以下的實係數方程式似乎可以讓我們很容易理解虛根成對定理，那我們現在來看看次數較高的實係數方程式，是不是也可以讓我們看到共軛複數根成對出現的狀況？</p>	<p>學生聆聽、提問。</p>	
<p>6. 利用第 1 題的結果，方程式 $6x^4 - 11x^3 - 85x^2 + 62x + 280 = 0$ 有_____個虛數根，有_____個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？</p>	<p>觀察第 1 題的結果。 填寫學習單。</p>	2 分
<p>7. 利用第 2 題的結果，方程式 $6x^4 + 31x^3 - 54x^2 - 179x + 140 = 0$ 有_____個虛數根，有_____個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？</p>	<p>觀察第 2 題的結果。 填寫學習單。</p>	2 分
<p>8. 利用第 3 題的結果，方程式 $x^5 + x^3 + x = 0$ 有_____個虛數根，有_____個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？</p>	<p>觀察第 3 題的結果。 填寫學習單。</p>	2 分
<p>9. 利用第 4 題的結果，方程式 $x^6 - 1 = 0$ 有_____個虛數根，有_____個實數根。如果有虛數根，是不是共軛複數根會一起出現？</p>	<p>觀察第 4 題的結果。 填寫學習單。</p>	2 分
<p>10. 已知實係數四次多項方程式 $f(x)=0$ 的其中兩根為 $2-i$ 和 $-1+3i$，且 $f(x)$ 之 x^4 項的係數為 1，請你試著去找出這個多項方程式。</p>	<p>學生紙筆計算。</p>	7 分
<p>從上面的練習，應該可以體認虛根成對定理之意義。我們知道虛根成對定理是使用在實係數多項方程式，倘若現在我們是遇到複係數方程式，則它的虛數根是不是一定以共軛複數根的型式成對出現？我們來試試看！</p>		10 分
<p>11. (1) 請你寫下一個次數最少為二次的複係數方程式。 (2) 利用 Derive，找出這個複係數方程式的根。 (3) 檢查一下，它的虛數根是不是一定以共軛複數根的型式成對出現？ 提示學生我們將利用電腦來看課堂中不可能出現的例子，並提醒學生舉例的方程式次數不要太大，以方便我們去觀察複係數方程式的虛根是否一定有成對。 當學生有主動要求再多一點時間給他們觀察的時候，教師不妨順應學生之意，或許在學生自由意願下的探索與學習，可以激出不同的火花！</p>	<p>學生舉例。 學生操作電腦求方程式的解。 觀察電腦所給予的多次方程式的虛數根是否一定以共軛複數根的型式成對出現。</p>	

活動三：多項函數的 zero 與方程式的解		
教師活動	學生活動	時間
<p>〈進入活動三〉 〈引起動機〉 在單元一我們介紹了多項函數的圖形，而單元二的前二個活動我們討論了多項方程式的解，這兩個部分是否可以結合？也就是求方程式的解時可否利用多項函數來觀察？</p> <p>◆ 進行教學活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問方程式 $x^5 - 8 = 0$ 有幾個實根？ 教師就前測之結果詢問當時學生的想法。 教師提問 5 次方程式的實根數可能有幾個？ 學生回答幾個後，教師進一步再詢問為什麼。 教師先使用 DERIVE 呈現方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的解，並和學生一起數出實根個數。 引導學生將方程式轉化為二個多項函數的聯立，並利用 DERIVE 畫出函數圖形。 引導學生二個函數圖形的交點，即是這二個函數的聯立解，而且能出現在坐標平面上的即是實數解（提示學生複數根無法呈現在直角坐標系上）。 協助學生發現多項式之求解問題可以轉換為二個函數找交點坐標的問題。 故欲知 $x^5 - 8 = 0$ 的實根數，我們可以觀察多項函數 $y = x^5 - 8$ 和 $y = 0$ 的交點狀況。 另外，由於 $y = 0$ 恰為 x 軸，所以方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的解恰為多項函數 $y = x^5 - 8$ 與 x 軸的交點（告知學生這樣的點我們把它稱為是多項函數的 zero） 綜合以上，當我們想找方程式 $f(x) = 0$ 的實數解時，可以找多項函數 $y = f(x)$ 的 zero。 	<p>學生聆聽</p> <p>學生回答</p> <p>學生應用實係數多項方程式虛根成對定理來回答根的可能性</p> <p>學生聆聽、觀察、提問、討論、筆記重點</p>	3 分 10 分
<p>〈綜合活動〉</p> <ol style="list-style-type: none"> 指引學生舉例練習。 	學生舉例練習	7 分



附件五 學習成就測驗前測試題

多項函數與多項方程式

學習成就試題（前測）

親愛的同學：

本測驗的目的是想了解你在高中階段關於多項函數與多項方程式之學習，您的用心作答，將對於數學老師的教學及同學的學習有莫大的幫助。本測驗共有 17 題，請你仔細閱讀每一道題目，運用已有的知識認真作答，並將你的解題過程詳細寫下，謝謝你的配合與參與！

采虹老師

姓名：_____
_____日

測驗日期：____月____

1. 下列各式中，「哪些」是 x 的多項式？_____

(A) $3x+2+\frac{1}{x}$ (B) $2\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x-4$ (C) $5x^2y-\frac{x}{y}+3$ (D) 2^{x^2+x+1} (E) $x^2+|x-3|$

2. 多項式 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ ，「哪些」是 $f(x)$ 的因式？_____

(A) $2x-1$ (B) $2x+1$ (C) $x-1$ (D) $2x-3$ (E) $3x-3$



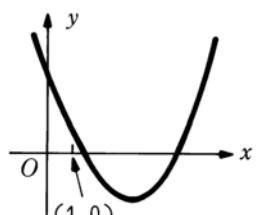
3. 設 a, b 為實數，多項式 $a(3x^3+2x^2)+b(x^3-5x)+2x^3-6x^2+bx-10$ 為一元一次多項式，則 $a+b=$ _____

4. 已知多項式 $3x^3+ax^2+bx+42$ 能被 x^2-x-6 整除，則 $a=$ _____

5. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形如下圖所示，則下列各式何者成立？_____

(A) $a < 0$ (B) $b < 0$ (C) $c < 0$ (D) $a+b+c < 0$ (E) $a-b+c$

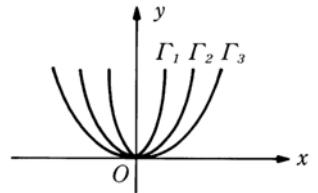
< 0 (F) $9a-3b+c < 0$ 。



6. 如圖，已知三個二次函數， $\Gamma_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ， $\Gamma_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ，

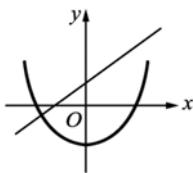
$\Gamma_3 : y = a_3x^2 + b_3x + c_3$ ，則下列何者正確？_____

- (A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_1 < a_2 < a_3$ (C) $b_1 < b_2 < b_3$ (D) $c_1 < c_2 < c_3$ 。

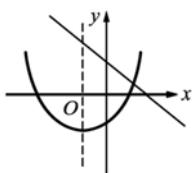


7. 函數 $y = ax + b$ ， $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐標系中的圖形有可能是

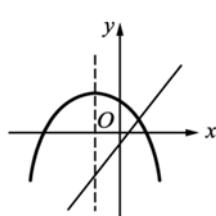
(A)



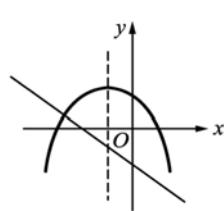
(B)



(C)



(D)



8. 將二次函數 $y = x^2 - 2x + 3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數為_____

9. 二次函數 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 與常數函數 $f(x) = 3$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB} =$ _____

10. a, b 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=3$ 時有最小值 8，則實數 $a=$ _____

11. 抛物線 Γ 之方程式 $y=(x-1)^2$ ，將 Γ 依水平方向右移，則：

(1) 第一次經過點 $(4, 4)$ 時的拋物線其方程式為 _____。

(2) 將 Γ 依直線 $y=x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 $(4, 15)$ 時其拋物線方程式

為 _____。

(3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線

正好通過點 $(4, -4)$ 時，則此時新拋物線的方程式為 _____。



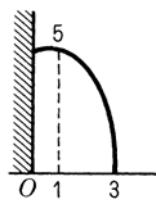
12. 方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的實根個數，則下列何者正確？_____

(A) 有五個實根 (B) 有四個實根 (C) 有三個實根 (D) 有兩個實根 (E) 有一個實根。

13. 已知 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 有一根為 $-2 + 5i$ ，則其他根為 _____。

14. 已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 之一根為 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則其解為

_____ °



15. 若 $1+i$ 為 $x^2 - kx - 1 = 0$ 之一根，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗戶裡，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高出 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公尺。



17. 試作 $y = x^3$ 之圖形，並利用平移的概念描出 $y = (x+2)^3 - 1$ 的圖形。

附件六 學習成就測驗後測試題

多項函數與多項方程式

學習成就試題（後測）

親愛的同學：

本測驗的目的是想了解你在高中階段關於多項函數與多項方程式之學習，您的用心作答，將對於數學老師的教學及同學的學習有莫大的幫助。本測驗共有 17 題（共 20 格），請你仔細閱讀每一道題目，運用已有的知識認真作答，並將你的解題過程詳細寫下，謝謝你的配合與參與！

采虹老師

姓名：_____

測驗日期：____月____日

1. 下列各式中，「哪些」是 x 的多項式？_____

(A) $3x+2+\frac{1}{x}$ (B) $2\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x-4$ (C) $5x^2y-\frac{x}{y}+3$ (D) 2^{x^2+x+1} (E) $x^2+|x-3|$

2. 多項式 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ ，「哪些」是 $f(x)$ 的因式？_____

(A) $2x-1$ (B) $2x+1$ (C) $x-1$ (D) $2x-3$ (E) $3x-3$



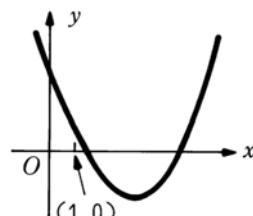
3. 設 a, b 為實數，多項式 $a(3x^3+2x^2)+b(x^3-5x)+2x^3-6x^2+bx-10$ 為一元一次多項式，則

$a+b=$ _____

4. 已知多項式 $3x^3+ax^2+bx+42$ 能被 x^2-x-6 整除，則 $a=$ _____

5. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形如下圖所示，則下列各式何者成立？_____

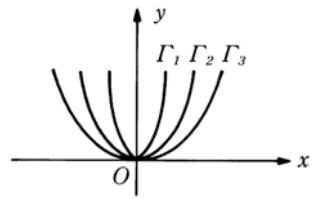
(A) $a < 0$ (B) $b < 0$ (C) $c < 0$ (D) $a+b+c < 0$ (E) $a-b+c < 0$ (F) $9a-3b+c < 0$ 。



6. 如圖，已知三個二次函數， $\Gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ ， $\Gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ ，

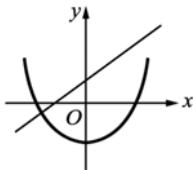
$\Gamma_3 : y = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$ ，則下列何者正確？_____

- (A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_1 < a_2 < a_3$ (C) $b_1 < b_2 < b_3$ (D) $c_1 < c_2 < c_3$ 。

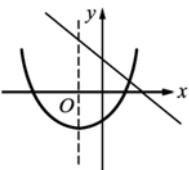


7. 函數 $y = ax + b$ ， $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐標系中的圖形有可能是

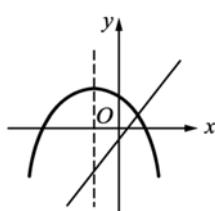
(A)



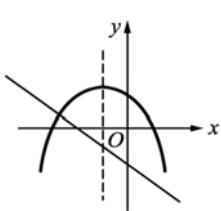
(B)



(C)



(D)



8. 將二次函數 $y = x^2 - 2x + 3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數
爲_____



9. 二次函數 $f(x) = x^2 + 2x + 2$ 與常數函數 $f(x) = 3$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB} =$ _____

10. a, b 為實數，且二次函數 $y = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ 在 $x = 3$ 時有最小值 8，則實數 $a =$ _____

11. 抛物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$ ，將 Γ 依水平方向右移，則：

- (1) 第一次經過點 $(4, 4)$ 時的拋物線其方程式為_____。
- (2) 將 Γ 依直線 $y=x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 $(4, 15)$ 時其拋物線方程式為_____。
- (3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線正好通過點 $(4, -4)$ 時，則此時新拋物線的方程式為_____。

12. 方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的實根個數，則下列何者正確？_____

- (A) 有五個實根 (B) 有四個實根 (C) 有三個實根 (D) 有兩個實根 (E) 有一個實根。

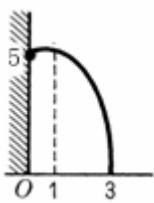
13. 已知 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 有一根為 $-2 + 5i$ ，則其他根為_____。



14. 已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 之一根為 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則其解為_____。

15. 若 $1+i$ 為 $x^2 - kx - 1 = 0$ 之一根，則 $k =$ _____

16. 在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗戶裡，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出_____公尺。



17. 試作 $y=x^3$ 之圖形，並利用平移的概念描出 $y=(x+2)^3-1$ 的圖形。



附件七 學生使用 DERIVE 學習回饋問卷

學生使用 DERIVE 學習回饋問卷

親愛的同學：

這份問卷主要是想了解您透過 DERIVE 軟體學習多項函數之後，對多項函數 DERIVE 課程的意見及學習態度。每一題的答案無所謂的對與錯，主要是想知道您寶貴的意見與看法，藉由您的回饋，亦是未來教學課程設計的重要參考依據。請您依您的真實情況用心作答，選擇最適合的答案。

國立交通大學理學院專班網路學習組 研究生李采虹

- 對於多項函數 DERIVE 課程，我在電腦操作上沒有問題。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 對於多項函數 DERIVE 課程，我能瞭解老師講解的操作步驟。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 我覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習很適當。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 多項函數 DERIVE 課程可以將課本中難以展示的教材具體呈現，讓我更能瞭解多項函數的內容。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 我喜歡這一次的教學實驗。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 想到能利用電腦上數學課，我覺得很高興。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____
- 我喜歡多項函數 DERIVE 課程的設計。
非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意
■其他補充意見 _____

8. 我能適應多項函數 DERIVE 課程的教學方式。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

9. 在多項函數 DERIVE 課程的學習過程中，我反而無法專心上課。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

10. 在多項函數 DERIVE 課程的學習過程中，一遇到問題我會主動向老師或同學發問。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

11. 透過電腦與多項函數 DERIVE 課程的設計，對我在多項函數的學習上有幫助。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

12. 透過電腦與多項函數 DERIVE 課程的設計，可以引發我的學習興趣。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

13. 我會在其他課餘時間再將多項函數 DERIVE 課程再操作一次。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

14. 多項函數 DERIVE 課程的學習活動中，提供了許多讓我和同學一起討論的機會。

非常同意 同意 沒意見 不同意 非常不同意

■其他補充意見 _____

15. 這幾次多項函數 DERIVE 課程中，你對哪一個活動印象最深刻？

16. 這幾次多項函數 DERIVE 課程中，你覺得哪一個活動的設計，對你的學習最有幫助？

17. 你對於使用電腦及電腦代數系統 DERIVE 學習數學的方式滿意嗎？

你覺得若那一點能加以改善的話，將會更加完美？

18. 經過這幾次多項函數 DERIVE 課程教學，你對數學的學習態度是否改變？

為什麼？

19. 是否有其他意見或建議，請您寫下您寶貴的看法。

或者經過這幾次的教學活動，你有所得或感想……歡迎您寫下來。



謝謝您的熱心參與及作答!!



附件八 後測階段學生訪談計劃及大綱

學生訪談計劃

1. 每次僅訪談 1 名研究對象，訪談時讓學生輕鬆自由發表看法。
2. 訪談前學生都知道研究者將使用錄音機輔助錄音以協助研究之進行，並同意進行錄音訪談。
3. 訪談前研究者告知學生訪談目的純粹是為了了解他們個人的看法，與成績無關，鼓勵學生暢所欲言。
4. 利用午休、放學、假日等課餘時間完成訪談，訪談時間約為 30 分鐘，訪談地點為教師辦公室。
5. 8 名研究對象完成訪談後，研究者將訪談內容以逐字稿呈現。

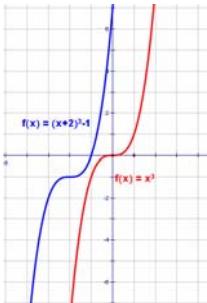
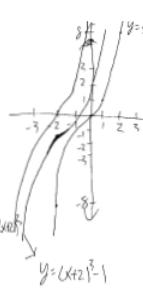
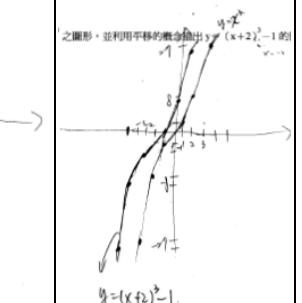
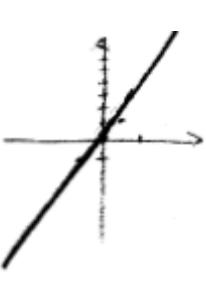
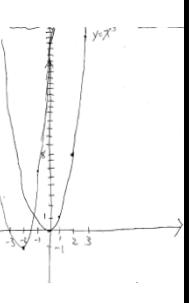
學生訪談大綱

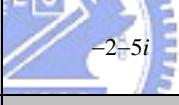
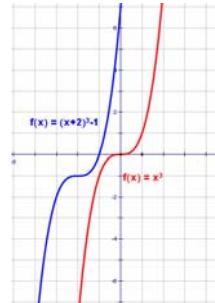
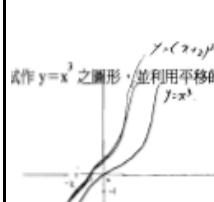
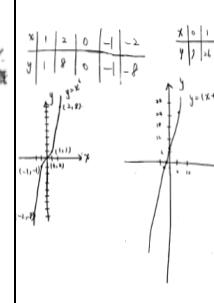
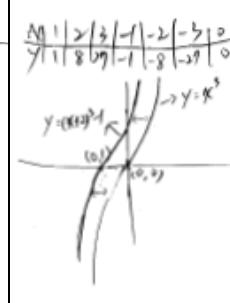
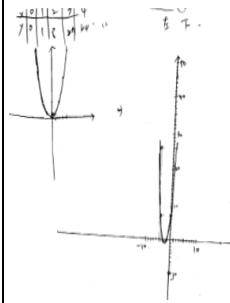
1. 在使用數學軟體 DERIVE 的過程中，操作上有沒有遇到什麼困難？
2. 覺得多項函數課程利用電腦及 DERIVE 來輔助學習適當嗎？
3. 你喜歡這一次的教學實驗嗎？
4. 這幾次多項函數 DERIVE 課程中，你對哪一個活動印象最深刻？
5. 這幾次多項函數 DERIVE 課程中，你覺得哪一個活動的設計，對你的學習最有幫助？
6. 你對於使用電腦及電腦代數系統 DERIVE 學習數學的方式滿意嗎？
你覺得若那一點能加以改善的話，將會更加完美？
7. 經過這幾次多項函數 DERIVE 課程教學，你對數學的學習態度是否改變？
為什麼？
8. 以數學軟體來輔助教學的教學環境，你覺得可行嗎？
9. 教學活動採小組合作，你和你的伙伴合作愉快嗎？
10. 對於參與這次的教學實驗，你是否有所獲得？有什麼心得？



附件九 前測—學生作答結果之比較與分析

- | | | | |
|--|---------------|---|--------------------|
| | 學生作答正確無誤 | | 學生未寫答案，但有解題想法及計算過程 |
| | 學生作答部分正確、部分錯誤 | | 學生完全放棄未作答 |

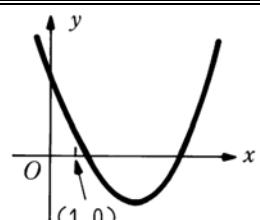
	正確答案	阿斌	萱萱	綾綾	阿全
1	BC	BC	ABE	D	ABC
2	BCE	BC	BCE	BCE	D
3	-8	-8	-8	-8	-8
4	-10	-10	-10		-10
5	B	B	BCD	CE	B
6	A	A	A	C	C
7	D	D	D	D	C
8	$y=x^2+8x+14$	$x^2+8x+14$	$y=(x+4)^2-2$	$y=x^2+8x+14$	$y=x^2+3x-1$
9	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$			$-1+\sqrt{2}$
10	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-1 \text{ or } \frac{1}{9}$		1
11(1)	$y=(x-2)^2$	$y=(x-2)^2+11$	$y=(x-4)^2+4$	$x^2-8x+20$	$y=(x-1)^2-5$
11(2)	$y=(x-7)^2+6$	$y=(x-2)^2+11$			
11(3)	$y=-\frac{4}{9}(x-1)^2$	$y=-\frac{4}{9}(x-2)^2$			
12	E	A	E		E
13	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$0 \text{ or } \frac{3}{2}$	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$-2-5i, \frac{3}{2}$
14	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{7\pm\sqrt{61}}{6}$	$0 \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$\frac{123-\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$
15	$\frac{1+3i}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1+3i}{2}, \frac{1}{2}$		$\frac{1+3i}{2}$	-2
16	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$		1	1
17 (1) (2)	 $f(x) = (x+2)^2 - 1$ $f(x) = x^2$	 $y = x^2$ $y = (x+2)^2 - 1$	<p>之圖形，並利用平移的概念得出 $y = (x+2)^2 - 1$ 的</p>  $y = (x+2)^2 - 1$		
	答對百分比	66%	56%	32%	34%

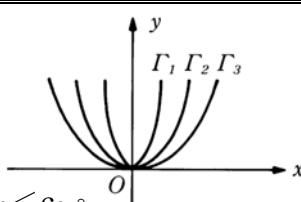
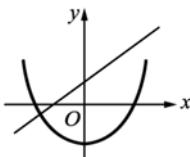
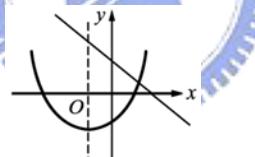
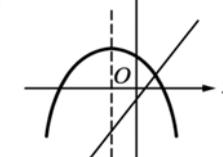
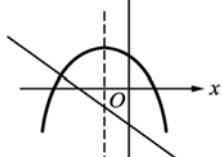
	正確答案	小真	小琳	小穎	欣欣
1	BC	BC	BDE	AB	BD
2	BCE	C	BC	BC	BD
3	-8	-7		-8	-8
4	-10	-10	-10	4	-10
5	B	B	C	C	ADF
6	A	B	B	A	B
7	D	D	A	A	A
8	$y=x^2+8x+14$	$x^2+3x-1=y$	$(x-5)^2+7$	$y=-4(x+1)^2+8$	$y=x^3+3x-1$
9	$2\sqrt{2}$	-2	$2+2\sqrt{2}$	$6+2\sqrt{2}$	2
10	$\frac{1}{9}$				1
11(1)	$y=(x-2)^2$	$y=(x-1)^2+5$			$x=y$
11(2)	$y=(x-7)^2+6$				$y=x-11$
11(3)	$y=-\frac{4}{9}(x-1)^2$				
12	E	E	E	E	C
13	$-2-5i, \frac{3}{2}$			$-2-5i$	$-160i$
14	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ or 3 or $-\frac{2}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$			$\sqrt{2}i$
15	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	$\frac{2i-1}{1+i}$	-1		
16	$\frac{5}{3}$				2.5
17 (1) (2)	 <p>$f(x) = (x+2)^3 - 1$ $f(x) = x^3$</p>	<p>試作 $y = x^3$ 之圖形，並利用平移的概</p> 			
	答對百分比	34%	26%	28%	15%

	阿斌	萱萱	綾綾	阿全	小真	小琳	小穎	欣欣	各題之答對率
1	5	2	2	4	5	2	3	3	65.0%
2	4	5	5	1	3	4	4	2	70.0%
3	5	5	5	5	0	0	5	5	75.0%
4	5	5	0	5	5	5	0	5	75.0%
5	5	0	0	5	5	0	0	0	37.5%
6	5	5	0	0	0	0	5	0	37.5%
7	5	5	5	0	5	0	0	0	50.0%
8	0	5	5	0	0	0	0	0	25.0%
9	5	0	0	0	0	0	0	0	12.5%
10	5	3	0	0	0	0	0	0	20.0%
11(1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
11(2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
11(3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
12	0	5	0	5	5	5	5	0	62.5%
13	5	3	5	5	0	3	0	0	52.5%
14	3	3	0	4	1	0	0	0	27.5%
15	5	0	5	0	5	0	0	0	37.5%
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0%
17(1)	5	5	0	0	0	5	5	0	50.0%
17(2)	4	5	0	0	0	2	1	0	30.0%
個人答對百分比	66%	56%	32%	34%	34%	26%	28%	15%	

1	下列各式中，「哪些」是 x 的多項式？_____
	(A) $3x+2+\frac{1}{x}$ (B) $2\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x-4$ (C) $5x^2y-\frac{x}{y}+3$ (D) 2^{x^2+x+1} (E) $x^2+ x-3 $
	ANS : BC。4-1 多項式的概念
欲測概念	了解什麼是多項式（先備知識）
正確解題策略	1. 明瞭多項式之意義，知道變數不能放在分母、指數位置及絕對值內。（斌、真）
錯誤因素	1. 選(A) – 未能清楚了解多項式之變數不能置於分母。（萱、全、穎） 2. 選(D) – 未能清楚了解多項式之變數不能置於指數位置。（綾、琳、欣） 3. 選(E) – 未能清楚了解多項式之變數不能置於絕對值內。（萱、琳） 4. 選(B) – 以為多項式之係數不可為無理數。（綾） 5. 選(C) – 符號 y 之出現使學生對多項式之定義產生混淆。（萱、綾、琳、穎、欣）

2	多項式 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ ，「哪些」是 $f(x)$ 的因式？_____ (A) $2x-1$ (B) $2x+1$ (C) $x-1$ (D) $2x-3$ (E) $3x-3$
	ANS : BCE 。 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3 = (2x+1)(x-1)(x+3)$ 。 4-2 一次因式檢驗法、因式定理 (課 165)
欲測概念	能判別多項式之因式 (先備知識)
正確解題策略	1. 利用綜合除法檢查一次因式。 2. 能因式分解。 3. 利用長除法檢查，續以因式分解。(萱) 4. 利用因式定理代入求解。(綾) 5. 能清楚了解若 $x-1$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $3x-3$ 亦為 $f(x)$ 之因式。(萱)
錯誤因素	1. 了解 $x-1$ 為 $f(x)$ 之因式，但忽略 $3x-3$ 亦為 $f(x)$ 之因式。(斌、琳、穎) 2. 欲使用綜合除法，但運算概念不健全。(全) 3. 找出一個因式後，未完全判別其餘選項。(真)
3	設 a, b 為實數，多項式 $a(3x^3+2x^2)+b(x^3-5x)+2x^3-6x^2+bx-10$ 為一元一次多項式，則 $a+b=$ _____
	ANS : -8 。 $a=3$ ， $b=-11$ 。 4-1 同類項合併、多項式的概念 (建)
欲測概念	多項式之同類項合併及對多項式次數之了解。(先備知識)
正確解題策略	1. 同類項合併後，利用 x^2 及 x^3 之係數為 0，解聯立求得 a, b 。(斌、萱、綾、全、穎、欣)
錯誤因素	1. 計算錯誤。(真) 2. 未作答，無解題策略。(琳)
4	已知多項式 $3x^3+ax^2+bx+42$ 能被 x^2-x-6 整除，則 $a=$ _____
	ANS : $a=-10$ 。 $b=-11$ 。 4-2 整除概念、多項式的除法、或利用因式定理 (隨 105)
欲測概念	多項式的整除 (先備知識)
正確解題策略	1. 利用長除法運算。(斌、萱、全、琳、欣) 2. ? (真)
錯誤因素	1. 誤用輾轉相除法，所以無法作答。(綾) 2. 計算過程錯誤，未注意正負。(穎)
5	二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形如下圖所示，則下列各式何者成立？_____ (A) $a<0$ (B) $b<0$ (C) $c<0$ (D) $a+b+c<0$ (E) $a-b+c<0$ (F) $9a-3b+c<0$ 。
	ANS : (B)
欲測概念	二次函數圖形與函數係數之關係，由已知圖切入。
正確解題策略	1. 能判別開口方向對 a 之影響。(萱、綾、全) 2. 能利用函數值去做選項(D)(E)(F)的判別。(斌、全) 3. 刪去法：刪去不可能正確之選項 (有利用函數值正確判別)。(斌、真)



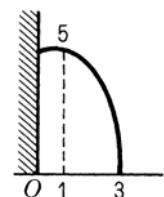
	4. 能點出頂點判別 b 。(萱、全)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 當複選題來寫。(萱、綾、欣) 未能完全利用函數值去做選項(D)(E)(F)的判別。(萱、欣) 除選項(A)以外，無其他解題策略。(綾) 判別選項(C)之認知錯誤，以為找到答案，未進一步檢查其他選項。(穎) 無解題策略，直接猜題。(琳)
6	<p>如圖，已知三個二次函數，</p> $\Gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \Gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2,$ $\Gamma_3 : y = a_3 x^2 + b_3 x + c_3,$ <p>則下列何者正確？_____</p> <p>(A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_1 < a_2 < a_3$ (C) $b_1 < b_2 < b_3$ (D) $c_1 < c_2 < c_3$。</p> 
	ANS : (A)
欲測概念	二次函數圖形之開口大小與函數係數之關係比較
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 利用與 y 軸之交點，刪去 $c_1 < c_2 < c_3$ 之可能性。(斌、萱、全、真、琳) 了解領導係數對圖形開口大小之影響。(斌、萱、穎)
錯誤因素	1. 憑印象猜測，未能嘗試去判別開口大小對領導係數大小之影響。(綾、全、真、琳、欣)
7	<p>函數 $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐標系中的圖形有可能是</p> <p>(A)  (B)  (C)  (D) </p>
	ANS : (D)
欲測概念	一次函數及二次函數之定義及其圖形關係
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 以實數 a 之正負來猜測圖形之可能性。(斌—過程未完整) 以實數 a 之正負去除選項(B)之可能性，續而猜對。(真) 假設 a,b 協助解題。(萱) 以直線與 x 軸、y 軸之交點來看 $y = ax + b$，再觀察 $y = ax^2 + bx + c$ 是否正確。(綾)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 以實數 a 之正負去除選項(B)之可能性，其他僅注意跟 y 軸之交點，無進一步之解題策略。(全) 嘗試將 a,b,c 以數字取代，但仍無法正確作答。(琳) 僅以領導係數判別圖形，直接選(A)選項。(欣) 過程已被擦去，無法判別錯誤因素。(穎)
8	將二次函數 $y = x^2 - 2x + 3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數為_____
	ANS : $y = x^2 + 8x + 14$ 。4-4 二次函數
欲測概念	給定函數之一般式，測驗平移對函數一般式之影響

正確解題策略	1. 利用配方法找圖形頂點，利用平移後的新頂點，找出新的方程式。(萱) 2. 配完全平方，而後以平移對函數影響來解題。(綾)
錯誤因素	1. 憑印象解題，覺得平移對函數之影響在於 x 之係數及常數項，故求得答案為 $y = x^2 + 3x - 1$ 。(全、真) 2. 憑印象湊解題方式，想用變數的替代來解題，但與配方法得頂點之觀念混淆，所以寫出 $(x-5)^2 + 7$ 這樣的結果。(琳) 3. 單純憑印象湊解題方式，摻雜多種概念。(穎)
9	二次函數 $f(x)=x^2+2x+2$ 與常數函數 $f(x)=3$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$ _____
	ANS : $2\sqrt{2}$ 。4-4 二次函數與直線交點、根與係數的關係
欲測概念	了解圖形交點之意義。此外，若能了解圖形之特性，可較容易求得 \overline{AB} 的長度。
正確解題策略	1. 知道函數圖形之交點狀況。(斌、琳、穎、欣) 2. 以方程式求兩交點之 x 坐標。(斌、全、真、琳) 3. 知道常數函數之圖形為一水平線，故直接以 A、B 兩點之 x 坐標相減而得 \overline{AB} 。(斌)
錯誤因素	1. 畫出兩函數圖形，可惜未進一步將交點求出。(萱) 2. 求出兩交點之 x 坐標，但卻以 x 坐標相加的概念來求得 \overline{AB} 的長度。(真、琳) 3. 求出兩交點之 x 坐標，但卻無法求得 \overline{AB} 的長度。(全) 4. 求出某一交點之 x 坐標，欲利用拋物線的對稱性質，以到對稱軸之距離乘上 2 倍，可惜頂點坐標筆誤，致使結果錯誤。(穎) 5. 未能明白交點為兩函數之聯立解。(欣) 6. 放棄作答。(綾)
10	a, b 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=3$ 時有最小值 8，則實數 $a=$ _____
	ANS : $\frac{1}{9}$ 。4-4 二次函數 (課 189)
欲測概念	知道極值與二次函數之關係
正確解題策略	1. 知道二次函數圖形之頂點即為函數值最小值之發生處。(斌、全) 2. 利用配方法以 a, b 呈現頂點，再利用已知條件解聯立求得實數 a 。(斌)
錯誤因素	1. 利用配方法以 a, b 呈現頂點，並利用已知條件解聯立求得實數 a ，但未進一步判定欲使函數有最小值之 a 必須大於 0。(萱) 2. 雖能以極值之發生處為頂點，且注意到開口必須朝上，但未能顧原題各項係數的關係，以為函數即為 $(x-3)^2 + 8 = y$ 。(全) 3. 利用極值之發生處，將點坐標代入函數，而後無其他解題策略，故未寫答案。(真、琳、穎) 4. 利用極值之發生處，將點坐標代入函數，而後無其他解題策略，故亂猜答案。(欣) 5. 放棄作答。(綾)

11(1)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$ ，將 Γ 依水平方向右移，則： (1) 第一次經過點 (4, 4) 時的拋物線其方程式為_____。
	ANS : (1) $y = (x-2)^2$
欲測概念	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之間題解決能力。
正確解題策略	1. 以其平移型式假設新函數為 $y = [(x-a)-1]^2$ ，再將 (4, 4) 代入。(斌) 2. 雖有正確解題策略，但信心未滿，在最後一步已經要求出 a 的情況下將過程劃去，而後又將第(2)小題的答案寫入。(斌) 3. 誤以 (4, 4) 為新頂點來求此方程式。(萱) 4. 以上下平移的方式來完成經過 (4, 4)。(全) 5. 直接將 (4, 4) 代入湊答案。(真) 6. 以湊答案的方式解題。(綾) 7. 將 (4, 4) 代入方程式發現不合，而後無其他解題策略，故未寫答案。(琳) 8. 未清楚題意，以直線視之。(欣) 9. 放棄作答。(穎)
錯誤因素	1. 雖有正確解題策略，但信心未滿，在最後一步已經要求出 a 的情況下將過程劃去，而後又將第(2)小題的答案寫入。(斌) 2. 誤以 (4, 4) 為新頂點來求此方程式。(萱) 3. 以上下平移的方式來完成經過 (4, 4)。(全) 4. 直接將 (4, 4) 代入湊答案。(真) 5. 以湊答案的方式解題。(綾) 6. 將 (4, 4) 代入方程式發現不合，而後無其他解題策略，故未寫答案。(琳) 7. 未清楚題意，以直線視之。(欣) 8. 放棄作答。(穎)
11(2)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$ ，則： (2) 將 Γ 依直線 $y=x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 (4, 15) 時其拋物線方程式為_____。
	ANS : (2) $y-6 = (x-7)^2$
欲測概念	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之間題解決能力。較前題之不同處在於平移方向不是單一的上下左右平移。
正確解題策略	
錯誤因素	1. 假設新函數為 $y = [(x-a)-1]^2$ ，再將 (4, 15) 代入，未注意到曲線之平移方向為東北方。(斌) 2. 嘗試解題，但仍無法正確作答。(全) 3. 未清楚題意，以直線視之。(欣) 4. 放棄作答。(萱、綾、真、琳、穎)
11(3)	拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$ ，則： (3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線正好通過點 (4, -4) 時，則此時新拋物線的方程式為_____。
	ANS : (3) $y = -\frac{4}{9}(x-1)^2$
欲測概念	由頂點及已知點來求得拋物方程式
正確解題策略	

錯誤因素	1. 受前二小題影響，假設新函數為 $y = -[(x-a)-1]^2$ ，再將 (4, -4) 代入，未注意頂點保持不變且開口大小被放大了。(斌) 2. 嘗試解題，但仍無法正確作答。(全) 3. 放棄作答。(萱、綾、真、琳、穎、欣)
12	方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的實根個數，則下列何者正確？_____ (A)有五個實根 (B)有四個實根 (C)有三個實根 (D)有兩個實根 (E)有一個實根。
欲測概念	ANS : (E) 代數基本定理、虛根成對定理、方程式與函數圖形之關係
正確解題策略	1. 以 $x^5 = 8$ 的方式來看，認定此方程式僅有一個實根。(萱) 2. 認為多項式含有因式 $x - \sqrt[5]{8}$ ，且方程式僅有 $\sqrt[5]{8}$ 這個實根存在。(全) 3. 嘗試檢查有理根但無結果，可能是猜對。(琳) 4. 正確作答，但想法已被擦去。(穎) 5. 正確作答，但未寫想法。(真)
錯誤因素	1. 知道 5 次方程式會有五個根，且注意到題目想問實根個數，但因無其他解題策略，所以只好選(A)選項。(斌) 2. 以 $x^5 = 8$ 的方式來看，但卻認定此方程式有三個實根。(綾) 3. 知道 5 次方程式會有五個根，但最後認定此方程式有三個實根。(欣)
13	已知 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 有一根為 $-2 + 5i$ ，則其他根為_____。 ANS : $-2 - 5i, \frac{3}{2}$
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解
正確解題策略	1. 了解虛根成對，知道必有一根為 $-2 - 5i$ ，續而直接利用根與係數的關係來求出第三根。(斌) 2. 由已知複數根推得多項式之因式，進而利用長除法來因式分解求方程式之解。(萱) 3. 了解虛根成對，先找出得此共軛虛根之因式，進而利用因式分解求出第三根。(綾、全)
錯誤因素	1. 真正確的解題策略，但忽略了另一複數根 $-2 - 5i$ 。(萱) 2. 僅了解虛根成對，知道必有一根為 $-2 - 5i$ ，無其他解題策略。(琳) 3. 將已知根代入方程式，且計算過程錯誤，以為所得之新複數 $-160i$ 為方程式的解。(欣) 4. 嘗試解題卻無結果，所以將過程擦去，故未作答。(穎) 5. 放棄作答。(真)
14	已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 之一根為 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，則其解為_____。
	ANS : $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, 3, -\frac{2}{3}$
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解，藉此觀察學生解多次方程式之可能性。

正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 了解虛根成對，知道必有一根為 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，續而直接利用根與係數的關係來求出其他兩根。(斌) 由已知複數根推得多項式之因式，進而利用長除法來因式分解求方程式之解。(萱) 了解虛根成對，先找出得此共軛虛根之因式，進而利用因式分解求出其他根。(全)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 具正確的解題策略，可惜計算錯誤。(斌) 具正確的解題策略，但長除法中的商式認知錯誤，而未能將所有解正確判別出來。(萱) 具正確的解題策略，可惜未依題意將所有解寫出。(全) 將已知根代入方程式，且計算過程錯誤，以為所得之新複數 $\frac{123-\sqrt{3}i}{2}$ 為方程式的解。(綾) 僅了解虛根成對，知道必有一根為 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，無其他解題策略。(真) 欲代入求解，但知道不是良方，且無其他解題策略，故未作答。(穎) 放棄作答。(琳)
15	若 $1+i$ 為 $x^2 - kx - 1 = 0$ 之一根，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$
	ANS : $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 。4-5 解方程式
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、複數之加減乘除運算
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 利用根與係數的關係來正確求解。(斌、綾) 將 $1+i$ 直接代入方程式，整理後得 $k = \frac{2i-1}{1+i}$。(真)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 誤以為 $1-i$ 亦為方程式之一根。(全) 將 $1+i$ 直接代入方程式，可惜計算錯誤，未能正確求解。(琳、欣) 將原本嘗試過程擦去，未能有進一步的策略來解題，故未作答。(萱、穎)
16	在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗戶裡，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公尺。
	ANS : $\frac{5}{3}$
欲測概念	能以二次函數來協助解決應用問題
正確解題策略	
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 未注意題目，以為水柱之最高處為 5 公尺，而以此解題。(斌、綾、全) 此圖如此表示的確有所疏失。 未注意題目所問，而以發射點離地面高度作答。(綾、全) 完全無看錯題目之虞，欲以函數輔助，但無其他解題策略，故猜答案。(欣)



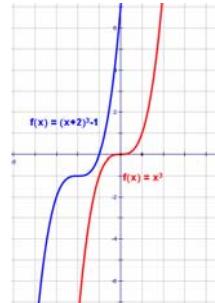
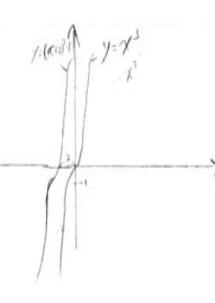
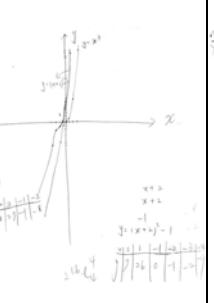
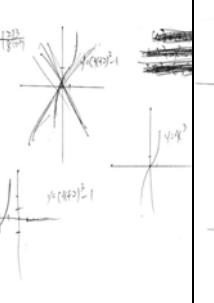
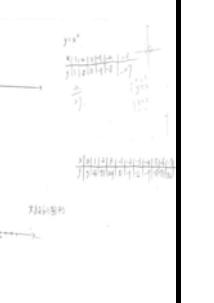
	4. 將原本嘗試過程擦去，且無其他解題策略，故未作答。(穎) 5. 放棄作答。(萱、真、琳)
17 (1)(2)	試作 $y=x^3$ 之圖形，並利用平移的概念描出 $y=(x+2)^3-1$ 的圖形。
欲測概念	函數作圖及平移概念
正確 解題 策略	<p>(1)</p> <ol style="list-style-type: none"> 了解 $y=x^3$ 的圖形發展，僅描繪少數點來成圖。(斌、萱、琳) 以描點方式作圖。(穎) <p>(2)</p> <ol style="list-style-type: none"> 利用移動前一小題的描點來成圖。(萱)
錯誤 因素	<p>(1)</p> <ol style="list-style-type: none"> 對三次函數完全沒概念，即使點出三個正確的點，卻誤以為圖形為直線。(綾) 對三次函數完全沒概念，即使點出三個正確的點，卻誤以為圖形為拋物線。(全、欣) 似乎對三次函數有些概念，但未能正確作圖。(真) <p>(2)</p> <ol style="list-style-type: none"> 具平移概念，但可惜未能仔細成圖。(斌) 具平移概念，可惜前圖錯誤，且未能檢查偵錯。(全、欣) 想要以平移概念解決，但似乎未能正確作圖。(真) 雖然有取新函數的 7 個點坐標，但其作圖僅注意左移的動作及和 x 軸之交點，未能正確成圖。(穎) 以描點方式作圖，但所選的點似乎僅能確定圖形的某部分。(琳) 放棄作答。(綾)



附件十 後測—學生作答結果之比較與分析

- | | | | |
|--|---------------|---|--------------------|
| ■ | 學生作答正確無誤 | ■ | 學生未寫答案，但有解題想法及計算過程 |
| | 學生作答部分正確、部分錯誤 | ■ | 學生完全放棄未作答 |

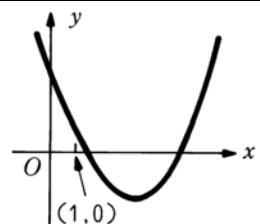
	正確答案	阿斌	萱萱	綾綾	阿全
1	BC	BC	BC	BC	BC
2	BCE	BCE	BCE	BCE	BC
3	-8	-8	-8	-4	-8
4	-10	-10	-10	10	4
5	B	B	B	B	B
6	A	A	A	A	A
7	D	D	D	A	D
8	$y=x^2+8x+14$	$y=x^2+8x+14$	$y=(x+4)^2-2$	$y=(x+4)^2-2$	$(x+4)^2-2$
9	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
10	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \text{ or } -1$	$-1 \text{ or } \frac{1}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{9}$
11(1)	$y=(x-2)^2$	$y=(x-2)^2$	$y=(x-4)^2+4$		$(x-2)^2=y$
11(2)	$y=(x-7)^2+6$				$(x-7)^2+6=y$
11(3)	$y=-\frac{4}{9}(x-1)^2$	$y=-\frac{4}{9}(x-1)^2$	$y=-4x^2-2x+1$		$-\frac{4}{9}(x-1)^2=y$
12	E	E	E	E	E
13	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$-2-5i \text{ or } 2x-3$	$\frac{3}{2} \text{ or } 0 \text{ or } -2-5i$	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$-2-5i \text{ or } \frac{3}{2}$
14	$\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$0 \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, 3, -\frac{2}{3}$	$\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \text{ or } \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$
15	$\frac{1+3i}{2}$	$\frac{1+3i}{2}$	-1 or 2	$\frac{1+3i}{2}$	-2
16	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$			1
17 (1) (2)					
	答對百分比	80%	69%	45%	84%

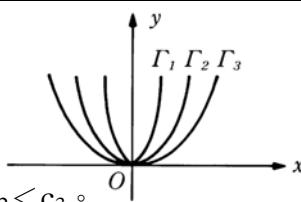
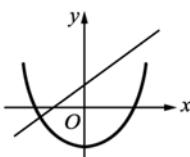
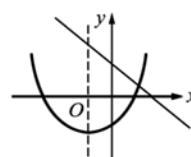
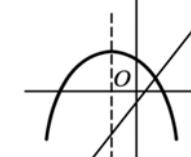
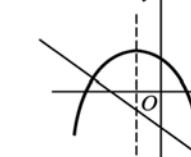
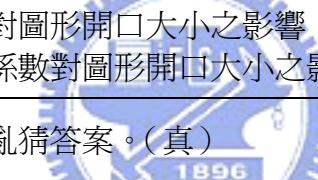
	正確答案	小真	小琳	小穎	欣欣
1	BC	BCE	BCE	BC	BCD
2	BCE	CE	BC	BC	CE
3	-8	-8		-8	8
4	-10	-10	-10	-10	-10
5	B	AD	A	C	B
6	A	C	A	A	A
7	D	C	D	D	A
8	$y=x^2+8x+14$	$(x+4)^2-2$	$(x+4)^2-2$	$y=(x-5)^2+7$	$(x+4)^2-2$
9	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	2
10	$\frac{1}{9}$				
11(1)	$y=(x-2)^2$	$y=(x-1)^2-5$	$(x-6)^2$	$y=(x-1)^2-5$	$y=(x-2)^2$
11(2)	$y=(x-7)^2+6$	$y=(x-1)^2+6$			$2(x-2)^2-8$
11(3)	$y=-\frac{4}{9}(x-1)^2$	$y=(x-1)^2-13$		$-x^2-x-2$	$y=-(x-2)^2$
12	E	E	E	E	E
13	$-2-5i, \frac{3}{2}$	$-2-5i$	$-2-5i \text{ or } \frac{3}{2}$	$-2-5i$	$-2-5i, \frac{3}{2}$
14	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{ or } 3 \text{ or } -\frac{2}{3}$	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{7\pm\sqrt{127}}{6}$	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{\sqrt{3}i-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}i-1}{2}$	$-\frac{2}{3} \text{ or } 3$
15	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	i		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	2
16	$\frac{5}{3}$			$\frac{2}{3}$	2
17 (1) (2)					
	答對百分比	37%	44%	58%	51%

	阿斌	萱萱	綾綾	阿全	小真	小琳	小穎	欣欣	各題之答對率
1	5	5	5	5	4	4	5	4	92.5%
2	5	5	5	4	4	4	4	4	87.5%
3	5	5	0	5	5	0	5	0	62.5%
4	5	5	0	0	5	5	5	5	75.0%
5	5	5	5	5	0	0	0	5	62.5%
6	5	5	5	5	0	5	5	5	87.5%
7	5	5	0	5	0	5	5	0	62.5%
8	5	5	5	5	0	0	0	0	50.0%
9	5	5	0	5	0	0	5	0	50.0%
10	3	3	0	5	0	0	0	0	27.5%
11(1)	5	0	0	5	0	0	0	5	37.5%
11(2)	0	0	0	5	0	0	0	0	12.5%
11(3)	5	0	0	5	0	0	0	0	25.0%
12	5	5	5	5	5	5	5	5	100.0%
13	3	3	5	5	3	5	3	5	80.0%
14	4	3	5	5	3	3	1	3	67.5%
15	5	0	5	0	0	0	0	0	25.0%
16	5	0	0	0	0	0	5	0	25.0%
17(1)	0	5	0	5	5	5	5	5	75.0%
17(2)	0	5	0	5	3	3	5	5	65.0%
個人答對百分比	80%	69%	45%	84%	37%	44%	58%	51%	

1	下列各式中，「哪些」是 x 的多項式？_____ (A) $3x+2+\frac{1}{x}$ (B) $2\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x-4$ (C) $5x^2y-\frac{x}{y}+3$ (D) 2^{x^2+x+1} (E) $x^2+ x-3 $
	ANS : BC。4-1 多項式的概念
欲測概念	了解什麼是多項式（先備知識）
正確解題策略	1. 明瞭多項式之意義，知道變數不能放在分母、指數位置及絕對值內。（斌、萱、綾、全、穎）
錯誤因素	1. 選(D)－未能清楚了解多項式之變數不能置於指數位置。（欣） 2. 選(E)－未能清楚了解多項式之變數不能置於絕對值內。（真、琳）
2	多項式 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-3$ ，「哪些」是 $f(x)$ 的因式？_____

	(A) $2x - 1$ (B) $2x + 1$ (C) $x - 1$ (D) $2x - 3$ (E) $3x - 3$
	ANS : BCE 。 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ $= (2x+1)(x-1)(x+3)$
欲測概念	能判別多項式之因式 (先備知識)
正確解題策略	1. 利用綜合除法檢查一次因式。(斌、全) 2. 利用因式定理代入找出一次因式。(萱、綾、欣) 3. 能因式分解。(斌、萱) 4. 利用綜合除法檢查，續以因式分解。(全、琳) 5. 能清楚了解若 $x - 1$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $3x - 3$ 亦為 $f(x)$ 之因式。(斌、欣)
錯誤因素	1. 了解 $x - 1$ 為 $f(x)$ 之因式，但忽略 $3x - 3$ 亦為 $f(x)$ 之因式。(全、琳、穎) 2. 利用因式定理判別 $x - 1$ 為 $f(x)$ 之因式，也知道 $3x - 3$ 亦為 $f(x)$ 之因式，但未繼續檢查其他因式。(真) 3. 未能完全判別選項來找出因式。(欣)
3	設 a, b 為實數，多項式 $a(3x^3 + 2x^2) + b(x^3 - 5x) + 2x^3 - 6x^2 + bx - 10$ 為一元一次多項式，則 $a+b=$ _____
	ANS : -8 。 $a=3$ ， $b=-11$ 。4-1 同類項合併、多項式的概念 (建)
欲測概念	多項式之同類項合併及對多項式次數之了解。(先備知識)
正確解題策略	1. 同類項合併後，利用 x^2 及 x^3 之係數為 0，解聯立求得 a, b 。(斌、萱、全、真、穎)
錯誤因素	1. 計算錯誤。(綾、欣) 2. 嘗試解題，尚未完成。(琳)
4	已知多項式 $3x^3 + ax^2 + bx + 42$ 能被 $x^2 - x - 6$ 整除，則 $a=$ _____
	ANS : $a=-10$ 。 $b=-11$ 。4-2 整除概念、多項式的除法、或利用因式定理 (隨 105)
欲測概念	多項式的整除 (先備知識)
正確解題策略	1. 利用長除法運算。(綾、真、琳、欣) 2. 將除式因式分解，再利用因式定理作出聯立方程式，求出 a 和 b 。(斌、萱) 3. 以累加的方式找到多項式，再繼續解題。(穎)
錯誤因素	1. 具正確的解題策略，除法運算計算過程錯誤，未注意正負。(綾、全)
5	二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形如下圖所示，則下列各式何者成立？ (A) $a < 0$ (B) $b < 0$ (C) $c < 0$ (D) $a + b + c < 0$ (E) $a - b + c < 0$ (F) $9a - 3b + c < 0$ 。
	ANS : (B)
欲測概念	二次函數圖形與函數係數之關係，由已知圖切入。
正確	1. 能判別開口方向對 a 之影響。(斌、萱、綾、全、欣)



解題策略	2. 能利用函數值去做選項(D)(E)(F)的判別。(斌、萱) 3. 刪去法：刪去不可能正確之選項（有利用函數值正確判別）。(斌、萱、綾、全) 4. 能點出頂點判別 b 。(萱、全、欣)
錯誤因素	6. 當複選題來寫。(真) 7. 僅判別選項(C)，無其他解題策略，直接猜題。(真) 8. 自行舉例取點找 a 、 b 、 c 的可能性。(琳) 9. 除選項(A)以外，無其他解題策略。(穎)
6	如圖，已知三個二次函數， $\Gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ ， $\Gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ ， $\Gamma_3 : y = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$ ，則下列何者正確？_____ (A) $a_1 > a_2 > a_3$ (B) $a_1 < a_2 < a_3$ (C) $b_1 < b_2 < b_3$ (D) $c_1 < c_2 < c_3$ 。 
	ANS : (A)
欲測概念	二次函數圖形之開口大小與函數係數之關係比較
正確解題策略	1. 利用與 y 軸之交點，刪去 $c_1 < c_2 < c_3$ 之可能性。(斌、全、欣) 2. 利用三個圖形的頂點皆在原點的概念，了解這三個二次函數的一般式應為 $y = kx^2$ 的型式，故 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ 。(斌、全、欣) 3. 了解領導係數對圖形開口大小之影響。(斌、萱、綾、全、穎) 4. 馬上模擬領導係數對圖形開口大小之影響後，再進行作答。(琳、欣)
錯誤因素	1. 無解題策略，亂猜答案。(真)
7	函數 $y = ax + b$ ， $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐標系中的圖形有可能是 (A)  (B)  (C)  (D)  
	ANS : (D)
欲測概念	一次函數及二次函數之定義及其圖形關係
正確解題策略	1. 以實數 a 之正負來看直線斜率及拋物線開口方向，並以拋物線之頂點位置來看 b 之正負是否和直線之 y 截距穩合，繁實解題。(斌、萱) 2. 先判別在各圖中拋物線係數 a 、 b 、 c 的正負狀況，再與直線的斜率和 y 截距整合，繁實解題。(全) 3. 馬上模擬取點得到二次函數的 a 、 b 、 c ，再對直線進行比對。(琳) 4. 以實數 a 之正負來猜測圖形之可能性。(穎) 5. 假設 a, b 協助解題。(穎)
錯誤因素	1. 僅以領導係數判別圖形，直接選(A)選項。(綾、欣) 2. 過程已被擦去，無法判別錯誤因素。(真)

8	將二次函數 $y=x^2 - 2x + 3$ 的圖形先水平左移 5 單位，再鉛直向下 4 單位，所得圖形之函數為_____
	ANS : $y=x^2 + 8x + 14$ 。4-4 二次函數
欲測概念	給定函數之一般式，測驗平移對函數一般式之影響
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 配完全平方，而後以平移對函數影響來解題。(萱、綾、全、真) 利用平移對函數的影響來解題，將原本的函數替換，直接寫出新函數。(斌)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 具有正確的解題策略，可惜在作答時僅以多項式 $(x+4)^2 - 2$ 表示，未能正確以函數型式 $y = x^2 + 8x + 14$ 呈現。(全、真、琳、欣) 單純憑印象湊解題方式，摻雜多種概念。(穎)
9	二次函數 $f(x)=x^2 + 2x + 2$ 與常數函數 $f(x)=3$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$ _____
	ANS : $2\sqrt{2}$ 。4-4 二次函數與直線交點、根與係數的關係
欲測概念	了解圖形交點之意義。此外，若能了解圖形之特性，可較容易求得 \overline{AB} 的長度。
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 知道函數圖形之交點狀況。(萱、綾、全、穎) 以方程式求兩交點之 x 坐標。(斌、萱、全、穎) 知道常數函數之圖形為一水平線，故直接以 A、B 兩點之 x 坐標相減而得 \overline{AB}。(斌、萱、全、穎)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 畫出兩函數圖形，可惜求交點的計算過程中產生錯誤。(欣) 求出兩交點之 x 坐標，直接以 x 坐標相減，未全然留意 \overline{AB} 的長度該為正數。(真) 求出兩交點之 x 坐標，但卻無法順利求得 \overline{AB} 的長度。(琳) 雖知兩函數圖形，亦明白交點意義，但嘗試以代入法求交點，於計算中產生錯誤。(綾)
10	a, b 為實數，且二次函數 $y=ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ 在 $x=3$ 時有最小值 8，則實數 $a=$ _____
	ANS : $\frac{1}{9}$ 。4-4 二次函數 (課 189)
欲測概念	知道極值與二次函數之關係
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 知道二次函數圖形之頂點即為函數值最小值之發生處。(斌、萱、全) 利用配方法以 a, b 呈現頂點，再利用已知條件解聯立求得實數 a。(斌、萱、全) 能了解在此擁有最小值的二次函數乃是開口向上的拋物線，其領導係數必須大於 0。(全)

錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 利用配方法以 a, b 呈現頂點，並利用已知條件解聯立求得實數 a，但未進一步判定欲使函數有最小值之 a 必須大於 0。故除了 $\frac{1}{9}$ 以外，又多寫 -1 這個答案。(斌、萱) 知道二次函數圖形之頂點即為函數值最小值之發生處，但在做完配方法後，沒有其他有效解題策略。(琳、欣) 利用極值之發生處，將點坐標代入函數，而後無其他解題策略，故未寫答案。(真、穎) 利用極值寫成二次函數，假設無法與原題配合，導致後來無其他解題策略，故亂寫答案。(綾)
11(1)	<p>拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$，將 Γ 依水平方向右移，則：</p> <p>(1) 第一次經過點 $(4, 4)$ 時的拋物線其方程式為_____。</p>
ANS : (1) $y = (x-2)^2$	
欲測概念	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之問題解決能力。
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 利用平移對函數的影響來解題，將原本的函數替換，假設新函數為 $y = [(x-a)-1]^2$，再將 $(4, 4)$ 代入，並依題意選出恰當的 a。(斌) 找出原圖形中 y 坐標為 4 的點，模擬向右平移且第一次經過點 $(4, 4)$，知道乃是平移 1 單位後，再來寫出函數。(全) 有平移概念。(欣)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 僅在意新圖形必須經過 $(4, 4)$，而寫下 $y = (x-4)^2 + 4$，忽略新圖形是原圖形向右平移的結果。(萱) 向右平移經過 $(4, 4)$，使其有向右平移 4 單位的錯誤認知。(琳) 以上下平移的方式來完成經過 $(4, 4)$。(穎) 直接將 $(4, 4)$ 代入湊答案。(真) 放棄作答。(綾)
11(2)	<p>拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$，則：</p> <p>(2) 將 Γ 依直線 $y=x$ 向東北方向移動，當它第一次經過點 $(4, 15)$ 時其拋物線方程式為_____。</p>
ANS : (2) $y-6 = (x-7)^2$	
欲測概念	以文字方式敘述，僅告知平移之方向而未知平移距離，測驗學生對即定目標之問題解決能力。較前題之不同處在於平移方向不是單一的上下左右平移。
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 依平移的概念，做多次模擬，每次右移 1 單位、上移 1 單位，寫出函數逐一校正，找出正確的函數。(全)

錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 無法將「向東北方向移動」轉化成同時向右和向上等距離的概念，故在解題過程中以向右 a 單位、向上 b 單位來假設平移後的新函數為 $y = [(x-a)-1]^2 + b$，再將 (4, 15) 代入，未能解出 a、b。(斌) 直接將 (4, 15) 代入湊答案。(真) 嘗試解題，但仍無法正確作答。(欣) 放棄作答。(萱、綾、琳、穎)
11(3)	<p>拋物線 Γ 之方程式 $y = (x-1)^2$，則：</p> <p>(3) 若將 Γ 翻轉使其開口向下，而頂點保持不變，對原拋物線開口加以放大，使拋物線正好通過點 (4, -4) 時，則此時新拋物線的方程式為_____。</p>
ANS	$ANS : (3) y = -\frac{4}{9}(x-1)^2$
欲測概念	由頂點及已知點來求得拋物方程式
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 能把握在圖形的翻轉後，則二次函數的領導係數將變號。(斌、全) 能把握在頂點維持不變的狀況下，改變開口大小將使領導係數改變(其性質符號不變)。(斌、全) 依題意將新函數以 $y = -a(x-1)^2$ 假設，再將 (4, -4) 代入求解。(斌、全)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 有注意到圖形翻轉後，二次函數的領導係數將變號；但學生誤用此概念，在函數的降幕呈現中，直覺改變領導係數，而其他係數維持原狀，此舉可能會改變圖形的頂點位置。(萱) 忽略題目中有將開口放大的動作。(萱、欣) 以描點來協助解題未果。(欣) 直接將 (4, -4) 代入湊答案。(真) 嘗試解題，但仍無法正確作答。(琳、穎) 放棄作答。(綾)
12	<p>方程式 $x^5 - 8 = 0$ 的實根個數，則下列何者正確？_____</p> <p>(A) 有五個實根 (B) 有四個實根 (C) 有三個實根 (D) 有兩個實根 (E) 有一個實根。</p>
ANS	$ANS : (E)$
欲測概念	代數基本定理、虛根成對定理、方程式與函數圖形之關係
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 將方程式改成 $\begin{cases} y = x^5 \\ y = 8 \end{cases}$，直接觀察兩個函數圖形的交點來看方程式的實根個數。(斌) 以 $x^5 = 8$ 的方式來看，認定此方程式僅有一個實根 $8^{\frac{1}{5}}$。(綾) 了解實係數多項方程式虛根成對定理，刪去(B)、(D)二個選項。(全、琳) 正確作答，但未寫想法。(萱、真、穎、欣)
錯誤因素	此題大家都寫對。

13	已知 $2x^3 + 5x^2 + 46x - 87 = 0$ 有一根為 $-2 + 5i$ ，則其他根為_____。
	ANS : $-2 - 5i, \frac{3}{2}$
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 了解虛根成對，利用根與係數的關係先找出得此共軛虛根之因式，進而利用長除法來因式分解求出第三根。(斌) 了解虛根成對，利用根與係數的關係先找出得此共軛虛根之因式，進而利用係數的關係來來因式分解求出第三根。(全) 了解虛根成對，利用兩根之一次因式先找出方程式中的二次因式，進而利用長除法來因式分解求出第三根。(萱、琳、欣) 了解虛根成對，利用兩根之一次因式先找出方程式中的二次因式，進而利用係數的關係來因式分解求出第三根。(綾)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 具正確的解題策略，但作答時不小心 $\frac{3}{2}$ 寫成因式 $2x - 3$。(斌) 具正確的解題策略，但僅寫出共軛虛根 $-2 - 5i$。(穎) 具正確的解題策略，但處理長除法中的商式時誤把 $2x - 3$ 當成 $2x^2 - 3$，因此多寫了一個根「0」。(萱) 了解虛根成對，知道必有一根為 $-2 - 5i$，但在因式分解的過程中計算錯誤，故未能求出第三根。(真)
14	已知方程式 $3x^4 - 10x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$ 之一根為 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，則其解為_____。
	ANS : $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, 3, -\frac{2}{3}$
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、因式分解，藉此觀察學生解多次方程式之可能性。
正確解題策略	<ol style="list-style-type: none"> 了解虛根成對，先找出得此共軛虛根之因式，進而利用長除法來因式分解求出其他根。(斌) 了解虛根成對，先找出得此共軛虛根之因式，進而利用因式分解求出其他根。(綾、全) 由已知複數根推得多項式之因式，進而利用長除法來因式分解求方程式之解。(萱)
錯誤因素	<ol style="list-style-type: none"> 具正確的解題策略，可惜未依題意將所有解寫出(少寫已知的 $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$)。(斌、欣) 具正確的解題策略，可惜計算錯誤。(真、欣) 具正確的解題策略，但長除法中的商式認知錯誤，而未能將所有解正確判別出來。(萱) 僅了解虛根成對，知道必有一根為 $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$，無其他有交效的解題策略。(穎) 僅了解虛根成對，知道必有一根為 $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$，無其他解題策略。(琳)

15	若 $1+i$ 為 $x^2 - kx - 1 = 0$ 之一根，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$
	ANS : $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 。4-5 解方程式
欲測概念	實係數多項方程式虛根成對定理、複數之加減乘除運算
正確解題策略	1. 將 $1+i$ 直接代入方程式，整理後得 $k = \frac{2i-1}{1+i} = \frac{1+3i}{2}$ 。(斌、綾) 2. 將 $1+i$ 直接代入方程式，可惜計算錯誤，未能正確求解。(真、穎) 3. 將 $1+i$ 直接代入方程式，整理後得 $-k-1+(2-k)i=0$ ，忽略 k 可能為複數，故認為 k 可能為 -1 或 2 。(萱) 4. 放棄作答。(琳)
16	在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗戶裡，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如下圖；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公尺。
	ANS : $\frac{5}{3}$
欲測概念	能以二次函數來協助解決應用問題
正確解題策略	1. 能將應用問題轉化為二次函數的問題，以數學方式來解決。(斌、穎) 2. 假設二次函數 $y=ax^2+bx+c$ ，將已知條件分別轉化成拋物線與 y 軸之交點、拋物線頂點、拋物線與 x 軸之交點，做出聯立方程式，求得 a 、 b 、 c ，進而解決問題。(斌、穎)
錯誤因素	1. 欲將應用問題轉化為二次函數的問題，可惜誤讀已知條件，而未能求出結果。(綾、欣) 2. 欲以自訂坐標系統的方法來解決問題，可惜未能正確建立。(全) 3. 嘗試解題，但無適當解題策略。(真) 4. 放棄作答。(萱、琳)
17 (1)(2)	試作 $y=x^3$ 之圖形，並利用平移的概念描出 $y=(x+2)^3-1$ 的圖形。
欲測概念	函數作圖及平移概念
正確解題策略	(1) 1. 了解 $y=x^3$ 的圖形發展，僅描繪少數點來成圖。(萱、全、真、穎) 2. 以描點方式作圖。(琳、欣) (2) 1. 了解平移概念，利用移動前一小題的描點及圖形來成圖。(萱、全、穎) 2. 以描點方式作圖。(欣)

錯誤 因素	(1)
	1. 找出 $y=x^3$ 上三點 $(-1, -1)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ ，由於三點恰在同一直線上，故不加思索地認為圖形為一直線。(斌、綾)
	(2)
	1. 具平移概念，但可惜未能仔細成圖。(真、琳)
	2. 具平移概念，可惜前圖錯誤，且未能檢查偵錯。(斌)
	3. 具平移概念，可惜前圖錯誤，在平移已知點後，覺得圖形有異而作罷。(綾)

