

第一章 簡介

1.1 研究動機

在 40 多年前 IBM 的 Marshall I. Nathan 等人成功地運作歷史上第一顆砷化鎵半導體雷射二極體，在兩個月之內 IBM Research Laboratory 進行了各式實驗，其中一個是矩形結構的砷化鎵發光二極體發出具有高度方向性的雷射，根據出射角他們推得了增益介質內的幾何模態^[1,2]。其後具有方向性的雷射的研究大致分為兩種實驗架構：利用氧化層侷限出準操場邊界的半導體雷射二極體，藉由邊界條件的設定產生封閉且具有週期性的穩定軌跡^[3-8]；和使用摻欒鈦鋁石榴石晶體研究軌跡非平面的環形雷射，可以產生穩定的單模態輸出^[9-15]。實驗中觀察到的許多現象，如具有高度方向性的雷射出光、近場撞擊亮點，可以用幾何光學的光束追跡法做不錯的解釋，但是干涉條紋等卻無法用幾何光學解釋，這時我們就需要考慮光的波動性，利用已知的波函數去模擬實驗的圖案^[16-19]。摻欒鈦酸鈮各式形狀的晶體我們可產生更多樣化模態的方向性雷射，且三角形晶體還能夠提供雷射光產生立體的非平面軌跡，相對應的近場在此實驗架構也能更清楚地被觀察到，讓我們更清楚明瞭地解釋光的波粒性。

1.2 論文架構

在第二章裡探討的是彈子球在不同邊界的表現；在規則系統矩形彈子球裡的波函數在近場與遠場的分佈情形主要在第三章中探討，其週期性軌道都落在同一平面上；第四章是三角形晶體中的非平面週期性軌道。

第二章 波動式彈子球檯

2.1 導論

當彈子球被侷限在不同的邊界裡，彈子球的行為會隨著邊界條件的不同而有不同的表現^[20]。本章推論在不同邊界中可能存在的彈子球軌跡，並用程式來模擬波函數疊加成的波包在不同邊界中的與古典軌跡相對應的軌跡圖案。

2.2 方形彈子球

週期性軌道(periodic orbit, PO)在探討彈子球檯波函數中扮演重要角色，在介觀系統的量子力學世界中，系統似乎也特別容易出現這些古典的週期性軌道，這些週期性軌道是連接古典和量子力學的重要橋樑。

在矩形的邊界條件中，當彈子球起始條件在x方向和y方向的速度分量互質時便有機會形成周期性軌跡，也就是繞行一週之後會回到原出發點，速度在x方向分量代表彈子球和x方向邊界的碰撞次數(定義為q)、速度在y的分量代表在y方向邊界碰撞次數(定義為p)。將不同碰撞次數的週期性軌道定義為(1,1)、(2,1)、(3,2)...的軌跡，如圖2.1，其中第一個分量代表在y邊界上的碰撞次數，第二分量代表在x邊界上的碰撞次數。

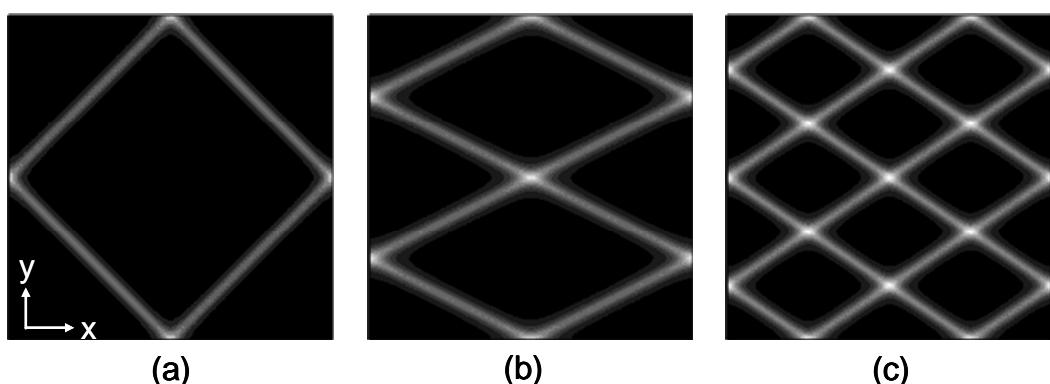


圖2.1 經典力學彈子球軌跡 (a) $p:q = 1:1$, (b) $p:q=2:1$, (c) $p:q=3:2$ 。

模態為 (p, q) 的週期性軌道在矩形邊界(邊長為 a 與 b)中繞行一周的長度為

$$L_{p,q} = 2 p q \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{q}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{p}\right)^2} \quad (2.1)$$

在圖 2.2 中的二維矩形的無限位能阱中的薛丁格方程式可寫成

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi_n(\mathbf{r}) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \cdot \psi_n(\mathbf{r}) \\ &= E_n \psi_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbf{r} \in D \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.3)$$

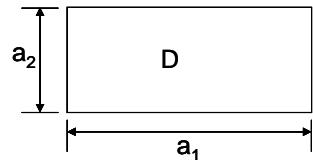


圖 2.2 二維的矩形無限位能阱，邊長為 a_1 與 a_2 ，

位能在 D 區域為 0，在矩形外為無限大。

二維的矩形彈子球的本徵態 $\psi(\mathbf{r})$ 可表示成正弦函數

$$\psi_{m_x, m_y}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \sin\left[m_x \frac{\pi x}{a_1}\right] \cdot \sqrt{\frac{2}{a_2}} \sin\left[m_y \frac{\pi y}{a_2}\right] \quad (2.4)$$

因為 測不準原理 的關係，當我們給定一個 k 值，將本徵態的機率密度對座標 x 、 y 的作圖無法得到一個和古典彈子球軌跡相似的圖案，因此時 $\Delta k=0$ ，使得 Δx 趨近於無窮大，無法在 real space 偏域化。為了使 Δx 下降，我們藉由疊加數個本徵態來提供 Δk 的增加，如此我們就有機會得到偏域化的軌跡。

將能量簡併的本徵態 $\psi_{m_x, m_y}(\mathbf{r})$ 疊加可得到同調相干定態(coherent stationary state) Ψ_{N_x, N_y} ，令 $m_x = N_x + p \cdot s$ 、 $m_y = N_y - q \cdot s$ (如圖 2.5)

$$\Psi_{N_x, N_y}(x, y; p, q, \phi) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=0}^{M-1} e^{is\phi} \psi_{N_x+ps, N_y-qs}(x, y) \quad (2.5)$$

其中 $N_x = q \cdot N$ ， $N_y = p \cdot N$ ，並將相位項 $s \cdot \phi$ 用 $(N_x + p \cdot s)\phi_x + (N_y - q \cdot s)\phi_y$ 置換以便於簡化，經由改變 ϕ 可改變週期性軌跡的起始位置，但仍有相同碰撞次數的週期性軌道，將(2.5)展開化簡可得



$$\Psi_{N_x, N_y}(x, y; p, q, \phi_x, \phi_y) = \frac{1}{\sqrt{4Ma_1a_2}} \left\{ \begin{array}{l} e^{i[N_x(\frac{\pi}{a_1}x+\phi_x)+N_y(\frac{\pi}{a_2}y+\phi_y)]} S_M\left(p(\frac{\pi}{a}x+\phi_x)-q(\frac{\pi}{a}y+\phi_y)\right) \\ + e^{-i[N_x(\frac{\pi}{a_1}x-\phi_x)+N_y(\frac{\pi}{a_2}y-\phi_y)]} S_M\left(-p(\frac{\pi}{a}x-\phi_x)+q(\frac{\pi}{a}y-\phi_y)\right) \\ - e^{-i[N_x(\frac{\pi}{a_1}x-\phi_x)-N_y(\frac{\pi}{a_2}y+\phi_y)]} S_M\left(-p(\frac{\pi}{a}x-\phi_x)-q(\frac{\pi}{a}y+\phi_y)\right) \\ - e^{i[N_x(\frac{\pi}{a_1}x+\phi_x)-N_y(\frac{\pi}{a_2}y-\phi_y)]} S_M\left(p(\frac{\pi}{a}x+\phi_x)+q(\frac{\pi}{a}y-\phi_y)\right) \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

其中 $S_M(u) = \exp\left[i(\frac{M}{2}-1)u\right] \frac{\sin\left(\frac{M}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \sum_{s=0}^{M-1} \exp(isu)$ ，將 $\Psi_{N_x, N_y}(x, y; p, q, \phi)$

的強度對位置 x 、 y 做圖可以得到類似經典力學彈子球軌跡的圖形如圖 2.3，改變 Ψ_{N_x, N_y} 中的相位角 ϕ 可以使在邊界上的撞擊點位置改變。

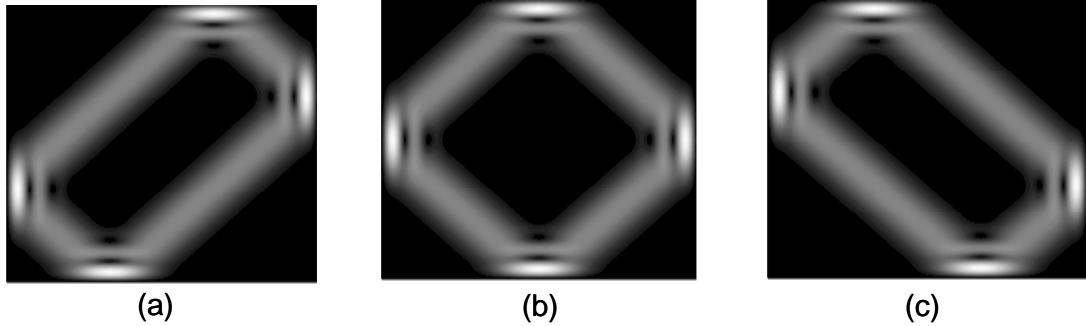


圖 2.3 (2.6)式中的 $|\Psi_{N_x, N_y}|^2$ 對位置作圖， $p = q = 1$ ， ϕ 分別為 (a) $\phi = \frac{\pi}{3}$ (b) $\phi = \frac{\pi}{2}$ (c) $\phi = \frac{2\pi}{3}$ 。

圖 2.4 為 $\Psi_{N_x, N_y}(x, y; p, q, \phi)$ 的駐波對位置分布圖，改變 N 的大小發現 N 不必趨近無窮大(圖 2.4(a) $N=10$)就可產生波函數密度侷域化現象，但 N 越大時(圖 2.4(c)) $N=60$ 得到的軌跡圖案會越細，越接近經典力學中彈子球軌跡，符合波耳的對應原理(Bohr's correspondence principle)：在量子數趨近於無限大時量子系統行爲將逐漸地趨於與經典力學系統相同。

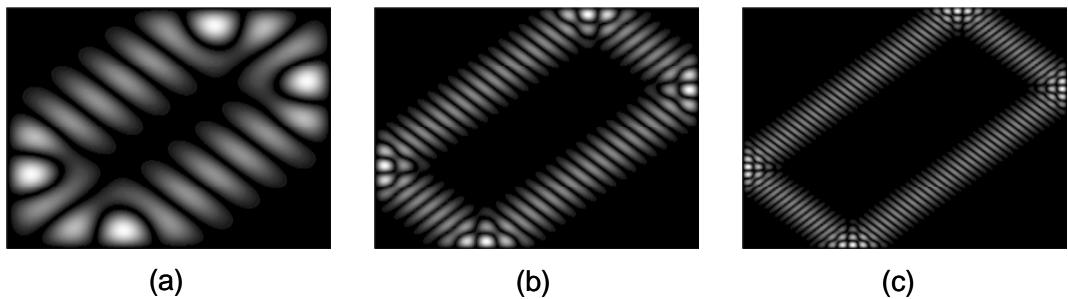


圖 2.4 駐波強度 $|\Psi_{N_x, N_y} + \Psi_{N_x, N_y}^*|^2$ 對位置分布圖， $\phi = \frac{\pi}{3}$ ， N 分別等於 (a) $N=10$ ，(b) $N=30$ ，(c) $N=60$ ， $p = q = 1$ 。

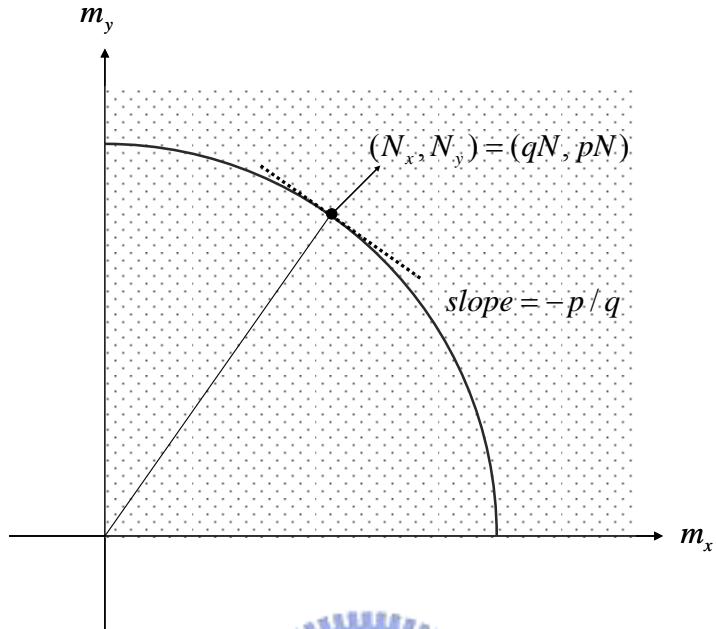


圖 2.5 疊加準簡併態之示意圖，當 N 越大半徑越大，切線上的點越接近圓弧線。

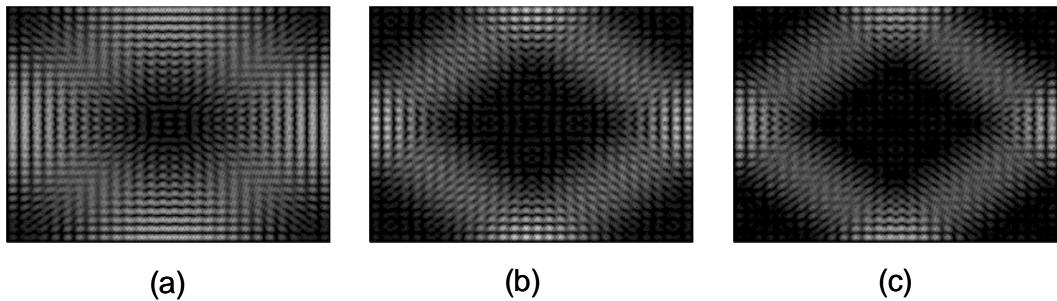


動量空間中的本徵態分佈如圖 2.5 所示，在等半徑圓周上的本徵態具有相同動量，由圖 2.5 可知當 N 越大時半徑越長，切線上的點越趨近於在同一半徑圓周上，使得切線上的態所疊加之圖形也就越接近經典力學彈子球的軌跡。只要疊加切線上切點為 (qN, pN) 的附近幾個準簡併本徵態就可得到類似經典力學彈子球之軌跡圖形，說明當實驗系統能夠提供幾個準簡併本徵態疊加就有機會觀察到同調光波相干圖案呈現經典彈子球軌跡的現象。

當 $p = q = 1$ ，疊加 N 取 K 個準簡併態， $K = N - 2 \cdot k + 1$ ，

$$\Psi_{N,K}(x, y, \phi) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=k}^{M-1-k} e^{i \cdot s \cdot \phi} \psi_{N+s, N-s}(x, y) \quad (2.7)$$

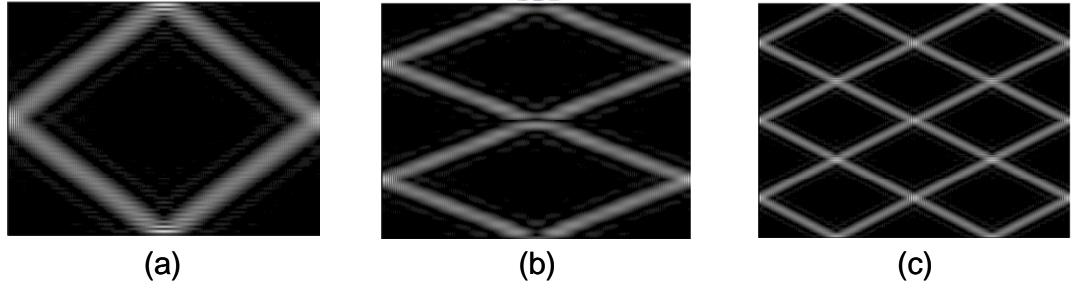
圖 2.6 中 $N=52$ ，取其中 K 個準簡併態疊加，可看出疊加的效率， $K=9$ 時駐波圖案就有偏域化軌跡的產生。



(a) (b) (c)

圖 2.6 駐波強度 $|\Psi_{N,K} + \Psi_{N,K}^*|^2$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ 。 $N=52$, 取其中 K 個準簡併態疊加 , (a) $K=5$, (b) $K=7$, (c) $K=9$ 。

當 $q \neq p$ 時彈子球軌跡在 x 邊界和 y 邊界的撞擊點數不同,以古典彈子球來說 x 方向速度 v_x : y 方向速度 $v_y = q : p$, 以(2,1)來說當彈子球繞行軌跡一周投影在 x 方向為來回 2 周、投影在 y 方向為來回 1 周,造成軌跡的撞擊點在 x 邊界上 : y 邊界上 $= p : q = 1 : 2$, 如圖 2.8(b)的波函數疊加成之軌跡圖案。



(a) (b) (c)

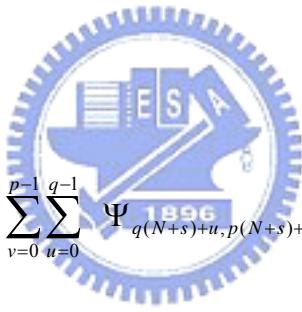
圖 2.8 不同 p 、 q 的波包軌跡 , 與圖 2.1 經典力學彈子球軌跡相對應 ,

(a) $(q,p)=(2,1)$, (b) $(q,p)=(3,1)$, (c) $(q,p)=(3,2)$ 。

準簡併本徵態能量可用(2.8)式表示, 其中 $s = -S, -S+1, \dots, S-1, S$, $u = 0, 1, \dots, q-1$, $v = 0, 1, \dots, p-1$, 如圖 2.7 所示的疊加方法

$$\begin{aligned}
E_{q(N+s)+u, p(N+s)+v} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cdot \left[(q(N+s)+u)^2 + (p(N+s)+v)^2 \right] \\
&\equiv E_{qN, pN} + \frac{\hbar^2 N \cdot s}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (p^2 + q^2) + \frac{\hbar^2 N}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (p \cdot v + q \cdot u)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中切點(qN, pN)能量爲 $E_{qN, pN} = \frac{\hbar^2 N^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (p^2 + q^2)$ 。再將能量相近的同調相干態疊加可得量子波包 $\Phi_{qN, pN}$ (2.9)式，當波包的條件在 x 方向和 y 方向的速度分量互質時，其運動軌跡呈週期性，



$$\begin{aligned}
\Phi_{qN, pN}(x, y, t; p, q, \phi, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2S+1}} \sum_{s=-S}^S \left\{ \frac{e^{is\theta}}{\sqrt{pq}} \left[\sum_{v=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{q-1} \Psi_{q(N+s)+u, p(N+s)+v} \cdot e^{-i\frac{E_{q(N+s)+u, p(N+s)+v}}{\hbar}t} \right] \right\} \\
&= \frac{e^{-i\frac{E_{qN, pN}}{\hbar}t}}{\sqrt{(2S+1)pq}} \sum_{s=-S}^S \left\{ e^{-is[(p^2+q^2)\omega_{cl}t-\theta]} \left[\sum_{v=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{q-1} \Psi_{q(N+s)+u, p(N+s)+v} \cdot e^{-i(qu+pv)\omega_{cl}t} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中頻率爲 $v \approx \sqrt{\frac{2E_{qN, pN}}{m}} = \frac{\hbar N}{m} \frac{\pi}{a} \sqrt{p^2 + q^2}$ ，
 $\Rightarrow \omega_{cl} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{L_{p,q}/v} = \frac{\hbar N}{m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$ ，(2.9)式中能量表示成(2.10)式

$$E_{q(N+s)+u, p(N+s)+v} = E_{qN, pN} + [s(p^2 + q^2) + qu + pv] \cdot \hbar \omega_{cl} \tag{2.10}$$

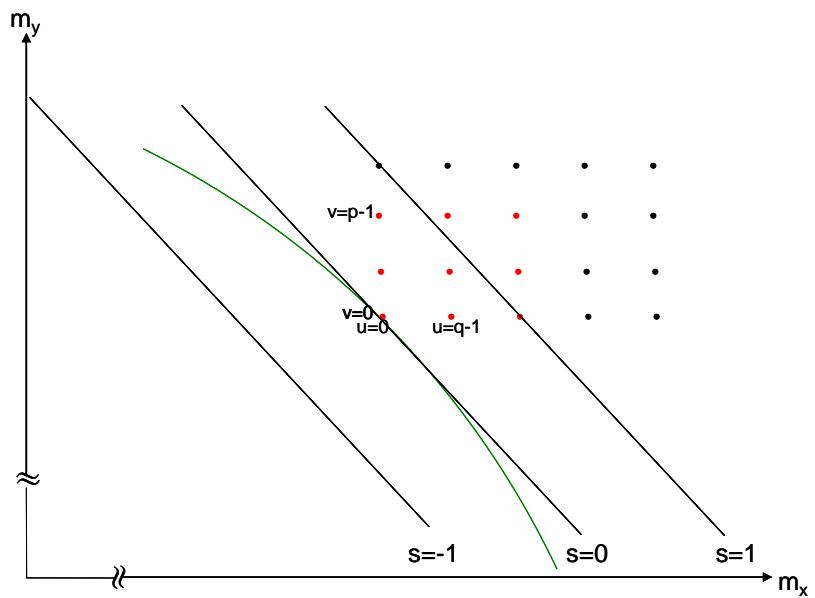


圖 2.7 在動量空間疊加本徵態示意圖。



2.3 圓形彈子球檯

這一章節討論圓形邊界條件的彈子球檯，在二維圓形邊界條件之下的薛丁格方程式解的形式為貝索函數(Bessel function)，假設粒子在圓形邊界中撞擊出圖 2.9 軌跡， p 為在圓形邊界上撞擊點數、 q 為圓心到兩相臨頂點的範圍內弦的數量，如圖 2.9 中 $p=5$ ， $q=2$ 。在極座標中粒子能量分為轉動動能和移動動能，

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2I} \quad (2.11)$$

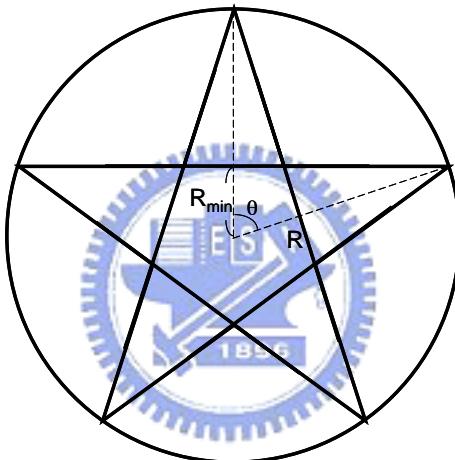


圖 2.9 粒子在二維圓形邊界中的撞擊示意圖

$I = m R^2$ ，粒子經過 R_{\min} 時移動動能為零，能量為轉動動能，能量可寫成

$$E = \frac{L^2}{2mR_{\min}^2} \quad (2.12)$$

已知量子力學的能量 $E = \frac{\hbar^2 k_{nl}^2}{2m}$ 與轉動動量 $L = l \hbar$ ， $R_{\min} = R \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot q}{p}\right]$ ，可得

$$k_{nl} = \frac{l}{R_{\min}} = \frac{l}{R \cdot \cos \left[\frac{\pi \cdot q}{p} \right]} \quad (2.13)$$

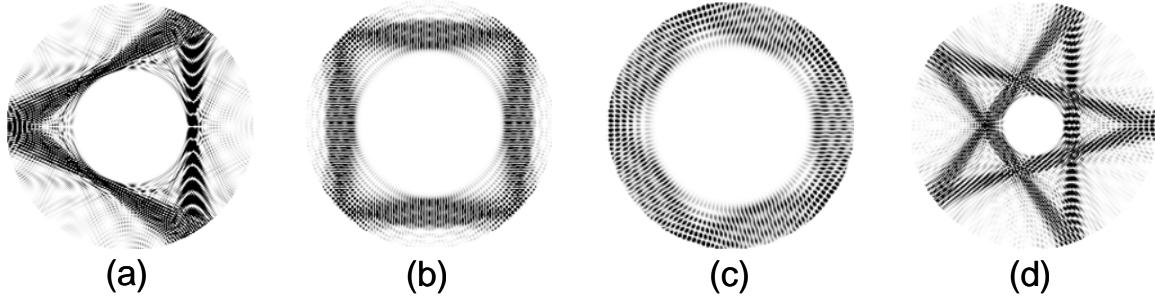


圖 2.10 圓形邊界中不同模態的軌跡圖形，(a) $(p, q) = (3, 1)$ ，

(b) $(p, q) = (4, 1)$ ，(c) $(p, q) = (5, 1)$ ，(d) $(p, q) = (5, 2)$ 。

在圓形邊界條件中的本徵態為 $J_m(k\rho) \cdot e^{im\phi}$ ，疊加量子數 m 在 l 附近的準簡併態，
 $m = l + s \cdot p$ ，得(2.14)的波包形式

$$\Psi_{l,M} = \sum_{s=-M}^M J_{l+s \cdot p}(k_l \cdot \rho) \cdot e^{i(l+s \cdot p)\phi} \quad (2.14)$$

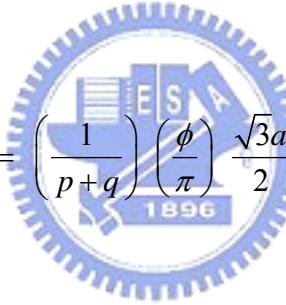
圖 2.10 中令 $R = 1$ ， $l = 100$ ， $M = 4$ ，不同的 (p, q) 可畫出正三角形、正四邊形、正五邊形、五角星形等正多邊形。

2.4 三角形彈子球

這一章節討論等邊三角形邊界條件的彈子球檯，在三角形內部的薛丁格方程式解的座標不可分離，在頂點為 $(0,0)$ 、 $(a/2, \sqrt{3}a/2)$ 、 $(-a/2, \sqrt{3}a/2)$ 、邊長為 a 的三角形邊界裡的經點軌跡可用三個變數 $(p, q, \pm\phi)$ 決定，起始點和水平夾角 θ 和 p 、 q 的關係為

$$\tan \theta = (\pm) \frac{p-q}{p+1} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.15)$$

假設起始位置在 y 軸上，起始位置和 p 、 q 、 ϕ 的關係為



$$y = \left(\frac{1}{p+q} \right) \left(\frac{\phi}{\pi} \right) \frac{\sqrt{3}a}{2} \quad (2.16)$$

古典軌跡可用六個直線方程式(2.17)表示，其中 $n \in \mathbb{Z}$ ，可得圖(2.11)的古典軌跡

$$\begin{aligned} \frac{qy}{\sqrt{3}a} \pm (2p+q) \cdot \frac{x}{3a} \mp \frac{\phi}{2\pi} &= n \\ \frac{py}{\sqrt{3}a} \pm (p+2q) \cdot \frac{x}{3a} \pm \frac{\phi}{2\pi} &= n \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(p+q) \cdot \frac{y}{\sqrt{3}a} \pm (p-q) \cdot \frac{x}{3a} \pm \frac{\phi}{2\pi} = n$$

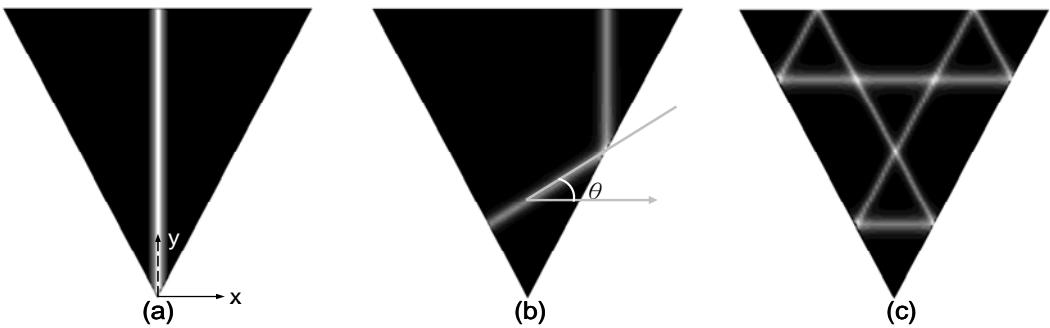


圖 2.11 使用(2.16)式得三角形邊界中的古典軌跡，(a) $(p, q, \phi) = (1, 0, 0)$ ，

(b) $(p, q, \phi) = (1, 0, \pi/3)$ ，(c) $(p, q, \phi) = (1, 1, \pi/2)$ 。

在三角形內部的薛丁格方程式解為

$$\Phi_{m,n}^{(1)}(x, y) = \sqrt{\frac{16}{a^2 3\sqrt{3}}} \left\{ \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] + \cos\left[(2m-n)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[n\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] - \cos\left[(2n-m)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[m\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] \right\} \quad (2.18)$$

$$\Phi_{m,n}^{(2)}(x, y) = \sqrt{\frac{16}{a^2 3\sqrt{3}}} \left\{ \sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] - \sin\left[(2m-n)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[n\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] - \sin\left[(2n-m)\frac{2\pi}{3a}x\right] \cdot \sin\left[m\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}y\right] \right\} \quad (2.19)$$

將(2.18)式與(2.19)式合併 $\Phi_{m,n}(x, y) = \Phi_{m,n}^{(1)}(x, y) + i \cdot \Phi_{m,n}^{(2)}(x, y)$ ，代入(2.20)式中用 SU(2)疊加，可畫出圖 2.12 的波函數強度圖形

$$\begin{aligned}
\Psi_{N,M}(x, y; p, q, \pm\phi) = & \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{K=0}^N \binom{N}{K}^{1/2} \exp(\pm iK\phi) \\
& \times \Phi_{p \cdot (K+1), M+q \cdot (N-K)}(x, y)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

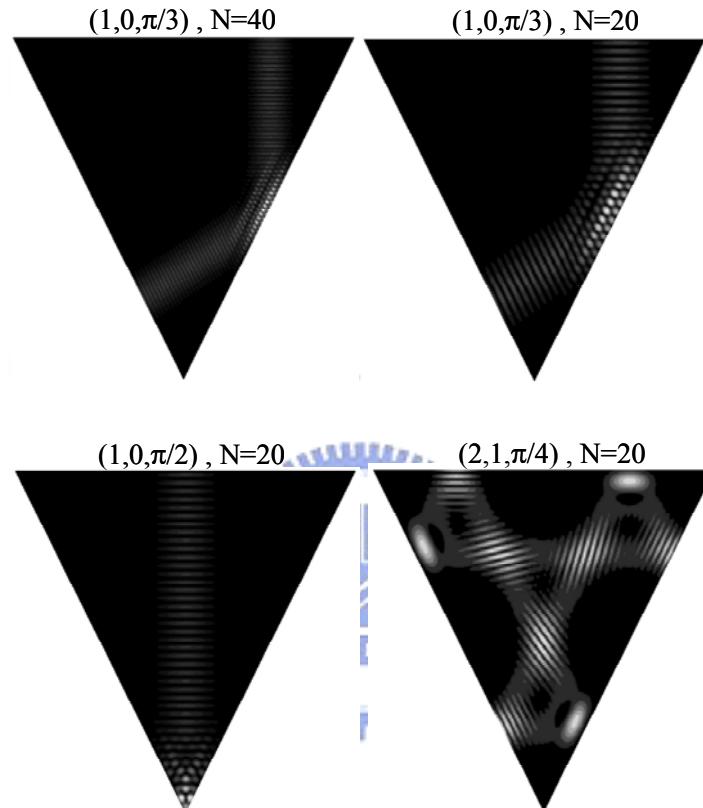


圖 2.12 和圖 2.11 古典軌跡相呼應的波函數強度 $|\Psi_{N,M}(x, y; p, q, \phi)|^2$ 圖形。

第三章 矩形邊界條件的週期性軌道

3.1 導論

矩形邊界條件下的週期性軌道最為簡單，也最能清楚表達出古典彈子球與波函數疊加波包之軌跡間的對應關係。利用矩形結構的砷化鎵發光二極體可以發出具有高度方向性的雷射，根據出射角可得增益介質內幾何模態^[1,2]；也可利用氧化層侷限出近似矩形的準操場邊界半導體雷射二極體，也會產生具有週期性的軌跡^[3-8]。這章我們利用矩形結構的摻鈧釔酸鈦微型雷射腔(利用鍍膜在晶體表面作為反射鏡)來觀察不同模態軌跡的近場及遠場，腔內幾何模態可由近場亮點數和遠場發射角得知，且測量自由光譜範圍(free spectrum range, FSR)可得軌跡長度，再將以上實驗結果和模擬結果比較分析。

除了矩形晶體能夠產生在同一平面上的軌跡之外，我們也發現在四菱柱與切邊圓柱都可產生平面彈子球軌跡，同樣也利用近遠場圖案和自由光譜範圍來推測晶體內部的幾何模態。

3.2 2.98x 2.93x 1.10 mm³ 矩形晶體

3.2.1 摻鈧釔酸鈦晶體的特性

在以雷射二極體作為激發光源的固態雷射系統中最常使用的增益介質即為摻鈧釔酸鈦晶體。摻鈧釔酸鈦晶體有足夠大的受激發射截面(stimulated emission cross-section)，和夠高的吸收係數以及夠寬的吸收光譜。摻鈧釔酸鈦晶體的受激發射截面在 a-cut 時為 25cm^2 、c-cut 時為 7cm^2 ，雷射波長為 1064nm [24]， σ_c 約為四倍的 σ_a ，因此特性使得晶體在 a-cut 時的每個模態的雷射光皆易在 c 軸方向偏極； σ_b 和 σ_a 大約相等，使得晶體在 c-cut 時的雷射光沒有固定偏極方向，其他的

因素會影響模態的偏極方向。

摻鈇釔酸鈸對於激發光源的波長變動比摻鈇鋁石榴石晶體、Nd:YLF 來的不敏感、比較不受環境溫度的影響、較容易達到雷射閾值功率(threshold power)且出光具有線偏極的特性。摻鈇釔酸鈸的紅外光波長以及其二倍頻光：綠光、紅光、藍光在材料製程、晶圓檢查分析、醫療診斷、雷射列印等都有所應用。

Lasing Wavelengths	914nm, 1064 nm, 1342 nm
Crystal Structure	Zircon Tetragonal $a=b=7.12$, $c=6.29$
Stimulated Emission Cross-section (a-axis)	$25 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ @ 1064nm
Stimulated Emission Cross-section (c-axis)	$7 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$ @ 1064nm
Polarized Laser Emission	parallel to optic axis (c-axis)
Absorption Coefficient	31.4 cm^{-1} @ 808 nm

表 3.1 摻鈇釔酸鈸晶體特性[24]。

3.2.2 實驗架構

使用最高輸出為 1 安培的光纖耦合半導體雷射(激發光源波長為 808nm、光纖孔徑為 $100\mu\text{m}$)來激發尺寸較小、閾值功率較低的晶體。當激發尺寸較大、閾值功率較高的晶體時使用較高能量的脈衝激發光源，光纖的孔徑為 $600\mu\text{m}$ 、最高輸出為 15 瓦光纖耦合半導體脈衝雷射。輸出光源經耦合聚焦鏡組聚焦至增益介質晶體上，使用 3 比 1 成像的聚焦鏡組，焦距為 2.5mm，從上方垂直入射摻鈇釔酸鈸晶體。觀察近場時所用的物鏡焦距為 4mm，工作距離為 13mm。實驗架構如圖 3.2.1(a)。

摻鈇釔酸鈸晶體其鈇的摻雜濃度為 1%，矩形尺寸為長 2.98mm、寬 2.93mm、厚 1.10mm；鍍膜面為側面 $2.93 \times 1.10 \text{ mm}^2$ ，對波長 1064nm 反射率為 $R=99\%$ ， $T >$

90%，由於已鍍膜在晶體表面上所以此雷射腔的腔長即為晶體的尺寸大小，不再另外使用鏡片做為前鏡及輸出鏡，此共振腔的腔長即為 2.98mm；晶體為 a-cut，即 c 軸垂直出射光。以輸入雷射二極體的電流(mA)對 1%摻鈇釔酸鈸晶體輸出光功率(mW)做圖 3.2.2，挑選適當的激發光入射位置使此時只有單模輸出(axis-mode)，其閾值為 430mA，斜率為 0.1876mW/mA。

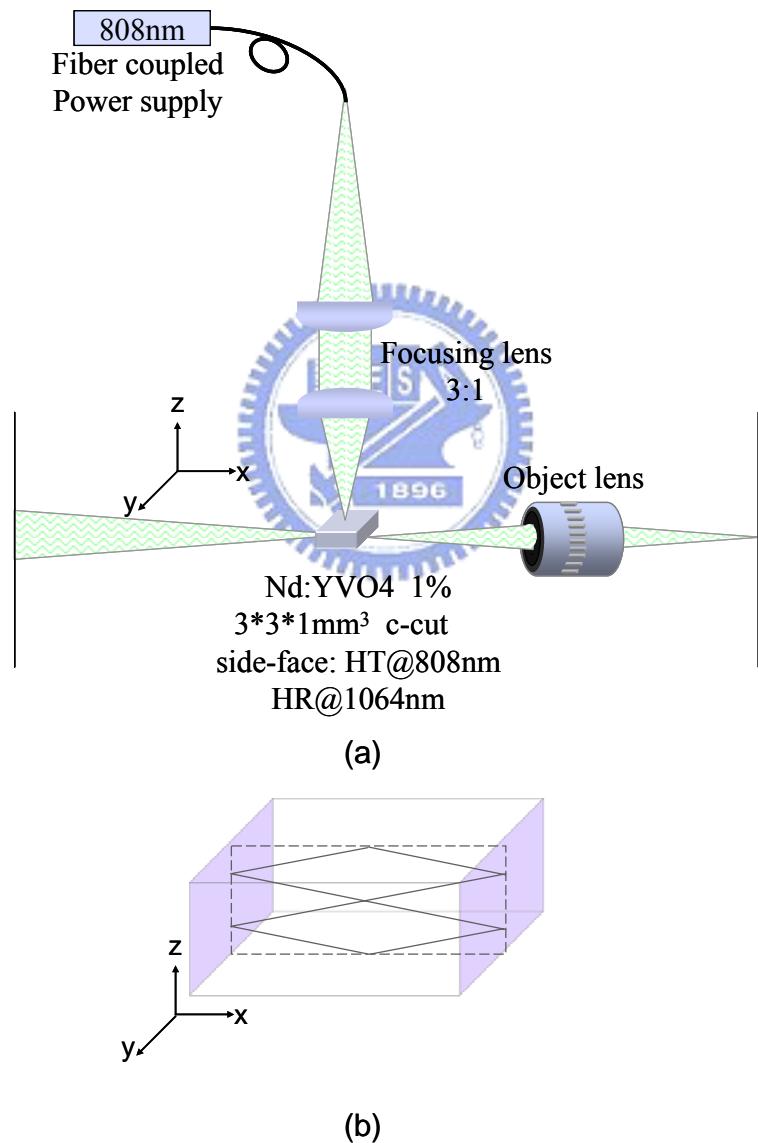


圖 3.2.1 (a)實驗架構圖，(b)(2,1)模態在晶體內部示意圖，紫色為鍍膜面。

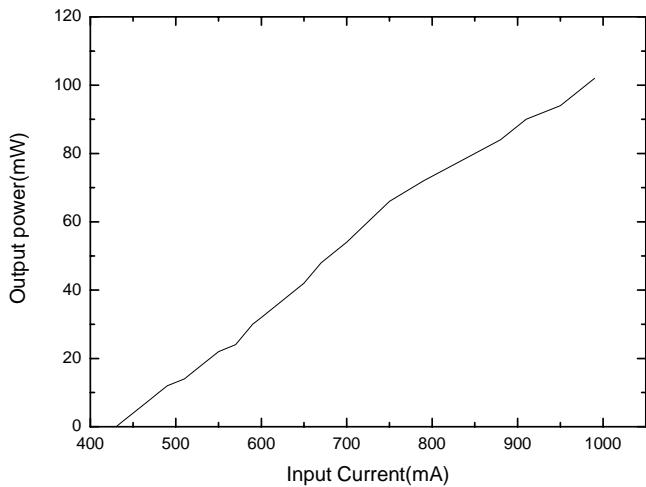


圖 3.2.2 輸入電流對輸出功率作圖。

由第二章的理論介紹可知當提供適當的邊界條件時，雷射光可在晶體內部疊加出古典彈子球軌跡。 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體內部的(2,1)模態週期性軌道如圖 3.2.1(b)，是在前後兩個鍍膜面有兩個撞擊點，靠著對波長 1064nm 高反射鍍膜($R=99\%$)將雷射光侷限在晶體內，而上下方沒有鍍膜的面是靠全反射將雷射光侷限在晶體內部。由摻鈇釔酸鈓在波長 1064nm 時折射率為 2.17，可算出全反射角 θ_c 為 27.441° ，(2,1)模態在全反射面角度 $\theta_i = 79.54^\circ > \theta_c$ ，因此可以被侷限在晶體內部。而有些模態不能滿足全反射條件，造成損失大於增益，所以無法形成週期性軌道，比如 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 晶體的(1,6)模態的 $\theta_i = 26.57^\circ < \theta_c$ ，就不能存在此晶體內。

3.2.3 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(2,1)模態近場

藉由物鏡聚焦在 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體的晶體表面，可以觀察到(2,1)模

態在鍍膜面的兩個亮點，亮點發射的現象經由將物鏡的焦平面拉離晶體表面之後可被觀察到。如圖 3.2.3 最左邊為在晶體表面的近場，越往右其物鏡的焦平面離晶體表面越遠，觀察到近場的亮點隨虛線方向往上下發射。摻鈇釔酸鈸晶體折射率為 2.17，在距離 90cm 遠的屏幕上高度為 38.56cm，可得在空氣中的出射角 θ 為 23.19° ，在晶體內部角度為 10.46° 。

如果是(1,0)模態(axis mode)則近場光點不會往上下有大角度的發射。如圖 3.2.4 由左向右將物鏡的焦平面拉遠其(1,0)模態近場的亮點並不會往上下出射，而是沿光軸向前射出。

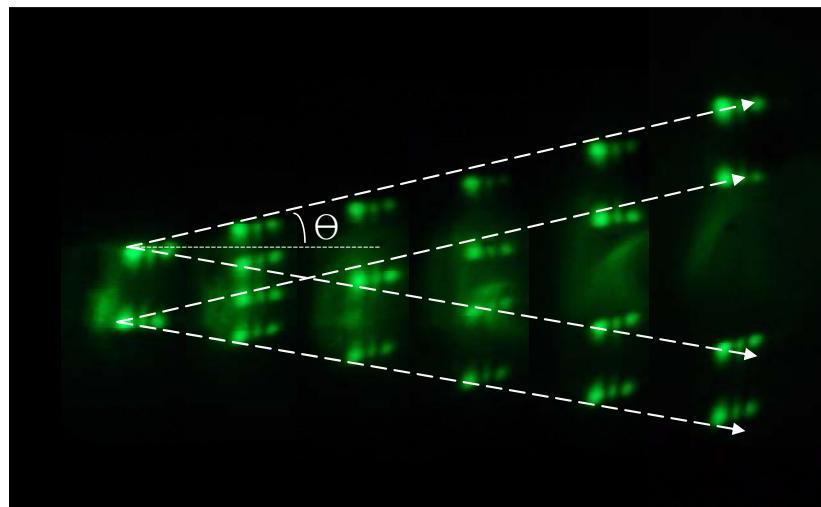


圖 3.2.3 (2,1)模態近場亮點向外發射圖。

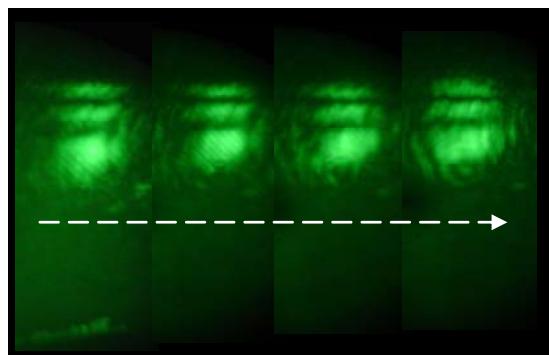


圖 3.2.4 (1,0)模態近場圖案向外發射圖。

3.2.4 2.98x 2.93x 1.10 mm³(2,1)模態遠場

圖 3.2.5 中三張圖分別是使用不同電流激發晶體不同位置產生同樣是(2,1)模態的遠場圖，圖 3.2.5 中(a)(b)(c)電流分別為 551mA、551mA、669mA 的 DC 電流，激發位置分別為 $(x, y) = (2.050, 2.581)$ 、 $(0.108, 0.503)$ 、 $(0.108, 0.503)$ ，圖 3.2.6 為圖 3.2.5(a)激發光點在晶體上相對位置 $(x, y) = (2.050, 2.581)$ 之示意圖，入射光能量大小和激發位置是產生不同模態的主要因素，在相同的位置給予相同的入射光能量絕大多數的模態圖案都可重現，模態的改變對下列因素較不敏感但仍會受其影響：入射聚焦光點的大小、冷卻水溫度、入射光角度以及入射光之脈衝波的週期等。

圖 3.2.5(a)包含有(1,0)以及(2,1)模態，(1,0)模態遠場發散角為-0.011°到 0.011°、(2,1)模態遠場細部發散角為 8.42°到 8.74°，和幾何光學追跡計算的 10.46° 相差約 1.9°，誤差 22%。比較實驗所得遠場圖案亮度對發射角的分布與波函數疊加結果比較，圖 3.2.7(a)為理論波函數疊加的結果，約在±10.46° 亮度最強；圖 3.2.7(b)為實驗結果，約在±8.58° 亮度最強，兩者相差約1.88°，誤差 21%。

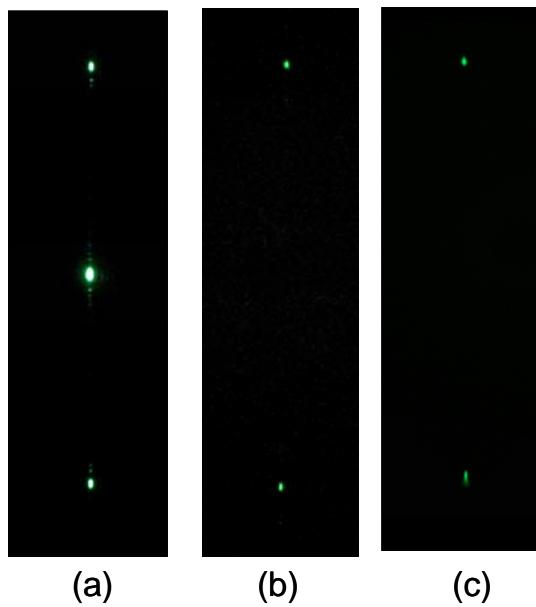


圖 3.2.5 不同電流與不同激發位置產生的(2,1)模態遠場圖，(a)電流為 551mA，激發位置
 $(x, y) = (2.050, 2.581)$ ，(b)電流為 551mA，激發位置 $(x, y) = (0.108, 0.503)$ ，(c)電流為

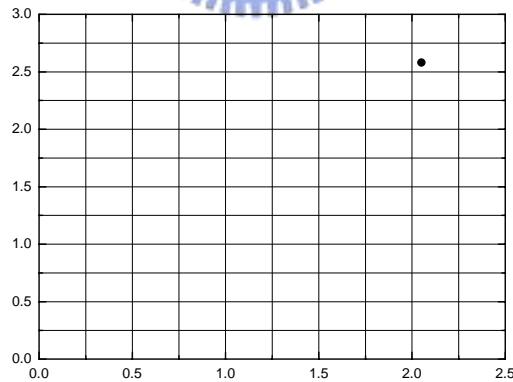


圖 3.2.6 激發位置 $(x, y) = (2.050, 2.581)$ 之示意圖。

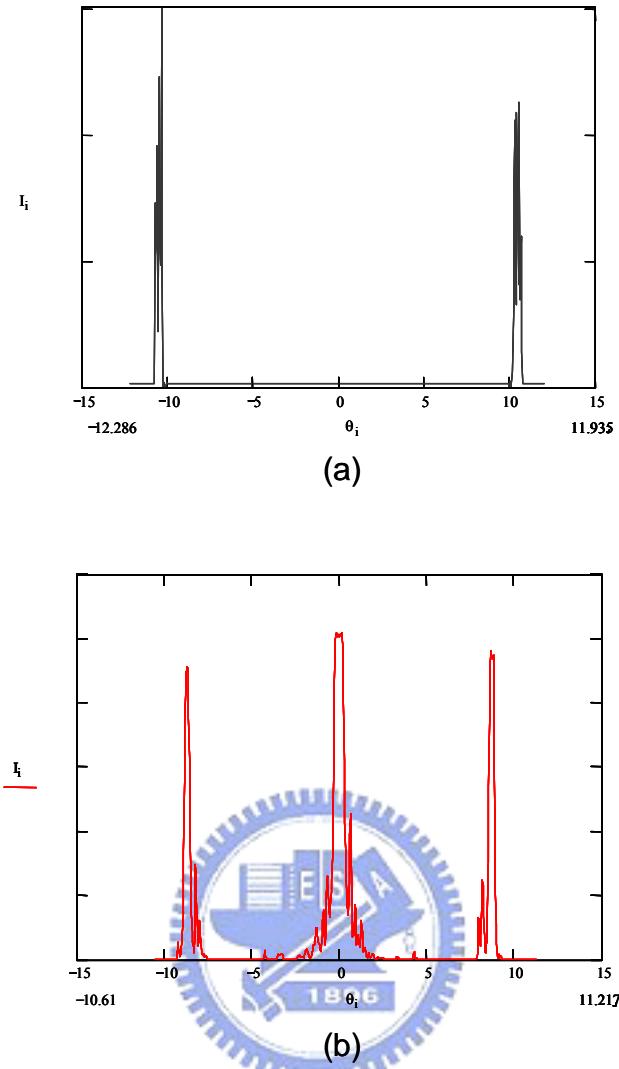


圖 3.2.7 (a)波函數疊加(2,1)模態之遠場圖案亮度對角度分布圖，(b)實驗觀測之圖 3.2.5(a)遠場圖案亮度與出射角分布圖。

射聚焦光點的大小、晶體溫度、入射角度以及入射脈衝波的週期等。圖 3.2.5(a)包含有(1,0)以及(2,1)模態，(1,0)模態遠場發散角為 -0.011° 到 0.011° 、(2,1)模態遠場細部發散角為 8.42° 到 8.74° ，和幾何光學追跡計算的 10.46° 相差約 1.9° ，誤差 22%。比較實驗所得遠場圖案亮度對發射角的分布與波函數疊加結果比較，圖 3.2.7(a)為理論波函數疊加的結果，約在 $\pm 10.46^\circ$ 亮度最強；圖 3.2.7(b)為實驗結果，約在 $\pm 8.58^\circ$ 亮度最強，兩者相差約 1.88° ，誤差 21%。

圖 3.2.8 為圖 3.2.6 相對應的近遠場圖案，(a)晶體表面上的近場以及(b)拉遠物鏡之焦平面後的圖案，將物鏡焦平面拉遠的好處是可以避開晶體表面上雜質或鍍膜缺陷造成的散射光干擾，可得到較清楚的近場亮點，(c)是遠場的細部圖案，具有干涉條紋。當 $(1,0)$ 模態通常亮度比其他同時出現的高階模態亮許多，使得我們想要觀察 $(2,1)$ 模態近場亮點時會被 $(1,0)$ 模態近場的強光遮蓋住，此時我們利用兩模態具有不同出射角的特性，在物鏡前放置擋光物體擋住 $(1,0)$ 模態大部分的光，讓 $(2,1)$ 模態近場亮點凸顯出來再進行拍攝。在拍攝時由於摻釤鈦酸鈇晶體的發射的雷射波長是 1064nm，屬於紅外線範圍，因此要在相機前方架設 IR view 將紅外線轉為可見光。

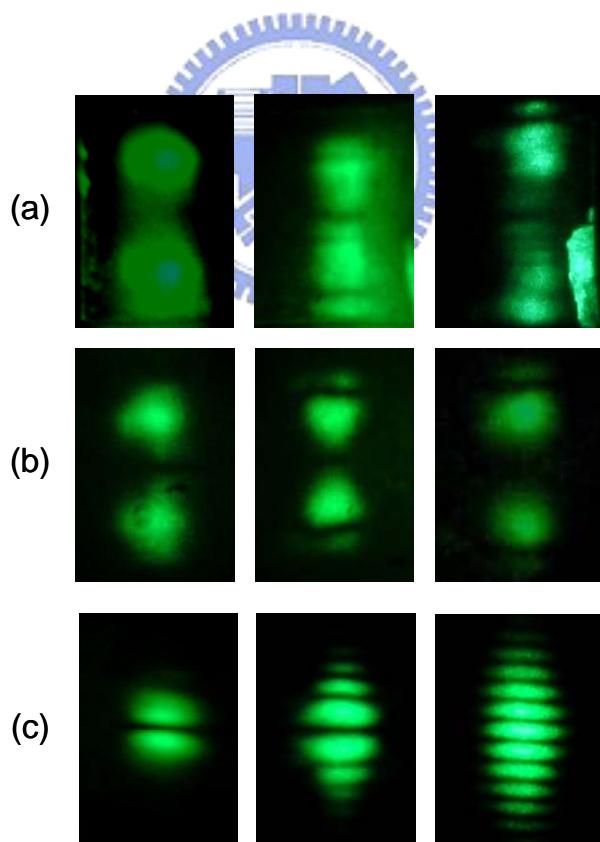


圖 3.2.8 為圖 3.2.6 相對應之圖案，(a)晶體表面之近場，(b)拉遠物鏡焦平面之近場，(c)遠場細圖干涉條紋圖案。

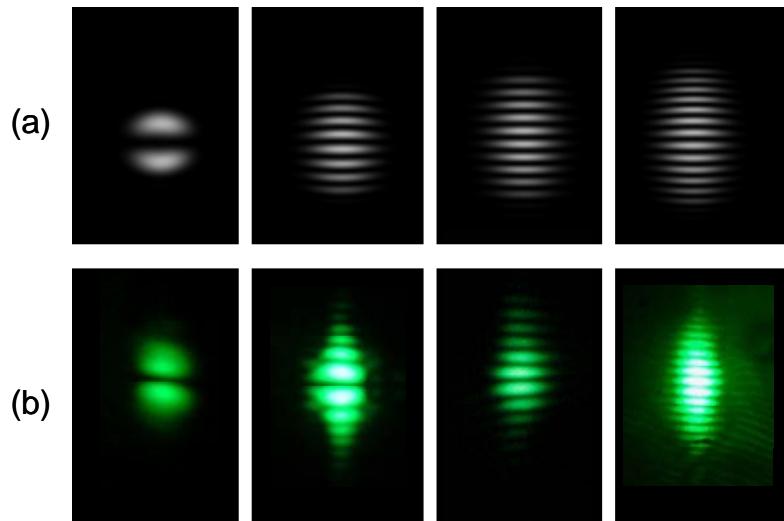


圖 3.2.9 將波函數疊加(2,1)模態得到的理論遠場細部干涉圖案與實際拍攝(2,1)模態的遠場干涉條紋照片相比較，上方(a)為模擬圖、下方(b)為實驗圖。



圖 3.2.9(a)灰色圖案是使用波函數搭配數學軟體所得結果，(2.5)式中 M 分別為 2、8、10、13， M 越大干涉條紋越多；圖 3.2.9(b)亮綠色圖案是實際拍攝遠場細部干涉條紋的照片。 M 越大在量子力學的理論分析中代表著 Δk 的增加；而圖 3.2.9(b)的實驗圖案由左至右的圖案越來越長，代表 $\Delta\theta$ 的增加，這在波動光學中代表圖案在遠場的動量空間中分佈變廣，等同於 Δk 的增加，在這裡理論與實驗都具有同樣的趨勢且彼此的解釋互相符合物理意義。

除了遠場亮點出射角、近場亮點數目之外，光譜的自由光譜範圍 FSR 也能再次確定所觀察的是哪個模態。藉由實際晶體邊長 a 與 b 用幾何光學推算腔長為

$$L_{p,q} = 2pq \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2} \quad (3.1)$$

得到 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(2,1)模態的腔長 $L_{2,1} = 6.06\text{mm}$ 。使用解析度為 0.03nm 光譜儀量測(2,1)模態光譜圖 3.2.10 得到平均 $\Delta\lambda(FSR) = 0.041\text{nm}$ ，利用共振條件 $L_{p,q}' = \frac{L_{p,q}}{n} = m \cdot \frac{\lambda_0}{2}$ 可得

$$\Delta\lambda_m \cong \frac{\lambda_0^2}{2 \cdot L_{p,q} \cdot n} \quad (3.2)$$

反推得到腔長 $L_{2,1}(\text{experimental}) = 6.36\text{mm}$ ，和實際晶體尺寸用幾何光學計算結果相差 4.7% 。

實驗測量的遠場發射角，與使用幾何光學追跡計算得出射角之間的誤差、實驗測量光譜自由光譜範圍 $\Delta\lambda(FSR)$ 反推得腔長，與晶體實際尺寸內的幾何模態長度間的誤差，產生以上這兩個誤差的主因是雷射光在晶體內產生局部的熱使晶體部分變形，進而改變晶體折射率還有使軌跡變形，所以發射角與腔長都會隨之改變。

表 3.2 中的圖案都屬於 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體的(2,1)模態，最左欄是近場圖案，第二欄和第三欄都是遠場的細部干涉條紋圖案。這些圖案共同特色是都有左右雙排以上，可以藉由稍微偏離入射光點產生單排圖案的晶體激發點得到這些左右對稱之雙排以上圖案，也就是當激發光的聚焦點在晶體上小幅度的移動時，約 0.3mm 以內，我們可以觀察到單排圖案變化成雙排以上圖案；除了改變激發光點位置外，也可經由提高入射電流來得到更多排的圖形。聚焦點大小變化也可改變圖案但較不敏感，造成圖案變化的主因仍是激發光點位置的改變。當遠場細部圖案是左右對稱之雙排時其近場必定也是左右對稱的雙排亮點，同理三排是也是。當單排變成雙排以上時遠場干涉條紋數目並不改變。

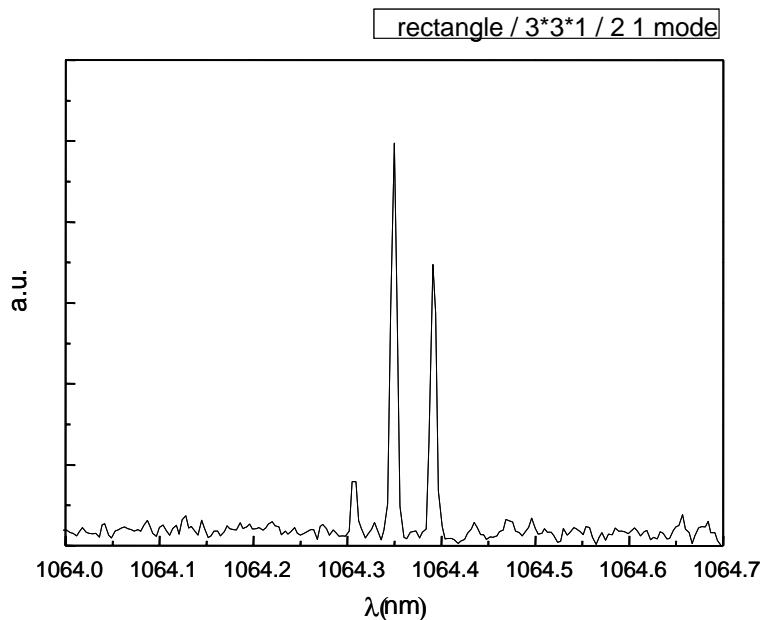


圖 3.2.10 (2,1)模態之光譜圖

Near field	Far field		

表 3.2 (2,1)模態所產生的各種左右對稱之多排近、遠場圖。

3.2.5 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 其他模態

當激發電流為 468mA 時可得到圖 3.2.11，圖 3.2.11(a)為 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體表面的近場亮點圖案，拍攝時將(1,0)模態擋住可得到 3 個亮點，推測為(3,x)模態，圖 3.2.11 (b)為模態遠場細部干涉條紋圖案，圖 3.2.11 (c)是遠場整體圖案，包含了中間亮點為(1,0)模態，測得到上下兩點發散角度為 5.41° 到 6.07° ，(3,1)模態用幾何光學追跡得出射角為 7.01° 和實驗結果相差 1.27° (22%)；若是(3,2)模態則用幾何光學追跡得出射角為 11.43° 和實驗結果相差 5.69° (99%)，因此推測 $x=1$ 此模態為(3,1)模態。

圖 3.2.12 是不同電流大小的激發光打在不同晶體位置所拍攝的遠場細部干涉條紋圖，圖 3.2.12(a)與(c)灰色圖案與藍色圖表是理論計算所得的遠場細部圖與其強度對角度分布圖，圖 3.2.12(b)與(d)綠色圖案與紅色圖表是實驗所得拍攝結果與其強度對角度分布圖，(a)(c)分別與(b)(d)相對應。圖 3.2.12(b)最中間的亮紋較兩旁暗，干涉條紋以中間的亮紋分成上下兩團對稱亮紋，圖 3.2.12(a)的理論參數 $M=12$ ， $\phi=\pi/7$ 代入(2.5)式，其亮暗變化程度較實驗圖案明顯。圖 3.2.12 (d)最中間亮紋較暗其旁邊兩條較亮，第三條又較暗，亮暗變化比圖 3.2.12 (b)複雜，圖 3.2.12 (c)的理論參數 $M=14$ ， $\phi=\pi/4$ 與 $5\pi/16$ 。

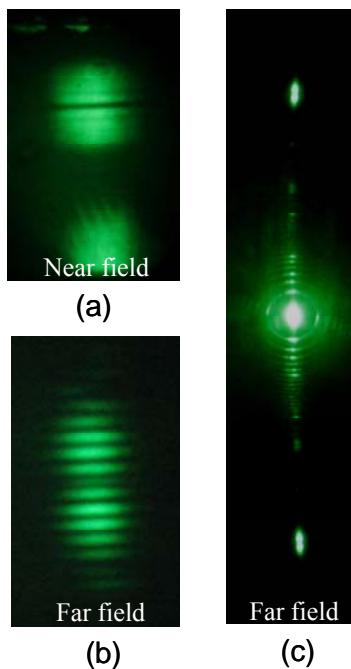


圖 3.2.11 (3,1) 模態之近遠場圖案，(a) 晶體表面近場亮點圖案，(b) 遠場細部干涉條紋圖案，(c) 遠場整體圖案，包含(1,0)模態。

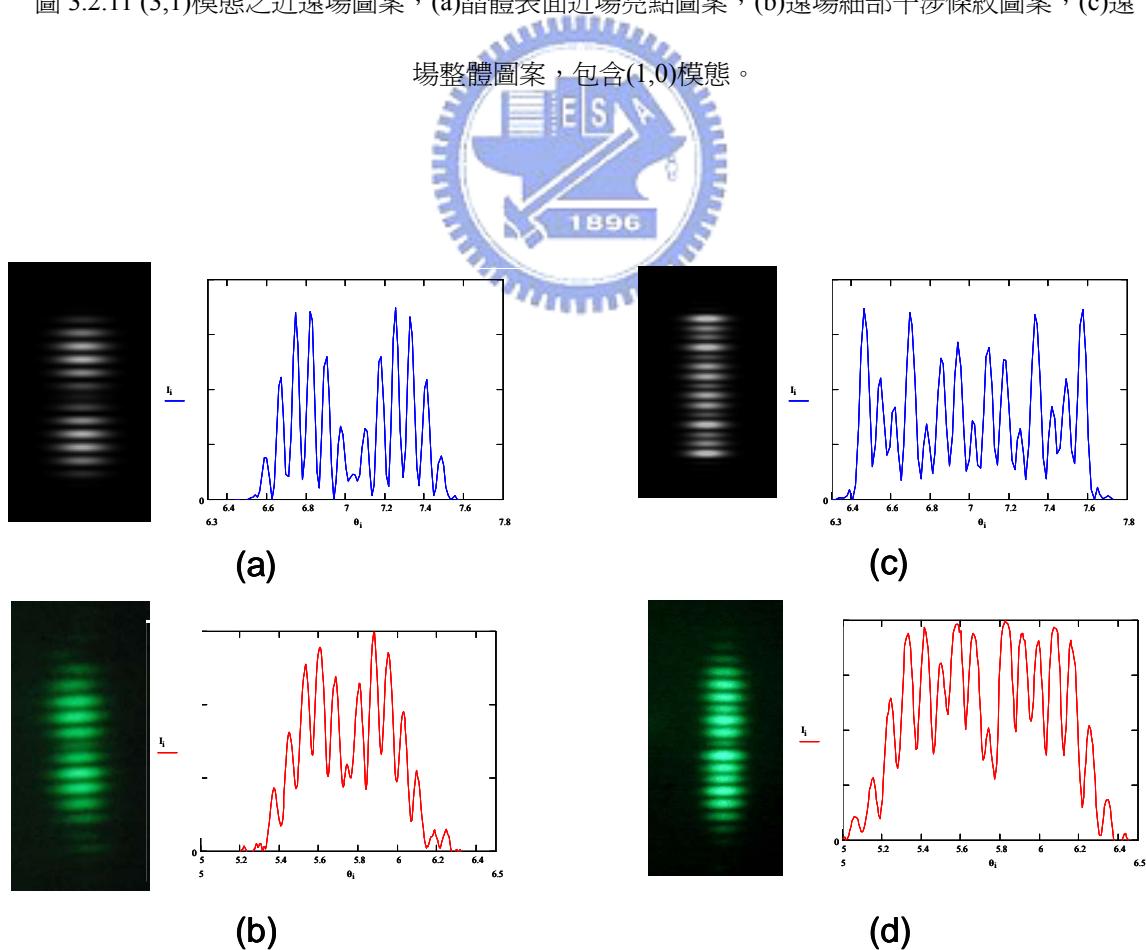


圖 3.2.12 其他(3,1)模態的遠場細部干涉條紋圖案與其模擬圖、亮度對角度分布圖。

由圖 3.2.13 的(3,1)模態光譜圖得 $\Delta\lambda(FSR) = 0.028nm$ ，

$L_{3,1}(\text{experimental}) = 9.22mm$ ，和幾何模態長度得的 $L_{3,1}(\text{theoretical}) = 9.01mm$ 相差 $0.21mm$ ， 2.3% 。

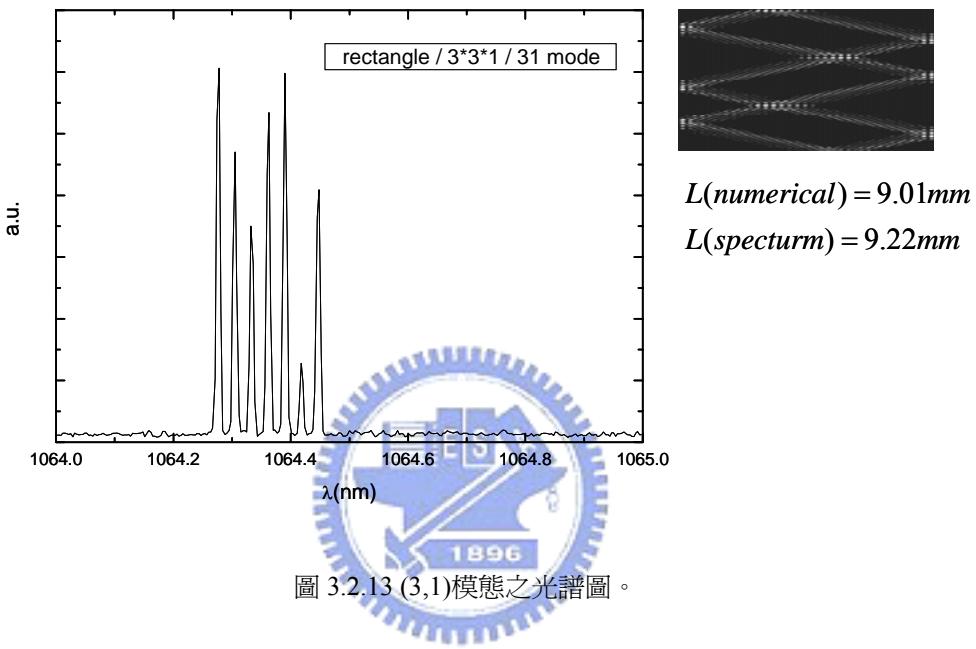


圖 3.2.13 (3,1) 模態之光譜圖。

除了(2,1),(3,1)模態， $2.98 \times 2.93 \times 1.10 mm^3$ 矩形晶體還可產生(10,1),(5,1),(5,2),(3,2)等模態，分別是圖 3.2.14 的(a)(b)(c)(d)。圖 3.2.14(a)最左邊是模擬波函數在晶體內部疊加之週期性軌道，中間灰色亮點是理論計算所得近場亮點，最右邊綠色亮點是實驗經由物鏡聚焦在晶體表面所拍攝的近場亮點圖案。實驗所得圖 3.2.14(a)亮點位置很接近角落，使近場看似有 6 個亮點，有可能的模態有(6,x)、(10,x)、(11,x)，但可利用出射角發現最接近(10,1)，模擬(10,1)模態近場亮點最接近 6 個亮點時的起始點參數 $\phi=3\pi/4$ 。圖 3.2.14(d)由於(3,2)模態和(1,0)與(2,1)模態同時產生使得近場亮點互相重疊干擾，因此將物鏡焦平面拉遠晶體表面，利用各個模態的發射角不同將近場亮點分開後再進行對(3,2)模態的近場拍攝。

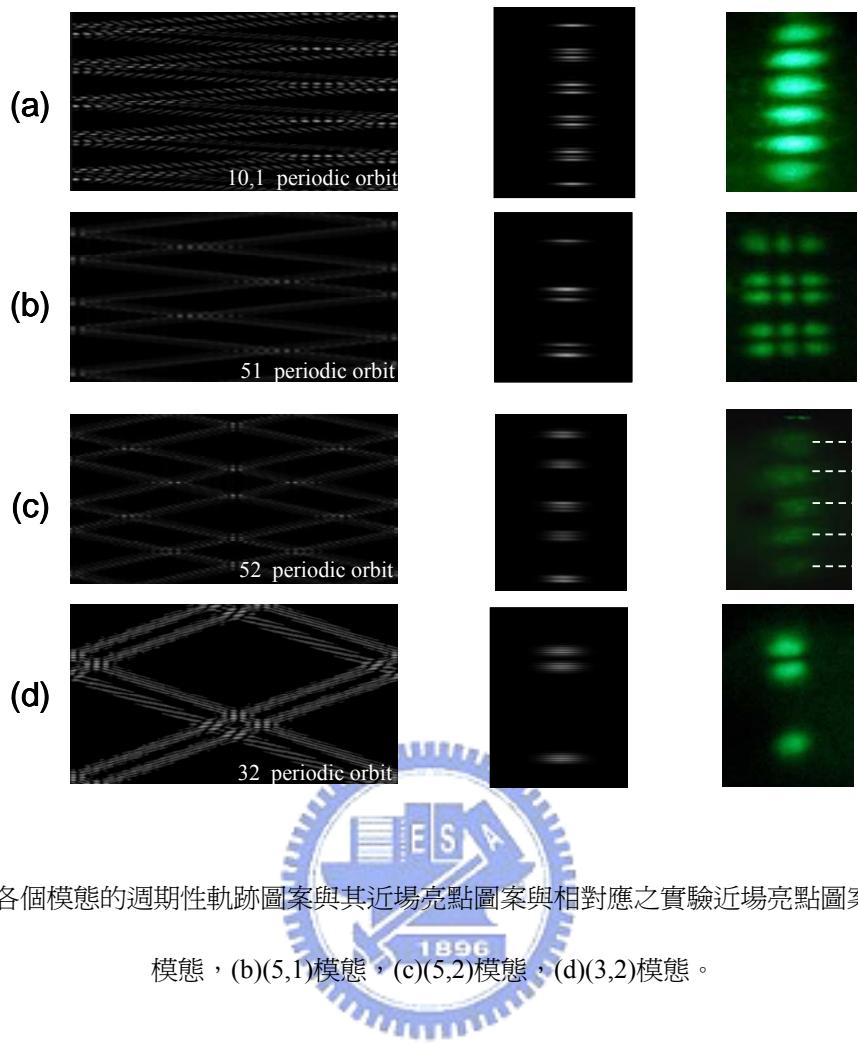
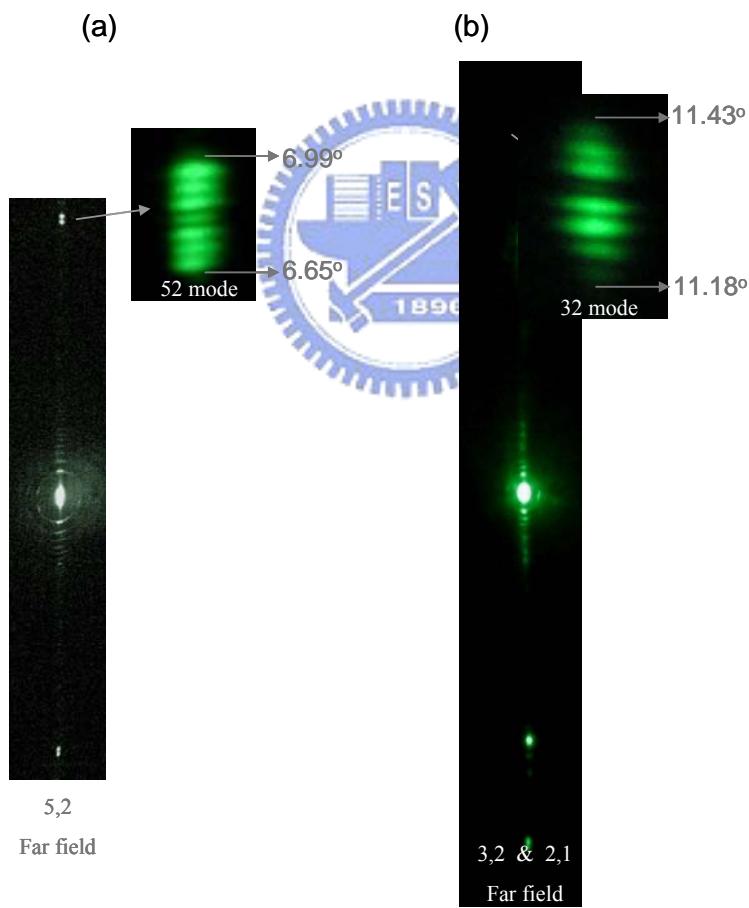
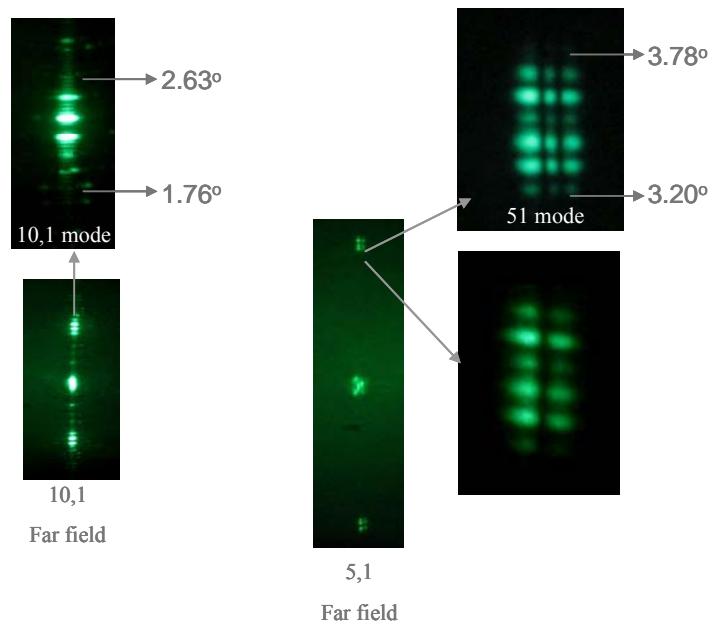


圖 3.2.14 各個模態的週期性軌跡圖案與其近場亮點圖案與相對應之實驗近場亮點圖案，(a)(10,1) 模態，(b)(5,1) 模態，(c)(5,2) 模態，(d)(3,2) 模態。

圖 3.2.15(a)(b)(c)(d) 分別是(10,1)、(5,1)、(5,2)、(3,2)模態的遠場圖，由左至右出射角愈來愈大。這些模態都至少與一個模態以上同時產生，箭頭所指出的圖案是各個模態之遠場細部干涉條紋圖案，都分別標示了所觀察到的發散角，(5,1)模態有雙排以及三排兩種圖案。經幾何光學追跡計算所得(10,1)、(5,1)、(5,2)、(3,2)模態發射角為 2.114° 、 4.222° 、 8.399° 、 13.825° ，和實驗結果分別相差 2.52° (22%)、 1.579° (23%)、 0.732° (21%)、 0.081° (4%)。 $2.98 \times 2.93 \times 1.10\text{ mm}$ 矩形晶體的所有模態之實驗出射角和幾何光學追跡結果相差都在 2.52° 以內，誤差百分比在 23% 以內。其中(5,2)模態之光譜圖如圖 3.2.16 所示， $\Delta\lambda(FSR) = 0.017\text{ nm}$ ， $L_{5,2}(\text{experimental}) = 15.36\text{ mm}$ ，和幾何模態長度的 $L_{5,2}(\text{theoretical}) = 15.06\text{ mm}$ 相差 0.3 mm ，2%。



(c)

(d)

圖 3.2.15 各個模態之遠場圖與遠場細部干涉條紋圖和對應之發散角。(a)(10,1)模態，(b)(5,1)

模態，(c)(5,2)模態，(d)(3,2)模態。

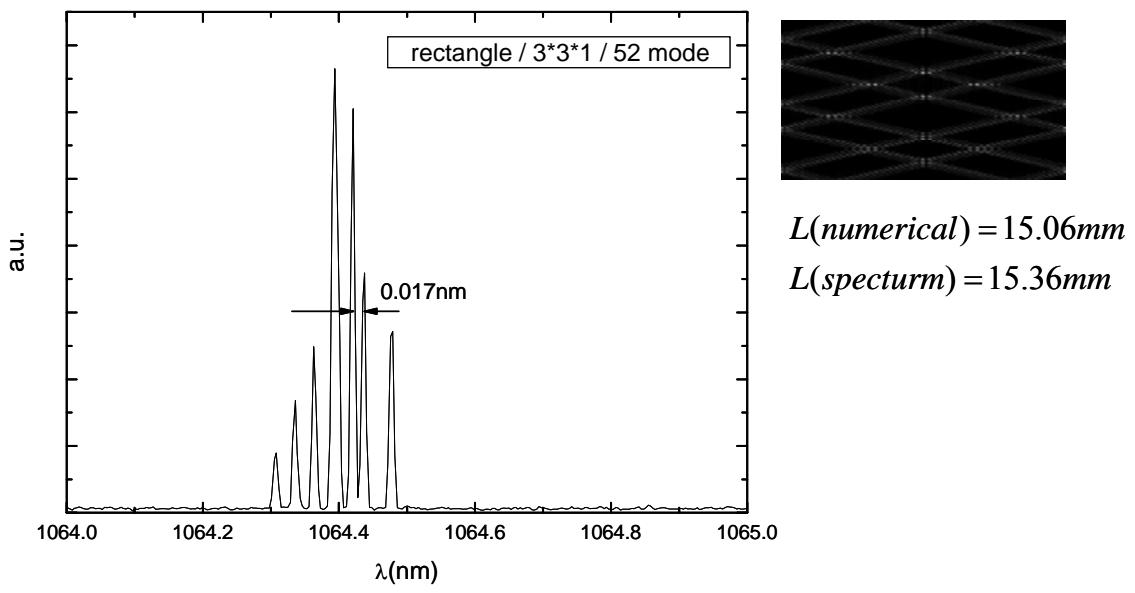


圖 3.2.16 (5,2) 模態之光譜圖。



3.3 其它矩形與四菱柱晶體

二維彈子球檯波函數除了可以疊加出 $2.98 \times 2.93 \times 1.10 \text{ mm}^3$ 矩形晶體各個模態的近遠場圖之外，也能用來解釋其他尺寸的矩型晶體，如 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 、 $4.01 \times 4.07 \times 1.96 \text{ mm}^3$ ，和四菱柱晶體，如斜邊長 3.96×0.98 (夾角 70°)、斜邊長 3.55×1.04 (夾角 60°)，以上這些晶體都是 a-cut 晶體。

3.3.1 a-cut 矩形晶體

$1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 在 4 個 $19.6 \times 1.08 \text{ mm}^2$ 表面鍍膜矩形晶體的(4,1)模態近場亮點如圖 3.3.1(a)所示，為左右對稱的雙排亮點，一排亮點有四個，推測為(4,x)模態，再用發射角確認 $x=1$ 。圖 3.3.1 (b)為(4,1)模態遠場細部干涉條紋圖案，和近場一樣是左右對稱之雙排圖案，圖 3.3.1 (c)是(4,1)模態遠場整體圖案，使用最高輸出為 1A 的電源供應器，此時電流為 548mA。實驗所測得遠場發散角為 6.01° 到 6.68° ，和幾何光學追蹤結果 7.84° 相差 1.495° ，誤差約 23%。

圖 3.3.2 同樣是 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體的(4,1)模態，但是為單排。上半部 (a)(b)(c)圖是理論模擬結果、下半部(d)(e)(f)為實驗結果，由左到右依序為近場的四個亮點圖、遠場細部干涉條紋、遠場細部圖案亮度對角度分布圖，可以看出有很好的相對應結果。

將 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(4,1)模態的單排圖與雙排圖放在一起比較，如圖 3.3.3。圖 3.3.3 (b)是實驗所得單排(4,1)模態、圖 3.3.3 (d)是雙排(4,1)模態，圖 3.3.3 (a)和(c)是理論模擬結果，分別和(b)(d)相對應。

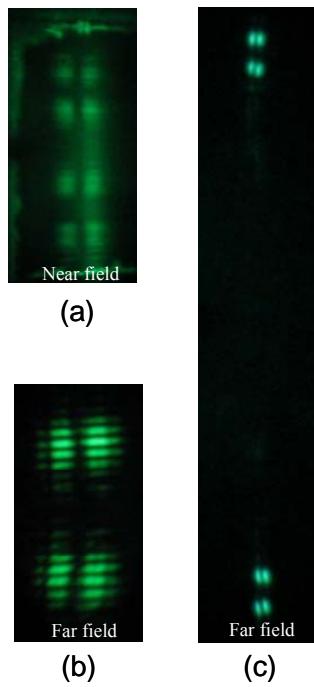


圖 3.3.1 邊界條件為矩形(尺寸 $1.96 \times 1.08 \text{ mm}^2$)之(4,1)模態近遠場圖，

(a)近場亮點圖，(b)遠場細部干涉條紋圖，(c)遠場整體圖。

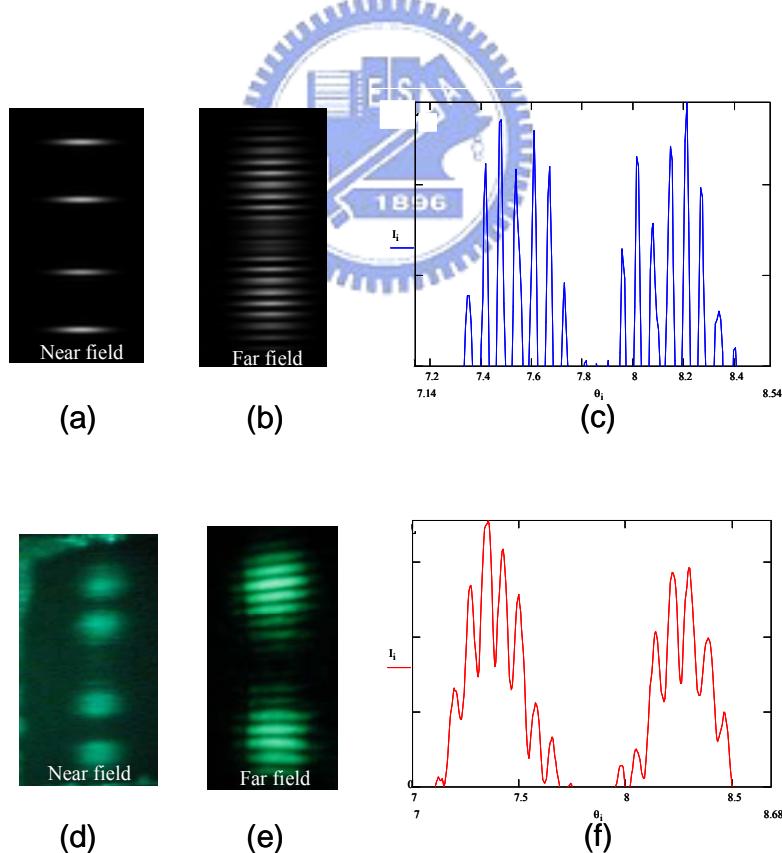


圖 3.3.2 邊界條件為矩形(尺寸 $1.96 \times 1.08 \text{ mm}^2$)之(4,1)模態實驗所得近場、遠場、亮度對角度分布

圖(下排(d)(e)(f))，和其相對應之理論模擬圖(上排(a)(b)(c))。 (a)(d)為近場亮點圖、(b)(e)為遠場

細部干涉條紋圖、(c)(f)為亮度對角度分布圖。

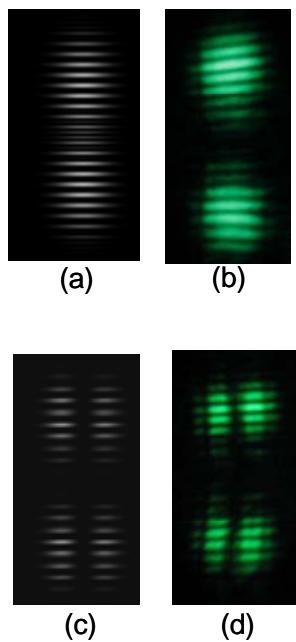


圖 3.3.3 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(4,1)模態的遠場細部干涉條紋圖案(a)單排、(b)雙排與理論



圖 3.3.4 是 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(4,1)模態的近場亮點與遠場細部干涉條紋圖，有單排、雙排、三排至四排。單排與雙排激發光電流皆為 548mA，變因僅有激發光點位置改變 0.1mm；激發三排與四排所需電流較大，皆為 751mA，激發光點位置相差 0.1mm。上半部圖 3.3.4 (a)到(d)圖為近場亮點圖案，下半部圖 3.3.4 (e)到(h)為遠場細部干涉條紋圖案。

$4.10 \times 4.00 \times 2.06 \text{ mm}^3$ 在 2 個 $4.00 \times 2.06 \text{ mm}^2$ 表面鍍膜矩形晶體的(7,2)模態如圖 3.3.5 所示，此時為 6.1W 的脈衝激發，週期為 $200\mu\text{s}/1.2\text{ms}$ ，圖 3.3.5 (b)(c)與(f)圖是理論模擬圖，圖 3.3.5 (a)(d)與(e)是實驗拍攝圖。由於近場有 7 個亮點所以判斷是(7,x)模態，遠場發散角為 6.39° - 6.68° ，計算各個可能模態的出射角後(7,2)模態發射角為 8.14° 最接近實驗結果，相差 1.6° (誤差 24%)。

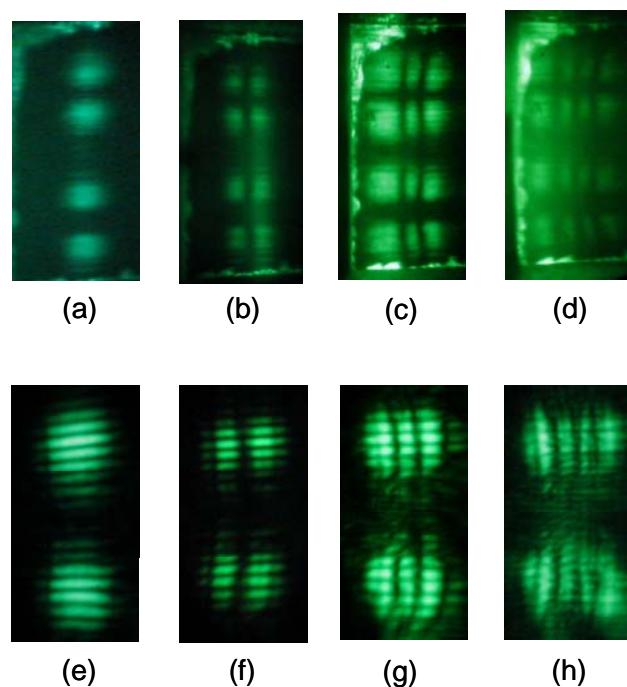


圖 3.3.4 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(4,1)模態的近場亮點((a)到(d))與遠場細部干涉條紋圖((e)到(h))，由左至右有單排、雙排、三排、四排。

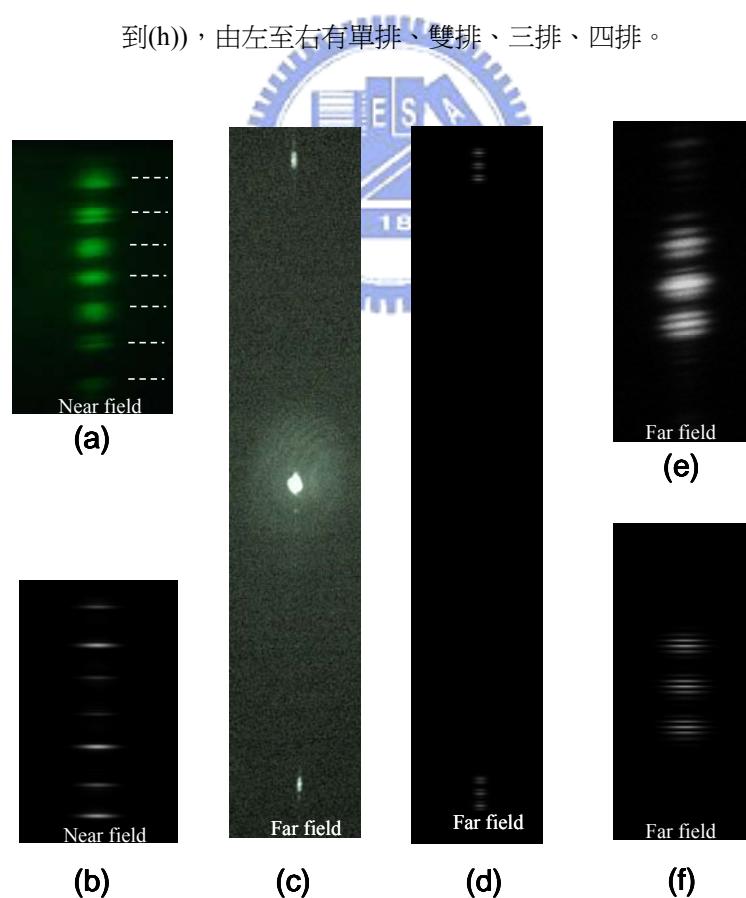


圖 3.3.5 $1.96 \times 1.96 \times 1.08 \text{ mm}^3$ 矩形晶體(7,2)模態，(a)(c)(e)分別為近場亮點、遠場整體圖含(1,0)模態、遠場細部干涉條紋圖，(b)(d)(f)為相對應之理論模擬圖。

3.3.2 a-cut 四菱柱晶體

四菱柱晶體 $3.96 \times 4.07 \times 0.98\text{mm}^3$, $\theta=70^\circ$ 的 2% 摻釤釔酸鈇晶體，雷射出射閘值為 6.9W，產生(5,2)模態需用 8.7W 脈衝激發，週期 $200\mu\text{s}/1.4\text{ms}$ ，如圖 3.3.6 遠場有三個分開的亮點，發射角分別為 $9.8^\circ(9.52^\circ-10.08^\circ)$ 、 $11.22^\circ(11.00^\circ-11.43^\circ)$ 、 $12.62^\circ(12.47^\circ-12.77^\circ)$ ，和幾何光學追跡結果 12.53° 相差約 1.32° ，誤差 12%。四菱柱晶體在產生具有方向性雷射時邊界條件和矩形晶體相同，同樣都使用晶體上下兩面全反射、前後兩面鍍膜反射，還未激發出需使用四菱柱晶體斜邊之模態。

雖然四菱柱晶體和矩形晶體的邊界條件相同，但兩者所產生的圖案卻不盡相同，四菱柱晶體容易同時產生兩組 ϕ 角相差較大的週期性軌道，且遠場細部干涉圖案會較為分開。圖 3.3.7(a)(b)是(2,1)模態的遠場干涉條紋細部圖與近場亮點圖案，近場有四個亮點看似為(4,x)模態但由出射角推得為(2,1)模態，此時有兩組 ϕ 角相差較大的週期性軌道同時出光；圖 3.3.7 (c)(d)為(3,2)模態的遠場干涉條紋細部圖與近場亮點圖案，此時同樣有兩組 ϕ 角相差較大的週期性軌道同時出光，使得近場圖 3.3.7(d)雖有 6 個亮點看似為(6,x)模態但由出射角推得仍為(3,2)模態，由圖 3.3.7 (b)(d)上所標示的白線可看出分別有兩組 ϕ 角。

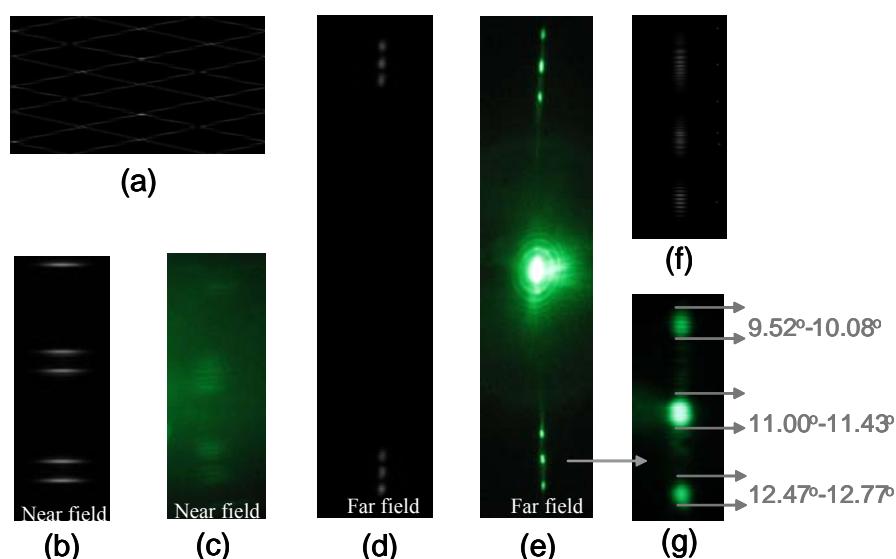


圖 3.3.6 四菱柱 $3.96 \times 4.07 \times 0.98\text{mm}^3$ 之(5,2)模態，(c)(e)(g)分別為近場亮點、遠場整體圖含(1,0)模態、遠場細部干涉條紋圖，(b)(d)(f)為相對應之理論模擬圖。

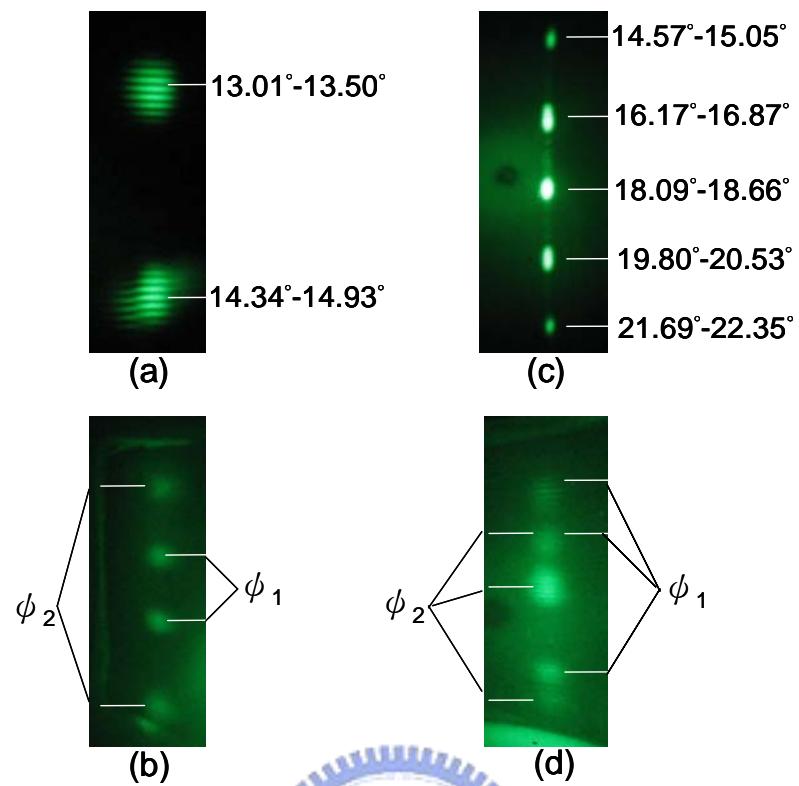


圖 3.3.7 四菱柱 $3.96 \times 4.07 \times 0.98\text{mm}^3$ 之模態，(a)(b)分別為(2,1)模態之遠場細部干涉條紋圖、近場亮點，(c)(d)為(3,2)模態之遠場細部干涉條紋圖、近場亮點。



3.4 切邊圓柱晶體

2%摻釤鈦酸鈕切邊圓柱晶體的半徑 2.5mm，厚度 1mm，切邊與圓周最長距離 2.5mm，即為半圓柱形，在 $5 \times 1\text{mm}^2$ 半圓柱切面上鍍 HR 1064nm / HT 808nm。晶體內部的週期性軌道在鍍膜面上垂直反射、在圓弧面上全反射，由此邊界條件推論只有偶數的正多邊形可以存在，若非正多邊形則在圓弧面上不滿足入射角=反射角的條件；若是 axis-mode(即為前面矩形晶體的(1,0)模態)則入射角小於全反射角，那損耗大於增益使晶體不產生雷射光；若非偶數正多邊形則出光會有出射角，但此實驗觀察到雷射出光都是垂直往前不向兩旁發射，所以推論週期性軌道為偶數正多邊形。

此切邊圓柱晶體實驗可以依據近場亮點產生位置離晶體邊界距離和晶體厚度的比值，以及光譜測量(FSR) $\Delta\lambda$ 來推測是何種偶數正多邊形，但是比起矩形晶體會較難判斷模態，因各個正多邊形模態腔長接近使得難以用自由光譜範圍(FSR) $\Delta\lambda$ 準確判定模態，且切邊圓柱晶體內的正多邊形週期性軌道都是垂直出射不具有出射角。

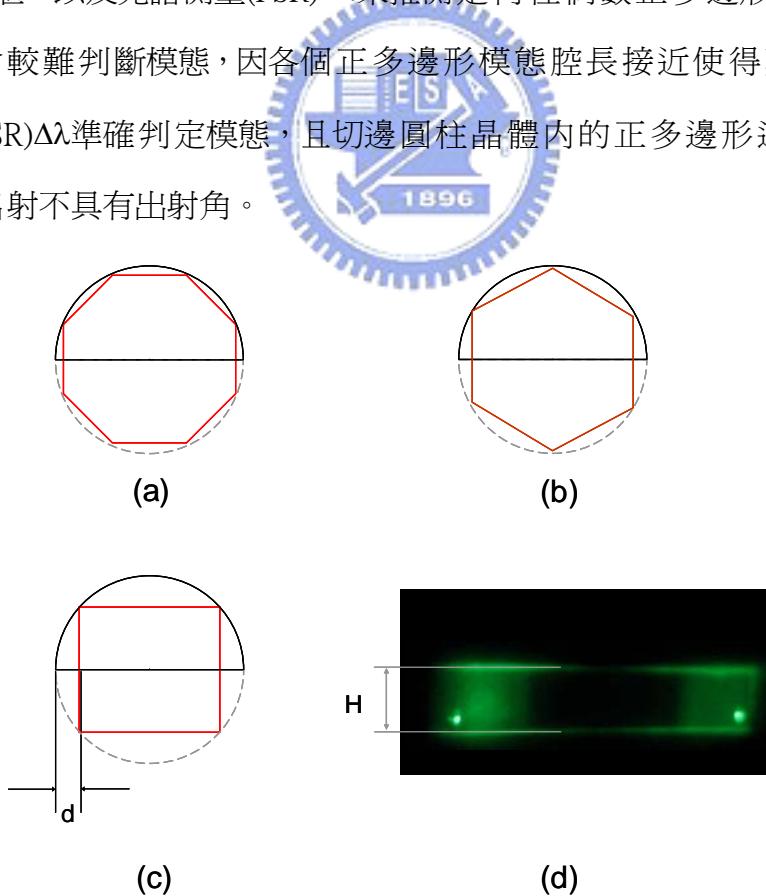


圖 3.4.1 半圓形切邊圓柱內部軌跡示意圖，由周期性軌道之亮點與晶體邊界距離 d 和晶體厚度 H 之比值可推論內部軌跡模態。

正八邊形、正六邊形、正四邊形在半圓形晶體內的軌跡分別如圖3.4.1(a)(b)(c)中所示意，(d)為經由透鏡觀測半圓形晶體的矩形雷射出光面之圖案，可以看到左右兩側都有出光亮點，放大倍率可以從晶體厚度 H 在屏幕上的長度比上游標尺測量的厚度得知，再藉由計算亮點與晶體邊界距離 d 與晶體半徑 R 之關係：

$$d = R \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{360}{2 \cdot P}\right) \right] \quad (3.3)$$

regular polygon <i>P</i>	4	6	8	10	12	14	16
d (mm)	0.730	0.335	0.190	0.122	0.085	0.063	0.048

表 3.3 不同正多邊形軌跡之 d 值。

由表 3.3 可以大略推測是哪一種正多邊型軌跡，其中 *P* 代表正多邊型邊數，要計算比值時使用倍率較高的物鏡觀察近場可以使結果更精確。

正四邊形模態的近場亮點圖如圖 3.4.2，此時用脈衝激發光源為 2.0W、週期 200μs/1.2ms 從半圓形面進入晶體，中間為用透鏡觀察整體近場圖，左右兩張圖是再用物鏡去分別拍攝近場亮點圖，左右兩邊的亮點與邊界距離 d 比上晶體厚度 H(d/H) 分別為 0.522 和 0.696，和使用幾何光學的計算正四邊形結果 $d/H=0.730$ 最為相近，誤差為 19%。

圖 3.4.3(a) 是調整透鏡的焦平面位置觀察正四邊形週期性軌道之近場亮點往前行進的變化，亮點一面往前出射一面均勻地向四周發散，發散程度比矩形晶體大，左右兩邊的亮點逐漸重疊在一起，以致於到遠場時已無任何明顯干涉之亮紋圖案，整體發散角度已達 20.9°，比起 2.98x 2.93x 1.10 mm³ 矩形晶體的最大出射角(3,2)模態的 11.25° 多了 9.65°。半圓形晶體近場亮點比矩形晶體近場

亮點更侷域化，根據測不準原理 $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$ ，當 Δx 越小(近場越侷域化)則 Δk 越大(遠場越不侷域化，發散角越大)。

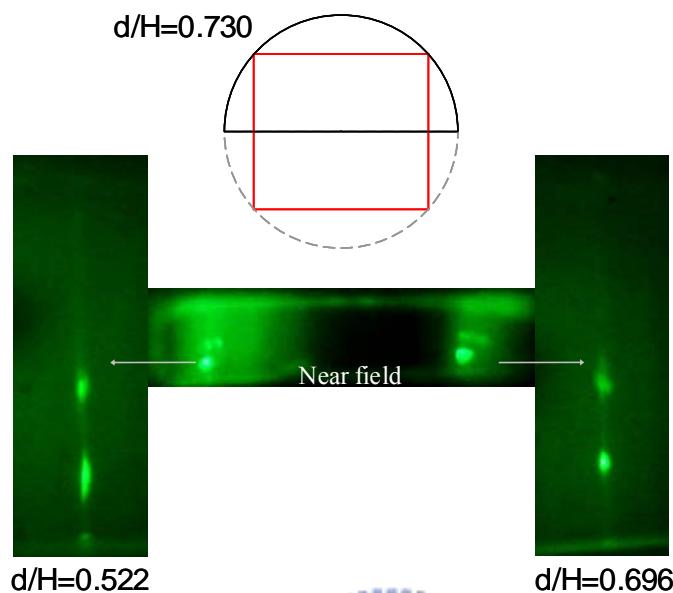


圖 3.4.2 正四邊形模態在矩形切面觀察之近場亮點圖，左右亮點再分別用倍率較大之物鏡拍攝。

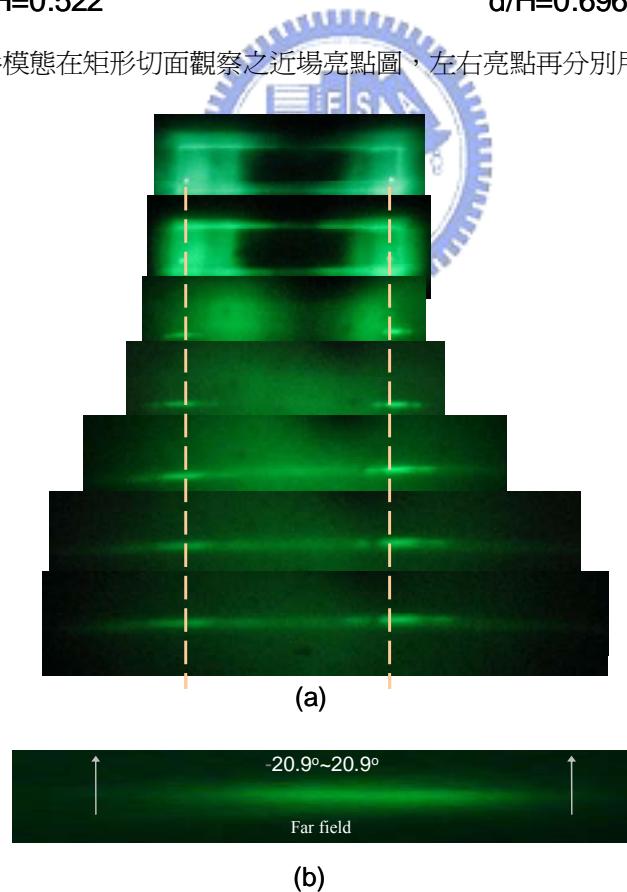


圖 3.4.3 (a)近場亮點沿虛線行進之變化圖，(b)遠場與其發散角。

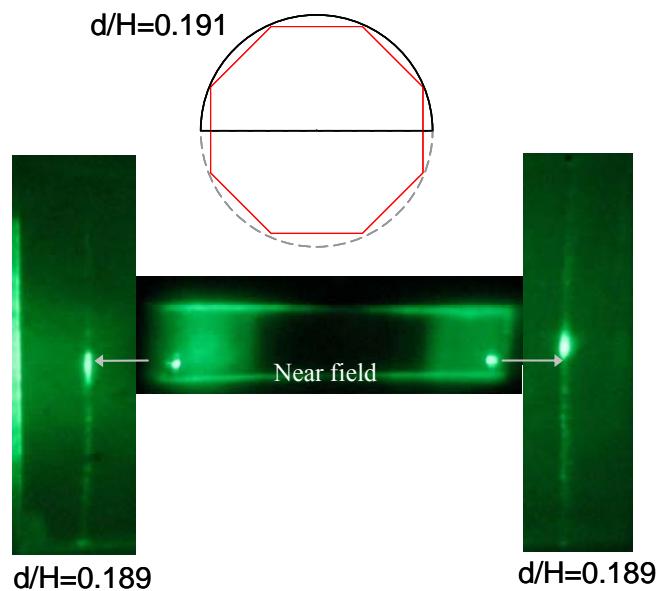


圖 3.4.4 正八邊形模態在矩形切面觀察之近場亮點圖，左右亮點再分別用倍率較大之物鏡拍攝。

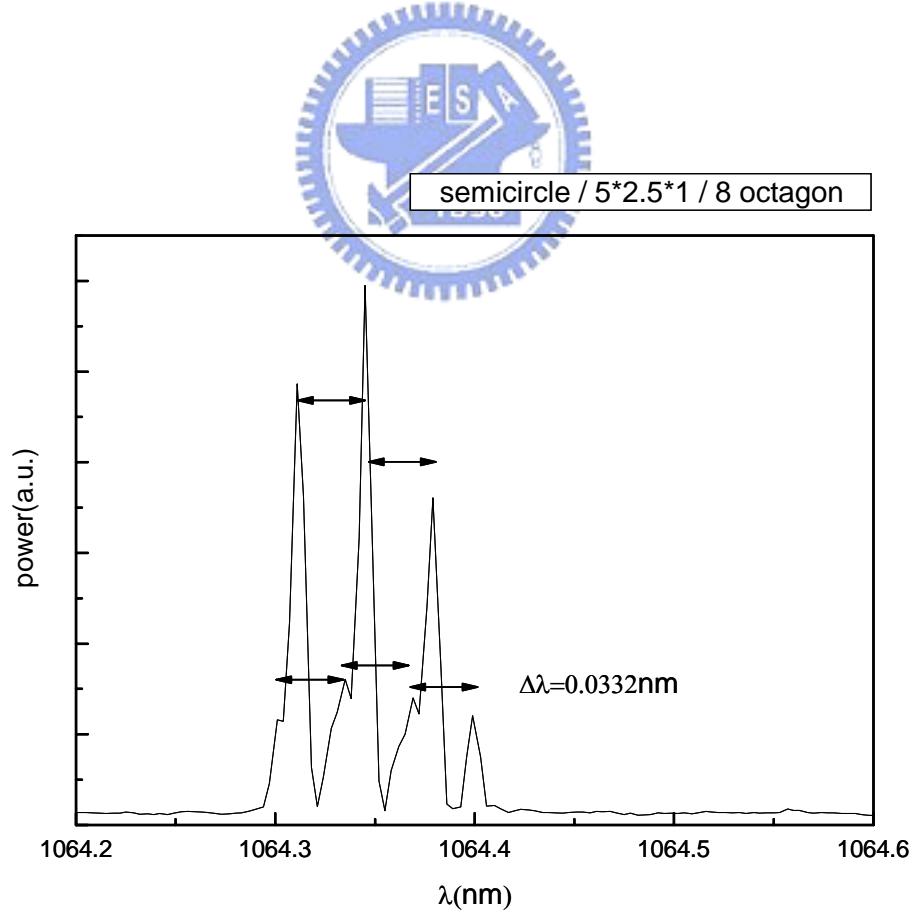


圖 3.4.5 正八邊形模態之光譜圖。

正八邊形模態近場亮點圖如圖 3.4.4，此時連續激發光源為 382mA 從後方圓弧面進入晶體，中間是透鏡觀察整體近場圖，左右是用物鏡分別拍攝近場亮點圖，左右兩邊 $d/H=0.189$ ，和使用幾何光學計算正八邊形 $d/H=0.191$ 最為相近，誤差為 1.1%。圖 3.4.5 是正八邊形模態光譜圖，得(FSR) $\Delta\lambda=0.0332\text{nm}$ ，則 $L_8(\text{experimental}) = 7.660\text{mm}$ ，和用幾何光學計算古典軌跡的腔長 $L_8(\text{theoretical}) = 7.654\text{mm}$ 相差 0.006mm，誤差 0.8%。



第四章 三角形晶體與非平面軌跡

4.1 導論

在前一章探討了矩形、四菱柱、切邊圓柱內的各種平面軌跡，改變晶體的邊界條件可以產生非平面的軌跡，如使用摻欒鈇鋁石榴石的特殊結構晶體[8-13]以及用半導體雷射之氧化層侷限出三角形邊界[23]都可以產生非平面的環形雷射，我們使用摻欒釔酸鈇的三角形結構同樣也可以產生非平面軌跡。

4.2 非平面軌跡與二維軌跡之聯繫

2%摻欒釔酸鈇的 a-cut 三角形晶體，邊長為 3.95mm 的正三角形、厚度 1.09mm，在正三角形的三個側邊的其中兩面 $3.95 \times 1.09\text{mm}^2$ 鍍膜 HR1064nm / HT808nm，其餘面拋光。雷射光波包的邊界條件為在三角形其中兩邊的鍍膜面上反射，在剩餘那面靠全反射侷限在晶體內部，在此邊界條件下可以存在拐杖型模態與正三角形模態分別如圖 4.1(a)與(c)。圖 4.1 是模擬圖，(a)與(b)都是拐杖型模態， $\phi = \frac{\pi}{3}$ ，改變 ϕ 可以改變軌跡在邊界上撞擊位置，圖 4.1 (a)所疊加的能量簡併本徵態數目 N=40 代入(2.18)式、(b)N=20，疊加越多能量簡併本徵態則軌跡越侷域化，越接近古典軌跡；圖 4.1 (c)與(d)為正三角形模態， $\phi = \frac{\pi}{2}$ ，N 分別是 40 與 20。

激發光源位置要在全反射面附近較容易產生拐杖型模態，如圖 4.2 綠色星號為激發光點，產生垂直兩個鍍膜面的拐杖型軌跡，其他垂直不同邊界的拐杖型則因為無法全反射($\theta_i > \theta_c$)所以不可能存在。圖 4.2 中的線條代表雷射出光方向，沿著拐杖型有兩個最亮的主要出光，圖案相同的遠場在旁邊許多不同發射角位置被觀察到，但是亮度都比主要出光弱許多，推測這些不同發射角的圖案仍然屬於拐杖型模態所產生，除了遠場圖案、在 z 軸上出射角相同之外，觀察近場圖案也沒有發現除了(2,1)模態耦合拐杖型外其他模態的存在。

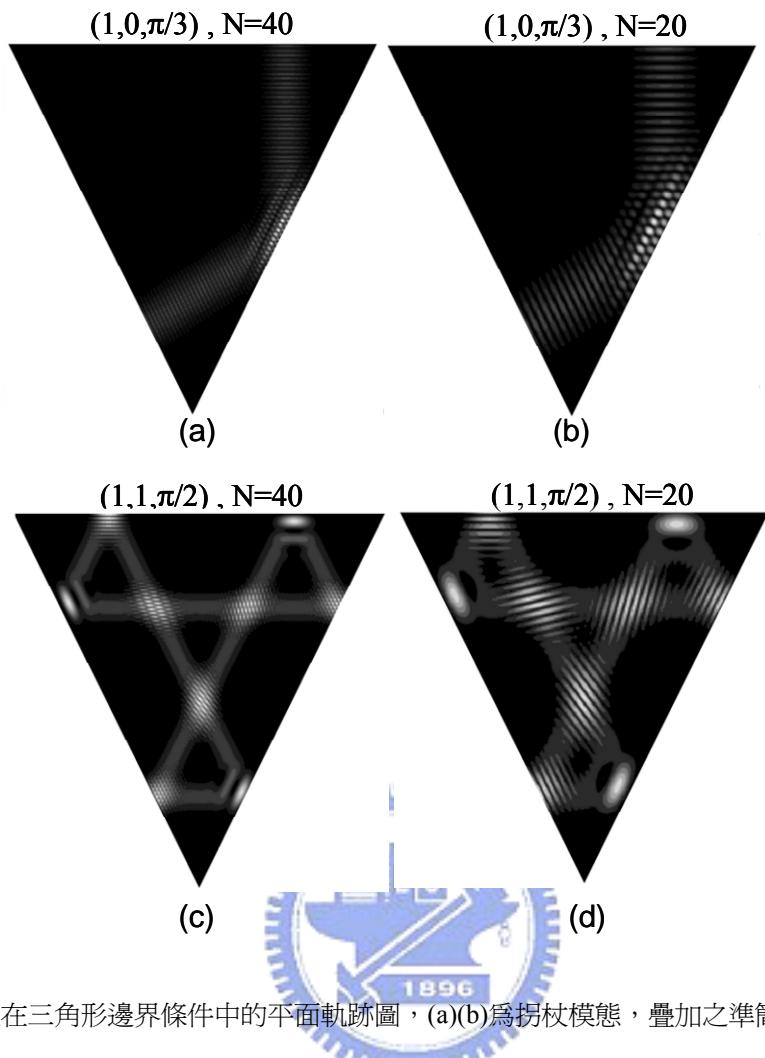


圖 4.1 波包在三角形邊界條件中的平面軌跡圖，(a)(b)為拐杖模態，疊加之準簡併本徵態數目分別為 $N=40$ 、 $N=20$ ，(c)為三角形模態， $N=20$ 。

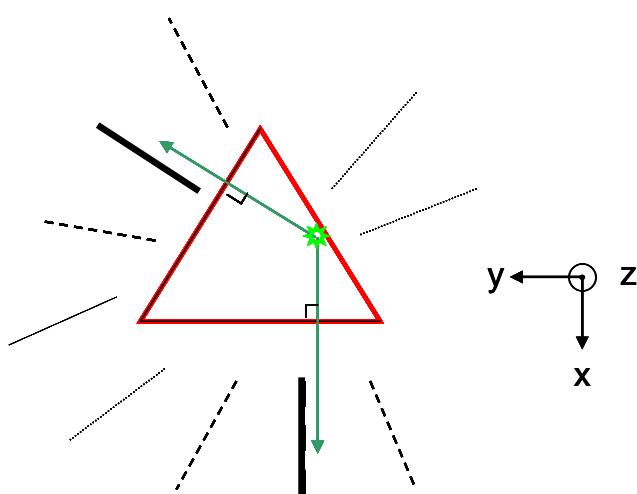


圖 4.2 拐杖模態示意圖，入射光沿 z 軸且入射光點靠近全反射面，反射出光除了垂直鍍膜面之外（實線），在其它位置也有相同圖案但亮度減弱很多的出光，用虛線的粗細示意亮度的大小。

使用 5W 脈衝激發光，週期 $200\mu\text{s}/1.2\text{ms}$ ，垂直三角形面入射晶體，在適當的入射位置可得圖 4.3，用放大倍率較低的透鏡觀察矩形鍍膜面的整體近場圖案如圖 4.3 (a)，圖 4.3 (b) 圖是用比透鏡放大倍率高的物鏡拍攝得到的近場軌跡撞擊亮點，發現有兩個亮點，圖 4.3 (c) 是遠場細部干涉圖案近拍，發散角從 7.2° 到 8.3° ，遠場在 z 軸(如圖 4.2)上有出射角表示晶體內部的軌跡並不是只有在水平 x-y 平面上的拐杖型模態，在垂直面上可能有其他模態和拐杖型模態耦合成立體的非平面軌跡，造成 z 軸上的出射角。

由於近場有兩個亮點，我們先推測此時在垂直面上有(2,1)模態和拐杖型模態耦合成立體的非平面軌跡如圖 4.4(a)所示，圖 4.4 (c) 是將拐杖型模態拉直之後得到的(2,1)模態，此時侷限(2,1)模態的矩形長邊長即為拐杖總長度，短邊長為晶體厚度，用幾何光學追跡計算(2,1)模態發射角為 9.1° ，和實驗所得 7.2° 到 8.3° 相差 1.35° (誤差 17%)。

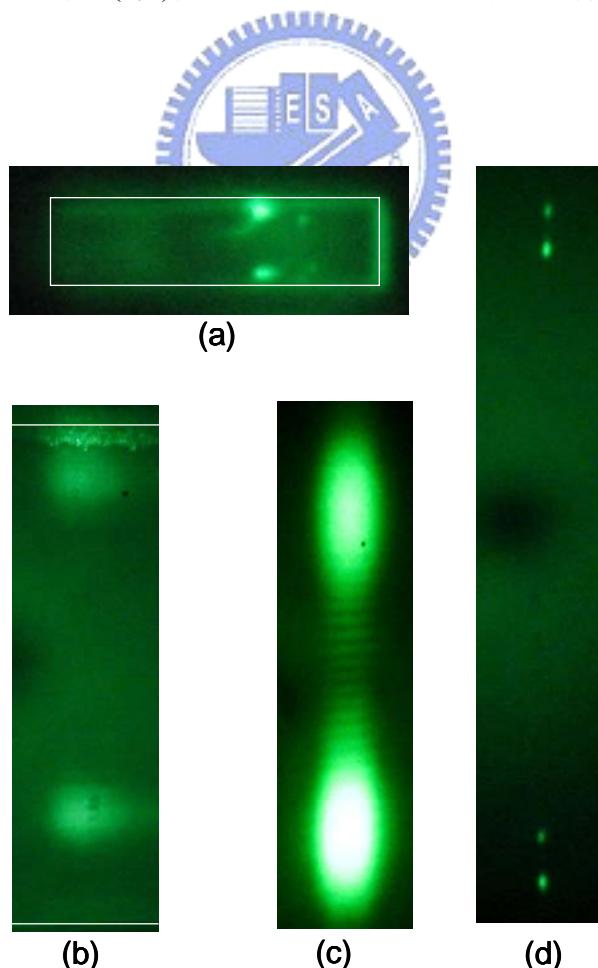


圖 4.3 正三角形晶體之(a)近場整體與(b)細部亮點圖，(c)遠場細部干涉條紋圖與(d)整體圖。

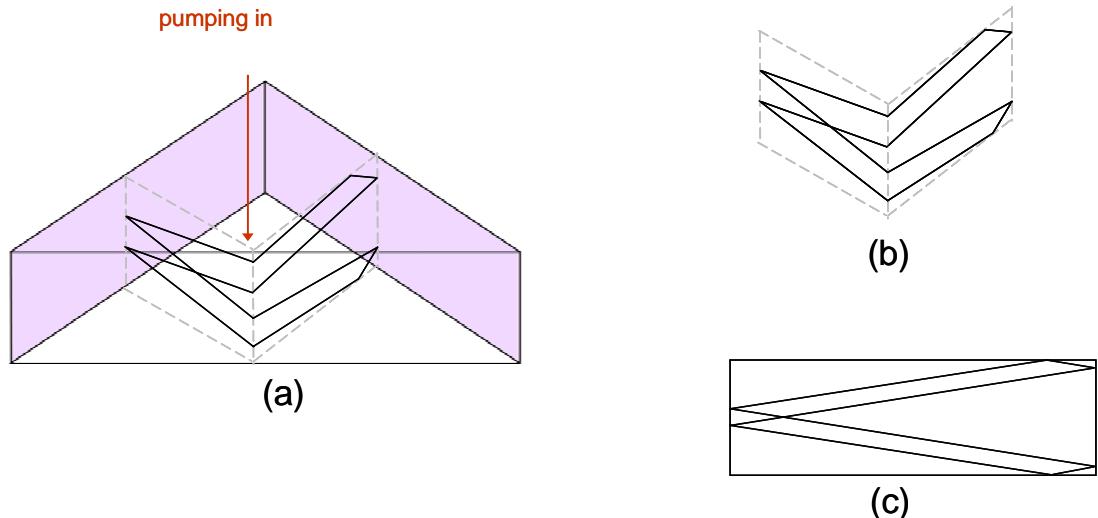
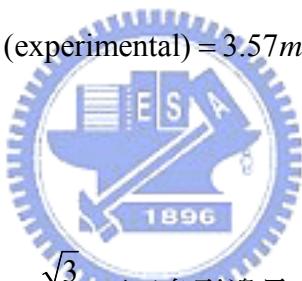


圖 4.4 (2,1) 模態耦合拐杖形模態之非平面軌跡示意圖。

拐杖型模態耦合(1,0)模態的光譜圖如圖 4.5 所示，此時軌跡落在同一平面，得

(FSR) $\Delta\lambda=0.073\text{nm}$ 與腔長 $L_{1,0}(\text{experimental})=3.57\text{mm}$ ，用幾何光學計算拐杖型古
典軌跡腔長



$$L_{1,0}(\text{theoretical}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{正三角形邊長} = 3.46\text{mm} \quad (4.1)$$

兩者相差 0.11mm ，誤差 3.1% 。圖 4.6 是拐杖型模態耦合(2,1)模態的光譜圖，軌
跡為非平面， $\Delta\lambda=0.036\text{nm}$ ，得腔長 $L_{2,1}(\text{experimental})=7.14\text{mm}$ ，用幾何光學計算
拐杖型古典軌跡腔長

$$L_{2,1}(\text{theoretical}) = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{正三角形邊長}\right)^2 + (\text{三角柱厚度})^2} = 6.93\text{mm} \quad (4.2)$$

兩者相差 0.21mm ，誤差 2.9% 。

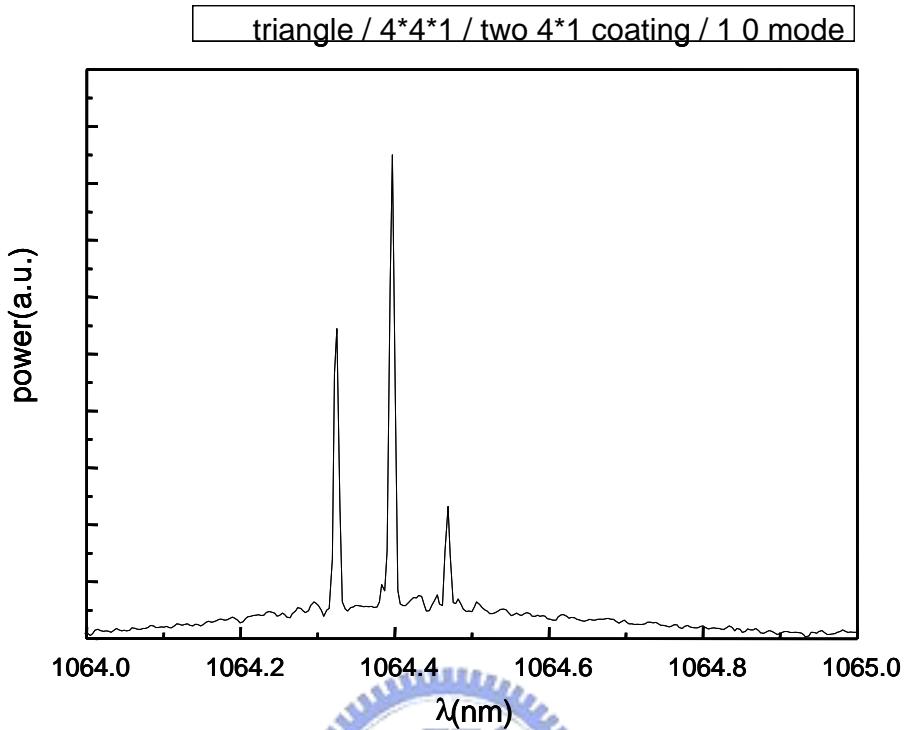


圖 4.5 拐杖形模態耦合(1,0)模態之光譜圖。

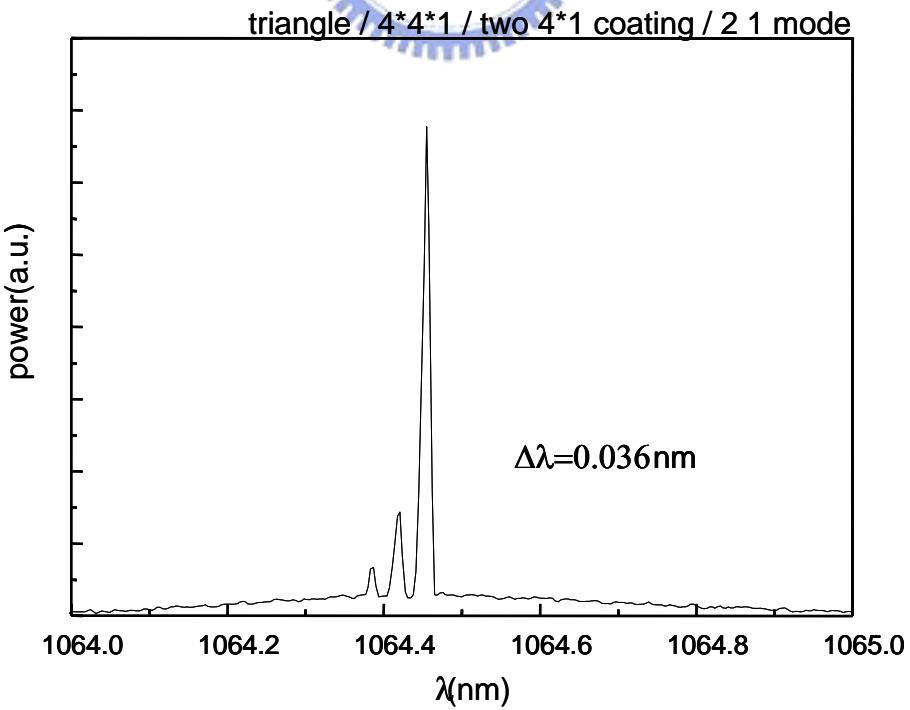


圖 4.6 拐杖形模態耦合(2,1)模態之光譜圖。

圖 4.7(a)是在三角形晶體中產生的柺杖型模態耦合(2,1)模態的近場亮點圖，(b)圖是相對應的遠場細部干涉條紋圖案。要在三角形晶體中產生柺杖型模態雷射光其激發光點入射位置必須靠近三角形的全反射面，使得三角形晶體能夠選擇的激發光點入射位置受限，能夠產生的模態比起矩形晶體少很多，除了柺杖型模態偶合(1,0)、(2,1)模態外還有(3,1)模態，如圖 4.8(a)為近場的三個撞擊亮點，圖 4.8 (b)(c)分別是遠場上半部與下半部的遠場細部干涉條紋上下圖案並不對稱，且比起矩形晶體內模態三角柱晶體產生的遠場細部干涉條紋普遍都較模糊。

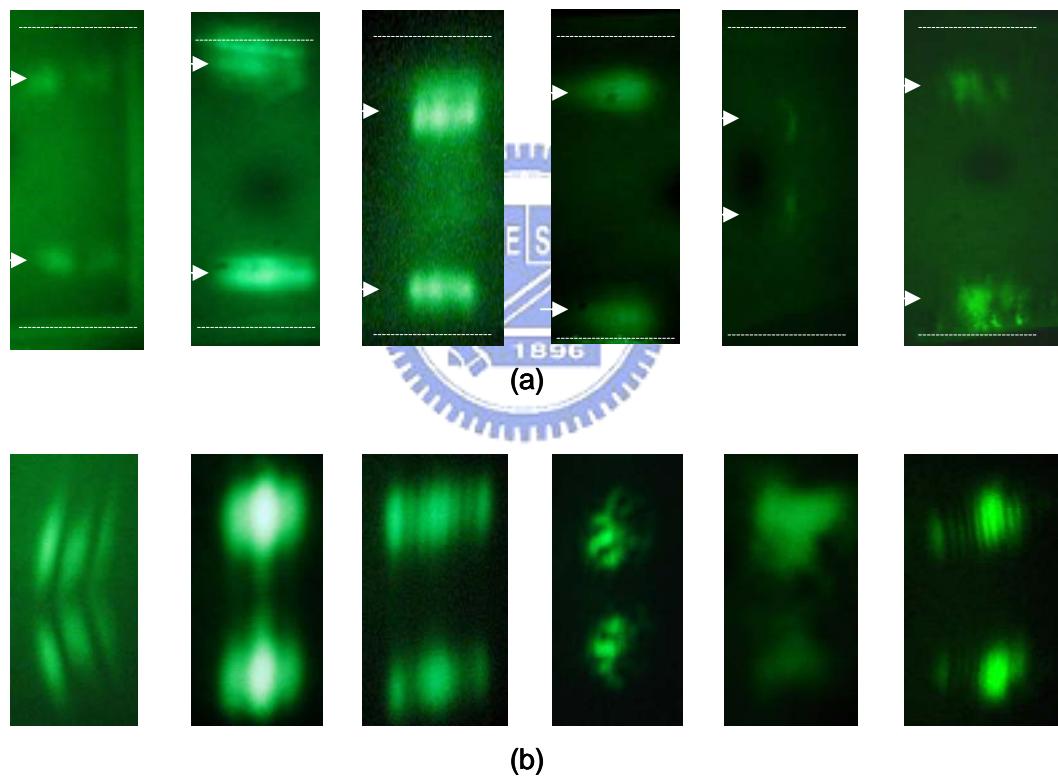


圖 4.7 (2,1)模態耦合柺杖形模態之近場亮點(a)、遠場細部干涉條紋圖(b)。

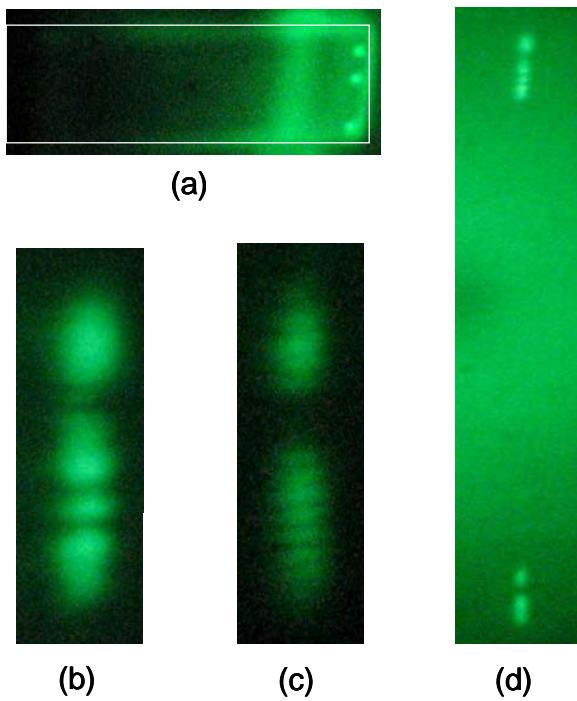


圖 4.8 拐杖形模態耦合(3,1)模態圖案，(a)近場亮點圖，(b)遠場上方干涉條紋圖，(c)遠場下方干
涉條紋圖，(d)遠場整體圖。



4.3 FSR 與發射角

第三章與第四章我們測量許多不同模態下的光譜圖，並且計算其自由頻譜範圍 FSR 來得知對應的雷射共振腔腔長 $L(\text{experimental})$ ，再和我們使用幾何光學追跡法計算古典軌跡的長度 $L(\text{theoretical})$ 比較通常都可以得到不錯的對應結果，如圖 4.9 中的藍色實線為古典軌跡長度與對應 $\Delta\lambda$ ，橘色點為不同模態的 $\Delta\lambda$ 與對應雷射共振腔腔長。同樣地我們也測得許多不同晶體不同模態之出射角，利用適當的倍數將不同晶體的數據整合在圖 4.10，黑色實線為理論之出射角、各個不同晶體不同模態的實驗值為紫色點。發射角與腔長之實驗結果都與理論值相近，表示這兩種方法對於判別模態都有相當的可靠度。

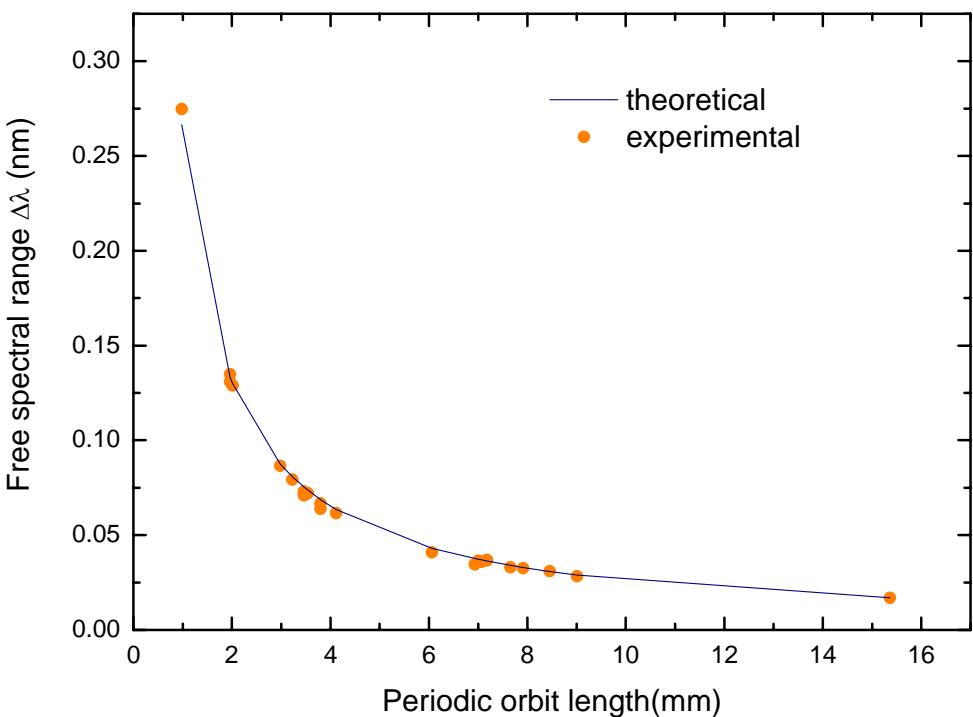


圖 4.9 藍色實線為古典軌跡長度與對應 $\Delta\lambda$ ，橘色點為不同模態的 $\Delta\lambda$ 與對應雷射共振腔腔長。

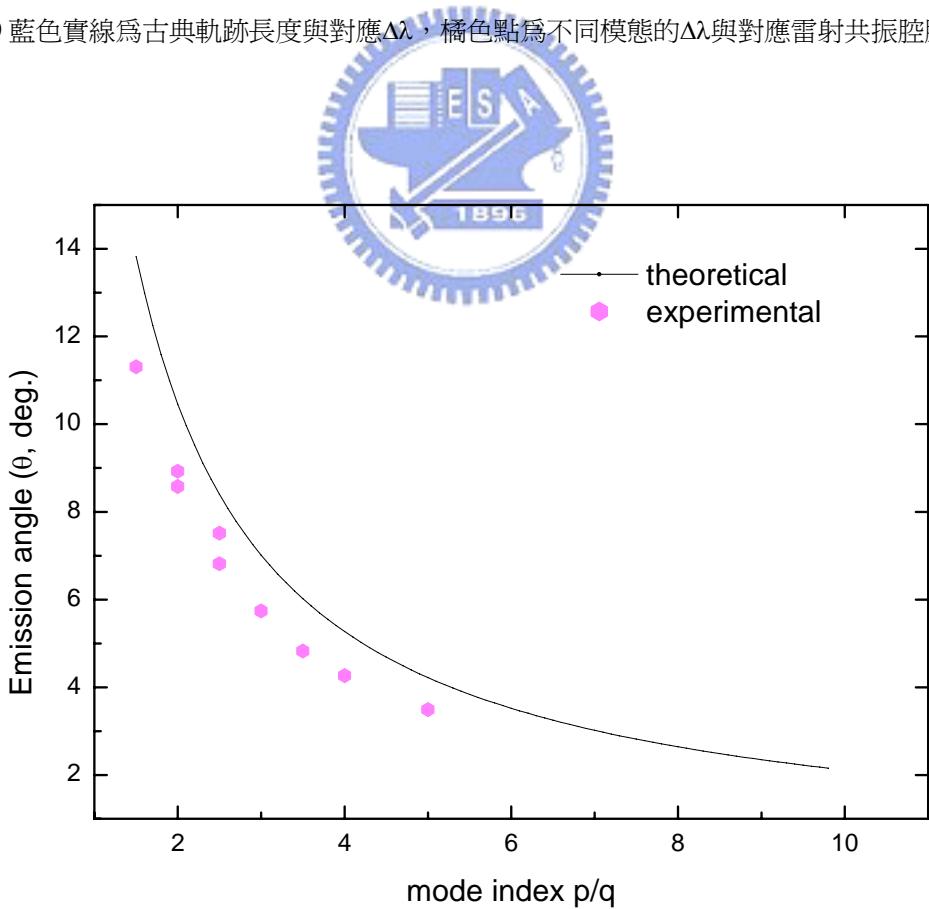


圖 4.10 黑實線為出射角度對應模態 p/q ，紫色點為不同模態的 p/q 對應發射角。

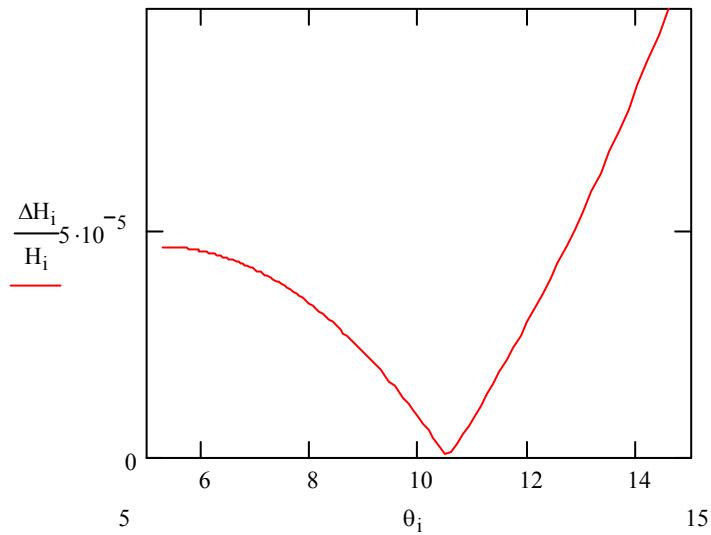


圖 4.11 ΔH 比上 H 與發射角度 θ 之關係。

計算 ΔH 比上 H 與發射角度 θ 之關係如圖 4.11 所示，令此時為(2,1)模態，發現最小值與幾何光學估算結果相同。再加上量測晶體鍍膜對波長 1064nm 之損耗曲線，如圖 4.12 所示，發現隨著角度越大其損耗越高，使得雷射出光欲往小角度偏移。

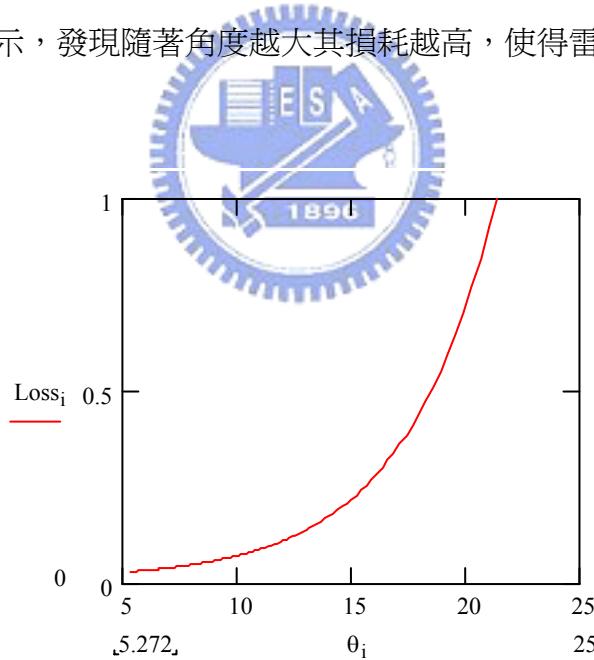


圖 4.12 損耗與角度之關係。

第五章 結論與展望

利用不同形狀之單晶微型雷射腔所得到的各種實驗現象都可以與量子力學的同調相干態理論有不錯的關連性，藉此也建立起經典力學與量子力學間的橋樑，尤其是在矩形晶體中的實驗圖形與理論模擬之圖形有最佳的對應關係。

實驗所得之發射角與幾何光學估算之發射角之間的誤差具有往小角度偏移的規律，除了可以用雙折射晶體之折射率橢圓球來修正之外，也可用出射角度在小角度時損耗較小來做定性的解釋。

此雷射架構所得的雷射出光具有高度方向性且出光角度可由入射光能量和位置來調變；且此架構所產生的高階模態在增益介質內有較長的路徑，使得出光能量有機會提高。

將來希望能夠藉由改變實驗條件來產生更多有趣的實驗現象，如利用四菱柱晶體之斜邊產生週期性軌道、利用非半圓之切邊圓柱以及單一斜邊鍍膜之三角柱晶體提供雷射光疊加成波包、三角形面鍍膜之晶體產生更高階之橫模，並且更完美地解釋正多邊形軌跡與非平面軌跡之實驗現象。



參考文獻

1. G. Burns, R. A. Laff, S. E. Blum, F. H. Dill, Jr., and M. I. Nathan, IBM Journal (January 1963)
2. R. A. Laff, W. P. Dumke, F. H. Dill, Jr. and G. Burns, IBM Journal (January 1963)
3. T. Fukushima and T. Harayama, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 10 1039 (2004)
4. Takehiro Fukushima, S. A. Biellak, Y. Sun and A. E. Siegman, Optics Express **2**, 2 (19 January 1998)
5. Takehiro Fukushima, Takashisa Harayama and Jan Wiersig, Phys. Rev. **A** 73 023816 (2006)
6. Takehiro Fukushima, Takashisa Harayama, Tomohiro Miyasaka and Pablo O. Vaccaro, J. Opt. Soc. Am. B **21** 5 (May 2004)
7. Takehiro Fukushima, Takashisa Harayama, Peter Davis, Pablo O. Vaccaro, Takehiro Nishimura and Tahito Aida, Optics Letters 28 6 (March 15, 2003)
8. Takashisa Harayama, Takehiro Fukushima, Peter Davis, Pablo O. Vaccaro, Tomohiro Miyasaka, Takehiro Nishimura and Tahito Aida, Phys. Rev. E **67** 015207(R) (2003)
9. Thomas J. Kane and Robert L. Byer, Opt. Lett. **10** 2 (February 1985)
10. Thomas J. Kane, Alan C. Nilsson and Robert L. Byer, Opt. Lett. **12** 3 (March 1987)
11. E. A. P. Cheng and T. J. Kane, Opt. Lett. **16** 7 (April 1, 1991)
12. Jong Rak Park, Tai Hyun Yoon, Myung Sai Chung and Hai-Woong Lee, Applied Optics **38** 21 (20 July 1999)
13. Hagen Zimer and Ulrich Wittrock, Optics Letters **29** Issue 14, pp. 1635-1637
14. I. Freitag et al., Opt. Commun. 115, 511 (1995)
15. E. J. Zang, Opt. Let. **32** (3), 250 (2007)
16. Y. F. Chen and K. F. Huang, Phys. Rev. E **66** 046215 (2002)
17. Y. F. Chen, K. F. Huang and Y. P. Lan, Phys. Rev. E **66** 066210 (2002)
18. Y. F. Chen, K. F. Huang, H. C. Lai and Y. P. Lan, Phys. Rev. Lett. **90** 5 (2003)
19. Y. F. Chen, K. F. Huang, H. C. Lai and Y. P. Lan, Phys. Rev. E **68** 026210 (2003)
20. G. D. Birkhoff - New York (1927)
21. Y. F. Chen and K. F. Huang, Phys. Rev. E **68** 066207 (2003)
22. M. Berry, Phys. Today **55** Issue 5, p10 (May 2002) "Singular Limits"
23. Junho oon, Sung-Jae An, Kwanghae Kim, Ja Kang and O'Dae Kwon, Applied Optics **46** 15 (20 May 2007)
24. http://www.casix.com/product/prod_cry_ndyvo4.html

