

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

二次式變化之時間域邊界元素法於三維多領域彈動力問題
之研究(II)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2211-E-009-042-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立交通大學土木工程學系

計畫主持人：劉俊秀

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 12 月 16 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

二次式變化之時間域邊界元素法於三維多領域彈動力問題之研究 (II)

Quadratic time domain BEM for 3-D multi-region elastodynamic problems (II)

計畫編號：NSC 91-2211-E-009-042

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：劉俊秀 交通大學土木工程系 教授

一、中文摘要

本文提出「兩個短時階內位移呈二次式變化，同時段，曳引力呈線性變化」之假設。在經此精確的模擬位移與曳引力後可得到一系列濃縮褶積核心函數。引進所謂次結構觀念，利用多領域交界處之力平衡與位移諧和兩項關係，推導可求解多領域暫態彈動力問題之數值式。文中皆使用二次元素來切割邊界，並探討積分過程中所衍生的相關問題。

關鍵詞：時間域邊界素法、濃縮褶積核心函數、QL 方法、多領域

Abstract

In this paper, a time-domain multi-region boundary element method formulation is presented. Quadratic variation for displacement field in two consecutive time steps and linear variation for traction field in each time step are assumed in the BEM formulations. Then 3-D transient condensed convoluted kernel functions are derived. Next, sub-structure procedure is employed and two conditions at interface between each sub-region, one is equilibrium equation and the other is compatibility equation, are applied. Also, quadratic

element for spatial coordinates is employed in the numerical scheme. Sub-element is used while encountering singular integration and one must pay attention particularly to mesh or sub-domain pattern in the presented method.

Key words: Time-domain BEM, convoluted kernel functions, QL method, Multi-region

二、目的

在時間域邊界元素法中，三維彈動力問題的基本解存在 函數(Dirac function) 以及它分別對時間作一次與二次微分後的函數。因此本文作了「兩單位短時階內位移呈現二次式變化，而此同時曳引力呈現線性變化」的假設去推導出控制暫態彈動力問題的邊界數值式。本文命之為 QL 方法。顧名思義，就是將三維動力基本解之核心與假設的時間形狀函數對時間作褶積步驟 (Reimann convolution integral) 後所產生的一系列濃縮褶積核心函數。此方法最後多以參數 $\beta = \frac{c_1 \Delta t}{l}$ 來評估數值結果之表現。由於有褶積之步驟，文獻中曾見到不同的處理方式，本文亦提出來探討與本方法不同之處，以供思考。

同時，以「次結構」的觀念發展「多領域的式子」來處理不同材料性質的工程

問題與在離散化過程中，對遇到的困擾設法提出解決之道乃本研究之目的。

三、結果與討論

利用二次元素(圖 1.1)對邊界積分式進行切割，以形狀函數 $N_c(\xi_1, \xi_2)$ (附錄七)模擬在第 m 個元素上的位移及曳引力，可近似如下：

$$u_i^m(x, 2n\Delta t) = \sum_{c=1}^8 N_c(\xi_1, \xi_2) u_i^{2nmc} \quad (1)$$

$$t_i^m(x, 2n\Delta t) = \sum_{c=1}^8 N_c(\xi_1, \xi_2) t_i^{2nmc} \quad (2)$$

其中 u_i^{2nmc} 、 t_i^{2nmc} 是當時刻為 $2n\Delta t$ 時，於元素中 c 節點上的位移量和曳引力值，利用此兩近似之式，經元素切割後的積分形式如下：

$$\begin{aligned} c_{ij} u_i^N(\xi) = & \sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^8 \left\{ t_i^{2nmc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G_{LFij}^{2K-2n+1} + G_{LBij}^{2K-2n}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right. \\ & + t_i^{(2n-1)mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G_{LFij}^{2K-2n+2} + G_{LBij}^{2K-2n+1}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \\ & - u_i^{2nmc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [F_{QFij}^{2K-2n+2} + F_{QBij}^{2K-2n}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \\ & \left. - u_i^{(2n-1)mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [F_{QMij}^{2K-2n+2}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{ij} u_i^N(\xi) = & \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^8 \left\{ t_i^{1mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G_{LFij}^{2K+1} + G_{LBij}^{2K}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right. \\ & + \sum_{n=1}^K \left[t_i^{2nmc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G_{LFij}^{2K-2n+2} + G_{LBij}^{2K-2n+1}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right. \\ & + t_i^{(2n+1)mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G_{LFij}^{2K-2n+1} + G_{LBij}^{2K-2n}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \\ & - u_i^{1mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [F_{LFij}^{2K+1} + F_{QBij}^{2K}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \\ & - \sum_{n=1}^K \left[u_i^{2nmc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [F_{QMij}^{2K-2n+2}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right. \\ & \left. \left. + u_i^{(2n+1)mc} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [F_{QFij}^{2K-2n+2} + F_{QBij}^{2K-2n}] N_c |J^m| d\xi_1 d\xi_2 \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

接下來持續把位於邊界上的每一點 x 依次當成 ξ 點對上述兩式子作 collocation 運算，依次會得到一組代數方程式， $T=N$ 時刻的全部代數方程式若寫成以矩陣型態可表示如下：

$$[F] \{u\}^N = [G] \{t\}^N - \sum_{n=1}^{N-1} ([F]^{n+1} \{u\}^{N-n} - [G]^{n+1} \{t\}^{N-n}) \quad (5)$$

其中 $\{u\}$ 、 $\{t\}$ 為節點上的位移量與曳引力值，在 N 時刻時，有一半是已知量而另一半是未知量，若把上式未知的部分移至等號左邊，經整理後的矩陣如下：

$$[A] \{x\}^N = \{y\}^N + [R]^N \quad (6)$$

在上式中等號的右邊皆為已知，所以 $\{x\}^N$ 就能順利求得。其中已知的邊界值與其所對應在係數矩陣中的行數之值，這兩值相乘後再相加的和就組成 $\{y\}^N$ ，而 $[R]^N$ 在時階每前進一步時就需要重新計算一遍，代表的意義正是先前時間的歷史動力效應對當前時階反應值的貢獻。

在計算過程中，對於非奇異元素之積分，直接採用高斯點及對應之權值來積分，因此只要增加高斯點即可增加精度。對於奇異元素之積分，可引進新的插值點視場點與源點相對距離狀況把原來的元素在細分為 4、5 或 6 個次元素(圖 1.2~1.4)，於 mapping 後再以同於非奇異元素之方式作積分，所得之值再加回至相對應之節點。由於仍存在強奇異性的因素， $[F]$ 中對角線次矩陣之值得採用如下的策略來解決。為方便說明起見，在此假設奇異積分發生在 $m=1$ 之元素且 $\xi=1$ 的節點上，對角線 3×3 次矩陣部份，對靜力問題與暫態動力問題而言，分別計算說明如下：

$$d_{ij}^{st} = c_{ij} + \int_{S_1} F_{ij}^{st} N_1 dS \quad (7)$$

$$d_{ij}^{trans} = c_{ij} + \int_{S_1} F_{ij}^{trans} N_1 dS \quad (8)$$

其中不連續項 c_{ij} 只與所處邊界的幾何形狀有關連，兩式子中等號右邊第二項積分是柯西的主值積分，又我們知道 F_{ij}^{trans} 具有跟 F_{ij}^{st} 同樣的奇異性 $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ ，因此上述兩式結合後變成如下的式子：

$$d_{ij}^{trans} = d_{ij}^{st} + \int_{S_1} (F_{ij}^{trans} - F_{ij}^{st}) N_1 dS \quad (9)$$

其中 d_{ij}^{st} 可由利用著名的剛體運動之觀念來計算，其數學上的意義代表線彈體位移

變化維持常數，因此若假設線彈體在無形變下（亦即無曳引力）以剛體運動移動一位移 \bar{u} ，則我們最初的邊界積分式中， $t_i=0$ ，因此我們得到如下的關係：

$$d_{ij}^{st} \bar{u} = \left[- \left(\sum_{\alpha=2}^8 \int_{S_1} F_{ij}^{st} N_{\alpha} dS + \sum_{m=2}^M \sum_{\alpha=1}^8 \int_{S_m} F_{ij}^{st} N_{\alpha} dS \right) \right] \bar{u} \quad (10)$$

兩端消去 \bar{u} 後，則 d_{ij}^{st} 可順利被求出，其實它就是矩陣內非對角線部份（非奇異元素）同一列上的所有值變號後的和，而式子（10）右邊第二項積分則不再是發散積分的型態，可以直接以數值積分方式來處理

所謂多領域，就是一區域是由數個不同的材料特性之小區域所組成。在本文中是利用次結構（sub-structure）的觀念來處理多領域交界面處上的問題。因此在邊界元素法的運算上，只是用交界面上所取的點去運算，如此一來，邊界元素法運算上的節點數可大量減少，其電腦運算時間可能也為之縮短，最後再利用我們所建立的交界面上所取的點和邊界上節點的關係，去求得邊界上節點的未知值（位移和曳引力）。

首先，考慮靜力問題：

$$[{}^m F_{STij}] \{ {}^m u_j \} = [{}^m G_{STij}] \{ {}^m t_j \}, \quad m=1,2,L,M \quad (11)$$

從式(11)出發，將其簡化後，圖2中的 m 區可寫成：

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^m F_{oo} & {}^m F_{oa} \\ \hline {}^m F_{ao} & {}^m F_{aa} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^m u_o \\ {}^m u_a \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} {}^m G_{oo} & {}^m G_{oa} \\ \hline {}^m G_{ao} & {}^m G_{aa} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^m t_o \\ {}^m t_a \end{array} \right\} \quad (12)$$

${}^m u_o$ 、 ${}^m t_o$ ：單一邊界（註：未與其他區域相鄰之線）上的位移和曳引力；部份（一半）已知，部份（一半）未知。整理後，讓 ${}^m u_o$ 為包含未知量之部份， ${}^m t_o$ 為包含已知部份。

${}^m u_a$ 、 ${}^m t_a$ ：交界面上的位移和曳引力，未知量。；其中 $\{ {}^m u_o \}$ 為未知數，但 $\{ {}^m t_o \}$ 為已知量，將式(12)其簡化後

$$[{}^m F_{oo}] \{ {}^m u_o \} + [{}^m F_{oa}] \{ {}^m u_a \} = [{}^m G_{oo}] \{ {}^m t_o \} + [{}^m G_{oa}] \{ {}^m t_a \} \quad (13)$$

$$[{}^m F_{oa}] \{ {}^m u_o \} + [{}^m F_{aa}] \{ {}^m u_a \} = [{}^m G_{oa}] \{ {}^m t_o \} + [{}^m G_{aa}] \{ {}^m t_a \} \quad (14)$$

由式(13)並省略矩陣符號可推導得

$${}^m u_o = {}^m F_{oo}^{-1} \{ {}^m G_{oo} {}^m t_o + {}^m G_{oa} {}^m t_a - {}^m F_{oa} {}^m u_a \} \quad (15)$$

將式(15)代入式(14)，可以得到

$${}^m F_{oa} {}^m F_{oo}^{-1} \{ {}^m G_{oo} {}^m t_o + {}^m G_{oa} {}^m t_a - {}^m F_{oa} {}^m u_a \} + {}^m F_{aa} {}^m u_a = {}^m G_{oa} {}^m t_o + {}^m G_{aa} {}^m t_a \quad (16)$$

化簡上(16)式，可得到

$$\begin{aligned} & \{ {}^m F_{aa} - {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m F_{oa} \} {}^m u_a + \{ {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m G_{oa} - {}^m G_{aa} \} {}^m t_a \\ & = \{ {}^m G_{ao} - {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m G_{oo} \} {}^m t_o \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned} {}^m F_a^* &= {}^m F_{aa} - {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m F_{oa} \\ {}^m G_a^* &= {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m G_{oa} - {}^m G_{aa} \\ {}^m B &= \{ {}^m G_{ao} - {}^m F_{ao} {}^m F_{oo}^{-1} {}^m G_{oo} \} {}^m t_o \end{aligned} \quad (18)$$

同理， $(m+1)$ 區亦可寫成：

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1} F_{oo} & {}^{m+1} F_{oa} \\ \hline {}^{m+1} F_{ao} & {}^{m+1} F_{aa} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^{m+1} u_o \\ {}^{m+1} u_a \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1} G_{oo} & {}^{m+1} G_{oa} \\ \hline {}^{m+1} G_{ao} & {}^{m+1} G_{aa} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^{m+1} t_o \\ {}^{m+1} t_a \end{array} \right\} \quad (19)$$

其中 $\{ {}^{m+1} u_o \}$ 為未知數，但 $\{ {}^{m+1} t_o \}$ 為已知量，將其簡化後

$$[{}^{m+1} F_{oo}] \{ {}^{m+1} u_o \} + [{}^{m+1} F_{oa}] \{ {}^{m+1} u_a \} = [{}^{m+1} G_{oo}] \{ {}^{m+1} t_o \} + [{}^{m+1} G_{oa}] \{ {}^{m+1} t_a \} \quad (20)$$

$$[{}^{m+1} F_{oa}] \{ {}^{m+1} u_o \} + [{}^{m+1} F_{aa}] \{ {}^{m+1} u_a \} = [{}^{m+1} G_{oa}] \{ {}^{m+1} t_o \} + [{}^{m+1} G_{aa}] \{ {}^{m+1} t_a \} \quad (21)$$

由式(20)可得到

$${}^{m+1} u_o = {}^{m+1} F_{oo}^{-1} \{ {}^{m+1} G_{oo} {}^{m+1} t_o + {}^{m+1} G_{oa} {}^{m+1} t_a - {}^{m+1} F_{oa} {}^{m+1} u_a \} \quad (22)$$

同理將式(22)代入式(21)，簡化式(21)，可得到

$$\begin{aligned} & \{ {}^{m+1} F_{aa} - {}^{m+1} F_{ao} {}^{m+1} F_{oo}^{-1} {}^{m+1} F_{oa} \} {}^{m+1} u_a + \{ {}^{m+1} F_{ao} {}^{m+1} F_{oo}^{-1} {}^{m+1} G_{oa} - {}^{m+1} G_{aa} \} {}^{m+1} t_a \\ & = \{ {}^{m+1} G_{ao} - {}^{m+1} F_{ao} {}^{m+1} F_{oo}^{-1} {}^{m+1} G_{oo} \} {}^{m+1} t_o \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned}
{}^{m+1}F_a^* &= {}^{m+1}F_{aa} - {}^{m+1}F_{ao} {}^{m+1}F_{oo}^{-1} {}^{m+1}F_{oa} \\
{}^{m+1}G_a^* &= {}^{m+1}F_{ao} {}^{m+1}F_{oo}^{-1} {}^{m+1}G_{oa} - {}^{m+1}G_{aa} \\
{}^{m+1}B &= \{ {}^{m+1}G_{ao} - {}^{m+1}F_{ao} {}^{m+1}F_{oo}^{-1} {}^{m+1}G_{oo} \} {}^{m+1}t_o
\end{aligned} \tag{24}$$

其中 ${}^{m+1}B$ 為已知數，因為 ${}^{m+1}t_o$ 為已知量。

式(17)可簡化如下：

$${}^m F_a^* {}^m u_a + {}^m G_a^* {}^m t_a = {}^m B \tag{25}$$

同理式(23)可簡化如下：

$${}^{m+1}F_a^* {}^{m+1}u_a + {}^{m+1}G_a^* {}^{m+1}t_a = {}^{m+1}B \tag{26}$$

再利用交界面上的二個條件，一為位移諧和關係 (${}^m u_a = {}^{m+1}u_a$)，另一為力平衡關係 (${}^m t_a + {}^{m+1}t_a = 0$)，式(26)可改寫成：

$${}^{m+1}F_a^* {}^m u_a - {}^{m+1}G_a^* {}^m t_a = {}^{m+1}B \tag{27}$$

將式(25)和(27)用矩陣形式表示如下：

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^m F_a^* & {}^m G_a^* \\ \hline {}^{m+1}F_a^* & -{}^{m+1}G_a^* \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^m u_a \\ {}^m t_a \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} {}^m B \\ {}^{m+1}B \end{array} \right] \tag{28}$$

因為上式只有 ${}^m t_a$ 、 ${}^m u_a$ 為未知數，且方程式和未知數的數目相等，因而可求解出交界面上的值 ${}^m t_a$ 、 ${}^m u_a$ 。再將求得的 ${}^m t_a$ 、 ${}^m u_a$ 代入(15)和式(22)去求邊界上的未知值

${}^m u_o$ 、 ${}^{m+1}u_o$ 。

動力問題是從(6)式出發，故在此我們再寫一次(6)式如下：

$$[A] \{x\}^N = \{y\}^N + [R]^N$$

將(6)簡化後，圖2中的m區可寫成：

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c} {}^m G_{oo}^{\downarrow} & {}^m G_{oa}^{\downarrow} \\ \hline {}^m G_{ao}^{\downarrow} & {}^m G_{aa}^{\downarrow} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^m t_o^N \\ {}^m t_a^N \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} {}^m F_{oo}^{\downarrow} & {}^m F_{oa}^{\downarrow} \\ \hline {}^m F_{ao}^{\downarrow} & {}^m F_{aa}^{\downarrow} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^m u_o^N \\ {}^m u_a^N \end{array} \right] \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\begin{array}{c|c} {}^m F_{oo}^{N-n+1} & {}^m F_{oa}^{N-n+1} \\ \hline {}^m F_{ao}^{N-n+1} & {}^m F_{aa}^{N-n+1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^m u_o^n \\ {}^m u_a^n \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} {}^m G_{oo}^{N-n+1} & {}^m G_{oa}^{N-n+1} \\ \hline {}^m G_{ao}^{N-n+1} & {}^m G_{aa}^{N-n+1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^m t_o^n \\ {}^m t_a^n \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{29}$$

將上式展開可得如下：

$$\begin{aligned}
& {}^m G_{oo}^{\downarrow} {}^m t_o^N + {}^m G_{oa}^{\downarrow} {}^m t_a^N - {}^m F_{oo}^{\downarrow} {}^m u_o^N - {}^m F_{oa}^{\downarrow} {}^m u_a^N \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^m F_{oo}^{N-n+1} {}^m u_o^n + {}^m F_{oa}^{N-n+1} {}^m u_a^n - {}^m G_{oo}^{N-n+1} {}^m t_o^n - {}^m G_{oa}^{N-n+1} {}^m t_a^n \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& {}^m G_{ao}^{\downarrow} {}^m t_o^N + {}^m G_{aa}^{\downarrow} {}^m t_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} {}^m u_o^N - {}^m F_{aa}^{\downarrow} {}^m u_a^N \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^m F_{ao}^{N-n+1} {}^m u_o^n + {}^m F_{aa}^{N-n+1} {}^m u_a^n - {}^m G_{ao}^{N-n+1} {}^m t_o^n - {}^m G_{aa}^{N-n+1} {}^m t_a^n \right]
\end{aligned} \tag{31}$$

令

$${}^m R_o^N = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^m F_{oo}^{N-n+1} {}^m u_o^n + {}^m F_{oa}^{N-n+1} {}^m u_a^n - {}^m G_{oo}^{N-n+1} {}^m t_o^n - {}^m G_{oa}^{N-n+1} {}^m t_a^n \right] \tag{32}$$

$${}^m R_a^N = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^m F_{ao}^{N-n+1} {}^m u_o^n + {}^m F_{aa}^{N-n+1} {}^m u_a^n - {}^m G_{ao}^{N-n+1} {}^m t_o^n - {}^m G_{aa}^{N-n+1} {}^m t_a^n \right] \tag{33}$$

由(30)式移項可得：

$${}^m u_o^N = \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} \left[{}^m G_{oo}^{\downarrow} {}^m t_o^N + {}^m G_{oa}^{\downarrow} {}^m t_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} {}^m u_a^N - {}^m R_o^N \right] \tag{34}$$

再將(34)式代入(31)式，可得下式：

$$\begin{aligned}
& {}^m G_{ao}^{\downarrow} {}^m t_o^N + {}^m G_{aa}^{\downarrow} {}^m t_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} \left[{}^m G_{oo}^{\downarrow} {}^m t_o^N + {}^m G_{oa}^{\downarrow} {}^m t_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} {}^m u_a^N - {}^m R_o^N \right] \\
& - {}^m F_{aa}^{\downarrow} {}^m u_a^N - {}^m R_a^N = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

整理上式可得如下：

$$\begin{aligned}
& \left[{}^m G_{aa}^{\downarrow} - {}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m G_{oa}^{\downarrow} \right] {}^m t_a^N + \left[{}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m F_{oa}^{\downarrow} - {}^m F_{aa}^{\downarrow} \right] {}^m u_a^N \\
& = \left\{ \left[{}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m G_{oo}^{\downarrow} - {}^m G_{ao}^{\downarrow} \right] {}^m t_o^N + \left[{}^m R_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m R_o^N \right] \right\}
\end{aligned} \tag{36}$$

令

$$\begin{aligned}
{}^m G^* &= \left[{}^m G_{aa}^{\downarrow} - {}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m G_{oa}^{\downarrow} \right] \\
{}^m F^* &= \left[{}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m F_{oa}^{\downarrow} - {}^m F_{aa}^{\downarrow} \right] \\
{}^m R^* &= \left\{ \left[{}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m G_{oo}^{\downarrow} - {}^m G_{ao}^{\downarrow} \right] {}^m t_o^N + \left[{}^m R_a^N - {}^m F_{ao}^{\downarrow} \left({}^m F_{oo}^{\downarrow} \right)^{-1} {}^m R_o^N \right] \right\}
\end{aligned} \tag{37}$$

(36)式可簡化如下：

$${}^m G^* {}^m t_a + {}^m F^* {}^m u_a = {}^m R^* \tag{38}$$

同理，(m+1)區亦可寫成：

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1}G_{oo}^{\downarrow} & {}^{m+1}G_{oa}^{\downarrow} \\ \hline {}^{m+1}G_{ao}^{\downarrow} & {}^{m+1}G_{aa}^{\downarrow} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^{m+1}t_o^N \\ {}^{m+1}t_a^N \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1}F_{oo}^{\downarrow} & {}^{m+1}F_{oa}^{\downarrow} \\ \hline {}^{m+1}F_{ao}^{\downarrow} & {}^{m+1}F_{aa}^{\downarrow} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^{m+1}u_o^N \\ {}^{m+1}u_a^N \end{array} \right] \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1}F_{oo}^{N-n+1} & {}^{m+1}F_{oa}^{N-n+1} \\ \hline {}^{m+1}F_{ao}^{N-n+1} & {}^{m+1}F_{aa}^{N-n+1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^{m+1}u_o^n \\ {}^{m+1}u_a^n \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} {}^{m+1}G_{oo}^{N-n+1} & {}^{m+1}G_{oa}^{N-n+1} \\ \hline {}^{m+1}G_{ao}^{N-n+1} & {}^{m+1}G_{aa}^{N-n+1} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} {}^{m+1}t_o^n \\ {}^{m+1}t_a^n \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

將上式展開可得如下：

$$\begin{aligned} & {}^{m+1}G_{oo}^{-1} {}^{m+1}t_o^N + {}^{m+1}G_{oa}^{-1} {}^{m+1}t_a^N - {}^{m+1}F_{oo}^{-1} {}^{m+1}u_o^N - {}^{m+1}F_{oa}^{-1} {}^{m+1}u_a^N \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^{m+1}F_{oo}^{-n+1} {}^{m+1}u_o^{n-1} + {}^{m+1}F_{oa}^{-n+1} {}^{m+1}u_a^{n-1} - {}^{m+1}G_{oo}^{-n+1} {}^{m+1}t_o^{n-1} - {}^{m+1}G_{oa}^{-n+1} {}^{m+1}t_a^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & {}^{m+1}G_{ao}^{-1} {}^{m+1}t_o^N + {}^{m+1}G_{aa}^{-1} {}^{m+1}t_a^N - {}^{m+1}F_{ao}^{-1} {}^{m+1}u_o^N - {}^{m+1}F_{aa}^{-1} {}^{m+1}u_a^N \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^{m+1}F_{ao}^{-n+1} {}^{m+1}u_o^{n-1} + {}^{m+1}F_{aa}^{-n+1} {}^{m+1}u_a^{n-1} - {}^{m+1}G_{ao}^{-n+1} {}^{m+1}t_o^{n-1} - {}^{m+1}G_{aa}^{-n+1} {}^{m+1}t_a^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

令

$${}^{m+1}R_o^N = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^{m+1}F_{oo}^{-n+1} {}^{m+1}u_o^{n-1} + {}^{m+1}F_{oa}^{-n+1} {}^{m+1}u_a^{n-1} - {}^{m+1}G_{oo}^{-n+1} {}^{m+1}t_o^{n-1} - {}^{m+1}G_{oa}^{-n+1} {}^{m+1}t_a^{n-1} \right] \quad (42)$$

$${}^{m+1}R_a^N = \sum_{n=1}^{N-1} \left[{}^{m+1}F_{ao}^{-n+1} {}^{m+1}u_o^{n-1} + {}^{m+1}F_{aa}^{-n+1} {}^{m+1}u_a^{n-1} - {}^{m+1}G_{ao}^{-n+1} {}^{m+1}t_o^{n-1} - {}^{m+1}G_{aa}^{-n+1} {}^{m+1}t_a^{n-1} \right] \quad (43)$$

由(40)式移項可得：

$${}^{m+1}u_o^N = \left({}^{m+1}F_{oo}^{-1} \right)^{-1} \left[{}^{m+1}G_{oo}^{-1} {}^{m+1}t_o^N + {}^{m+1}G_{oa}^{-1} {}^{m+1}t_a^N - {}^{m+1}F_{oa}^{-1} {}^{m+1}u_a^N - {}^{m+1}R_o^N \right] \quad (44)$$

再將(44)式代入(41)式，可得下式：

$$\begin{aligned} & {}^{m+1}G_{ao}^{-1} {}^{m+1}t_o^N + {}^{m+1}G_{aa}^{-1} {}^{m+1}t_a^N - {}^{m+1}F_{aa}^{-1} {}^{m+1}u_a^N - {}^{m+1}R_a^N \\ & - {}^{m+1}F_{ao}^{-1} \left({}^{m+1}F_{oo}^{-1} \right)^{-1} \left[{}^{m+1}G_{oo}^{-1} {}^{m+1}t_o^N + {}^{m+1}G_{oa}^{-1} {}^{m+1}t_a^N - {}^{m+1}F_{oa}^{-1} {}^{m+1}u_a^N - {}^{m+1}R_o^N \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

整理上式可得如下：

$$\begin{aligned} & \left[{}^{m+1}G_{aa}^{-1} - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}G_{oa}^{-1} \right] {}^{m+1}t_a^N + \left[{}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}F_{oa}^{-1} - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \right] {}^{m+1}u_a^N \\ &= \left[\left[{}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}G_{oo}^{-1} - {}^{m+1}G_{ad}^{-1} \right] {}^{m+1}t_o^N + \left[{}^{m+1}R_a^N - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}R_o^N \right] \right] \end{aligned} \quad (46)$$

令

$$\begin{aligned} & {}^{m+1}G^* = \left[{}^{m+1}G_{aa}^{-1} - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}G_{oa}^{-1} \right] \\ & {}^{m+1}F^* = \left[{}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}F_{oa}^{-1} - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \right] \\ & {}^{m+1}R^* = \left[\left[{}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}G_{oo}^{-1} - {}^{m+1}G_{ad}^{-1} \right] {}^{m+1}t_o^N + \left[{}^{m+1}R_a^N - {}^{m+1}F_{ad}^{-1} \left({}^{m+1}F_{od}^{-1} \right)^{-1} {}^{m+1}R_o^N \right] \right] \end{aligned} \quad (47)$$

(46)式可簡化如下式：

$${}^{m+1}G^* {}^{m+1}t_a^N + {}^{m+1}F^* {}^{m+1}u_a^N = {}^{m+1}R^* \quad (48)$$

再利用交界面上的二個條件，一為位移諧和關係 (${}^m u_a = {}^{m+1} u_a$)，另一為力平衡關係

(${}^m t_a + {}^{m+1} t_a = 0$)，(48)可改寫成：

$$-{}^{m+1}G^* {}^m t_a^N + {}^{m+1}F^* {}^m u_a^N = {}^{m+1}R^* \quad (49)$$

將(38)和(49)用矩陣形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} {}^m G^* & {}^m F^* \\ -{}^{m+1}G^* & {}^{m+1}F^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} {}^m t_a^N \\ {}^m u_a^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m R^* \\ {}^{m+1}R^* \end{bmatrix} \quad (50)$$

因為上式只有 ${}^m t_a^N$ 、 ${}^m u_a^N$ 為未知數，且方程式和未知數的數目相等，因而可求解出交界面上的值 ${}^m t_a^N$ 、 ${}^m u_a^N$ 。再將求得的 ${}^m t_a^N$ 、 ${}^m u_a^N$ 代回(34)和(44)式去求邊界上的未知值 ${}^m u_o^N$ 、 ${}^{m+1} u_o^N$ 。

另外，有興趣的讀者可參閱文獻 19 作者所提議解決時間褶積的步驟，基於名為“Operational Quadrature Method”，乃數學家 Lubich 所發展之技巧。善用此法可以不必強制參數 β 須在某個範圍之內，避免數值過早發散或產生 numerical damping 的現象。但須說明的是，本文 QL 方法使數值穩定之 β 範圍比起傳統上要大上許多，介於 0.1~0.8 之間皆可良好之結果。

最後，在切割時，若場域有非平滑處，網格之佈滿須局部緊密，其餘部份則漸次放大，若有至無限遠處，其處理方式可參閱文獻 17。而同一問題不同數目、不同順序、不同形式的次結構，在節點編號、矩陣運算時會有極大的困擾，故簡單、有系統為佳。

四、計畫成果自評

本計參與研究人員獲得清晰之理論、觀念以及寶貴之紮實訓練。在未來對於相關之領域作更深、更廣的應用發展時有很大之助益，例如從事大地波傳或土壤-結構互制之研究。由於邊界元素法數值運算方面相當複雜。因此，在程式發展方面一直無法得到有效、合理成果，在這方面仍有待加強

五、參考文獻

- 1.A.C.Eringen&E.S.Suhubi, "Elastodynamic s", Vol.2: Linear Theory, New York: Academic Press, 1975.
- 2.G.D.Manolis, "A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics", Int. J. Num. Meth. Engng. 19, 73-91, 1983.
- 3.D.L.Karabalis&D.E.Beskos, "Dynamic

Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain BEM“, Earthquake Engng. Str. Dyn.12, 73-93, 1984.

- 4.P.K.Banerjee & R. Butterfield, ”Boundary Element Methods in Engineering”, McGraw-Hill, London & NY, 1994.
- 5.S.Ahmad&P.K.Banerjee, ” Time-Domain Transient Elastodynamic Analysis of 3-D Solids by BEM ”, Int. J. Num. Meth. Engng. V.26, 1709-1728, 1988.
- 6.Y.Mi & M.H.Alibadi, ”Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Fracture Mechanic Analysis”, Engineering Analysis With Boundary Elements 10, 161-171, 1992.
- 7.P.H.Wen, M.H.Alibadi&D.P.Rooke, ” Cracks in Three Dimensions: A Dynamic Dual Boundary Element Analysis”, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 167, 139-151, 1998.
- 8.P.H.Wen, M.H.Alibadi,&A.Young, ”A Time-Dependent Formulation of Dual Boundary Element Method for 3D Dynamic Crack Problems”, Int. J. Num. Meth. Engng. V.45, 1887-1905, 1999.
- 9.G.D.Manolis&D.E.Beskos, ”Boundary Element Methods in Elastodynamics”, Unwin Hyman Ltd., U.K.,1988.
- 10.P.K.Banerjee,S.Ahmad&G.D.Manolis, ” Transient Elastodynamic Analysis of 3-D Problems by BEM” , Earthquake Engng. and Str. Dyn., V.14, 933-949, 1986.
- 11.J.Dominguez, ”Boundary Elements in Dynamics”, Comput. Mech. Pub., Elsevier Applied Science, UK,1993.
- 12.M.Schanz, ”A Time Domain Boundary Element Formulation Based on Multistep Time Discretization”, BE XIX, U.K., 1997.

六、附圖：

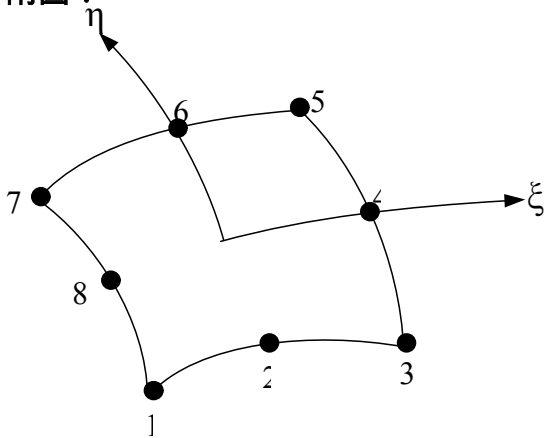


圖 1.1 等參數二次元素

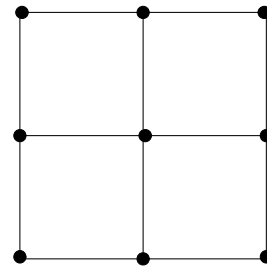


圖 1.2 四等分之次元素

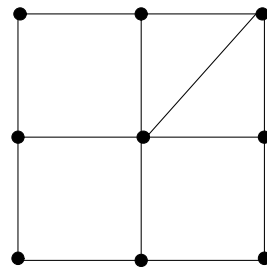


圖 1.3 五等分之次元素

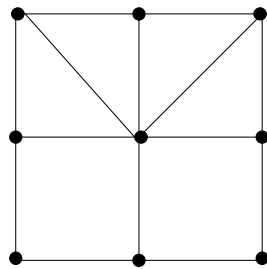
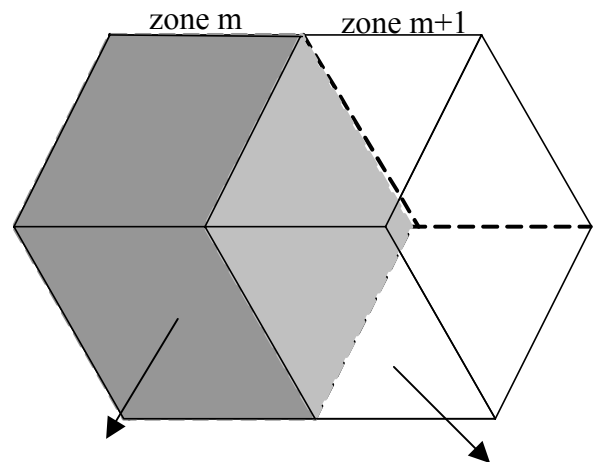


圖 1.4 六等分之次元素



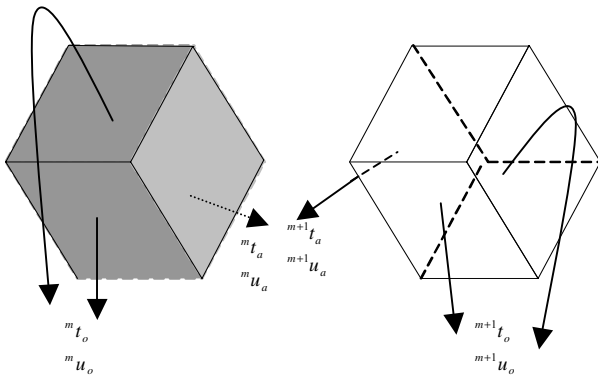


圖 2 次結構與位移場及曳引力值之示意圖

七、附錄：

等參數二次式邊界元素之形狀函數如下：

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$