

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫進度和成果報告

## Helipoid 齒輪之特性分析與研究(I)

The Characteristic Analysis and Study of Helipoid Gears(I)

計畫編號: NSC 88-2212-E-009-006

執行期限: 87年8月至88年7月

主持人: 蔡忠杓 交通大學機械系 教授

### 一、中文摘要

本研究計畫所探討的Helipoid齒輪為應用於傳遞交錯軸運動之新型齒輪,可改善傳統交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷下之缺失,製造時採用與傳統螺旋齒輪相類似之滾製生產方式,生產效率高、製造成本低且又具有戟齒輪多齒傳動之優點,可說兼具有傳統交錯軸螺旋齒輪與戟齒輪之優點。本計畫發展一套泛用且完整之數學模式,用以模擬傳統交錯軸螺旋齒輪及新型 Helipoid 齒輪之齒面方程式,並據以進行接觸分析、曲率分析及齒印分析等,亦探討不同交錯角與齒形之嚙合分析。

本專題研究計畫為二年期之研究計畫,本研究計畫之第一年(87年8月至88年7月)之主要之工作,乃建立傳統交錯軸螺旋齒輪之數學模式,利用此一數學模式,進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析,以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之特性,作為發展新型 Helipoid 齒輪時之參考依據。經由改變滾製時滾刀心軸之滾削路徑為圓弧及雙曲線等曲線,分別推導出不同型式之新型 Helipoid 齒輪齒面數學模式,且經由齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析,以分析 Helipoid 齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之接觸特性和優劣比較。研究之重點將著重在運動誤差及接觸齒印及接觸比之比較,並嘗試以滾刀心軸滾削路徑之改變,來改善傳統交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷之缺失。

關鍵詞: Helipoid齒輪, 齒面泛用數學模

式,主軸曲率及方向,齒面接觸分析,齒印形狀

### Abstract

Helipoid gear is a new type of gearing used for crossed axes transmissions which improves the disadvantage of light load of the crossed helical gears, and maintains the merit of hypoid gears. A general mathematical model of the Helipoid gear has been developed which is very helpful to the manufacturers for the new type of gear design and manufacturing, and also helpful to the simulation of the generation process of a CNC hobbing machine. Based on the developed gear tooth surface model, the principal curvatures and directions of gear tooth surfaces, tooth contact patterns, and kinematic errors can be investigated.

The proposed research project is a two-year project, and this year is the first year. Up to now, a mathematical model for the crossed axes helical gears has been developed. By choosing different cutting paths for the hob spindle movements, mathematical models for different noble Helipoid gears are obtained. Meanwhile, the principal curvatures and directions of tooth surfaces, tooth contact patterns and kinematic errors are also obtained by applying the proposed mathematical model and theory of gearing. The results obtained here provide very important

information for comparing the advantages and drawbacks of crossed axes helical gears and Helipoid gears.

Keywords: Helipoid Gear, General Mathematical Model, Principal Curvatures and Directions, Tooth Contact Analysis, Contact Pattern.

## 二、計畫緣由與目的

本計畫主持人於八十五年度至八十七年度間所執行之國科會研究計畫『CNC滾齒機之滾削模擬及新型齒輪之研究』中，利用所推導之CNC滾齒機泛用滾削齒輪數學模式，發展出一新型交錯軸螺旋齒輪—Helipoid 齒輪，藉以改善傳統之交錯軸螺旋齒輪只能適用於低負荷之缺失，並使其具有載齒輪因多齒傳動而可傳遞較大負載之優點，同時此型齒輪之生產成本與螺旋齒輪相若。除了於理論上推導出此新型齒輪之齒面方程式，亦配合本人所執行之國科會整合型研究計畫『非圓形齒輪之研究』於八十六年度所購入之日本Kashifuji KN150 CNC 滾齒機，成功地滾製出新型交錯軸Helipoid 齒輪。在前述之研究過程中，吾人由理論推導過程以及實際製造之經驗中，發現許多甚具學術和實際產業應用價值之問題，仍有待進一步之研究，且目前國內外均尚未有任何文獻針對本研究主題進行過研究，故吾人希望經由本計畫為期兩年之研究能針對交錯軸螺旋齒輪、新型交錯軸Helipoid 齒輪之特性與實際製造與改進，做進一步的分析與研究，並對滾齒製造上之特殊條件作一完整之探討，以利此 Helipoid 齒輪產業實用化鋪路。

基於上述背景及目的，本專題研究首先利用機構學原理、齒輪啮合原理及微分幾何的觀念，建立傳統交錯軸螺旋齒輪之齒面數學模式，並利用此一數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之接觸特性，作為發展新型 Helipoid 齒輪時之參考依據。其次，配合已發展

出之泛用齒面數學模式，經由模擬CNC 滾齒機之創成運動，嘗試以各種不同滾刀心軸（spindle）切削路徑來滾製不同形式之新型 Helipoid 齒輪，藉由齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解各種不同形式之新型 Helipoid 齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之特性比較並分析其差異，以期獲得最佳之接觸狀況及接觸齒印並滾削出理想的新型齒輪，以提昇齒輪的強度及壽命。同時，並經由理論之推導與模擬以及實際滾製過程之驗證，研發出滾製此一新型 Helipoid 齒輪之各種條件限制與最佳刀具設定及刀具路徑。

## 三、研究方法與結果

本計畫第一年(87年8月至88年7月)原訂規劃之主要工作項目如下：

- (一) 傳統交錯軸螺旋齒輪數學模式之建立。
- (二) 傳統交錯軸螺旋齒輪之齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析。
- (三) 各種不同型式之新型 Helipoid 齒輪之齒面數學模式之建立
- (四) 各種不同型式之新型 Helipoid Gear 之齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析
- (五) 傳統交錯軸螺旋齒輪與各種不同型式之新型 Helipoid 齒輪之特性優劣比較

至目前為止，本研究計畫第一年已完成上述(一)至(四)項之工作項目，第(五)項可望於七月份結案前如期完成。茲將本計畫目前所獲致之初步成果簡述如下：

依據創成機構及齒輪啮合原理，傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種 Helipoid 齒輪可由不同幾何外型之假想齒條刀來創成。創成傳統交錯軸螺旋齒輪之假想齒條刀其齒面及法向並可表示如下：

$$\begin{aligned}x_c^{(i)} &= \lambda_i \cos \mathcal{E}_n^i - a_i, \\y_c^{(i)} &= (\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^i - a_i \tan \mathcal{E}_n^i - b_i) \sin \mathcal{J}_i \\&\quad + u_i \cos \mathcal{J}_i,\end{aligned}$$

$$z_c^{(i)} = -(\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i \tan \mathcal{E}_n^{(i)} - b_i) \cos \mathcal{J}_i + u_i \sin \mathcal{J}_i, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} N_{xc}^{(i)} &= -\sin \mathcal{E}_n^{(i)}, \\ N_{yc}^{(i)} &= \sin \mathcal{J}_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)}, \\ N_{zc}^{(i)} &= -\cos \mathcal{J}_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)}, \end{aligned} \quad (2)$$

創成圓弧型 Helipoid 齒輪之假想齒條刀齒面及法向並可表示如下：

$$\begin{aligned} x_c^{(i)} &= \lambda_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i + R_i(1 - \cos r_i), \\ y_c^{(i)} &= (\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i \tan \mathcal{E}_n^{(i)} - b_i) \sin \mathcal{J}_i \\ &\quad + \sqrt{2} R_i \sin r_i \cos \mathcal{J}_i, \\ z_c^{(i)} &= -(\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i \tan \mathcal{E}_n^{(i)} - b_i) \cos \mathcal{J}_i \\ &\quad + \sqrt{2} R_i \sin r_i \sin \mathcal{J}_i, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} N_{xc}^{(i)} &= \sqrt{2} \cos r_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)}, \\ N_{yc}^{(i)} &= -\sqrt{2} \cos r_i \sin \mathcal{J}_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)} \\ &\quad - \sin r_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} \cos \mathcal{J}_i, \\ N_{zc}^{(i)} &= \sqrt{2} \cos r_i \cos \mathcal{J}_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)} \\ &\quad - \sin r_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} \sin \mathcal{J}_i, \end{aligned} \quad (4)$$

上式中之  $R_i$  與表示圓弧之半徑。

創成雙曲線型 Helipoid 齒輪之假想齒條刀齒面及法向並可表示如下：

$$\begin{aligned} x_c^{(i)} &= \lambda_i \cos \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i + \frac{A_i(\nu_i^2 - 1)}{1 + \nu_i} \\ &\quad + \frac{A_i(\nu_i^2 - 1)}{1 - \nu_i \cos r_i} \cos r_i, \\ y_c^{(i)} &= (\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i \tan \mathcal{E}_n^{(i)} - b_i) \sin \mathcal{J}_i \\ &\quad + \sqrt{2} \frac{A_i(\nu_i^2 - 1)}{1 - \nu_i \cos r_i} \sin r_i \cos \mathcal{J}_i, \\ z_c^{(i)} &= -(\lambda_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} - a_i \tan \mathcal{E}_n^{(i)} - b_i) \cos \mathcal{J}_i \\ &\quad + \sqrt{2} \frac{A_i(\nu_i^2 - 1)}{1 - \nu_i \cos r_i} \sin r_i \sin \mathcal{J}_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N_{xc}^{(i)} &= \sqrt{2} \sin \mathcal{E}_n^{(i)} (\cos r_i - \nu_i), \\ N_{yc}^{(i)} &= -\sqrt{2} \cos \mathcal{E}_n^{(i)} \sin \mathcal{J}_i (\cos r_i - \nu_i) \\ &\quad + \sin r_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} \cos \mathcal{J}_i, \\ N_{zc}^{(i)} &= \sqrt{2} \cos \mathcal{E}_n^{(i)} \cos \mathcal{J}_i (\cos r_i - \nu_i) \\ &\quad + \sin r_i \sin \mathcal{E}_n^{(i)} \sin \mathcal{J}_i, \end{aligned} \quad (6)$$

上式中之  $A_i$  與  $\nu_i$  表示雙曲線之半長軸長度以及離心率。

依據座標轉換關係以及齒輪嚙合原理，由各種假想齒條刀所創成之齒輪齒面數學模式及其法向量可表示如下：

$$\begin{aligned} x_i &= \cos W_i x_c^{(j)} - \sin W_i y_c^{(j)} + r_i (\cos W_i + W_i \sin W_i), \\ y_i &= \sin W_i x_c^{(j)} + \cos W_i y_c^{(j)} + r_i (\sin W_i - W_i \cos W_i), \\ z_i &= z_c^{(j)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N_{xi} &= N_{xc}^{(j)} \cos W_i + N_{yc}^{(j)} \sin W_i, \\ N_{yi} &= -N_{xc}^{(j)} \sin W_i + N_{yc}^{(j)} \cos W_i, \\ N_{zi} &= N_{zc}^{(j)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{其中 } W_i = (y_c^{(j)} N_{xc}^{(j)} - x_c^{(j)} N_{yc}^{(j)}) / N_{xc}^{(j)}, \quad (9)$$

$j=1,2$ 、 $i=F,P$ ，分別用以表示創成假想齒條刀  $\Sigma_F$ 、 $\Sigma_P$  及其對應之大、小齒輪  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$ 。

利用前述之方程式將傳統交錯軸螺旋齒輪以及各種 Helipoid 齒輪之大小齒輪齒面方程式建立後，其主軸曲率以及主軸方向可由 Rodrigues' equation 求得：

$$K_{\text{lin}} V_r = -\dot{n}_r \quad (10)$$

其中  $K_{\text{lin}}$  為主軸曲率， $V_r$  為接觸點沿齒面移動之相對速度，而  $\dot{n}_r$  則為上述運動中接觸點上之單位法向量尖端之速度（亦即一次微分）。以假想齒條刀  $\Sigma_F$  所創成之大齒輪  $\Sigma_1$  為例，利用刀具  $\Sigma_F$  之參數對時間微分為零之條件，吾人可求得切削刀具之第一和第二主軸曲率與其對應之主軸方向： $\mathcal{K}_1^{(F)}$ 、 $\mathcal{K}_{\text{lin}}^{(F)}$  及  $\mathcal{K}_1^{(P)}$ 、 $\mathcal{K}_{\text{lin}}^{(P)}$ ，並可進一步經由下列方程式來求出齒面之主軸曲率與主軸方向（Litvin,1989）：

$$\tan 2f^{(F1)} = \frac{2F^{(1)}}{K_1^{(F)} - K_{\text{lin}}^{(F)} + G^{(1)}} \quad (11)$$

$$K_1^{(1)} + K_{\text{lin}}^{(1)} = K_1^{(F)} + K_{\text{lin}}^{(F)} + S^{(1)} \quad (12)$$

$$K_1^{(1)} - K_{\text{lin}}^{(1)} = \frac{K_1^{(F)} - K_{\text{lin}}^{(F)} + G^{(1)}}{\cos 2f^{(F1)}} \quad (13)$$

$$F^{(1)} = \frac{a_{31}^{(1)} a_{32}^{(1)}}{b_3^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_1^{(F)}) a_{31}^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}) a_{32}^{(1)}} \quad (14)$$

$$G^{(1)} = \frac{(a_{31}^{(1)})^2 - (a_{32}^{(1)})^2}{b_3^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_1^{(F)}) a_{31}^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}) a_{32}^{(1)}} \quad (15)$$

$$S^{(1)} = \frac{(a_{31}^{(1)})^2 + (a_{32}^{(1)})^2}{b_3^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_1^{(F)}) a_{31}^{(1)} + (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}) a_{32}^{(1)}} \quad (16)$$

$$a_{31}^{(1)} = [\mathbf{n}^{(F)} \cdot \mathcal{S}^{(F1)} \mathbf{i}_1^{(F)}] - K_1^{(F)} (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_1^{(F)}) \quad (17)$$

$$a_{32}^{(1)} = [\mathbf{n}^{(F)} \cdot \mathcal{S}^{(F1)} \mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}] - K_{\text{lin}}^{(F)} (V^{(F1)} \cdot \mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}) \quad (18)$$

$$b_3^{(1)} = [\mathbf{n}^{(F)} \cdot \mathcal{S}^{(1)} V_r^{(1)}] - [\mathbf{n}^{(F)} \cdot \mathcal{S}^{(1)} V_r^{(1)}] \quad (19)$$

由此我們便可以求得齒輪  $\Sigma_1$  之主軸曲率  $K_1^{(1)}$ 、 $K_{\text{lin}}^{(1)}$  及其主軸方向  $\mathbf{i}_1^{(F)}$  和  $\mathbf{i}_{\text{lin}}^{(1)}$ 。 $f^{(F1)}$  為  $\mathbf{i}_1^{(F)}$  和  $\mathbf{i}_{\text{lin}}^{(1)}$  間之夾角。

由上述之方法，吾人可以得到齒條刀  $\Sigma_F$ 、 $\Sigma_P$  上之主軸方向單位向量  $\mathbf{i}_1^{(F)}$ 、 $\mathbf{i}_{\text{lin}}^{(F)}$ 、

$i_1^{(p)}$  以及  $i_{II}^{(p)}$ 。其中角度  $f^{(F1)}$ 、 $f^{(P2)}$  為  $i_1^{(1)}$ 、 $i_1^{(2)}$  和  $i_1^{(F)}$ 、 $i_1^{(P)}$  間之夾角， $i_1^{(1)}$ 、 $i_1^{(2)}$  則分別為齒面  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$  上之主軸方向單位向量。角度  $f^{(F1)}$ 、 $f^{(P2)}$  則分別由單位向量  $i_1^{(F)}$ 、 $i_1^{(P)}$  往  $i_{II}^{(F)}$ 、 $i_{II}^{(P)}$  量起定義為正的角度，如圖1所示。又由於齒面  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$  之主軸曲率  $K_1^{(1)}$ 、 $K_{II}^{(1)}$ 、 $K_1^{(2)}$  和  $K_{II}^{(2)}$  為已知，由此吾人可利用下列方程式模擬彈性變形後齒面接觸點切平面上接觸橢圓之大小與方向，如圖2所示。

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \left[ K_{\Sigma}^{(1)} - K_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2f + g_2^2)^{\frac{1}{2}} \right], \\ B &= \frac{1}{4} \left[ K_{\Sigma}^{(1)} - K_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2f + g_2^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (20) \\ a^2 &= \left| \frac{U^2}{A} \right|, \\ b^2 &= \left| \frac{U^2}{B} \right|, \quad (21) \end{aligned}$$

其中  $\sin 2r = g_2 \sin 2f$ ,

$$\cos 2r = g_1 - g_2 \cos 2f,$$

$$K_{\Sigma}^{(1)} = K_1^{(1)} + K_{II}^{(1)},$$

$$K_{\Sigma}^{(2)} = K_1^{(2)} + K_{II}^{(2)},$$

$$g_1 = K_1^{(1)} - K_{II}^{(1)},$$

$$g_2 = K_1^{(2)} - K_{II}^{(2)},$$

$$f = f^{(P2)} - f^{(F1)},$$

上式中， $u$  為齒面彈性變形量之近似值，吾人取齒印測試所使用之紅丹顆粒大小之 0.00632 mm 為  $u$  值。 $a$  與  $b$  為接觸橢圓的長短軸長度， $r$  則用來決定橢圓短軸之方向，如圖2所示。

我們以下列兩例來分別探討圓弧型以及雙曲線型 Helipoid 齒輪其設計參數對齒印大小之影響。

例一：

一圓弧型 Helipoid 齒輪對其主要設計參數如表1所示。圓弧型 Helipoid 齒輪主要是藉由滾削過程中滾刀沿一圓弧軌跡行走而創成。當此一圓弧之曲率半徑為無限大時，圓弧型 Helipoid 齒輪即退化為交叉軸螺旋齒輪。經由前述之方法，吾人可將接觸橢圓繪於小齒輪齒面。改變滾刀圓弧軌跡之曲率半徑  $R_F = R_P$  為 200、400、800 mm，可發現當滾刀路徑之曲率半徑越小時，接觸橢圓之長軸越長。同時，於齒面上之接觸點也隨之向齒面之右方偏移。但

就整體而言，接觸齒印仍保持於齒面之中央部分。

例二：

一雙曲線型 Helipoid 齒輪對其主要設計參數亦如表1所示。雙曲線型 Helipoid 齒輪主要是藉由滾削過程中滾刀沿一雙曲線軌跡行走而創成。吾人定義當雙曲線之離心率  $\nu_i$  為無限大時，雙曲線型 Helipoid 齒輪即退化為交叉軸螺旋齒輪。因此，雙曲線之半長軸長度必須選定為  $A_F = A_P = 55.1543$  mm。藉由改變滾刀雙曲線軌跡之離心率  $\nu_F = \nu_P$  為 1.6、1.7、2.0，可發現當滾刀路徑之離心率越小時，接觸橢圓之長軸越長。其趨勢與減小圓弧型 Helipoid 齒輪之滾刀路徑曲率半徑所造成之效果相似。

n

#### 四、計畫成果自評

本計畫第一年已建立傳統交錯軸螺旋齒輪之數學模式，利用此一數學模式，進行其齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析，以了解傳統交錯軸螺旋齒輪之特性，可為發展新型 Helipoid 齒輪時之參考依據。此外，經由改變滾刀滾製時其心軸之滾削路徑曲線，亦推導出圓弧型及雙曲線型等不同型式之新型 Helipoid 齒輪及其齒面數學模式，且發展齒面接觸分析、曲率分析及齒印分析之電腦模擬程式，可用以分析各種新型 Helipoid 齒輪與傳統交錯軸螺旋齒輪之特性優劣比較之依據。

#### 五、參考文獻

- [1] C. B. Tsay, "A Study on the Contact of Wildhaber-Novikov Gear", Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 15, No. 2, pp. 109-117 (1994).
- [2] F. L. Litvin, *Theory of Gearing*, NASA Publication RP-1212, Washington D. C., 1989
- [3] F. L. Litvin, *Gear Geometry and Applied Theory*, PTR Prentice Hall, 1994.
- [4] Y. Zhang and Z. Fang, "Analysis of Transmission Errors Under Load of Helical Gears With Modified Tooth

Surfaces,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 119, pp. 120-126, MARCH 1997.

[5] 張信良, 電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬, 國立交通大學機械所, 博士論文, 1996年6月。

表1 Helipoid 齒輪對之主要設計參數

項目	小齒輪	大齒輪
齒數	$N_1 = 39$	$N_2 = 39$
法向模數	$m_n = 2.0$ mm/Teeth	$m_n = 2.0$ mm/Teeth
導程角	$\lambda_h = 45^\circ$ (右螺旋)	$\lambda_h = 45^\circ$ (右螺旋)
法向壓力角	$\mathcal{E}_n = 20^\circ$	$\mathcal{E}_n = 20^\circ$
齒寬	$B = 40$ mm	$B = 40$ mm

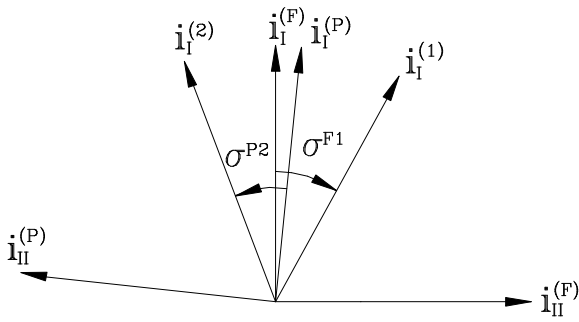


圖 1. 齒條刀主軸方向與齒面主軸方向之關係

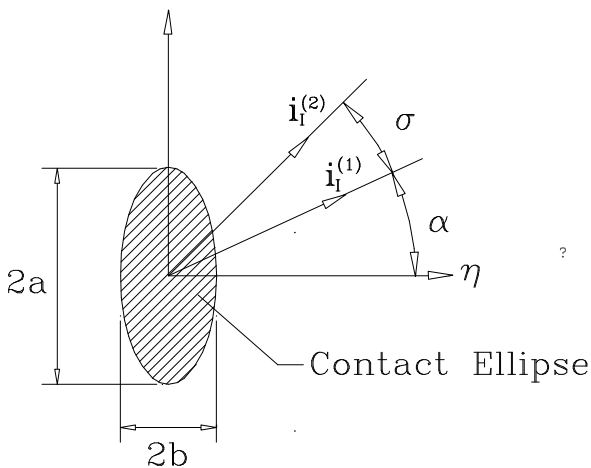


圖 2. 接觸齒印 ( 橢圓 ) 與主軸方向之關係

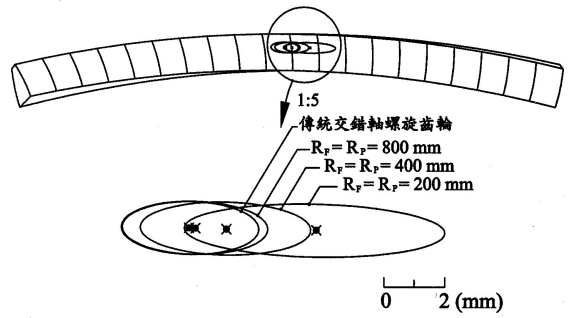


圖 3. 圓弧型 Helipoid 齒輪對其圓弧半徑與接觸橢圓之關係圖

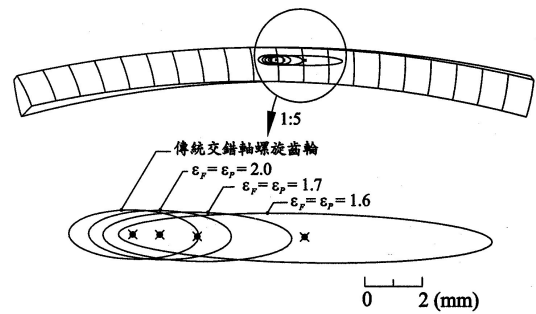


圖 4. 雙曲線型 Helipoid 齒輪對其離心率與接觸橢圓之關係圖