行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

解耦控制系統的理論及設計

Decoupling Control System – Theory and Design

計畫編號：NSC 87-2213-E-009-144

執行期限：86 年 8 月 1 日至 87 年 7 月 31 日

主持人：林清安　　Email：calin@cc.nctu.edu.tw

執行機構及單位名稱：國立交通大學電機與控制工學系

一、中文摘要

本研究探討線性多變數系統解耦控制的問題。我們嘗試將解耦控制的一些結果推廣至塊解耦的控制問題。針對單元回授多變數控制系統，我們提出一個穩定塊解耦控制器存在的充分與必要條件。我們提出兩種塊解耦控制器設計的方法。一是利用受控系統一種特殊的互質因式，來得到所有塊解耦控制器的參數化結果。另一種的設計方法是先找出受控系統的開路前置補償器，使得補償後的開路系統為塊狀對角化，再對每一組較小維數的頻道設計控制器。

關鍵詞：塊解耦控制，多變數系統，前置補償器。

Abstract

This research investigates decoupling control problem for linear multivariable systems. We generalize some results in decoupling control to the case of block decoupling control. For unity feedback multivariable systems, we establishes necessary and sufficient conditions for the existence of block decoupling contollers. We propose two methods for the design of block decoupling controllers. We give parameterizations of all block decoupling stabilizing controllers based on a special coprime factorization of the plant. Another way to design a block decoupling controller is to first block-decouple the plant by an open-loop precompensator and then designing feedback controllers for each block channel.

Keywords: block decoupling control, multivariable system, precompensator.

二、緣由及目的

本計畫探討線性多變數系統解耦控制的問題；多變數系統的控制常常要求系統達到某種程度的輸入-輸出解耦，例如多自由度的運動，往往要求各自由度的變數可以獨立控制。飛彈的縱向加速度，橫向加速度及轉角的獨立控制；飛機的高度及速度(包括方向)的獨立控制都是明顯的例子。解耦控制的問題是塊解耦控制的一個特殊例子。雖然塊解耦控制的問題比解耦控制複雜，但是解耦控制的理論及解耦控制器的設計方法，應該在某種程度上可以推展至處理塊解耦控制問題上。這是本研究的主要動機。

在塊解耦控制的理論方面，Linnemann 與 Wang 提出的文獻[4]中，要判定穩定塊解耦控制可行的充分與必要條件是相當的複雜且不容易驗證。為了改進這個缺點，我們提出一個穩定塊解耦控制可行的充分與必要條件。相較之下，我們提出的條件顯得非常簡單並且容易驗證。

在塊解耦控制設計方面，我們希望能提出實際可計算的塊解耦控制器的設計方法。對此問題，我們假設待控制的系統在右半平面的零點及極點不互相重疊，在這

假設下，塊解耦控制器是必定存在的。在塊解耦控制器存在的條件下，我們提出兩種塊解耦控制設計方法。一是利用受控系統一種特殊的互質因式，來將所有塊解耦控制器參數化的結果表示出來。另一種的設計觀點是要先找出受控系統的開路塊解耦前置補償器，使得補償後的開路為塊狀對角化且保留原來受控系統在右半平面的零點與極點，再對每一組較小維數的頻道設計控制器，可以使控制器的設計比較容易。

三、結果與討論

本研究的第一個結果是來自探討線性單元回授多變數控制系統 S(P,C)，如圖一所示，存在塊解耦控制器的充分與必要條件，其中 P 是待控制的系統，C 是控制器。線性單元回授多變數控制系統 S(P,C)存在塊解耦控制器，表示能找到一個穩定控制器 C，使得由 u_1 輸入至 y_2 輸出的轉換矩陣是穩定塊狀對角化的轉換矩陣。要使輸入-輸出轉換矩陣是對角化，待控系統本身必須是滿階(full normal rank)。在文獻[5]中提到，若待控系統在右半平面沒有重疊的零點及極點，是一個存在塊解耦控制器可行的充分條件。至於必要條件，我們就必須考慮待控系統在右半平面有重疊的零點及極點的條件下，推導其塊解耦控制器存在的充分與必要條件。我們先考慮待控系統的轉換矩陣是方形，即待控系統的輸入-輸出的頻道數目相同。假設這待控系統有 M 個一階在右半平面重疊的零點與極點，且假設要解耦控制系統為 k 塊頻道，每塊頻道包含有 n_i 個頻道。在我們發表文獻[2]中，可以得到下面定理一；由定理一，我們知道要判斷塊解耦存在的充分與必要條件是相當容易計算及驗證。因為待控系統 P 是滿階，其反導數矩陣存在，由待控系統 P 的假設，令 P 及反導數矩陣為

$$P(s)=\sum_{j=1}^{M}\frac{R^j}{s-\lambda_j}+U(s) \quad 及 \qquad (1)$$

$$P(s)^{-1}=\sum_{l=1}^{M}\frac{T^l}{s-\lambda_l}+V(s) \qquad (2)$$

其中 $\lambda_j\in\mathbb{C}_+$，$R^j,T^l\in\mathbb{C}^{n\times n}$。U(s)和 V(s)在 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{M}$ 可解析且在右半平面沒有共同的極點。定義 $T^l=[T_1^l\cdots T_k^l]$ 及 $R^{l^T}=[R_1^{l^T}\cdots R_k^{l^T}]$，其中 $T_i^l\in\mathbb{C}^{n\times n_i}$，$R_i^l\in\mathbb{C}^{n_i\times n}$, $i=1,\cdots,k$, $l=1,\cdots,M$。我們得到線性單元回授多變數控制系統 S(P,C)，存在塊解耦控制器的充分與必要的條件是底下定理一。

定理一：

考慮單元回授控制系統 S(P,C)，如圖一所示，其中待控系統 P 是滿階的方形轉換矩陣；假設待控系統與其反導數矩陣分別表示在(1)與(2)。單元回授控制系統 S(P,C)存在塊解耦控制器 C 的充分與必要條件是：

$$T_i^l R_i^l=0，i=1,\cdots,k，l=1,\cdots,M \qquad (3)$$

及

$$vec(C_j)\in Range\left(\left[R_l^{j^T}\otimes T_l^j\cdots R_k^{j^T}\otimes T_k^j\right]\right) \qquad (4)$$

$j=1,\cdots,M$，

其中 $C_j=\sum_{l=1,l\neq j}^{M}\frac{T^l R^j}{\lambda_j-\lambda_l}+V(\lambda_j)R^j$ ■

而在解耦控制可行的條件考慮方面，由定理一，發現要符合(3)的條件必須 T_i^l 或 R_i^l 其中一個矩陣要為零，所以在(4)中，$R_i^{l^T}\otimes T_i^l$ 均為零。因此解耦控制可行的充分與必要條件，除了(3)要符合之外，另一條件是(4)中 C_j 為零。此結果與文獻[1]中，解耦控制可行的充分與必要條件是一致。致於待控系統在右半平面的零點與極點不只有一階時，我們在文獻[2]中有清楚的說明。

以上的討論分析，均是考慮待控系統的轉換矩陣為方形，在文獻[2]中，有考慮待控系統的轉換矩陣不是方形，即輸入頻道數目比輸出多。因為待控系統轉換矩陣是滿階，把待控系統右乘一個單位棋(unimodular)矩陣後，可得到一方形轉換矩陣，原來待控系統塊解耦控制可行與否，可以用這個方形矩陣能否符合定理一的條

件來決定。

在塊解耦控制器的設計方面，為了確保塊解耦控制器一定存在及設計的便利性，我們假設待控系統在右半平面沒有重疊的零點與極點。文獻[3]中，我們提出兩種塊解耦控制器的設計方法。第一種方法是利用特殊的互質因式，我們建立所有塊解耦控制器的參數化的結果。由這些塊解耦控制的參數化解中，將來可以應用在設計塊解耦控制加權混合靈敏度的最佳化問題上。假設(N_r, D_r)及(D_l, N_l)分別是待控系統的右互質因式與左互質因式。我們可以推導找出λ與φ是互質的穩定轉換函數，使得λN_r^{-1}，λN_l^{-1}，φD_r^{-1}及φD_l^{-1}均是穩定；且存在兩個互質的穩定轉換函數α與β，使得$\alpha\lambda+\beta\varphi=1$ 藉由這些變數，定義出四個變數：$U_r=\alpha\lambda N_l^{-1}$, $V_r=\beta\varphi D_l^{-1}$, $U_l=\alpha\lambda N_r^{-1}$ 及$V_l=\beta\varphi D_l^{-1}$。我們可以推導出一個 Bezout identity 如下

$$\begin{bmatrix} V_l & U_l \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_r & -U_r \\ N_r & V_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad (5)$$

所有的穩定控制器與輸入-輸出轉換矩陣，可利用(5)來代表出所有 Q 參數化的表示式。經由計算，所有輸入-輸出轉換矩陣為$N_r(U_l+QD_l)$，其中Q是任何穩定轉換矩陣。因為 $N_rU_l=\alpha\lambda I$ 是對角化，若要輸入-輸出轉換矩陣是塊狀對角化，Q 必須是穩定轉換矩陣，使得 N_rQD_l 是塊狀對角化。我們把N_r^{-1}分解成

$$N_r^{-1}=\begin{bmatrix}\Gamma_1\Theta_1^{-1} & \cdots & \Gamma_k\Theta_k^{-1}\end{bmatrix}=\Gamma\Theta^{-1} \qquad (6)$$

其中$\Gamma=[\Gamma_1\cdots\Gamma_k]$，$\Theta=\mathrm{diag}\{\Theta_i\}_{i=1}^k$，$(\Gamma_i,\Theta_i)$是右互質因式；$D_l^{-1}$分解成

$$D_l^{-1}=\begin{bmatrix}(\Delta_1^{-1}\Omega_1)^T & \cdots & (\Delta_k^{-1}\Omega_k)^T\end{bmatrix}^T=\Delta^{-1}\Omega \qquad (7)$$

其中$\Omega=[\Omega_1^T\cdots\Omega_k^T]^T$，$\Delta=\mathrm{diag}\{\Delta_i\}_{i=1}^k$，$(\Delta_i,\Omega_i)$是左互質因式。為了要得到 N_rQD_l 是塊狀對角化的自由化參數表示式，在文獻[3]中，我們得到下面定理：

定理二：

假設待控制系統是滿階且在右半平面沒有重疊的零點與極點；(N_r, D_r)及(D_l, N_l)分別是待控制系統的右互質因式與左互質因式。如果存在穩定轉換矩陣Q使得 N_rQD_l 是塊狀對角化，其塊狀對角化的自由參數表示式為$\Theta Q_d\Delta$，其中Θ與Δ分別表示在(6)與(7)中，而Q_d是任何穩定塊狀對角化轉換矩陣。 ■

由這些變數的定義，輸入-輸出轉換矩陣的集合是

$\{\alpha\lambda I+\Theta Q_d\Delta \mid Q_d$是穩定塊狀對角化轉換矩陣$\}$

而塊解耦控制器的集合是

$\{(U_r+D_r\Gamma Q_d\Omega)(V_r-N_r\Gamma Q_d\Omega)^{-1} \mid Q_d$ 是穩定塊狀對角化轉換矩陣$\}$。

第二種塊解耦控制器的設計方法，是要先設計一個塊解耦前置補償器，使得前置補償器與待控系統串接的開路轉換矩陣，是一個塊狀對角化的矩陣且其在右半平面零點與極點及待控系統的右半平面零點與極點相比，並沒有減少。若在與補償器的串接下，有減少待控系統在右半平面零點與極點，這新的串接系統無法找到任何單元回授控制器能保證單元回授控制系統穩定。在定理三，我們提出一個塊解耦前置補償器的形式，文獻[3]中，有詳細的證明。利用塊解耦前置補償器的補償作用，我們可以把要設計大維數的控制器，分解成對小維數的控制器，可以使我們控制器的設計比較容易，尤其是在解耦控制下，MIMO 控制設計變成 SISO 控制設計。在提出塊解耦前置補償器之前，我們先定義一些符號：因為$\lambda\Theta^{-1}$與Δ是右互質因式，存在一組穩定對角化左互質因式$\hat{\Delta}$與$\hat{\Theta}$，使得

$$(\lambda\Theta^{-1})\Delta^{-1}=\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Theta} \qquad (8)$$

定理三：

假設待控制系統是滿階及在右半平面沒有重疊的零點與極點。這待控制系統存在的可行的塊解耦前置補償器 F 是

$$F=P^{-1}\Theta\hat{\Delta}^{-1}, \qquad (9)$$

其中Θ與$\hat{\Delta}$分別定義在(6)與(8)中。 ■

塊解耦前置補償器與待控系統串接後其轉換矩陣$\Theta\hat{\Delta}^{-1}$是塊狀對角化且這補償器不會使待控系統在右半平面的零點與極點減少。所以我們要設計的塊狀對角化控制器$A(s)$，其包含的每一小塊控制器都是針對每一塊分解的系統來設計，如圖二所示，其中P_F是定義為前置補償器與待控系統串接的架構。而塊狀對角化控制器A與前置補償器F的串接就是待控系統的塊解耦控制器，在文獻[3]中有提到。得到的塊解耦控制器FA，是與第一種方法找的控制器是相同的。

到目前為止，要對待控系統設計塊解耦控制器，首先要判定這個待控系統是否存在塊解耦控制器；若存在塊解耦控制器，可以依照我們提出設計方法來設計塊解耦控制器。我們提出所有的塊解耦控制器的代表形式，將來可以應用到加權混合靈敏度的最佳化的設計上。另外，因為這裏所提到塊解耦控制器的設計方法是針對待控系統沒有右半平面重疊零點與極點的特殊條件下建立的，將來還可以考慮待控系統若有右半平面重疊的零點與極點且塊解耦控制可行的條件下，其塊解耦控制器如何設計。未來可以繼續探討的問題之一是：解耦控制與非解耦控制如何作定量的優劣比較。

四、參考文獻

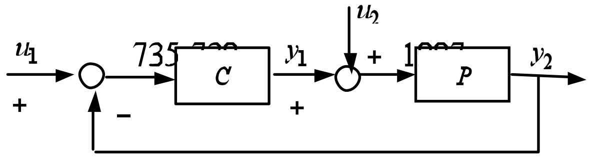
[1] C. A. Lin, "Necessary and Sufficient Conditions for Existence of Decoupling Controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, pp. 1157-1161, 1997.

[2] C. A. Lin and C. M. Wu, "Block-Decoupling Linear Multivariable Systems: Necessary and Sufficient Conditions," *Automatica*, vol. 34, pp. 237-243, 1998.

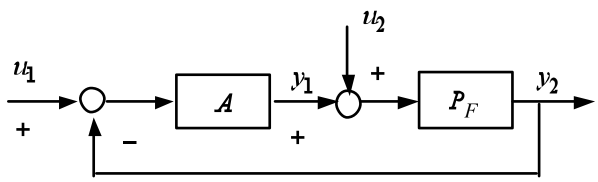
[3] C. A. Lin and C. M. Wu, "Block Decoupling Control of Linear Multivariable Systems," 1999 自動控制研討會(投搞)。

[4] A. Linnemann and Q. G. Wang. "Block Decoupling with Stability by Unity Output Feedback-Solution and Performance Limitations," *Automatica*, vol. 29, pp. 735-744, 1993.

[5] A. I. G. Vardulakis, "Internal Stabilization and Decoupling in Linear Multivariable Systems by Unit Output Feedback Compensation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp. 735



圖一 線性單回授控制系統 S(P,C)



圖二 線性單回授控制系統 S(P_F,A)