

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

受側向負荷之挫屈梁的靜態及動態行為研究 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 100-2221-E-009-098-
執行期間：100年08月01日至101年07月31日
執行單位：國立交通大學機械工程學系(所)

計畫主持人：蕭國模

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：許彤羽
博士班研究生-兼任助理人員：黃楚璋

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

公開資訊：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 101 年 11 月 04 日

中文摘要：本文中所謂的挫屈梁為將一細長直梁兩端固接在基座上，將一基座沿軸向壓縮，使該梁因側向挫屈，而朝側向拱起，然後再將端點基座固定。本研究的目的是探討挫屈梁的初始變形與自然振動，及不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為。本研究以共旋轉有限元素法及非線性梁理論的一致性二階線性化推導挫屈梁的平衡方程式及運動方程式。將挫屈梁的運動方程式用泰勒級數在挫屈梁的初始變形位置展開，取到一次項，即為線性振動的運動方程式。

本文使用基於弧長法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性平衡方式，探討不同細長比之挫屈梁在不同端點壓縮位移的初始變形，同時以子空間迭代法求得挫屈梁的自然振動頻率與其對應的振動模態，本文使用在平衡方程式中增加臨界條件的延伸系統來追蹤在不同軸向壓縮的挫屈梁受到側向負荷之臨界點的摺線。

本研究以數值例題探討不同細長比之挫屈梁在不同壓縮位移之拱起高度。本研究亦以數值例題探討不同細長比、不同拱起高度之挫屈梁的自然頻率及振態的變化、不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為。

中文關鍵詞：挫屈梁，幾何非線性，共旋轉有限元素法，摺線，振動，自然頻率

英文摘要：Buckled Beam, Geometrical Nonlinearity, Co-rotational Finite Element Formulation, Fold line, Vibration, Natural frequency

英文關鍵詞：Buckled Beam, Geometrical Nonlinearity, Co-rotational Finite Element Formulation, Fold line, Vibration, Natural frequency

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫

☐期中進度報告

☒期末報告

受側向負荷之挫屈梁的靜態及動態行為研究

計畫類別：☐個別型計畫 ☐整合型計畫

計畫編號：NSC 100-2221-E-009-098

執行期間：100 年 08 月 01 日至 101 年 07 月 31 日

執行機構及系所：交通大學機械所

計畫主持人：蕭國模 博士

共同主持人：

計畫參與人員：黃楚璋、許彤羽

本計畫除繳交成果報告外，另含下列出國報告，共 ____ 份：

☐移地研究心得報告

☐出席國際學術會議心得報告

☐國際合作研究計畫國外研究報告

處理方式：除列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

☐涉及專利或其他智慧財產權，☐一年☐二年後可公開查詢

中 華 民 國 101 年 10 月 27 日

摘要

本文中所謂的挫屈梁為將一細長直梁兩端固接在基座上，將一基座沿軸向壓縮，使該梁因側向挫屈，而朝側向拱起，然後再將端點基座固定。本研究的目的是探討挫屈梁的初始變形與自然振動，及不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為。本研究以共旋轉有限元素法及非線性梁理論的一致性二階線性化推導挫屈梁的平衡方程式及運動方程式。將挫屈梁的運動方程式用泰勒級數在挫屈梁的初始變形位置展開，取到一次項，即為線性振動的運動方程式。

本文使用基於弧長法和牛頓-拉福森法的增量迭代法解非線性平衡方式，探討不同細長比之挫屈梁在不同端點壓縮位移的初始變形，同時以子空間迭代法求得挫屈梁的自然振動頻率與其對應的振動模態，本文使用在平衡方程式中增加臨界條件的延伸系統來追蹤在不同軸向壓縮的挫屈梁受到側向負荷之臨界點的摺線。

本研究以數值例題探討不同細長比之挫屈梁在不同壓縮位移之拱起高度。本研究亦以數值例題探討不同細長比、不同拱起高度之挫屈梁的自然頻率及振態的變化、不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為。

關鍵詞：挫屈梁，幾何非線性，共旋轉有限元素法，摺線，振動，自然頻率

Abstract.

The buckled beam considered here is a beam originally straight and then compressed axially beyond the critical buckling axial displacement. The objective of this study is to investigate the deformed configuration and free vibration around the deformed configuration of the buckled beams, and the nonlinear behavior of the buckled beam subjected to lateral load. The corotational finite element formulation is used here. The principle of virtual work, d'Alembert principle and the consistent second order linearization of the nonlinear beam theory are used to derive the element equations in current element coordinates. The governing equations for linear vibration are obtained by the first order Taylor series expansion of the equation of motion at the static equilibrium position of the buckled beam.

The critical points in the lateral loading – deflection curve are calculated in an extended system obtained by augmenting equilibrium equations with a criticality condition which forces the Newton-Raphson iterations to converge to the critical point. The fold lines of the critical loading parameters corresponding to different axial displacement are traced.

Numerical examples are studied to investigate the initial configuration and natural frequencies of clamped buckled beams with different slenderness ratios under different axial compression. The nonlinear behaviors of the buckled beam subjected to lateral load are also investigated.

Keywords: Buckled Beam, Geometrical Nonlinearity, Co-rotational Finite Element Formulation, Fold line, Vibration, Natural frequency

目 錄

中文摘要	I
英文摘要	I
目錄	II
圖目錄	III
第一章 導論	1
第二章 理論推導	2
2.1 基本假設	2
2.2 座標系統描述	3
2.3 梁元素的變形描述	3
2.4 梁元素的節點內力	4
2.5 元素的剛度矩陣	5
2.6 元素的質量矩陣	6
2.7 系統平衡方程式	6
第三章 挫屈梁的初始變形及自由振動分析	7
3.1 挫屈梁的初始變形	7
3.2 挫屈梁的自然振動頻率及振態	8
第四章 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析	9
第五章 結論	10
參考文獻	11
附圖	13

圖 目 錄

圖 1	直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖	19
圖 2	挫屈梁受側向集中力 P 的位移-負荷曲線圖	20
圖 3	元素座標系統及總體座標系統關係圖	21
圖 4	梁的變形圖	21
圖 5	挫屈梁的 $\frac{\delta}{h} - \zeta$ 曲線	23
圖 6	挫屈梁的無因次端點軸向反力 P/P_{CR} - 中點側向位移 δ/L_T 曲線	24
圖 7	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 3, i=1,2$)	25
圖 8	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h \leq 8, i=1,7$)	26
圖 9	挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/L_T 的曲線 ($\delta/L_T < 0.3, i=1,6$)	27
圖 10	挫屈梁結構中點 C 受側向集中力 P 或集中力矩 M 的結構圖	28
圖 11	挫屈梁受側向集中力 P 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線圖 ($\zeta = 1.7, 2.2, 3$)	29
圖 12	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)	30
圖 13	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)	31
圖 14	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)	32
圖 15	不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI} \eta - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)	33

第一章 導論

本研究中挫屈梁，指的是如圖 1 所示之細長直梁受到端點軸向位移 Δ 時，若壓縮量達到挫屈臨界值時，梁會發生側向挫屈，如繼續施加軸向壓縮，則該梁會如圖 1 (b) 所示以第一挫屈模態朝垂直於軸方向的側方向拱起[21,22,26,29]，其大小可以用梁中點的側向位移 δ 表示， δ 的大小與 Δ 有非線性的關係，通常很小的 Δ ，即可使此挫屈梁有很大的側向位移 δ 及旋轉[26]。

如圖 1 (b) 所示之挫屈梁在將其軸向兩端固定 (clamped-clamped) 後，再施加側向的負荷，這時梁的行為表現與曲梁類似，文獻上有很多關於曲梁的分析，其平衡路徑會受到側向拱起高度 δ 的影響，當 δ 較小時，其位移－負荷曲線存在如圖 2 所示之極限點 (limit point) (點 L_1^a, L_2^a) [28]，有跳躍挫屈 (snap through buckling) 的現象，且在同一負荷下存在兩個穩定的平衡位置 (bistable) [26]，當側向拱起高度 δ 較大時，其位移－負荷曲線存在如圖 2 所示之極限點 (點 L_1^b, L_2^b) 及分歧點 (bifurcation point) (點 B_1^b, B_2^b) [28]，若分歧點先出現，則先有分歧挫屈 (bifurcation buckling) 的現象。如圖 2 所示，在梁結構發生跳躍行為後 (不論是分歧點先出現或是極限點先發生)，其位移－負荷曲線在側向力為零時存在雙穩態，即梁結構存在兩個穩定平衡位置 (點 S_1, S_2^a 及點 S_1, S_2^b)，這種機械特性很廣泛的被運用。

文獻上有不少挫屈梁相關的研究[3-5,8,12-14,20-27,29]。文獻[29]中，Tseng 等人以假設模態法，假設其側向振動位移為前兩個挫屈模態的組合，分析挫屈梁受大幅度基礎振動的非線性振動，並且用實驗驗證其分析結果，所使用的梁如圖 1，尺寸為 $L_T = 18in$ ， $h = 0.021in$ ， $b = 0.5in$ ，不過文獻[29]中僅分析拱起高度很小 ($\delta/h \leq 1.5$) 的範圍，而且只有探討第一模態的振動。

文獻[23]中以 Runge-Kutta (RK-4) 的數值積分法解非線性運動方程式，來分析挫屈梁受到正弦均佈力的非線性動態反應，[23]考慮的拱起高度為 $\delta/h \leq 2$ 。

文獻[24]分析二個中間固定的平行曲梁受側向負荷的位移，梁的形狀為直梁受軸力壓縮後之第一挫屈模態，文中假設其側向位移為直梁受軸力之各種挫屈模態組合，用模態分析與有限元素法分析來模擬不同初始拱起高度曲梁之側向負荷與中點位移的關係與挫屈後行為，文獻[24]之梁的尺寸為 $L_T = 3000\mu m$ ， $h = 10\mu m$ ， $b = 540\mu m$ ，拱起高度 $\delta = 60\mu m$ 的曲梁，文獻[24]中 $\delta/h = 6$ 。

文獻[22]考慮了曲梁製造時的初始殘留應力，分析梁受側向分佈力時的形狀變化，因為一個挫屈梁通常是直梁受軸向壓力製造，但是之前的文獻在分析原本製造形狀為曲梁時很少考慮殘留應力，文中考慮的梁形狀尺寸為 $L_T = 2000\mu m, 3000\mu m$ ， $h = 5\mu m$ ， $b = 10\mu m$ ，拱起高度 $\delta \leq 30\mu m$ ，探討曲梁的平衡路徑、跳躍行挫屈與雙平衡位置，同時也有與實驗結果比較，結果相當吻合。文獻[24]中 $\delta/h \leq 6$ 。

文獻[25]將 $L_T = 560\mu m$ ， $h = 0.5\mu m$ ， $b = 590\mu m$ 的直梁軸向跨度壓縮到 $500\mu m$ ，拱起高度為 $\delta = 90.5\mu m$ ，再將支撐在其上的顯微鏡片旋轉 $\pm 15^\circ$ ，文中將挫屈梁視為非線性彈簧，用實驗測量及內插法求此非線性彈簧之位移負荷曲線，但是並沒有用理論分析或數值模擬挫屈梁的非線性行為。文獻[24]中 $\delta/h = 181$ 。

文獻[3]分析拱起高度較高 ($\delta/h > 100$) 時的兩端固定挫屈梁，受到大幅度振動的動態行為，並且以微結構尺寸的實驗佐證，實驗的拱起高度達到 $\delta/h = 200$ ，[3]中發現當挫屈梁受到大幅度振動時可會發在兩個平衡位置間生動態的跳躍現象，並且有簡諧 (simple harmonic motion, SHM) 與超諧運動，文獻[3]的分析與實驗的對照現象相符，不過僅有定性的比較，並沒有詳細的數據比較。

除了文獻[3,25]外，文獻上分析的挫屈梁之拱起高度 δ/h 都很小，大都小於 10，但

文獻上分析挫屈梁受力時的靜態及動態行為時，不管側向拱起高度大小，大都僅考慮側向位移，並使用假設模態法，並假設其側向振動位移為直梁受軸力之挫屈模態的組合，通常假設為前兩個挫屈模態的組合。在拱起高度較小（ $\delta/h \leq 10$ ）的時候，梁挫屈前後的變形很小，故忽略梁的軸向位移的平衡方程式，在靜態行為時的分析結果相當準確，文獻上[12,13,22,24,26]也提供了分析與實驗結果的佐證，在動態分析的部分，文獻[23,29]中假設側向振動位移為前兩個挫屈模態的組合，得到的結果與實驗大致吻合，但是文獻[29]中提到 $\delta/h > 1.5$ 時，其實驗結果並不可靠。

當挫屈梁拱起高度較大（ $\delta/h \geq 100$ ）時，文獻[3,25]在靜態分析時仍然只考慮側向位移，並沒有考慮到軸向位移在大拱起高度時可能不能忽略，在動態分析上仍然使用假設模態法[8,29]，假設其側向振動位移為直梁受軸力之前兩個挫屈模態的組合，且結構的軸向力為均勻分佈，但是大拱起高度的振動頻率與振動模態與挫屈前的直梁差異性非常大，與挫屈模態可能有更大的出入，文獻[3,25]之假設在 δ 很大時的適用性值得進一步探討。

本研究的主要目的為考慮幾何非線性，以共旋轉有限元素法[15-19]探討不同拱起高度 δ 之挫屈梁的初始變形及振動模態，檢驗證文獻中挫屈梁之初始變形的解析解[12]、挫屈梁之振動頻率的解析解[20]之適用範圍。本文也探討不同拱起高度 δ 之挫屈梁受側向集中負荷時，平衡路徑上的臨界點，不同 δ/h 之挫屈梁的臨界點對應的位移或負荷可以連成曲線，稱為摺線（fold lines）或臨界子集合路徑（critical subset paths）[9-11]。臨界位移或負荷對 δ/h 的摺線可提供不同 δ/h 之挫屈梁受側向負荷時，其非線性行為的特性。

本研究中採用弧長控制法[7,15]解非線性平衡方程式。自然振動的頻率方程式為一廣義的標準特徵值問題（generalized standard eigenvalue），本文以子空間迭代法（subspace iteration method）[1]解廣義的標準特徵值問題，追蹤平衡路徑上結構自然振動頻率與振動模態的變化，並比較振態與挫屈模態在不同 δ/h 的差異。本文在偵測臨界點時，利用廣義增量迭代法[2,9-11]，增加約束條件到原本的平衡方程式中，形成延伸系統（extended system），直接找臨界點的摺線，省去 δ/h 改變時重複計算平衡路徑的步驟。

本研究以數值例題探討不同細長比之挫屈梁在不同壓縮位移之拱起高度。本研究亦以數值例題探討不同細長比、不同拱起高度之挫屈梁的自然頻率及振態的變化、不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為

第二章 理論推導

本章採用一致性共旋轉有限元素法[15-19]，在當前的元素座標上推導梁元素之節點變形力、節點慣性力、剛度矩陣及慣性矩陣。本章推導梁元素的方法與文獻[19]中的方法大致相同，在此僅簡單的描述推導過程。

2.1 基本假設

本文推導梁元素時，做了以下的假設：

- (1) Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量（unit extension）為均勻的(uniform)。
- (3) 梁元素的變形位移與旋轉為小位移與小旋轉。
- (4) 梁元素的應變為小應變。

如果元素的尺寸足夠小，則基本假設(3)一定可以滿足。基於假設(4)，本文使用工

程應變(engineering strain)與工程應力作為梁元素的應變與應力之度量，為了推導方便，本文中工程應變是由與其對應的Green strain求得。

2.2 座標系統描述

本文是使用有限元素法，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素，節點1及節點2為元素的兩個端點。為了描述系統的運動與梁元素的位移、變形，本文定義了兩組座標系統（圖3）：

(1) 總體座標系統（Global coordinates） X_1 、 X_2

梁結構的節點座標、節點位移、節點速度、節點加速度、系統的運動方程式均在此座標系統中定義。

(2) 元素座標系統（Element coordinates） x_1 、 x_2

元素座標系統是建立在每一梁元素當前的變形位置上，如圖3所示，元素座標系統的原點是定義在節點1上， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 軸的方向由右手定則決定，本文中梁元素的位移、變形、速度、加速度及運動方程式，均在此座標中定義。

2.3 梁元素的變形描述

本文是在元素座標上描述梁元素的變形與幾何形狀。由2.2節中的假設可知，梁元素的變形可由其形心軸在元素座標上的位移及其斷面的旋轉決定。本文採用梁元素變形前形心軸的長度為獨立變數。

圖4中的 Q 點為梁中的任意點， P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於梁的同一斷面上。在元素座標上， P 點在梁變形前後的位置向量可分別表示為 $\{x, 0\}$

與 $\{x_p(x, t), v(x, t)\}$ 。其中 t 為時間， $x_p(x, t)$ 及 $v(x, t)$ 分別是 P 點在 x_1 與 x_2 軸方向的座標。 Q 點在梁變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = \{x, y\} \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = \{x_p - y \sin \theta, y \cos \theta + v\} \quad (2)$$

$$\sin \theta = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{,x}}{1 + \varepsilon_0} \approx (1 - \varepsilon_0) v_{,x} \quad (3)$$

$$\cos \theta = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \approx (1 - \theta^2)^{1/2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial s - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (5)$$

其中 x 、 y 分別為梁變形前 Q 點在 x_i ($i = 1, 2$) 軸的座標， θ 為 x_1 軸和形心軸的切線向量的夾角， s 為 o 點到 P 點間形心軸在變形後的弧長，而 ε_0 為形心軸的單位伸長量。由(4)、(5)式及2.2節中的假設(3)， $x_p(x, t)$ 可以近似成下式

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2) dx \quad (6)$$

其中 u_1 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零，但其變分及對時間的微分並不為零。

由(6)式及基本假設(2)可以得到形心軸的單位伸長量 ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 dx \quad (7)$$

$$l = L + u_2 - u_1$$

其中 L 為梁變形前的長度， l 為梁之形心軸變形後的弦長， u_2 為節點 2 在 x_1 方向的位移。

本文中的應變採用工程應變。為了推導上的方便，本文中先推導出 Green strain ε_{ij} ，再由 Green strain 求得與其對應之工程應變。Euler 梁的 Green strain 非為零的應變只有 ε_{11} ，可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,x} - 1) \quad (8)$$

Green strain ε_{11} 與工程應變 e_{11} 間的關係如下[6]

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \quad (9)$$

由(2)、(8)及(9)式，且保留變形參數及其微分到二次項，可得工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0) \gamma v_{,xx} \quad (10)$$

本文中假設梁元素變形後的形心軸的側向位移 $v(x)$ 為 x 的三次 Hermitian 多項式。因此(2)式之 $v(x)$ 可表示成

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (11)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi), \quad (12)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (13)$$

其中 $v_j (j=1,2)$ 是 v 在節點 j 的節點值， v'_j 則是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 在節點 $j (j=1,2)$ 之節點值， $N_i (i=1-4)$ 代表形狀函數(shape function)。

2.4 梁元素的節點內力

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在座標上求對應於元素節點參數的元素節點內力。若給端點 $j (j=1,2)$ 一個虛位移 δu_j 、 δv_j 和 $\delta \theta_j$ ，則由虛功原理可知，對應於該端點的虛位移、外力所作的虛功 δW_{ext} 等於內力所作的虛功 δW_{int} 即

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (14)$$

在本推導中 δW_{ext} 為元素的節點內力 $\mathbf{f}_\theta$ 對節點虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所做的功，可表示成

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}_a^{\theta t} \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^{\theta t} \mathbf{f}_b^\theta \quad (15)$$

其中

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta \theta_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta \theta_2\} \quad (16)$$

$$\delta \mathbf{u}_a^\theta = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (17)$$

$$\delta \mathbf{u}_b^\theta = \{\delta v_1, \delta \theta_1, \delta v_2, \delta \theta_2\} \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{f_{11}^\theta, f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{12}^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_a^\theta = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\} = \mathbf{f}_a^{D\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \{f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} = \mathbf{f}_b^{D\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (21)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_a^\theta$ 為軸方向的虛位移， $\delta \mathbf{u}_b^\theta$ 為側向的虛位移， $\mathbf{f}_a^\theta$ 、 $\mathbf{f}_b^\theta$ 為對應於 $\delta \mathbf{u}_a^\theta$ 、 $\delta \mathbf{u}_b^\theta$ 的節點力， θ_j ($j=1,2$) 為節點 j 的轉角， f_{ij}^θ ($i=1,2, j=1,2$) 為節點 j 在 x_i 方向的節點力， m_j^θ ($j=1,2$) 為節點 j 的力矩， $\mathbf{f}_a^{D\theta}$ 及 $\mathbf{f}_b^{D\theta}$ 為與變形有關的節點內力， $\mathbf{f}_a^{I\theta}$ 及 $\mathbf{f}_b^{I\theta}$ 為與慣性力有關的節點內力。

內力所作的虛功又分成虛應變所造成的虛功及將慣性力(質量與負的加速度之乘積)併入微體力(body force)所作的虛功，故內力所作的虛功可以表示成：

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \quad (22)$$

其中 E 為楊氏係數， ρ 為梁的密度， V 為梁在未變形前的體積， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為加速度。(2.4.9)式中，右式的第一項為應力所作的虛功，第二項為慣性力所作的虛功。

由(2)-(7)、(10)-(13)、(14)-(22)式，並保留變形參數及其微分到二次項可以得到

$$\mathbf{f}_a^{D\theta} = EA \varepsilon_0 \mathbf{G}_a - \frac{EI}{L} \varepsilon_0 \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_a^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_b^{D\theta} = \mathbf{T}_{\theta b}^t [EI(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12}^{D\theta} \int \mathbf{N}_b' v_{,x} dx] \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_b^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b' \ddot{v}_{,x} dx - 2 \frac{\rho I(1-\varepsilon_0)}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}_b' \dot{v}_{,x} dx \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (27)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (28)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (29)$$

$$\mathbf{T}_{\theta b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.5 元素的剛度矩陣

依元素切線剛度矩陣的定義可得

$$\mathbf{k}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}^{D\theta}}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (31)$$

其中 $\mathbf{k}^\theta$ 為元素切線剛度矩陣， $\mathbf{f}^{D\theta}$ 為元素變形節點內力， $d\mathbf{q}_\theta$ 表示節點參數向量 $\mathbf{q}_\theta$ 之真實擾動量。 $\mathbf{f}^{D\theta}$ 可以由(23)、(25)式中的 $\mathbf{f}_a^{D\theta}$ 、 $\mathbf{f}_b^{D\theta}$ 組成，元素切線剛度矩陣 $\mathbf{k}^\theta$ 可由下列的次矩陣組合而成。

$$\mathbf{k}_{aa}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_a^\theta} = \frac{EA}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t - \frac{EI}{L^2} \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t \quad (32)$$

$$\mathbf{k}_{ab}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = -2 \frac{EI\varepsilon_0}{L} \mathbf{G}_a \int v_{,xx} \mathbf{N}_b''^t dx \mathbf{T}_{\theta b}^1 \quad (33)$$

$$\mathbf{k}_{ba}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_a} = -2EI\varepsilon_0 \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx \mathbf{G}_a^t \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{bb}^\theta &= \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{D\theta}}{\partial \mathbf{u}_b} \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \mathbf{u}_b^\theta} = \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} f_{12}^{D\theta} \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx \mathbf{T}_{\theta b}^1 \\ &\quad + \mathbf{T}_{\theta b}^{1^t} (EI(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx) \mathbf{T}_{\theta b}^1 \end{aligned} \quad (35)$$

2.6 元素的質量矩陣

元素的質量矩陣 $\mathbf{m}^\theta$ 可表示成

$$\mathbf{m}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \quad (36)$$

其中 $\mathbf{f}^{I\theta}$ 可以由(24)、(26)式中的 $\mathbf{f}_a^{I\theta}$ 、 $\mathbf{f}_b^{I\theta}$ 組成， $\ddot{\mathbf{q}}_\theta$ 是元素的節點加速度，可以表示成

$$\ddot{\mathbf{q}}_\theta = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\} \quad (37)$$

$\mathbf{m}^\theta$ 為一對稱矩陣，可由下列的次矩陣，利用直接勁度法[16]組合而成

$$\mathbf{m}_{ij}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_i^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j}, \quad (38)$$

其中 $i, j = a, b$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_a^\theta = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2\}$ ， $\ddot{\mathbf{u}}_b^\theta = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\}$

由(24)、(26)和(38)式可得

$$\mathbf{m}_{aa}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (39)$$

$$\mathbf{m}_{ab}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0} \quad (40)$$

$$\mathbf{m}_{ba}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (41)$$

$$\mathbf{m}_{bb}^\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_b^{I\theta}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx = \mathbf{m}_T + \mathbf{m}_R \quad (42)$$

2.7 系統平衡方程式

本研究考慮的負荷有力負荷及位移負荷兩種，所以非線性系統的運動方程式可表示成

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \lambda_f \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (43)$$

其中 Ψ 為系統的不平衡力， $\mathbf{F}$ 為系統節點內力， $\mathbf{Q}$ 為系統的節點位移， λ_d 為位移負荷參數， $\mathbf{Q}_d$ 為參考位移負荷向量， λ_f 為力負荷參數， $\mathbf{P}$ 為參考力負荷向量，其中 $\mathbf{F}$ 由系統節點變形力 $\mathbf{F}^D$ 、系統節點慣性力 $\mathbf{F}^I$ 組成。 $\mathbf{F}^D$ 及 $\mathbf{F}^I$ 可由(23)–(26)式中的元素節點變

形力、元素節點慣性力從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。本研究在每一增量平衡迭代的過程中，將 λ_d 或是 λ_f 的值固定，(43)式中之 λ 在迭代中代表 λ_d 或是 λ_f 中可變動的負荷參數。

若不考慮慣性力，則(43)式為非線性平衡方程式。本研究中採用弧長控制法[7]解非線性平衡方程式。若將(43)式在靜態平衡的位置，用泰勒級數展開到一次項，則可得到系統在靜態平衡點的線性振動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (44)$$

其中 $\mathbf{M}$ 為系統的質量矩陣， $\ddot{\mathbf{Q}}$ 為系統的節點加速度， $\mathbf{K}$ 為系統的切線剛度矩陣， $\overline{\mathbf{Q}}$ 為靜態平衡點算起的系統節點位移。 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 是由元素的質量矩陣、切線剛度矩陣從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。

若振動方程式(44)式存在自然振動頻率，則其解的形式可以表示如下

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi} e^{i\omega t} \quad (45)$$

其中 $\mathbf{\Phi}$ 是振態， ω 是自然振動頻率。將(45)式代入(44)式可得

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{\Phi} \quad (46)$$

(46)式為一廣義特徵值問題，振動模態 $\mathbf{\Phi}$ 是特徵向量，特徵值是 ω^2 。本研究中用子空間法[1]求挫屈梁的自然振動頻率及振態。

第三章 挫屈梁的初始變形及自由振動分析

本章中將採用第二章的共旋轉有限元素法，在 3.1 節探討挫屈梁初始變形並與解析解比較，以檢驗解析解的準確性及適用範圍，在 3.2 節探討挫屈梁的自然振動頻率及振態並與文獻上的解析解及實驗結果比較。

本章中分析時，僅考慮長方形斷面的梁，梁的材料及幾何常數如下：彈性模數 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，密度 $\rho = 7874 \text{ kg/m}^3$ ，長度 $L_T = 0.64 \text{ m}$ ，寬度 $b = 1.95 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，高度 $h = \sqrt{12} L_T / \eta$ ，其中 $\eta = \sqrt{\frac{AL_T^2}{I}}$ 為細長比。在分析時將梁離散為 64 個元素。除另有說明外，本章中都使用細長比 $\eta = 5818.96$ ，高度 $h = 3.81 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的梁

3.1 挫屈梁的初始變形

如圖 1 所示，兩端受到側向夾持的固端梁，一端受軸向壓縮 Δ ，當壓縮量到達其挫屈臨界值 $\Delta_{cr} = 4\pi^2 / \eta^2$ 時，會發生挫屈現象，本節中用切線剛度之行列式值為零，作為判斷挫屈的準則，再以挫屈模態為擾動位移，使梁進入次要平衡路徑，求得挫屈梁之初始變形。圖 5、6 為本文的結果，圖 5 為挫屈梁的無因次中點側向位移 δ/h -無因次壓縮量 $\zeta (= \Delta / \Delta_{cr})$ 曲線，圖 6 為無因次端點軸向反力 P / P_{CR} -梁中點的側向位移 δ / L_T 的曲線。

圖 5 中的解析解為 $\frac{\delta}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1}$ [12]，該解析解是由以下假設求得的：梁挫屈後的

中心軸不可伸縮，且其側向位移為其第一挫屈模態，即 $v(x) = \frac{\delta}{2} (1 - \cos \frac{2\pi x}{L})$ 。由圖 5 可以發現當 $\delta/h < 30$ ，不同細長比 η 的梁之 δ/h - ζ 曲線及解析解幾乎重合，但當 $\delta/h > 120$ 時，解析解和 $\eta \leq 3000$ 之 δ/h - ζ 曲線的差異逐漸增加。由本文的數值結果發現，當

$\delta/h=200$ 時， $\eta=3000$ 的梁之撓屈應變小於 0.003，通常仍在彈性範圍內，所以 $\eta=3000$ 左右之挫屈梁的 δ/h 可以超過 200。由圖 5 亦可以發現 $\eta=10000$ 時， $\delta/h-\zeta$ 曲線的數值解與解析解幾乎重合，所以解析解適用的範圍與細長比 η 的大小有關。由圖 6 可以發現不同細長比 η 的梁之 $P/P_{CR}-\delta/L_T$ 曲線幾乎重合；本文圖 6 的結果與文獻[14]中假設梁無伸長變形之 elastica 的結果非常接近，所以當挫屈程度較大時，文獻[14]中忽略挫屈梁的軸向變形應是恰當的。由圖 6 亦可以發現當 $\delta/L_T \ll 1$ 時， $P/P_{CR} \approx 1$ ，但當 δ/L_T 約為 0.19 時， $P/P_{CR} \approx 1.05$ 。但解析解中假設其側向位移為其第一挫屈模態，所以不管 δ/L_T 的大小，其 P/P_{CR} 都等於 1，因解析解之軸向反力的誤差隨挫屈程度增加而增加，所以圖 5 中之解析解的誤差亦隨挫屈程度增加而增加。

3.2 挫屈梁的自然振動頻率及振態

本節中將探討挫屈梁之無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ，其中 $m=\rho A$ 為梁的線密度，與無因次壓縮量 $\zeta(=\Delta/\Delta_{cr})$ 、無因次側向挫屈位移 δ/h 或 δ/L_T 、及細長比 η 的關係。本文的數值分析發現， $\eta=500$ ， $\delta/h=24.4$ ($\delta/L_T=0.169$)， $\varepsilon_b^{\max}=0.0120$ ； $\eta=1000$ ， $\delta/h=90.3$ ($\delta/L_T=0.313$)， $\varepsilon_b^{\max}=0.0126$ ； $\eta=3000$ ， $\delta/h=271$ ($\delta/L_T=0.313$)， $\varepsilon_b^{\max}=4.20 \times 10^{-3}$ 。因本文中假設應變為小應變且在彈性限內，所以本節中對不同細長比 η 的挫屈梁，考慮不同的最大無因次側向挫屈位移 δ/h 或 δ/L_T 。

圖 7—9 為本文的結果，圖 7 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ -無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 3, i=1, 2$)，圖 8 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ -無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 8, i=1-7$)，圖 9 為挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ -無因次側向位移 δ/h 的曲線 ($\delta/h < 50, i=1-4$)。

由圖 7 可以發現固端梁在挫屈後，對應於第一及第二個振態之自然振動頻率的變化，在挫屈時 ($\zeta=1, \delta/h=0$)， $\omega_1=0$ ；在挫屈後 ($\zeta>1$)， ω_1 隨著 ζ 增加而增加，且在 $\zeta=3.5$ ($\delta/h<1.8$) 左右超越 ω_2 ， ω_2 幾乎沒有改變。由圖 7 可以發現，當 $\delta/h<1.5$ ，本文的 ω_1 與[29]的實驗及分析結果、[8,20,21]的分析結果都很接近，當 $\delta/h>1.5$ ，本文的 ω_1 與[8,20,21]的分析結果很接近，但偏離[29]的實驗及分析結果，[29]提到 $\delta/h>1.5$ 時，其實驗結果是不可靠的。本文的 ω_2 與[8,20,21]的分析結果很接近。由圖 8 可以發現，當 $\delta/h \leq 8$ ，本文的 ω_i ($i=1-7$) 與[8,20,21]的分析結果很接近。本文圖 7、8 的 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 是由細長比 $\eta=5818.96$ 之挫屈梁求得的，在[8,20,21]中， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 與細長比 η 的大小無關，且當 i 是偶數時，不管 δ/h 的大小， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 為一個常數，但由圖 9 可以發現，當 $\delta/h>10$ 除了 $i=2$ 以外， $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ 的大小都與細長比 η 及 δ/h 的大小有關。由圖 9 亦可以發現不同細長比 η 的挫屈梁之 $\omega_i/(EI/mL_T^4)^{1/2}$ ($i=1, 3, 4$) 的差異都隨 δ/h 增加而增加。

第四章 挫屈梁受側向負荷之幾何非線性分析

本例題將分析如圖 10 所示的挫屈梁受到側向集中負荷 P 時的平衡路徑及臨界負載，本例題僅考慮矩形斷面的直梁，其斷面寬度 $b = 1.95 \times 10^{-2} m$ ，高度 $h = \sqrt{12} L_T / \eta$ ，其中 η 為細長比，長度 $L_T = 0.64 m$ ，彈性模數 $E = 2.1 \times 10^{11} N/m^2$ 。在分析時除另有說明外，都使用斷面高 $h = 3.81 \times 10^{-4} m$ ，細長比 $\eta = 5818.96$ 的梁，並將其離散為 64 個元素。

令 Δ 為挫屈梁的軸向壓縮、 δ 為挫屈梁中點 C 的初始側向高度， δ_C 、 v_C 、 u_C 分別為中點 C 受負荷 P 後的側向高度，側向與軸向位移。圖 11 為無因次軸向壓縮量 $\zeta = 1.7, 2.2, 3$ 時的側向負荷 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -側向位移 $\frac{-v_C}{h}$ 曲線，其中 $\zeta = \Delta / \Delta_{CR}$ ， Δ_{CR} 為第一個側向挫屈模態發生時的軸向壓縮量。由圖 11 可以發現在平衡路徑上，臨界點的種類及位置會隨 ζ 不同而改變， $\zeta = 1.7$ 、 2.2 和 3 平衡路徑上都存在兩個極限點 $L_j^\zeta, j = u, d$ ，但只有在 $\zeta = 2.2$ 和 3 時，存在分歧點 $B_j^\zeta, j = u, d$ ，且 $\zeta = 2.2$ 時，分歧點發生極限點之後，即分歧點發生在不穩定區； $\zeta = 3$ 時，分歧點發生極限點之前，即分歧點發生在穩定區。若將不同 ζ 之挫屈梁受側向負荷時，其平衡路徑上之臨界點對應的位移(/高度)或負荷對 ζ 連成曲線，則稱為摺線 (fold lines)。臨界位移或負荷對 ζ 的摺線可提供不同 ζ 之挫屈梁受側向負荷時，其非線性行為的特性。

圖 12 為 $\zeta \leq 80$ 時， $\eta = 500, 10^4$ 的挫屈梁中點 C 的初始側向高度 δ 、分歧點高度 δ_{CR}^B/h 與極限點高度 δ_{CR}^L/h 在無因次化高度 $\frac{\delta_C}{h}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，圖 13 為同情情形下分歧點負載 P_{CR}^B 與極限點負載 P_{CR}^L 在無因次化負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面的摺線圖，在 $\zeta = 80$ ($\delta/h \approx 10$) 時， $\eta = 500$ 的挫屈梁最大撓曲應變約為 5×10^{-3} ，仍在結構的彈性範圍內，由圖 12,13 可以發現在 $\zeta \leq 80$ 時， $\eta = 500$ 的臨界點與 $\eta = 10^4$ 的無因次化結果相當接近，故在 $\delta/h < 10$ 時，不同細長比的挫屈梁臨界點對應的無因次負載與高度都很接近，所以不同細長比的挫屈梁可以共用同一摺線圖。由圖 12,13 亦可以得知除了 ζ 很小外，分歧點都比極限點先發生，且 ζ 愈大，兩者發生的位置相差愈遠。

圖 14 為 $\eta = 1000, 3000, 10^4$ 的梁在 $\zeta \leq 3 \times 10^4$ (拱起高度約 $\frac{\delta}{h} \leq 200$) 時，對應於分歧點之中點 C 的高度 δ_{CR}^B 與對應於極限點之中點 C 的高度 δ_{CR}^L 在無因次化高度 $\frac{\delta_C}{h}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面上的摺線圖，圖中 $\delta_{Analy.}$ 為中點 C 之初始側向高度，圖 15 為同情情形下分歧點點負載 P_{CR}^B 與極限點負載 P_{CR}^L 在無因次化負載 $\frac{PL_T^2}{EI}$ -軸向壓縮位移 ζ 平面上的摺線圖。由圖 14,15 可以看到在 $\zeta \geq 3000$ ($\frac{\delta}{h} > 60$) 時， $\eta = 1000$ 與 $\eta = 10^4$ 的極限點之無因次化結果有相當的差異，且 ζ 愈大，兩者的差異愈大；在 $\zeta \geq 12000$ ($\delta/h > 120$) 時， $\eta = 3000$ 與 $\eta = 10^4$ 的極限點之 δ_{CR}^L/h 有相當的差異，但對應於分歧點之 δ_{CR}^B/h 差異還不太大。故在 $\delta/h > 60$ 時，所以不同細長比的挫屈梁不可以共用同一摺線圖。

第五章 結論

本研究以共旋轉有限元素法及非線性梁理論的一致性二階線性化推導挫屈梁的平衡方程式及運動方程式。將挫屈梁的運動方程式用泰勒級數在挫屈梁的初始變形位置展開，取到一次項，求得挫屈梁線性振動的運動方程式。本研究探討了挫屈梁的初始變形與自然振動，及不同拱起高度之挫屈梁的受側力的非線性行為。

本研究的數值結果發現挫屈梁初始變形之解析解的適用範圍與挫屈梁細長比 η 的大小有關，細長比愈大，則解析解的適用範圍愈大。

本研究的數值結果發現，當挫屈梁拱起高度與梁之厚度比(δ/h)小於 50 時，挫屈梁前兩個無因次自然振動頻率與梁之細長比幾乎無關，這與文獻的結果一致；但當挫屈梁之 δ/h 大於 10 時其第三及第四個無因次自然振動頻率與 δ/h 及梁之細長比都有很大的關係。這與文獻上的結論不同，文獻上認為挫屈梁之第奇數個無因次自然頻率僅與挫屈梁之 δ/h 有關，與梁之細長比無關，第偶數個無因次自然頻率為一常數，與梁之 δ/h 、細長比都無關。

本研究的數值結果發現，當挫屈梁拱起高度與梁之厚度比(δ/h)小於 10 時，不同細長比的挫屈梁臨界點對應的無因次負載與高度都很接近，所以不同細長比的挫屈梁可以共用同一摺線圖；但當挫屈梁之 δ/h 大於 60 時，不同細長比的挫屈梁不可以共用同一摺線圖。

參考文獻

- [1] Bathe, K. J., "Finite element procedures" Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [2] Battini, J.-M., Pacoste, C., and Eriksson, A., "Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 16-18, pp. 2169–2185, 2003.
- [3] Buchaillet, L., Millet, O., Quevy, E., and Collard, D., "Post-buckling dynamic behavior of self-assembled 3D microstructures" *Microsystem Technologies*, Vol. 14, No. 1, pp. 69-78, 2007.
- [4] Casals-Terre, J., and Shkel, A. M., "Snap-action bistable micromechanism actuated by nonlinear resonance" *IEEE Sensors (IEEE Cat. No.05CH37665C)*, pp. 893–896, 2005.
- [5] Casals-Terre, J., Fargas-Marques, A., and Shkel, A. M., "Snap-action bistable micromechanisms actuated by nonlinear resonance" *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 17, No. 5, pp. 1082–1093, 2008.
- [6] Chung, T. J., "Continuous Mechanics" Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1988.
- [7] Crisfield, M. A., "A consistent corotational formulation for nonlinear, 3-dimensional, beam-elements" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 2, pp. 131–150, 1990.
- [8] Emam, S. A., "A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams" PhD dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2002.
- [9] Eriksson, A., "Fold lines for sensitivity analyses in structural instability" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, No. 1-2, pp. 77–101, 1994.
- [10] Eriksson, A., "Structural instability analyses based on generalised path-following" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 156, No. 1-4, pp. 45–74, 1998.
- [11] Eriksson, A., Pacoste, C., and Zdunek, A., "Numerical analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 179, No. 3-4, pp. 265–305, 1999.
- [12] Fang, W., and Wickert, J. A., "Post buckling of micromachined beams" *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 4, No. 3, pp. 116–122, 1994.
- [13] Gerson, Y., Krylov, S., Ilic, B., and Schreiber, D., "Large displacement low voltage multistable micro actuator" *21st IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS 2008)*, pp. 463 – 466, 2008.
- [14] Heijden, G. H. M., Neukirch, S., Goss, V. G. A., and Thompson, J. M. T., "Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods." *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 161-191, 2003.
- [15] Hsiao, K. M. and Hou, F. Y., "Nonlinear finite-element analysis of elastic frames" *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 4, pp. 693–701, 1987.
- [16] Hsiao, K. M., and Jang, J. Y., "Nonlinear dynamic analysis of elastic frames" *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 4, pp. 1057–1063, 1989.
- [17] Hsiao, K. M., and Jang, J. Y., "Dynamic analysis of planar flexible mechanisms by corotational formulation" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 87, No. 1, pp. 1–14, 1991.
- [18] Hsiao, K. M., "Corotational total lagrangian formulation for 3-dimensional beam element" *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 3, pp. 797–804, 1992.
- [19] Hsiao, K. M., Yang, R. T., and Lee, A. C., "A consistent finite element formulation for

- non-linear dynamic analysis of planar beam” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 1, pp. 75–89, 1994.
- [20] Nayfeh, A. H., Kreider, W., and Anderson, T. J., “Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams.” *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, pp. 1121–1126, 1995.
 - [21] Nayfeh, A. H., and Emam, S. A., “Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 54, No. 4, pp. 395–408, 2008.
 - [22] Park, S., and Hah, D., “Pre-shaped buckled-beam actuators: Theory and experiments” *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186–192, 2008.
 - [23] Poon, W. Y., Ng, C. F., and Lee, Y. Y., “Dynamic stability of a curved beam under sinusoidal loading” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 216, No. G4, pp. 209–217, 2002.
 - [24] Qiu, J., Lang, J. H., and Slocum, A. H., “A curved-beam bistable mechanism” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 137–146, 2004.
 - [25] Quévy, E., Buchaillot, L., Bigotte, P., and Collard, D., “Large stroke actuation of continuous membrane for adaptive optics by 3D self-assembled microplates” *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 95, No. 2, pp. 183–195, 2002.
 - [26] Rossiter, J., Stoimenov, B., and Mukai, T., “A bistable artificial muscle actuator” *2006 IEEE International Symposium on Micro- NanoMechatronics and Human Science (IEEE Cat. No. 06TH8922C)* pp. 35–40, 2006.
 - [27] Samuel, B. A., Desai, A. V., and Haque, M. A., “Design and modeling of a MEMS pico-Newton loading/sensing device” *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 127, No. 1, pp. 155–162, 2006.
 - [28] Tsai, M. H., Chang, C. W., and Hsiao, K. M., “Nonlinear analysis of planar beams under displacement loading” *The First South-East European Conference on Computational Mechanics, SEECCM-06*, Kragujevac, Serbia and Montenegro, 2006.
 - [29] Tseng, W. Y., and Dugundji, J., “Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 2, pp. 467–476, 1971.
 - [30] 黃智傑, “旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析” 國立交通大學機械工程學系, 碩士論文, 台灣, 新竹, 2001

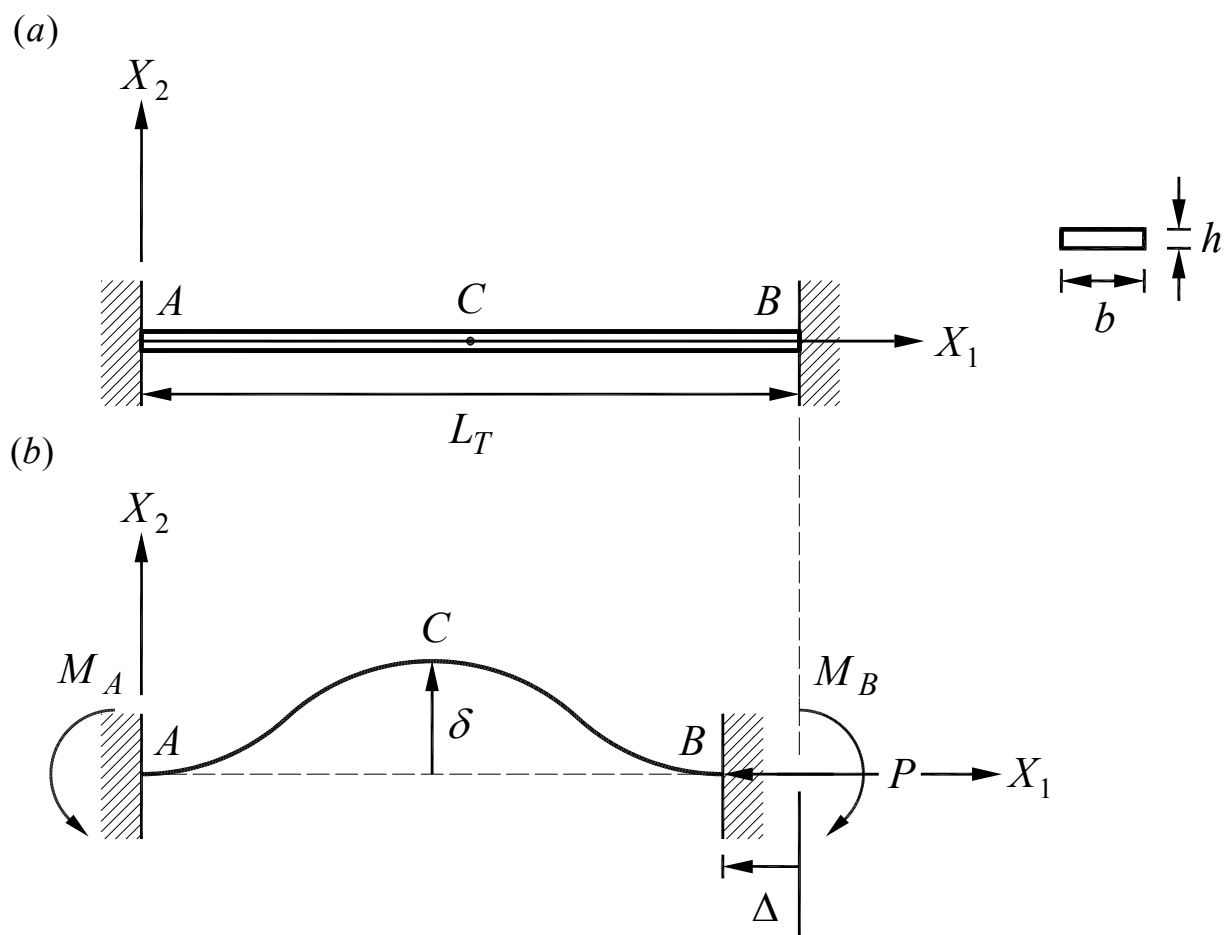


圖 1 直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖

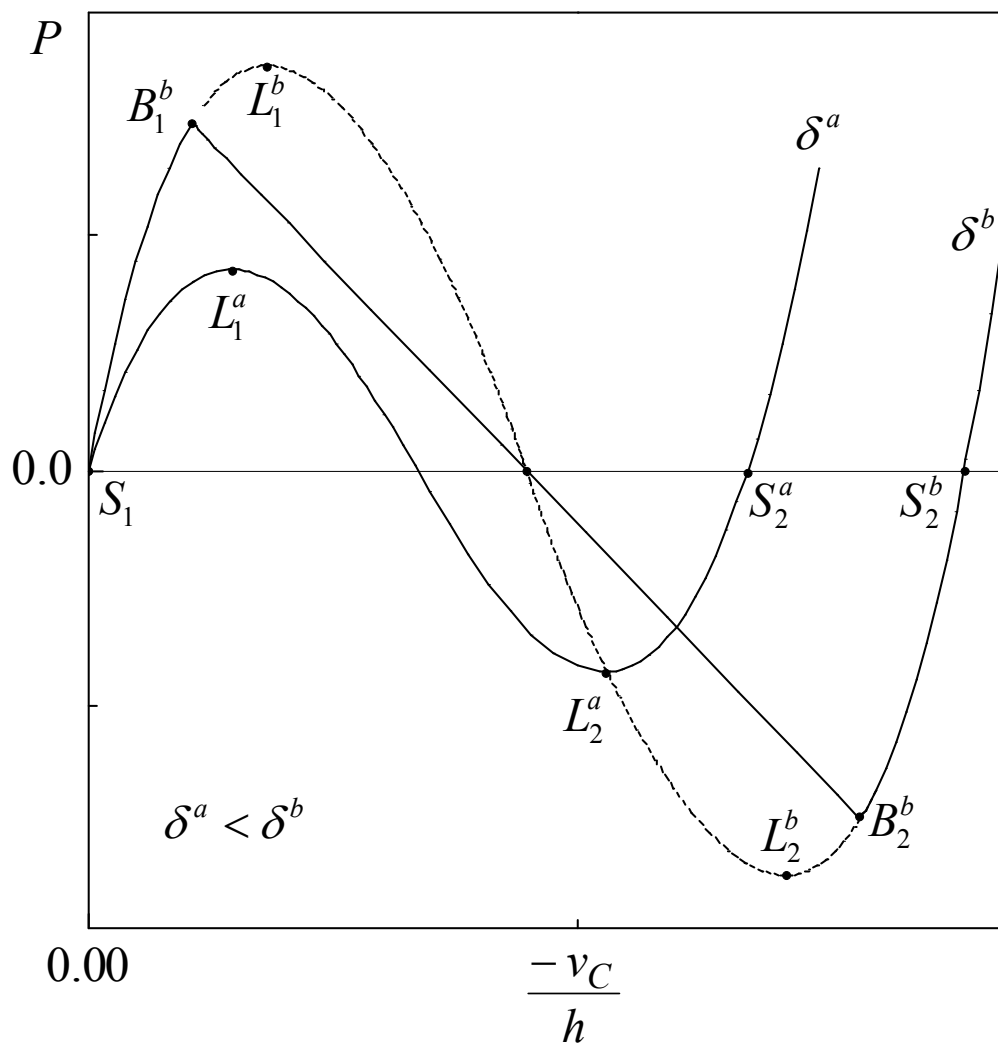


圖 2 挫屈梁受側向集中力 P 的位移-負荷曲線圖

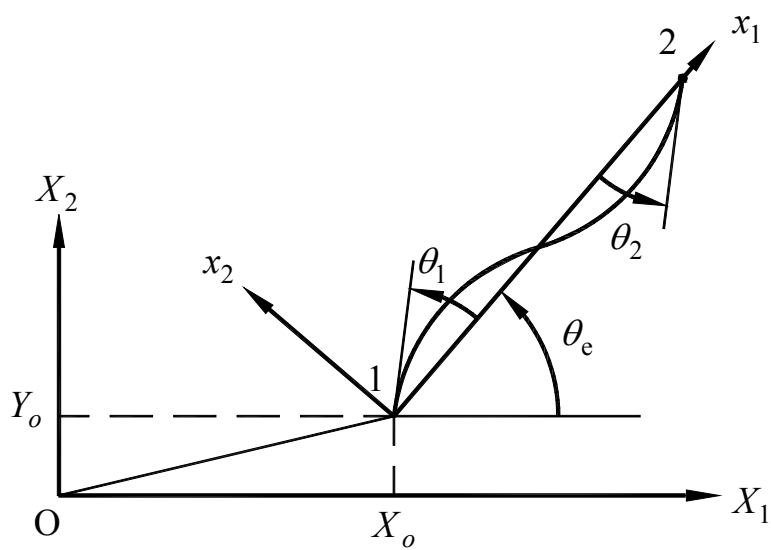


圖 3 元素座標系統及總體座標系統關係圖

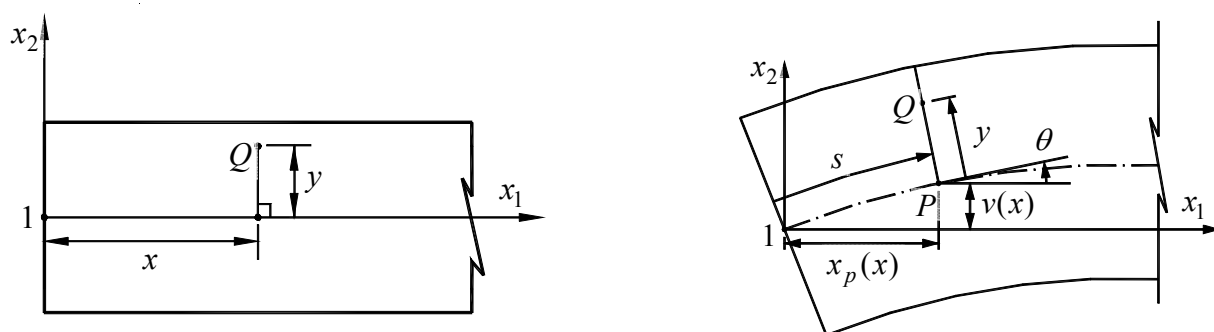


圖 4 梁的變形圖

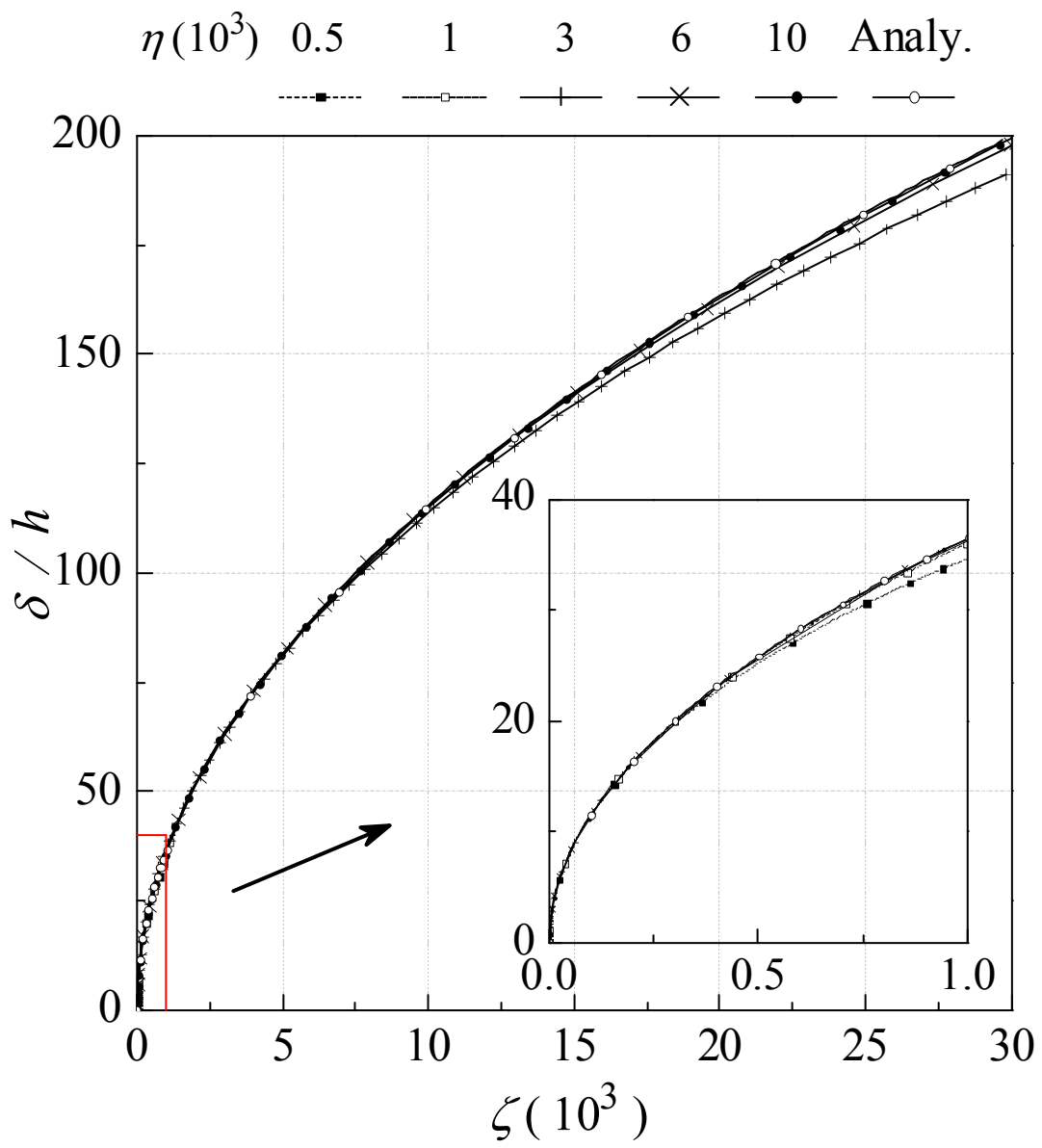


圖 5 挫屈梁的 $\frac{\delta}{h}-\zeta$ 曲線

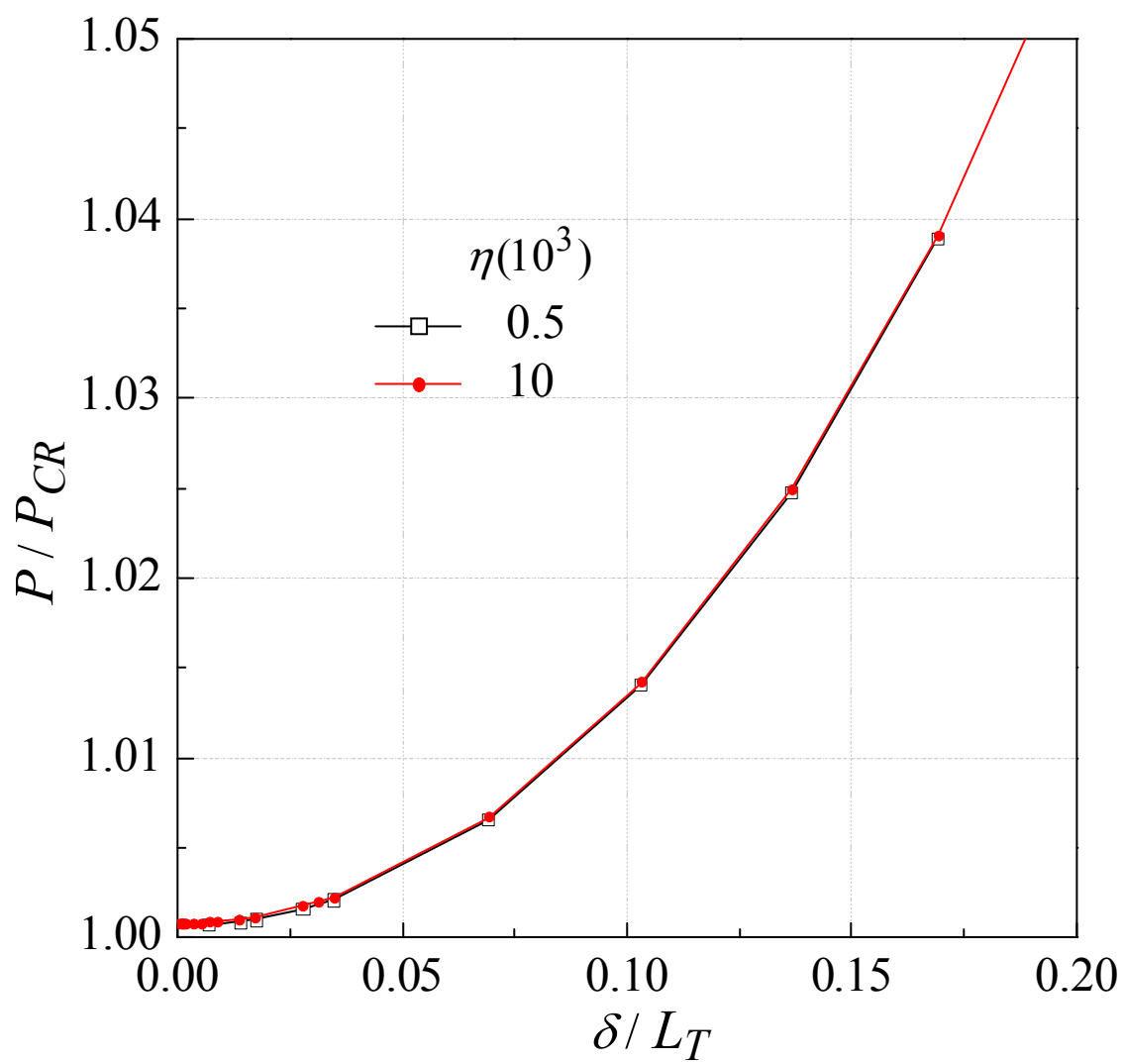


圖 6 挫屈梁的無因次端點軸向反力 P/P_{CR} - 中點側向位移 δ/L_T 曲線

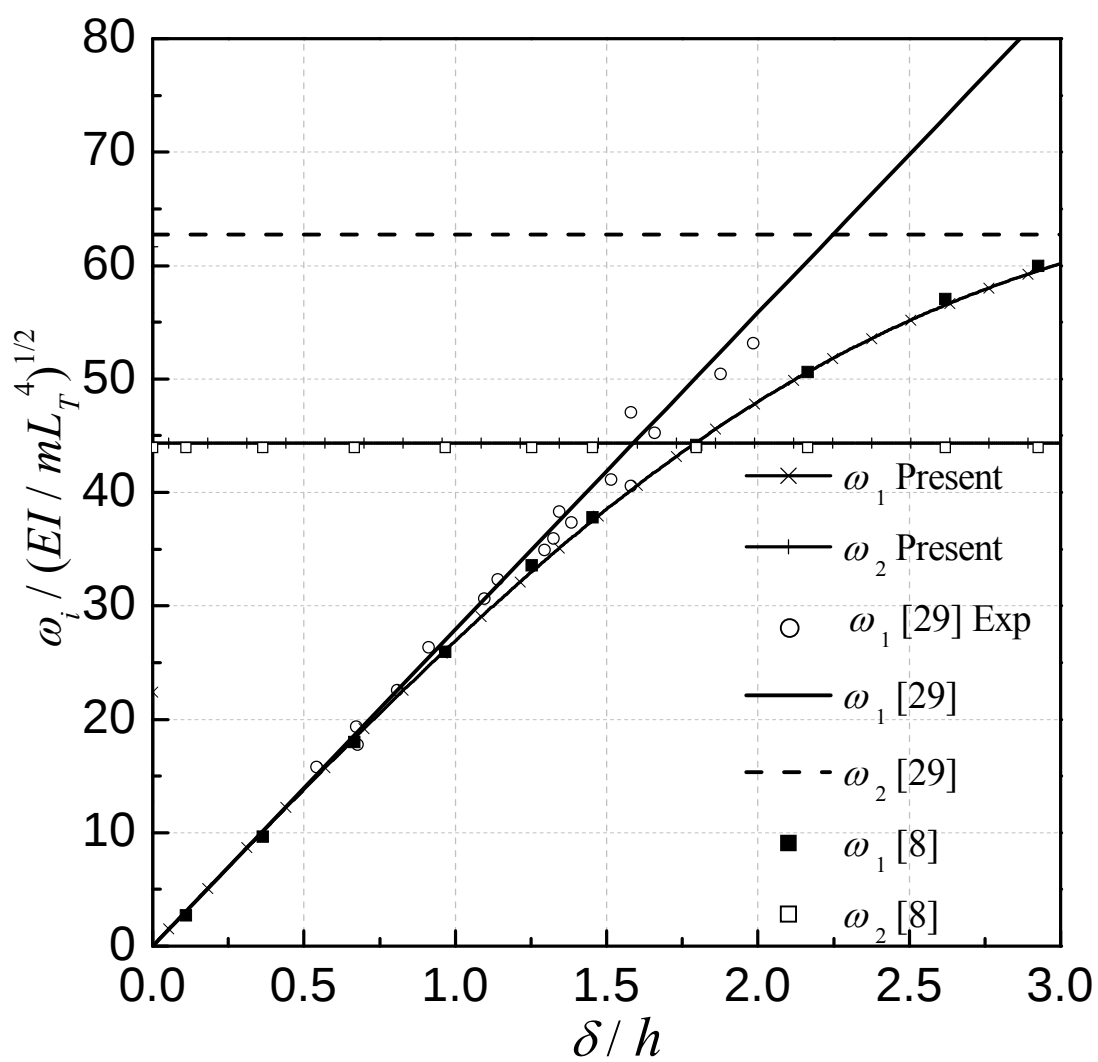


圖 7 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ/h 的曲線
 $(\delta/h \leq 3, i=1,2)$

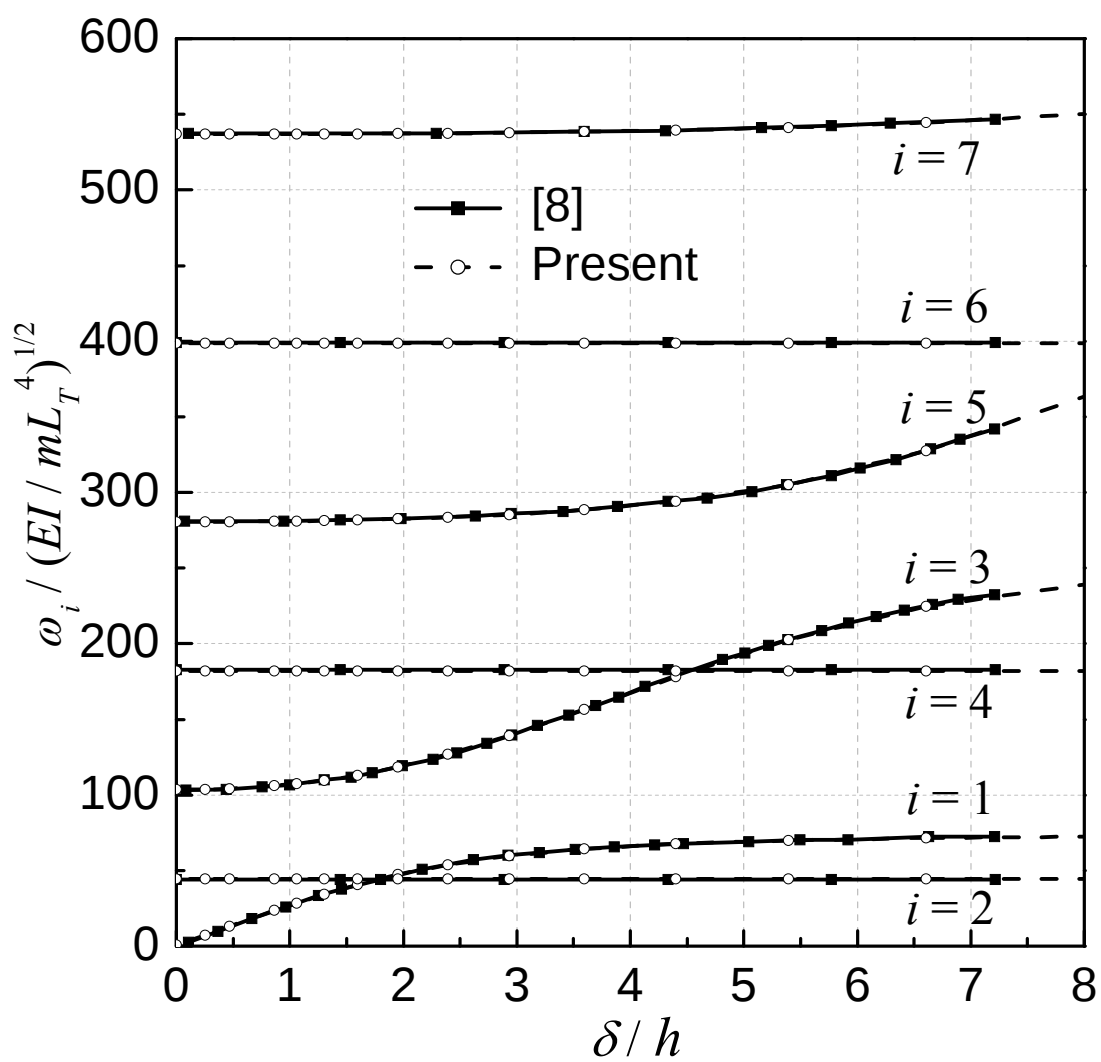


圖 8 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ / h 的曲線
($\delta/h \leq 8, i=1,7$)

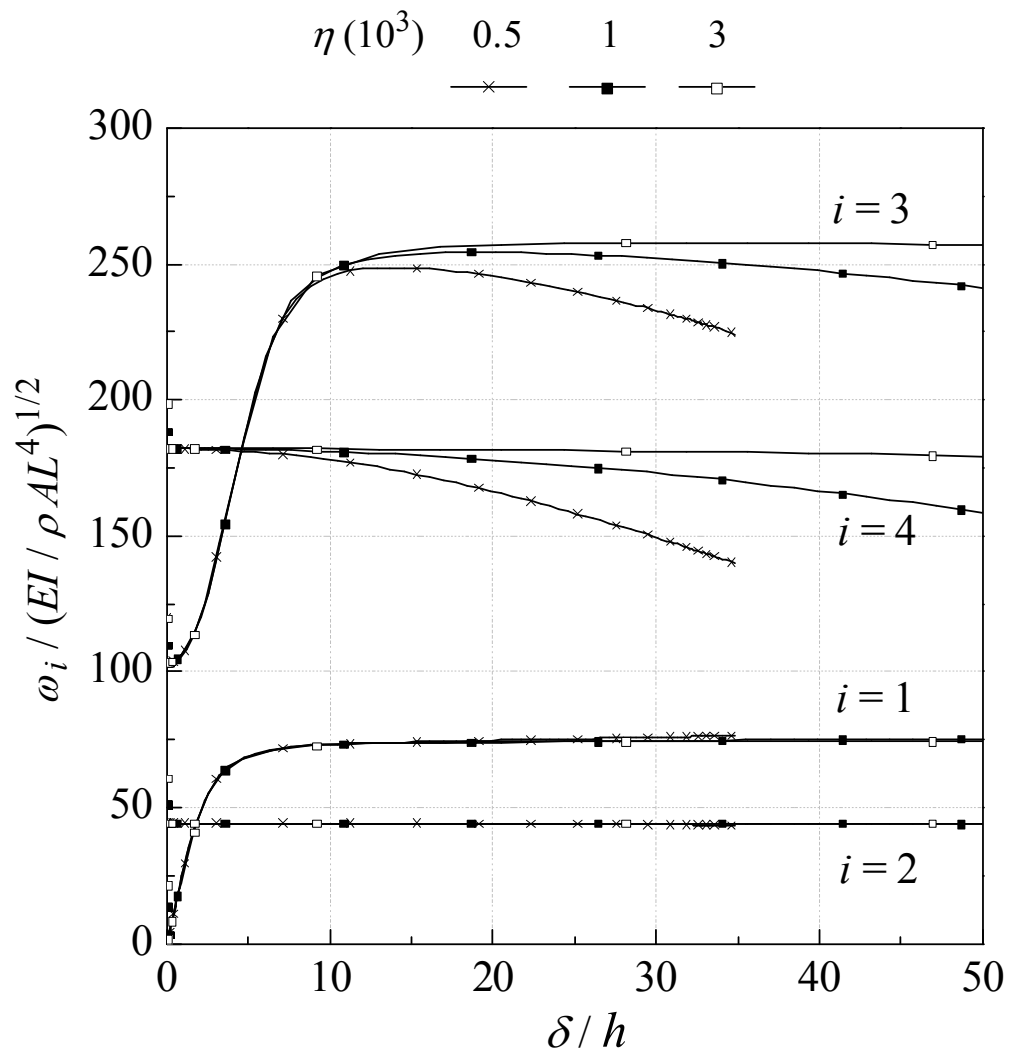


圖 9 挫屈梁的無因次自然振動頻率 $\omega_i / (EI / mL_T^4)^{1/2}$ - 無因次側向位移 δ / h 的曲線

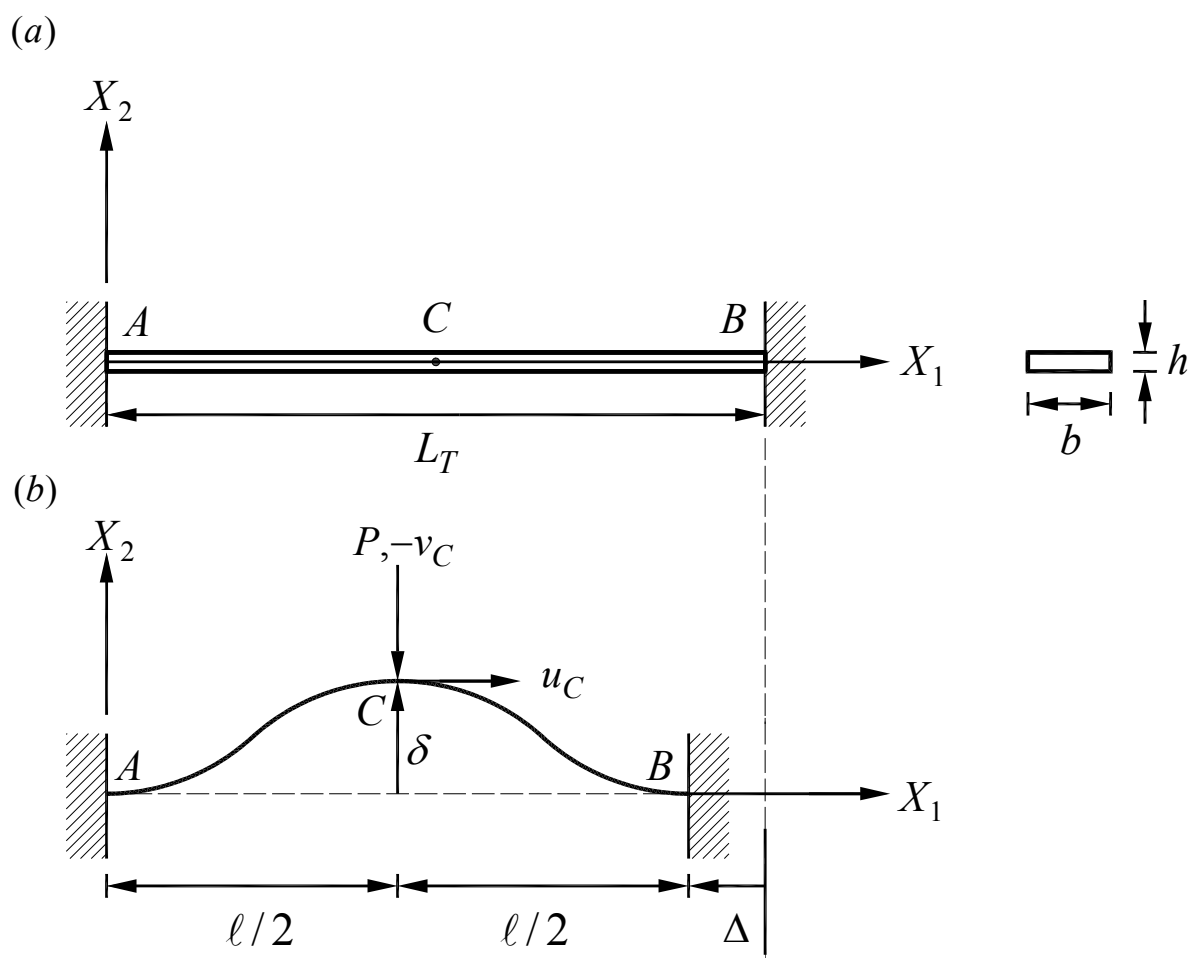


圖 10 挫屈梁結構中點 C 受側向集中力 P 的結構圖

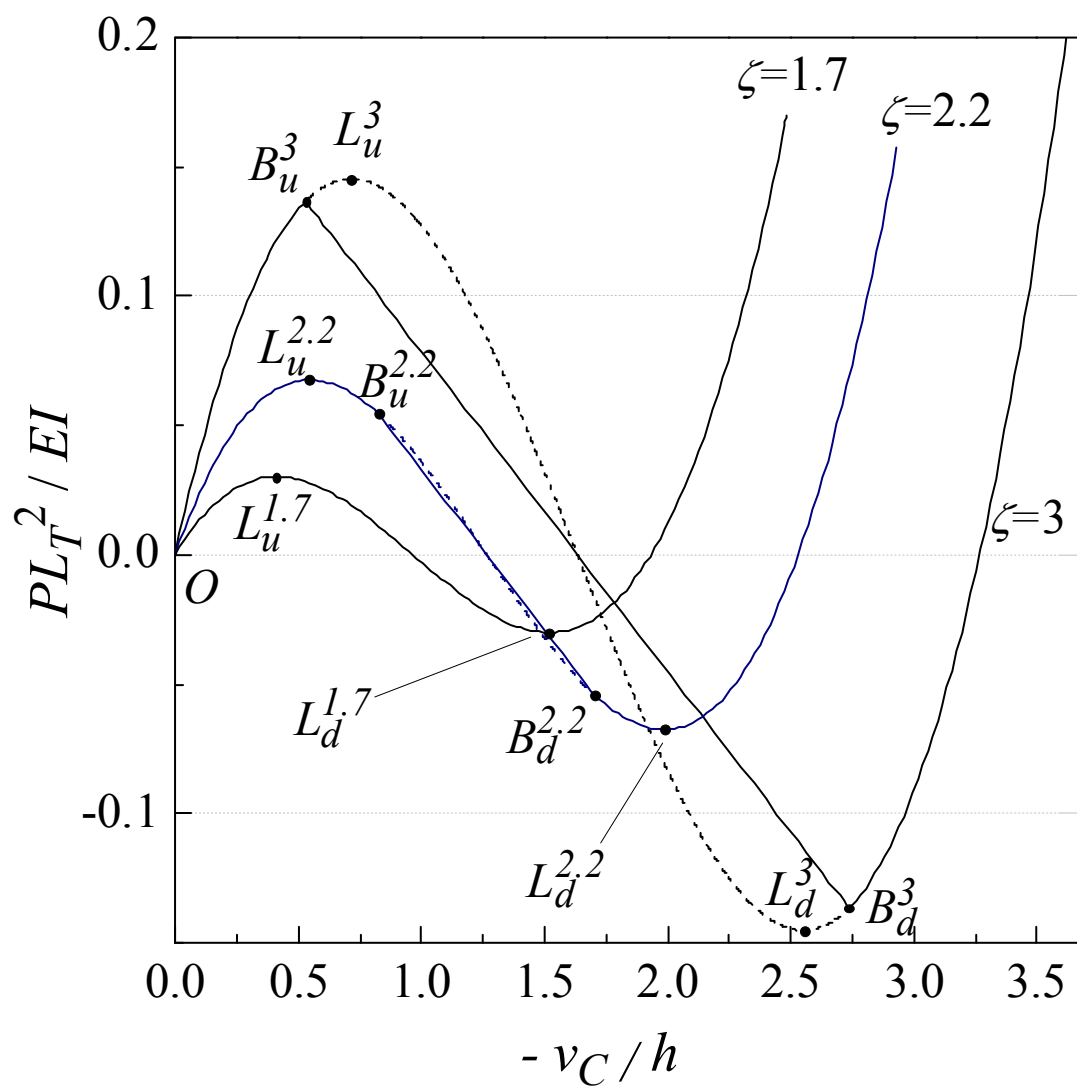


圖 11 挫屈梁受側向集中力 P 的 $\frac{PL_T^2}{EI} - \frac{-v_C}{h}$ 曲線圖 ($\zeta = 1.7, 2.2, 3$)

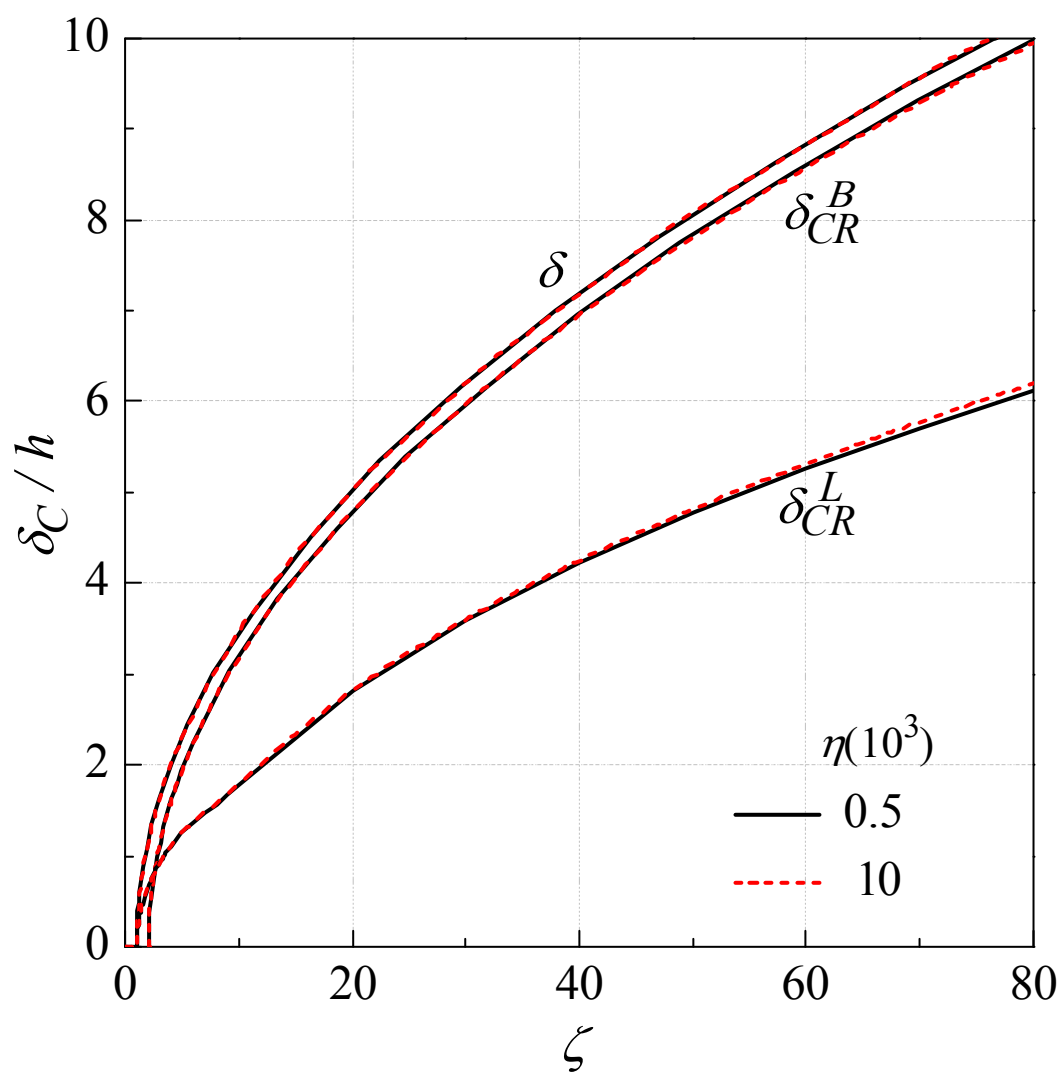


圖 12 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 80$)

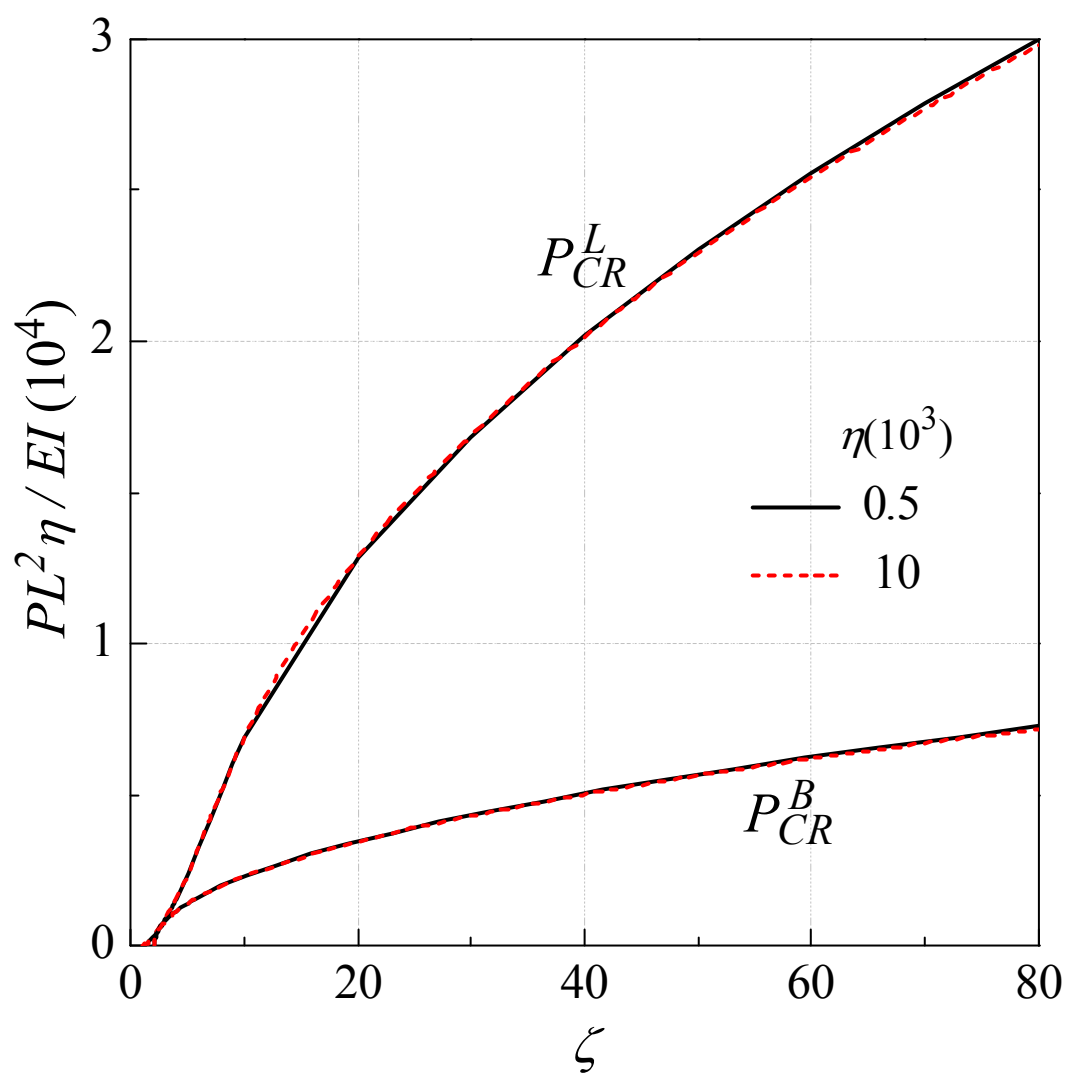


圖 13 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI}\eta - \zeta$ 平面的摺線圖($\zeta \leq 80$)

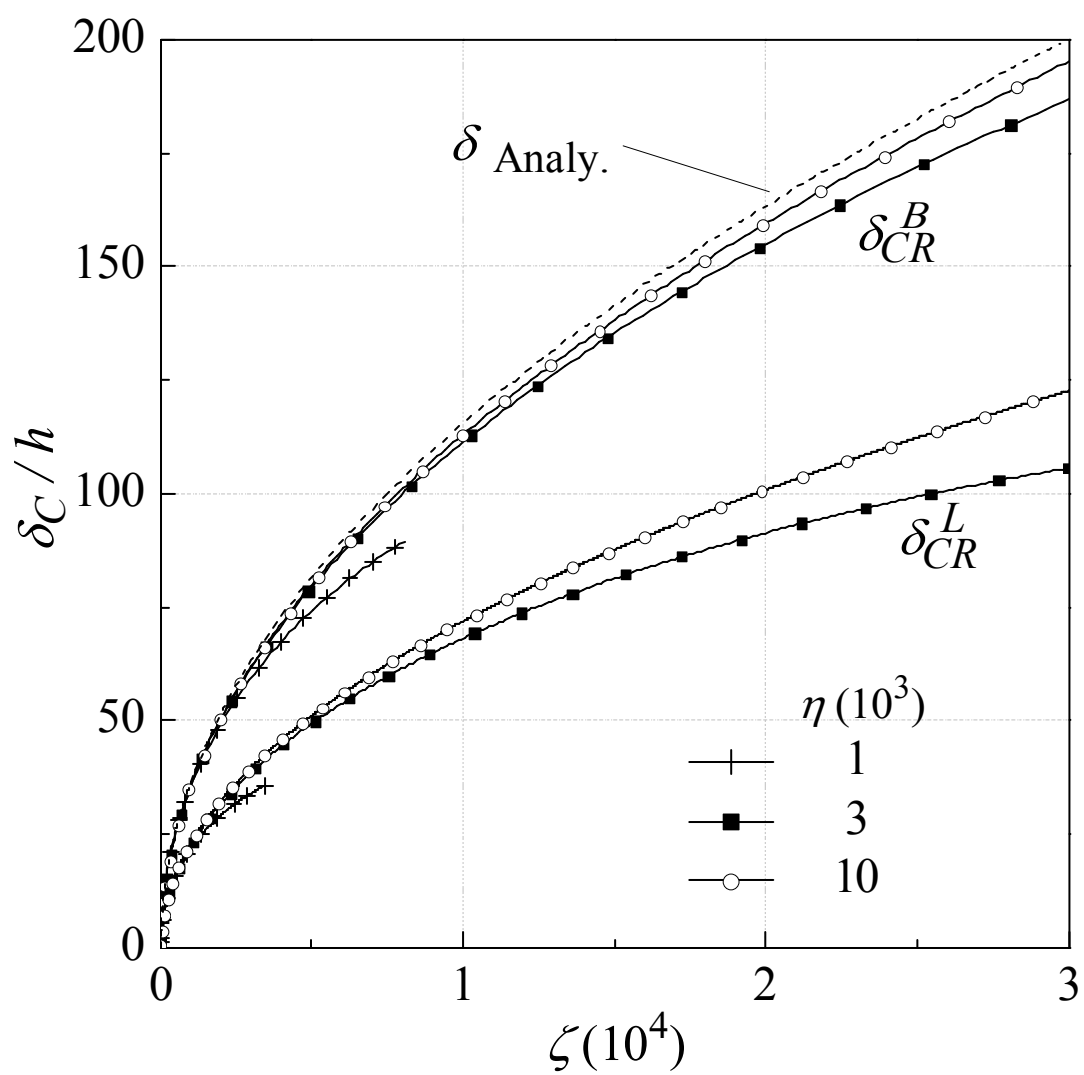


圖 14 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{\delta_C}{h} - \zeta$ 平面的摺線圖 ($\zeta \leq 3 \times 10^4$)

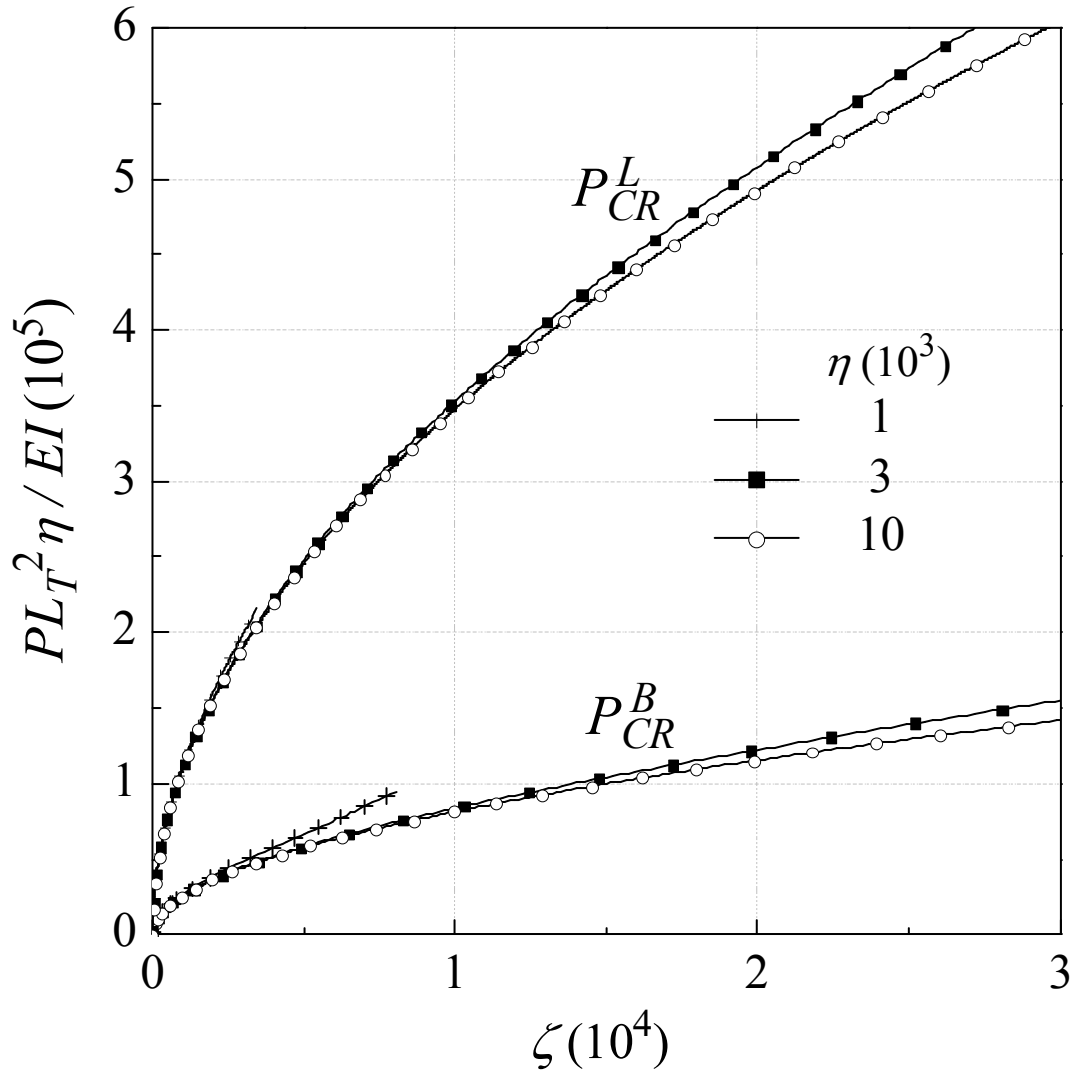


圖 15 不同細長比 η 挫屈梁臨界點在 $\frac{PL_T^2}{EI}\eta - \zeta$ 平面的摺線圖($\zeta \leq 3 \times 10^4$)

國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

☒ 達成目標

☐ 未達成目標（請說明，以 100 字為限）

☐ 實驗失敗

☐ 因故實驗中斷

☐ 其他原因

說明：

本研究內容與原計畫完全相符，並達成預期目標。本研究的數值結果發現挫屈梁初始變形之解析解的適用範圍與挫屈梁細長比 η 的大小有關，細長比愈大，則解析解的適用範圍愈大

本研究的數值結果發現挫屈梁之 δ/h 大於 10 時其第三及第四個無因次自然振動頻率與 δ/h 及梁之細長比都有很大的關係。糾正了文獻上認為挫屈梁之第奇數個無因次自然頻率僅與 δ/h 有關，第偶數個無因次自然頻率為一常數，與 δ/h 、梁之細長比都無關的錯誤說法。本人的發現在非淺挫屈梁的研究及應用上應有相當的貢獻。

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文：☐已發表 ☐未發表之文稿 ☒撰寫中 ☐無

專利：☐已獲得 ☐申請中 ☐無

技轉：☐已技轉 ☐洽談中 ☐無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）

本研究的數值結果發現挫屈梁初始變形之解析解的適用範圍與挫屈梁細長比 η 的大小有關，細長比愈大，則解析解的適用範圍愈大

本研究的數值結果發現挫屈梁之 δ/h 大於 10 時其第三及第四個無因次自然振動頻率與 δ/h 及梁之細長比都有很大的關係。糾正了文獻上認為挫屈梁之第奇數個無因次自然頻率僅與 δ/h 有關，第偶數個無因次自然頻率為一常數，與 δ/h 、梁之細長比都無關的錯誤說法。本人的發現在非淺挫屈梁的研究及應用上應有相當的貢獻。本研究的結果影可以發表在學術期刊，供設計挫屈梁時參考。

計畫編號	100-2221-E-009-098-
計畫名稱	受側向負荷之挫屈梁的靜態及動態行為研究
出國人員姓名 服務機關及職稱	蕭國模 國立交通大學機械系 教授
會議時間地點	London, U.K., 4 - 6 July, 2012
會議名稱	The 2012 International Conference of Mechanical Engineering (ICME'12)
發表論文題目	Free Vibration Analysis of Rotating Euler Beam by Finite Element Method

一 參加會議的經過

本人承國科會補助才能參加此會議，在此深表感謝。

本會議為2012年國際機械工程會議(The 2012 International Conference of Mechanical Engineering, London, United Kingdom)，於今年7月4日至7月6日在英國倫敦帝國理工學院(Imperial College)之 the Wolfson Education Centre at the Hammersmith Campus舉行。本會議是由International Association of Engineers (IAENG)主辦之the World Congress on Engineering 2012(WCE 2012)中的一個子會議。

本會議為一國際性的學術研討會，其主要的目的是要讓在機械工程中不同領域的研究人員聚在一起，交換機械工程力學之最新發展的資訊及想法。本研討會在機械工程的研究上有很高的學術地位。

WCE 2012為一個大型的國際會議，共有1183篇論文投稿，但只有接受646篇，接受率約55%。本會議並邀請振動學界的大師做專題演講，如 Prof. Len Gelman, Cranfield University, UK, Prof. Alexander M. Korsunsky, Trinity College, University of Oxford, U.K, University of Ontario Institute of Technology, Canada **Bale Viswanadha Reddy** 教授。

本會議論文的主題分為

Aerodynamics
Fluid Dynamics
Compressible Flows
Computational Mechanics
Biomechanics
Automotive Engineering
Heat and Mass Transfer
Nanomaterial Engineering
Plasticity Mechanics
Fracture
Geomechanics

Multibody Dynamics
Nonlinear Dynamics
Structural Dynamics
Vibrations
Acoustics
Noise Control
Material Engineering
Transport Phenomena
Manufacturing Process
Mechatronics

本人與研究生在會議中發表論文一篇，名稱為「Free Vibration Analysis of Rotating Euler Beam by Finite Element Method」，本人的論文探討了旋轉梁之側向及軸向振動的耦合現象，本人的研究提出一個共旋轉有限元素法求旋轉梁的穩態變形及自然頻率，也對耦合振動做了進一步的研究，探討了在不同細長比之旋轉梁的穩態變形及自然振動頻率及振態。

二 與會心得與建議

本會議雖然很大，但一切都安排的井井有條，招待上相當用心。

三 攜回資料

本會議論文發表在IAENG journal 的 Engineering Letters, 20:3, pp253-258, ISSN: 1816-0948 (online version); 1816-093X (print version), Subject Category: Computer science and engineering, Published by: International Association of Engineers
極具參考價值。

Free Vibration Analysis of Rotating Euler Beam by Finite Element Method

Kuo Mo Hsiao, Wen Yi Lin, and Fumio Fujii

Abstract—In this paper a corotational finite element formulation is employed to derive the equations of motion for a three dimensional rotating Euler beam with constant angular velocity. The steady state deformation and natural frequency of the infinitesimal free vibration measured from the position of the corresponding steady state deformation are investigated for rotating Euler beams with different setting angle. The governing equations for linear vibration are obtained by the first order Taylor series expansion of the equation of motion at the position of steady state deformation. Numerical examples are studied to demonstrate the accuracy of the proposed method and to investigate the effects of the steady twist deformation on the natural frequency of rotating beams with different setting angle.

Index Terms—Rotating beam, Corotational formulation, Setting angle, Natural frequency.

I. INTRODUCTION

Rotating beams are often used as a simple model for propellers, turbine blades, and satellite booms. Rotating beam differs from a non-rotating beam in having additional centrifugal force and Coriolis effects on its dynamics. It is well known that the spinning elastic bodies sustains a steady state deformations induced by constant rotation [1]. For doubly symmetric rotating beams with setting angle other than 0° and 90° , that steady state deformations include axial deformation and twist deformation. The bending vibration, torsional vibration, and axial vibration of rotating beams are coupled due to the Coriolis effects [2] and the steady state deformation [3]. However, to the authors' knowledge, the steady state deformation and its effects on the bending, torsional, and axial vibration of doubly symmetric rotating beams with setting angle other than 0° and 90° are not reported in the literature. The objective of this paper is to derive the equations of motion for a rotating doubly symmetric Euler beam with constant angular velocity using a corotational finite element formulation. The steady state deformation and natural frequency of the infinitesimal free

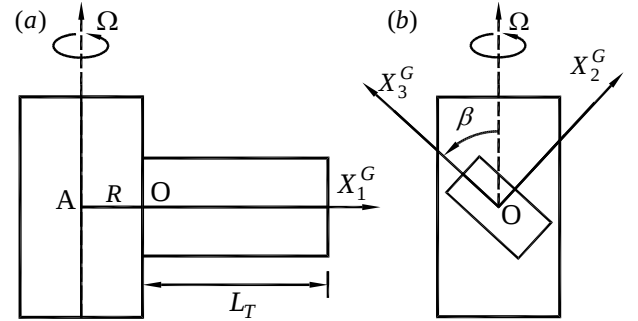
vibration measured from the position of the corresponding steady state deformation are investigated using numerical examples.

II. FINITE ELEMENT FORMULATION

A. Description of Problem

Consider a doubly symmetric uniform Euler beam of length L_T rigidly mounted with a setting angle β on the periphery of rigid hub with radius R rotating about its axis fixed in space at a constant angular velocity Ω as shown in Fig. 1. The axis of the rotating hub is perpendicular to the beam axis. The beam sustains a steady state axial and torsional deformation induced by constant rotation. In this study, large displacement and rotation with small strain are considered in the steady state deformation. The vibration of the beam is measured from the position of the steady state deformation, and only infinitesimal free vibration is considered. The kinematics of the beam element presented in [4] and the co-rotational finite element formulation proposed in [4, 5] are employed here. In the following only a brief description of the beam element is given.

Fig. 1. Rotating beam, (a) front view, (b) side view



B. Basic Assumptions

The following assumptions are made in derivation of the beam element behavior: (1) The beam is prismatic and slender, and the Euler-Bernoulli hypothesis is valid. (2) The cross section of the beam is doubly symmetric. (3) The unit extension of the centroid axis of the beam element is uniform. (4) The cross section of the beam element does not deform in its own plane and strains within this cross section can be neglected.

C. Coordinate Systems

In order to describe the system, we define three sets of right handed rectangular Cartesian coordinate systems:

1. A rotating global set of coordinates, X_i^G ($i = 1, 2, 3$)

Manuscript received March 5, 2012. This work was supported in part by the National Science Council, Taiwan under Grant NSC96-2221-E009-176.

Kuo Mo Hsiao is with Department of Mechanical Engineering, National Chiao Tung University, 1001 Ta Hsueh Road, Hsinchu, 300, Taiwan (phone: 886-3-5712121-55107; fax: 886-3-5720634; e-mail: kmhsiao@mail.nctu.edu.tw).

Wen Yi Lin is with Department of Mechanical Engineering, De Lin Institute of Technology, 1 Alley 380, Ching Yun Road, Tucheng, Taiwan (e-mail: wylin@dlit.edu.tw).

Fumio Fujii is with Department of Mathematical and Design Engineering, Gifu University, 1-1 Yanagido, Gifu City 501-1193, Japan (e-mail: ff@gifu-u.ac.jp).

(see Figs. 1 and 2); the coordinates rotate about the hub axis at a constant angular speed Ω as shown in Fig. 1. The origin of this coordinate system is chosen to be the intersection of the hub and the centroid axis of the undeformed beam. The X_1^G axis are chosen to coincide with the centroid axis of the undeformed beam, and the X_2^G and X_3^G axes are chosen to be the principal directions of the cross section of the beam at the undeformed state. The nodal coordinates, nodal deformation displacements, nodal velocity, nodal acceleration, and equations of motion of the system are defined in this coordinates.

2. Element cross section coordinates, x_i^S ($i = 1, 2, 3$) (see Fig. 2); a set of element cross section coordinates is associated with each cross section of the beam element. The origin of this coordinate system is rigidly tied to the centroid of the cross section. The x_1^S axes are chosen to coincide with the normal of the unwrapped cross section and the x_2^S and x_3^S axes are chosen to be the principal directions of the cross section.

3. Element coordinates, x_i ($i = 1, 2, 3$) (see Fig. 2); a set of element coordinates is associated with each element, which is constructed at the current configuration of the beam element. The coordinates rotate about the hub axis at a constant angular speed Ω . The origin of this coordinate system is located at node 1, and the x_1 axis is chosen to pass through two end nodes of the element; the x_2 and x_3 axes are determined by the method proposed in [6]. The position vector, deformations, velocity, acceleration, internal nodal forces, stiffness matrices, and inertia matrices of the elements are defined in terms of these coordinates

D. Kinematics of Beam Element

In this study only the doubly symmetric cross section is considered. Let Q (Fig. 2) be an arbitrary point in the beam element, and P be the point corresponding to Q on the centroid axis. The position vector of point Q in the undeformed and deformed configurations may be expressed as [4]:

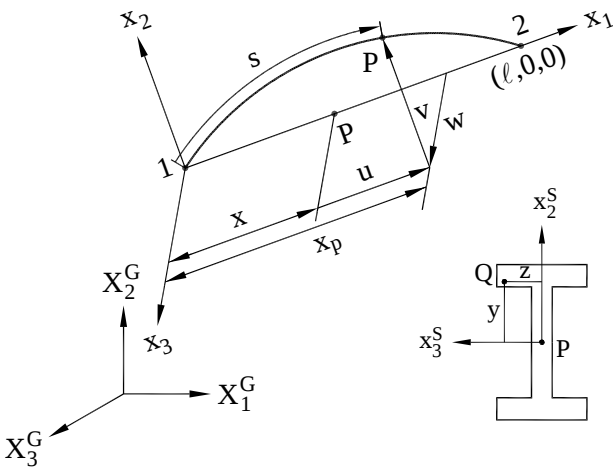


Fig. 2. Coordinate systems

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = x_p(x,t)\mathbf{e}_1 + v(x,t)\mathbf{e}_2 + w(x,t)\mathbf{e}_3 + \theta_{1,x}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2)$$

where $x_p(x,t)$, $v(x,t)$ and $w(x,t)$ are the x_1 , x_2 and x_3 coordinates of point P, respectively, in the deformed configuration, $\theta_{1,x} = \theta_{1,x}(x,t)$ is the twist rate of the deformed centroid axis, $\omega(y,z)$ is the Saint Venant warping function for a prismatic beam of the same cross section, and $\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{e}_i^S$ ($i = 1, 2, 3$) denote the unit vectors associated with the x_i and x_i^S axes, respectively. Note that $\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{e}_i^S$ are coincident in the undeformed state. The relationship between $\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{e}_i^S$ is given in [6] and not repeated here. Here, the lateral deflections of the centroid axis, $v(x,t)$ and $w(x,t)$, and the rotation about the centroid axis, $\theta_{1,x}$, are assumed to be the Hermitian polynomials of x .

The relationship among $x_p(x,t)$, $v(x,t)$, and $w(x,t)$, and x may be given as [5]

$$x_p(x,t) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_c)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (3)$$

where u_1 is the displacement of node 1 in the x_1 direction. Note that due to the definition of the element coordinate system, the value of u_1 is equal to zero. However, the variation and time derivatives of u_1 are not zero.

Making use of the assumption of uniform unit extension, ε_c and the axial displacements of the centroid axis may be calculated using (3) and the current chord length of the beam element.

The absolute velocity and acceleration vectors of point Q in the beam element may be expressed as

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{Ao}) \quad (5)$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}_{GE}^t \mathbf{\Omega}_G \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_{Ao} = \mathbf{A}_{GE}^t \mathbf{r}_{AoG} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_{AoG} = \{R + X_o, 0, 0\} \quad (8)$$

where $\mathbf{r}$ is the position vector of point Q given in (2) referred to the current moving element coordinate system, the symbol $(\dot{})$ denotes time derivative, $\mathbf{\Omega}$ is the vector of angular velocity referred to the current inertia element coordinates, $\mathbf{\Omega}_G = \Omega\{0 \sin \beta \cos \beta\}$ is the angular velocity of the hub referred to the global coordinates, $\mathbf{A}_{GE}$ is the transformation matrix between the current global coordinates and the current element coordinates, $\mathbf{a}_o$ is the absolute acceleration of point o, the origin of the current element coordinates, X_o is coordinates of point o referred to the current global coordinates, R is the radius of the hub. $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ and $2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ are centripetal acceleration and Coriolis acceleration, respectively. $\dot{\mathbf{r}}$ and $\ddot{\mathbf{r}}$ are the velocity and acceleration of point Q relative to the current moving

element coordinates.

E. Element Nodal Force Vector, and Element Matrices

The element proposed here has two nodes with seven degrees of freedom per node. The nodal parameters are chosen to be u_{ij} ($u_{1j} = u_j$, $u_{2j} = v_j$, $u_{3j} = w_j$), the x_i ($i = 1, 2, 3$) components of the translation vectors $\mathbf{u}_j$ at node j ($j = 1, 2$), ϕ_{ij} , the x_i ($i = 1, 2, 3$) components of the rotation vectors $\boldsymbol{\phi}_j$ at node j ($j = 1, 2$), and β_j , the twist rate of the centroid axis at node j . Here, the values of $\boldsymbol{\phi}_j$ are reset to zero at current configuration. Thus, $\delta\phi_{ij}$, the variation of ϕ_{ij} , represents infinitesimal rotations about the x_i axes [6], and the generalized nodal forces corresponding to $\delta\phi_{ij}$ are m_{ij} , the conventional moments about the x_i axes. The generalized nodal forces corresponding to δu_{ij} , the variations of u_{ij} , are f_{ij} , the forces in the x_i directions. The generalized nodal forces corresponding to $\delta\beta_j$, the variations of β_j , are bimoment B_j .

The element nodal force vector is obtained from the virtual work principle and the d'Alembert principle in the current element coordinates. The virtual work principle requires that

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a}) dV = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta \quad (9)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_\theta^D + \mathbf{f}_\theta^I = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\}$$

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\theta}_1^*, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\theta}_2^*, \delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta \mathbf{u}_1, \delta \boldsymbol{\phi}_1, \delta \mathbf{u}_2, \delta \boldsymbol{\phi}_2, \delta \boldsymbol{\beta}\}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,x} - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,y}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,x}^t \mathbf{r}_{,z}. \quad (12)$$

where $\delta \mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$, $\delta \boldsymbol{\phi}_j = \{\delta \phi_{1j}, \delta \phi_{2j}, \delta \phi_{3j}\}$, $\delta \boldsymbol{\theta}_j^* = \{\delta \theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$, $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$, $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$, $\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$, $\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ($j = 1, 2$), $\delta \boldsymbol{\beta} = \{\delta \beta_1, \delta \beta_2\}$ and $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$. $\mathbf{f}^D$ and $\mathbf{f}^I$ are element deformation nodal force vector and inertia nodal force vector, respectively. V is the volume of the undeformed beam element, $\delta \varepsilon_{1i}$ ($i = 1, 2, 3$) are the variation of ε_{1i} in (12) corresponding to $\delta \mathbf{q}_\theta$. Note that because $\delta \varepsilon_{1i}$ are function of $\delta \mathbf{q}_\theta$, δW_{int} may be expressed by $\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta$. $\mathbf{f}_\theta^D$ and $\mathbf{f}_\theta^I$ are generalized deformation nodal force vector and inertia nodal force vector corresponding to $\delta \mathbf{q}_\theta$. σ_{1i} ($i = 1, 2, 3$) are the second Piola-Kirchhoff stress. For linear elastic material, $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$, $\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}$, and $\sigma_{13} = 2G \varepsilon_{13}$, where E is Young's modulus and G is the shear modulus. ρ is the density, $\delta \mathbf{r}$ is

the variation of $\mathbf{r}$ in (2). $\mathbf{a}$ is the absolute acceleration given in (4). The higher order terms of nodal parameters in the element nodal forces are neglected by consistent second order linearization in this study.

The relation between $\delta \mathbf{q}$ and $\delta \mathbf{q}_\theta$, and the relation between $\mathbf{f}$ and $\mathbf{f}_\theta$ may be expressed as [4]

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (13)$$

where $\mathbf{f}_\theta$ may be calculated using (2-12).

The element matrices considered are element tangent stiffness matrix $\mathbf{k}$, mass matrix $\mathbf{m}$, centripetal stiffness matrix $\mathbf{k}_\Omega$, and gyroscopic matrix $\mathbf{c}$. The element matrices may be obtained by differentiating the element nodal force vectors in (13) with respect to nodal parameters, and time derivatives of nodal parameters. The element matrices may be expressed as

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{k}_\Omega = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (14)$$

F. Equations of Motion

The nonlinear equations of motion for a rotating beam with constant angular velocity may be expressed by

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}^D(\hat{\mathbf{Q}}) + \mathbf{F}^I(\Omega, \hat{\mathbf{Q}}, \dot{\hat{\mathbf{Q}}}, \ddot{\hat{\mathbf{Q}}}) = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}(t) \quad (16)$$

where $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{F}^D$, and $\mathbf{F}^I$ are unbalanced force vector, deformation nodal force vector, and inertia nodal force vector of the structural system, respectively. $\mathbf{F}^I$ and $\mathbf{F}^D$ are assembled from the element nodal force vectors, which are calculated first in the current element coordinates and then transformed from element coordinate system to global coordinate system before assemblage using standard procedure. $\hat{\mathbf{Q}}$ is the nodal displacement vector of the rotating beam, $\dot{\hat{\mathbf{Q}}}$ and $\ddot{\hat{\mathbf{Q}}}$ are the nodal velocity vector and the nodal acceleration vector of the rotating beam, respectively, $\mathbf{Q}_s$ is the steady state nodal displacement vector induced by constant rotation speed Ω , $\mathbf{Q}(t)$ is the time dependent nodal displacements vector caused by the free vibration of the rotating beam. Here only infinitesimal vibration is considered.

G. Governing Equations for Steady State Deformation

For the steady state deformations, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{0}$. Thus (15) can be reduced to nonlinear steady state equilibrium equations and expressed by

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}_s^D(\mathbf{Q}_s) + \Omega^2 \mathbf{F}_s^I(\mathbf{Q}_s) = \mathbf{0} \quad (17)$$

where $\mathbf{F}_s^D(\mathbf{Q}_s)$, and $\Omega^2 \mathbf{F}_s^I(\mathbf{Q}_s)$ are the deformation nodal force vector, and the inertia nodal force (the centrifugal force)

vector of the structural system corresponding to the steady state nodal displacement vector $\mathbf{Q}_s$, respectively. Note that $\Omega^2 \mathbf{F}_s^I(\mathbf{Q}_s)$ is deformation dependent. Thus $\Omega^2 \mathbf{F}_s^I(\mathbf{Q}_s)$ should be updated at each new configuration.

Here, an incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method is employed for the solution of nonlinear steady state equilibrium equations at different rotation speed Ω .

H. Governing Equations for Free Vibration Measured From The Position of Steady State Deformation

Substituting (16) into (15), and setting the first-order Taylor series expansion of the unbalanced force vector $\boldsymbol{\phi}$ around $\mathbf{Q}_s$ to zero, one may obtain the governing equations for linear free vibration of the rotating beam measured from the position of the steady state deformation as follows.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \Omega \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}} + (\mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_\Omega)\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (18)$$

where $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, and $\mathbf{K}_\Omega$ are mass matrix, gyroscopic matrix, tangent stiffness matrix, and centripetal stiffness matrix of the rotating beam, respectively. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, and $\mathbf{K}_\Omega$ are assembled from the element mass matrix, gyroscopic matrix, tangent stiffness matrix, and centripetal stiffness matrix first in the current element coordinates and then transformed from element coordinate system to global coordinate system before assemblage using standard procedure.

We shall seek a solution of (18) in the form

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_R + i\mathbf{Q}_I)e^{i\omega t} \quad (19)$$

where $i = \sqrt{-1}$, ω is natural frequency of rotating beam, and $\mathbf{Q}_R$ and $\mathbf{Q}_I$ are real part and imaginary part of the vibration mode.

Substituting (19) into (18), one may obtain a set of homogeneous equations expressed by

$$\mathbf{H}\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_\Omega - \omega^2 \mathbf{M} & \omega \Omega \mathbf{C}^t \\ \omega \Omega \mathbf{C} & \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_\Omega - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Equation (20) is a quadratic eigenvalue problem. For a nontrivial $\mathbf{Z}$, the determinant of matrix $\mathbf{H}$ in (20) must be equal to zero. The value of K which make the determinant vanish are called eigenvalue of matrix $\mathbf{H}$. The bisection method is used here to find the eigenvalue.

III. NUMERICAL STUDIES

To investigate the effect of angular speed on the natural frequency of rotating Euler beams with different setting angles, the beam of elliptical cross section as shown in Fig. 3 is considered. The twist inertia moment corresponding to the centrifugal force induced by the constant rotation may be expressed by $m = \rho \Omega^2 (I_y - I_z) \sin(\beta + \phi_s) \cos(\beta + \phi_s)$,

where ϕ_s is the steady state twist angle of the rotating beam, I_y and I_z are moment of inertia about the major axis and the minor axis of the cross section, respectively. The ratio of I_y and I_z is 25 for the elliptical cross section considered here. For convenience, the following dimensionless variables are used here:

$$r = \frac{R}{L_T}, U_s = \frac{u_s}{L_T}, k = \Omega L_T \sqrt{\frac{\rho}{E}}, K = \omega L_T \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

where u_s is the steady state axial displacement of the rotating beam.

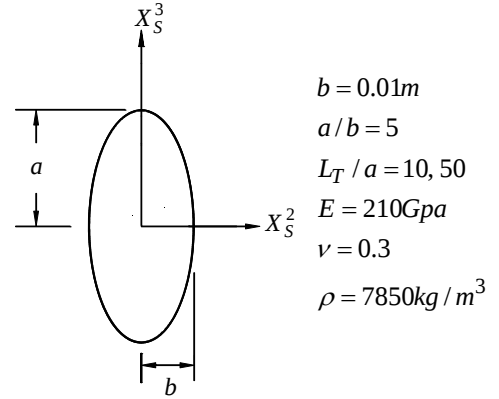


Fig. 3. Elliptical cross section of the rotating beam.

In practice, rotating structures are designed to operate in the elastic range of the materials. The maximum steady state axial strain of elastic rotating beam is $\varepsilon_{\max} = k^2(r + 0.5)$ [2], which occur at the root of the rotating beam with different setting angle β . The dimensionless radius of the rotating hub $r = 0$, and the maximum dimensionless angular speed $k = 0.1$ are considered here. In this section, K_i denotes that the dimensionless natural frequency of the rotating beam is the i th natural frequency at $k = 0$; B_i and C_i denote that the corresponding vibration modes are the i th lateral vibration modes in the X_2^G and X_3^G directions, respectively at $k = 0$; D_i denotes that the corresponding vibration mode is the i th twist vibration mode about the X_1^G axis at $k = 0$.

The results are obtained using 10 and 20 equal elements for cases $L_T/a = 10$ and 50, respectively. The dimensionless natural frequencies K_i ($i = 1-4$) for different setting angle at different angular speed are tabulated in tables I and II. The results given in [7] are also shown in Table I and II for comparison. To investigate the effect of the steady state twist deformation ϕ_s on the natural frequency of rotating Euler beams, cases with twist angle restrained are also studied for $\beta = 45^\circ$ at $k = 0.1$. The results are also shown in tables I and II. It can be seen that the difference between the lower dimensionless natural frequencies for the cases with and without considering the twist angle ϕ_s is insignificant for case $L_T/a = 10$, but is remarked for case $L_T/a = 50$. These may be partially attributed to that the twist angle ϕ_s of the rotating beam increases with increase of L_T/a . However, it

seems that the effect of the twist angle ϕ_s on the higher natural frequencies of the rotating beam is not significant for all cases studied here.

TABLE I
DIMENSIONLESS FREQUENCIES FOR ROTATING BEAM
($a/b = 5, L_T/a = 10$)

k	β (deg)	K_1 (B1)	K_2 (C1)	K_3 (B2)	K_4 (D1)
0	0	0.03515	0.17479	0.22000	0.38751
0.01	0	0.03542	0.17512	0.22123	0.38754
	15	0.03552	0.17510	0.22125	0.38755
	30	0.03577	0.17505	0.22129	0.38760
	45	0.03612	0.17498	0.22135	0.38766
	60	0.03647	0.17490	0.22140	0.38771
	75	0.03672	0.17485	0.22144	0.38776
0.05	0	0.03681	0.17483	0.22146	0.38777
	0	0.04065	0.18291	0.24905	0.38818
	15	0.04253	0.18248	0.24939	0.38858
	30	0.04736	0.18126	0.25034	0.38967
	45	0.05344	0.17955	0.25161	0.39113
	60	0.05909	0.17775	0.25284	0.39257
0.1	75	0.06305	0.17638	0.25373	0.39360
	90	0.06447	0.17586	0.25406	0.39397
	0	0.04996	0.20515	0.32036	0.39016
	15	0.05489	0.20388	0.32154	0.39190
	30	0.06704	0.20020	0.32463	0.39645
	45	0.08200	0.19452	0.32860	0.40225
	45*	0.08652	0.19252	0.32817	-
	60	0.09647	0.18772	0.33232	0.40766
	75	0.10756	0.18155	0.33491	0.41138
	90	0.11192	0.17888	0.33583	0.41270

* Twist angle is restrained

TABLE II
DIMENSIONLESS FREQUENCIES FOR ROTATING BEAM
($a/b = 5, L_T/a = 50$)

k	β (deg)	K_1 (B1)	K_2 (C1)	K_3 (B2)	K_4 (B3)
0	0	0.00703	0.03515	0.04407	0.12338
0.01	0	0.00815	0.03681	0.04990	0.13001
	0 [7]	0.00815	0.03681	0.04990	0.13001
	15	0.00852	0.03672	0.04996	0.13003
	30	0.00948	0.03649	0.05015	0.13010
	45	0.01069	0.03615	0.05040	0.13020
	60	0.01182	0.03580	0.05064	0.13030
	75	0.01261	0.03552	0.05082	0.13037
	90	0.01290	0.03542	0.05089	0.13039
0.05	0	0.01495	0.06447	0.12360	0.23500
	15	0.01693	0.06398	0.12426	0.23536
	30	0.02166	0.06252	0.12606	0.23633
	45	0.02746	0.06020	0.12850	0.23765
	60	0.03328	0.05718	0.13093	0.23896
	75	0.05396	0.03828	0.13270	0.23992
0.1	90	0.05220	0.04065	0.13335	0.24028
	0	0.02033	0.11191	0.23214	0.40896
	15	0.02309	0.11136	0.23346	0.40987
	30	0.02952	0.10981	0.23708	0.41228
	45	0.03691	0.10752	0.24213	0.41540
	45*	0.07344	0.08652	0.24276	0.41515
	60	0.04356	0.10498	0.24737	0.41834
	75	0.10290	0.04824	0.25141	0.42040
	90	0.10208	0.04995	0.25295	0.42114

* Twist angle is restrained

The distributions of the dimensionless steady state axial displacement U_s and twist angle ϕ_s at different dimensionless angular speed for setting angle $\beta = 45^\circ$ are depicted in Fig. 4. The variation of dimensionless natural

frequency with dimensionless angular speed is depicted in Fig. 5. It can be seen from Fig. 4 that the tip twist angle is about $3.8 \times 10^{-2} \text{ rad}$ for case $L_T/a = 50$ at $k = 0.1$. It can be seen from Fig. 5 that the effect of the setting angle and angular speed on the natural frequencies of the torsional mode D_1 is not significant.

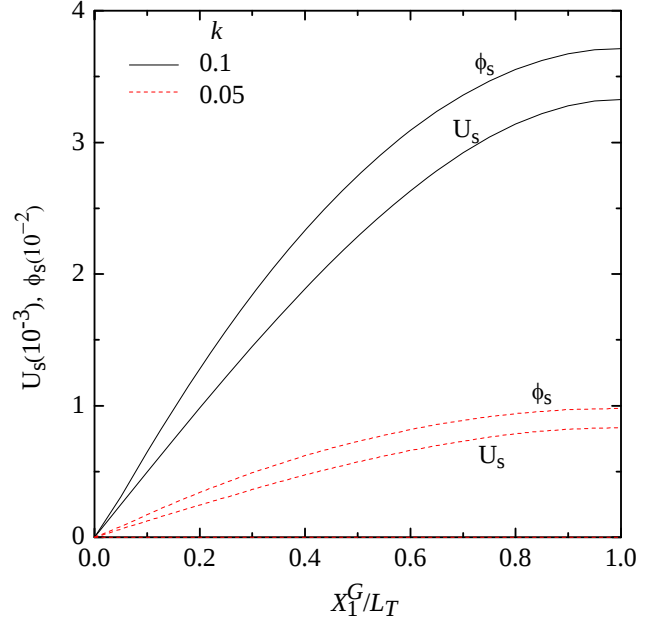


Fig. 4. The steady state deformation of rotating beam.
($a/b = 5, L_T/a = 50$)

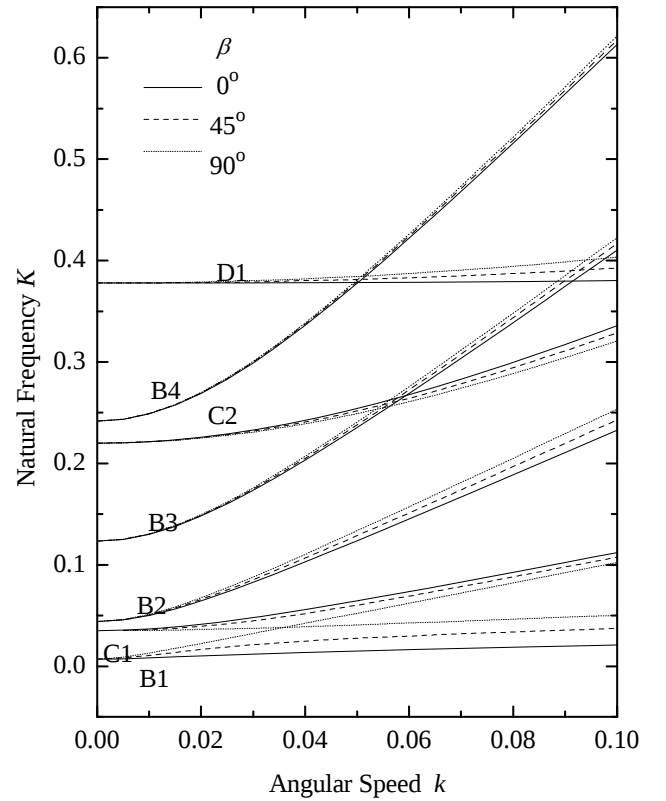


Fig. 5. Variation of natural frequency with angular speed
($a/b = 5, L_T/a = 50$)

IV. CONCLUSIONS

In this paper, the steady state deformation and the natural frequency of infinitesimal free vibration measured from the position of the corresponding steady state deformation are investigated using corotational finite element formulation for the rotating Euler beams with different setting angles, slenderness ratios and angular speeds of the hub.

The element deformation and inertia nodal forces are systematically derived by the virtual work principle, the d'Alembert principle, and consistent linearization of the fully geometrically nonlinear beam theory in the current element coordinates. The equations of motion of the system are defined in terms of an inertia global coordinate system, which is coincident with a rotating global coordinate system rigidly tied to the rotating hub, while the total strains in the beam element are measured in an inertia element coordinate system, which is coincident with a rotating element coordinate system constructed at the current configuration of the beam element. The rotating element coordinates rotate about the hub axis at the angular speed of the hub. The results of numerical examples show that the geometrical nonlinearities that arise due to steady state twist angle and axial deformations should be considered for the natural frequencies of the rotating beams with different setting angle. It seems that the effect of the twist angle on the lower dimensionless natural frequencies of lateral vibration is remarked for slender beam with large ratio between moment of inertia about the major axis of the cross section and that of the minor axis.

REFERENCES

- [1] P. W., Likins, Mathematical modeling of spinning elastic bodies for model analysis, *AIAA Journal*, Vol. 11, 1973, pp. 1251-1258.
- [2] S. C., Lin and K. M., Hsiao, Vibration analysis of rotating Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, 2001, pp. 303-322.
- [3] M. H. Tsai, W. Y. Lin, Y. C. Zhou and K. M. Hsiao, Investigation on steady state deformation and free vibration of a rotating inclined Euler beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 12, 2011, pp. 1050-1068.
- [4] W. Y. Lin and K. M. Hsiao, Co-Rotational Formulation for Geometric Nonlinear analysis of Doubly Symmetric Thin-Walled Beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, 2001, pp. 6023-6052.
- [5] K. M. Hsiao, J. Y. Lin and W. Y. Lin, A Consistent Co-Rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 169, 1999, pp. 1-18.
- [6] K. M. Hsiao, A Co-rotational Total Lagrangian Formulation for Three Dimensional Beam Element, *AIAA Journal*, Vol. 30, 1992, pp. 797-804.
- [7] C. L. Huang, W. Y. Lin, K. M. Hsiao, Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity, *Computers and Structures*, Vol. 88, 2011, pp. 991-1001.

國科會補助計畫衍生研發成果推廣資料表

日期:2012/10/05

國科會補助計畫	計畫名稱：受側向負荷之挫屈梁的靜態及動態行為研究
	計畫主持人：蕭國模
	計畫編號：100-2221-E-009-098-學門領域：結構應力
無研發成果推廣資料	

100 年度專題研究計畫研究成果彙整表

計畫主持人：蕭國模			計畫編號：100-2221-E-009-098-				
計畫名稱：受側向負荷之挫屈梁的靜態及動態行為研究							
成果項目			量化			單位	備註（質化說明：如數個計畫共同成果、成果列為該期刊之封面故事...等）
			實際已達成數（被接受或已發表）	預期總達成數(含實際已達成數)	本計畫實際貢獻百分比		
國內	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	0	0	100%		
		專書	0	0	100%		
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（本國籍）	碩士生	1	0	100%	人次	
		博士生	1	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		
國外	論文著作	期刊論文	0	0	100%	篇	
		研究報告/技術報告	0	0	100%		
		研討會論文	1	0	100%		
		專書	0	0	100%	章/本	
	專利	申請中件數	0	0	100%	件	
		已獲得件數	0	0	100%		
	技術移轉	件數	0	0	100%	件	
		權利金	0	0	100%	千元	
	參與計畫人力（外國籍）	碩士生	0	0	100%	人次	
		博士生	0	0	100%		
		博士後研究員	0	0	100%		
		專任助理	0	0	100%		

其他成果 (無法以量化表達之成果如辦理學術活動、獲得獎項、重要國際合作、研究成果國際影響力及其他協助產業技術發展之具體效益事項等，請以文字敘述填列。)	無
---	---

	成果項目	量化	名稱或內容性質簡述
科教處計畫加填項目	測驗工具(含質性與量性)	0	
	課程/模組	0	
	電腦及網路系統或工具	0	
	教材	0	
	舉辦之活動/競賽	0	
	研討會/工作坊	0	
	電子報、網站	0	
	計畫成果推廣之參與（閱聽）人數	0	

國科會補助專題研究計畫成果報告自評表

請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況、研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）、是否適合在學術期刊發表或申請專利、主要發現或其他有關價值等，作一綜合評估。

1. 請就研究內容與原計畫相符程度、達成預期目標情況作一綜合評估

☒ 達成目標

☐ 未達成目標（請說明，以 100 字為限）

☐ 實驗失敗

☐ 因故實驗中斷

☐ 其他原因

說明：

2. 研究成果在學術期刊發表或申請專利等情形：

論文：☐ 已發表 ☐ 未發表之文稿 ☒ 撰寫中 ☐ 無

專利：☐ 已獲得 ☐ 申請中 ☒ 無

技轉：☐ 已技轉 ☐ 洽談中 ☒ 無

其他：（以 100 字為限）

3. 請依學術成就、技術創新、社會影響等方面，評估研究成果之學術或應用價值（簡要敘述成果所代表之意義、價值、影響或進一步發展之可能性）（以 500 字為限）

本研究探討了挫屈梁之側向及軸向振動的耦合現象，本人的研究提出一個共旋轉有限元素法求挫屈梁的初始變形及自然頻率，也對耦合振動做了進一步的研究，探討了在不同細長比之挫屈梁的初始變形及自然振動頻率及振態。本研究的數值結果發現當挫屈梁拱起高度與梁之厚度比小於 50 時，其前兩個無因次自然振動頻率與梁之細長比無關，這與文獻的結果一致；但當挫屈梁拱起高度與梁之厚度比大於 10 時其第三及第四個無因次自然振動頻率與梁之細長比有很大的關係，糾正了文獻上認為挫屈梁之第奇數個無因次自然頻率僅與拱起高度與梁之厚度比有關，第偶數個無因次自然頻率為一常數，與梁之細長比無關的錯誤說法。本人的發現在非淺挫屈梁的研究及應用上應有相當的貢獻。